Randeigenwertprobleme im Kreissektor mit einspringender Ecke

Kai Rothe

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Differentialgleichungen und dynamische Systeme
Universität Hamburg

1 Einleitung

Gegeben sei der Kreissektor Ω vom Radius R mit dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Für den Winkel ω wird vorausgesetzt, dass $0 < \omega < 2\pi$ gilt.

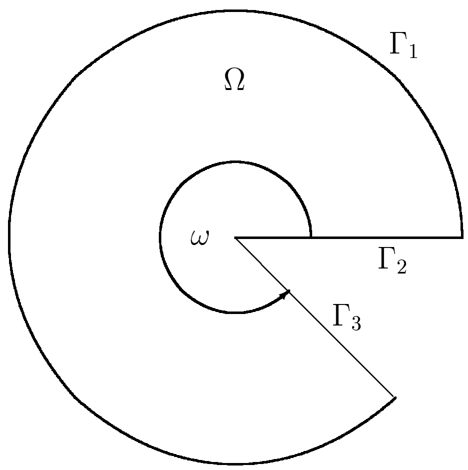

Bild 1.1 Kreissektor Ω

Im Folgenden sollen die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ mit zugehörigen Eigenfunktionen u des Randeigenwertproblems, dass durch die Differentialgleichung

$$-\Delta u = \lambda u$$

mit verschiedenen Randdaten definiert wird, berechnet und dargestellt werden. Insbesondere stellt sich dabei heraus, dass in Abhängigkeit vom Winkel ω einige Eigenfunktionen ihre Differenzierbarkeitseigenschaften im Ursprung des Kreises bei einer sogenannten 'einspringenden Ecke' verlieren.

Will man Eigenfunktionen allgemeinerer Probleme numerisch beispielsweise mit Hilfe der finiten Elementmethode approximieren, so erfordert eine fehlende glatte Fortsetzung von u auf den Rand häufig adaptive Methode in diesem Bereich (vgl. [2],[3], [5] und [8]), um die Approximationsgüte zu sichern.

Die dargestellten Randeigenwertaufgaben im Kreissektor können insofern als Paradigma für Differenzierbarkeitsingularitäten bei einspringenden Ecken aufgefasst werden.

Für das Dirichletproblem der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ werden diese Regularitätsprobleme im Fall des Kreissektors in [3] und im Fall eines L-Gebietes in [4] diskutiert. In [9] wird die Regularität von Lösungen eines allgemeiner definierten elliptischen Differentialoperators für Gebiete mit Ecken untersucht.

1.1 Dirichletsche Randdaten

Die Eigenschwingungen u einer im Kreissektor Ω eingespannten Membran erfüllen folgende Randeigenwertaufgabe:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{auf} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Eigenfunktion $u \not\equiv 0$ ist Lösung im klassischen Sinn, falls $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ gilt. Die zu (1) gehörige schwache Formulierung mit beliebigem $v \in H_0^1(\Omega)$ lautet:

$$\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \, d(x,y) \;=\; \lambda \int_\Omega uv \, d(x,y) \quad . \tag{2}$$

u wird als schwache Lösung bezeichnet, falls $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Für die Eigenwerte erhält man $\lambda > 0$.

1.2 Neumannsche Randdaten

Schreibt man anstelle des Funktionswertes u die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen auf $\partial\Omega$ vor, so erhält man das Neumannproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{auf} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Die Eigenfunktion $u \not\equiv 0$ ist Lösung im klassischen Sinn, falls $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt. Die zu (3) gehörige schwache Formulierung mit beliebigem $v \in H^1(\Omega)$ lautet:

$$\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \, d(x,y) \;=\; \lambda \int_\Omega uv \, d(x,y) \quad . \tag{4}$$

u wird als schwache Lösung bezeichnet, falls $u \in H^1(\Omega)$ gilt. Für die Eigenwerte erhält man $\lambda \geq 0$.

1.3 Gemischte Randdaten

Neben $-\Delta u = \lambda u$ auf Ω können auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ auch Daten unterschiedlichen Typs vorgeschrieben werden. Als Beispiel soll hier nur der Fall behandelt werden, der sich qualitativ von den vorhergehenden darin unterscheidet, dass ein Wechsel der Randbedingung in der zu erwartenden Differenzierbarkeitssingularität im Ursprung auftritt:

$$u \;=\; 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_2 \,. \tag{5}$$

1.4 Darstellung in Polarkoordinaten

Die Lösungen der oben beschriebenen Randeigenwertprobleme lassen sich analytisch berechnen. Dazu ist es erforderlich den Kreissektor mit Hilfe von Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ mit $0 \le r \le R$ und $0 \le \phi \le \omega$ zu beschreiben.

Die Differentialgleichung $-\Delta u = \lambda u$ auf Ω wird durch Polarkoordinaten in folgende Darstellung transformiert:

$$-\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}\right) = \lambda u \quad \text{für} \quad 0 < r < R, \quad 0 < \phi < \omega \,. \tag{6}$$

Für den Rand ergeben sich:

a) Dirichletsche Randdaten zu (1)

$$\begin{aligned} u(R,\phi) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \phi \le \omega \\ u(r,0) &= 0 = u(r,\omega) \quad \text{für} \quad 0 \le r \le R\,, \end{aligned} \tag{7}$$

b) Neumannsche Randdaten zu (3)

$$\begin{aligned} u_r(R,\phi) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \phi \le \omega \\ u_\phi(r,0) &= 0 = u_\phi(r,\omega) \quad \text{für} \quad 0 \le r \le R\,, \end{aligned} \tag{8}$$

c) gemischte Randdaten zu (5)

$$\begin{aligned} u(R,\phi) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \phi \le \omega \\ u_\phi(r,0) &= 0 = u(r,\omega) \quad \text{für} \quad 0 \le r \le R\,. \end{aligned} \tag{9}$$

2 Der Produktansatz

Ein Produktansatz (vgl. dazu [7]) der Form $u(r,\phi) = g(r) \cdot f(\phi)$ in die Differentialgleichung (6) eingesetzt liefert in üblicher Weise

$$\mu := -\frac{f''}{f} = \frac{r^2(g'' + g'/r + \lambda g)}{g} \quad .$$

Damit ergeben sich zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$f'' + \mu f = 0 \tag{10}$$

und

$$r^2 g'' + r g' + (r^2\lambda - \mu) g = 0\,. \tag{11}$$

Setzt man den Produktansatz in die Randbedingungen (7), (8) und (9) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung, dass aus $u \not\equiv 0$ auch $g \not\equiv 0$ und $f \not\equiv 0$ folgt

$$\begin{array}{rclclcl}
0 &=& u(r,0) &=& g(r)\cdot f(0) &\Rightarrow& f(0)=0\,,\\
0 &=& u_\phi(r,0) &=& g(r)\cdot f'(0) &\Rightarrow& f'(0)=0\,,\\[1ex]
0 &=& u(r,\omega) &=& g(r)\cdot f(\omega) &\Rightarrow& f(\omega)=0\,,\\
0 &=& u_\phi(r,\omega) &=& g(r)\cdot f'(\omega) &\Rightarrow& f'(\omega)=0\,,\\[1ex]
0 &=& u(R,\phi) &=& g(R)\cdot f(\phi) &\Rightarrow& g(R)=0\,,\\
0 &=& u_r(R,\phi) &=& g'(R)\cdot f(\phi) &\Rightarrow& g'(R)=0\,.
\end{array} \tag{12}$$

Da die allgemeine Lösung von (10) durch

$$f(\phi) = \left\{ \begin{array}{lll}
a_1 e^{\sqrt{-\mu}\phi} + a_2 e^{-\sqrt{-\mu}\phi} & & \mu < 0\\
a_1\phi + a_2 & \text{für} & \mu = 0\\
a_1 \sin(\sqrt{\mu}\phi) + a_2\cos(\sqrt{\mu}\phi) & & \mu > 0
\end{array}\right. \tag{13}$$

gegeben ist, ergeben die Randbedingungen $f(0) = 0$ oder $f'(0) = 0$ und $f(\omega) = 0$ oder $f'(\omega) = 0$ in allen Fällen, wegen $\omega > 0$, nur für $\mu \geq 0$ nichttriviale Lösungen.

Für die Lösungsdarstellung der Differentialgleichung (11) sind die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$ zu unterscheiden.

Im Fall $\lambda = 0$, handelt es sich um eine Eulersche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$g(r) = \left\{ \begin{array}{lll}
b_1 + b_2 \ln r & \text{für} & \mu = 0\\
b_1 r^{\sqrt{\mu}} + b_2 r^{-\sqrt{\mu}} & & \mu > 0\,.
\end{array}\right. \tag{14}$$

Da $g(0)$ definiert sein muss, folgt $b_2 = 0$ und die Lösung ergibt sich aus der Randbedingung $g(R) = 0$ bzw. $g'(R) = 0$.

Im Fall $\lambda > 0$ führt die Substitution $r = \rho/\sqrt{\lambda}$ auf eine Besselsche Differentialgleichung in $G(\rho) := g(r(\rho))$

$$\rho^2 G'' + \rho G' + (\rho^2 - \mu)G = 0 \,. \tag{15}$$

Die Lösungen von (15) sind durch die Besselfunktionen $J_{\sqrt{\mu}}(\rho)$ bzw. die Neumannfunktionen $H_{\sqrt{\mu}}(\rho)$ gegeben (vgl. [1] und [6]). Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung von (11) durch

$$g(r) = \begin{cases} c_1 J_{\sqrt{\mu}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) + c_2 J_{-\sqrt{\mu}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) & \text{für} \quad \mu \text{ nicht ganzzahlig} \\ c_1 J_{\sqrt{\mu}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) + c_2 N_{\sqrt{\mu}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) & \qquad\;\;\, \mu \text{ ganzzahlig} \,. \end{cases} \tag{16}$$

Da $g(0)$ definiert sein muss, folgt $c_2 = 0$ und die Lösung ergibt sich aus der Randbedingung $g(R) = 0$ bzw. $g'(R) = 0$.

3 Lösungen des Dirichletproblems

Der Produktansatz liefert (10) und (11). Mit (7) und (12) ergeben sich für das Dirichletproblem (1) die beiden gewöhnlichen Randwertprobleme

$$f'' + \mu f = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 \text{ und } f(\omega) = 0 \tag{17}$$

und

$$r^2 g'' + r g' + (r^2\lambda - \nu_k^2)g = 0 \quad \text{mit} \quad g(R) = 0 \,. \tag{18}$$

3.1 Eigenwerte und Eigenfunktionen

Für (17) erhält man, wegen der Randbedingungen, aus der allgemeinen Lösung (13) nur für $\mu > 0$ nichttriviale Lösungen. Insbesondere ergibt sich

$$0 = f(0) = a_2 \quad \text{und} \quad 0 = f(\omega) = a_1 \sin(\sqrt{\mu}\omega) \,.$$

Wegen $a_1 \neq 0$ lauten die Lösungen von (17)

$$\mu = \mu_k = \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \quad \text{und} \quad f_k(\phi) = \sin\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \cdots \,.$$

Mit der Abkürzung $\nu_k := \sqrt{\mu_k} = \dfrac{k\pi}{\omega}$, ergeben sich für (18) nur für $\lambda > 0$ aus (16) die Lösungen

$$g_k(r) = J_{\nu_k}(\sqrt{\lambda}\cdot r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k + n + 1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}\cdot r}{2}\right)^{2n+\nu_k} .$$

Die Eigenwerte λ ergeben sich aus der Randbedingung

$$g(R) = J_{\nu_k}(\sqrt{\lambda} \cdot R) = 0\,.$$

Bezeichnet man mit $\sigma_i^{(k)}$ die i.-te positive Nullstelle von J_{ν_k}, so ergeben sich die Eigenwerte des Dirichletproblems (1)

$$\lambda_{i,k} \quad = \quad \left(\frac{\sigma_i^{(k)}}{R}\right)^2 \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{19}$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{i,k}(r,\phi) \quad = \quad J_{\nu_k}\left(\frac{\sigma_i^{(k)} r}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \quad \text{mit} \quad \nu_k = \frac{k\pi}{\omega}\,. \tag{20}$$

3.2 Regularität der Lösungen

Zur Untersuchung der Regularitätseigenschaften der Eigenfunktionen $u_{i,k}$, im Folgenden ohne Indizierung angegeben, wird (20) umformuliert

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= J_{\nu_k}\left(\frac{\sigma_i^{(k)} r}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k+n+1)} \left(\frac{\sigma_i^{(k)} r}{2R}\right)^{2n+\nu_k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \\ &= r^{\nu_k} \underbrace{\left(\frac{\sigma_i^{(k)}}{2R}\right)^{\nu_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k+n+1)} \left(\frac{\sigma_i^{(k)} r}{2R}\right)^{2n}}_{=:h(r)} \cdot \sin\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Potenzreihe $h(r)$ ist dabei für $|r| < \infty$ konvergent und beliebig oft gliedweise differenzierbar. Wegen (21) kann die Eigenfunktion folgendermaßen dargestellt werden:

$$u(r,\phi) \quad = \quad r^{\nu_k}\, h(r)\, f(\phi)\,, \tag{22}$$

mit beliebig oft differenzierbaren Funktionen h und f.

Aus (22) kann man ablesen, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ gilt, die Eigenfunktionen also Lösungen im klassischen Sinn sind.

In $\overline{\Omega}$ kann nur für $r = 0$, d.h. im Ursprung, eine Differenzierbarkeitssingularität auftreten. Zunächst wird überprüft, wann $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt. Die ersten partiellen Ableitungen lauten:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \cos\phi\, u_r - \frac{\sin\phi}{r}\, u_\phi \qquad (23)\\
&= r^{\nu_k-1}\left((\nu_k h(r) + r h'(r))\cos\phi f(\phi) - h(r)\sin\phi f'(\phi)\right),\\
u_y &= \sin\phi\, u_r + \frac{\cos\phi}{r}\, u_\phi\\
&= r^{\nu_k-1}\left((\nu_k h(r) + r h'(r))\sin\phi f(\phi) + h(r)\cos\phi f'(\phi)\right).
\end{aligned}
$$

Den Gleichungen (23) entnimmt man, dass in den Summanden der ersten partiellen Ableitungen nach x und y der Faktor r^{ν_k-1} auftritt. Man erhält also

$$\nu_k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad u \in C^1(\overline{\Omega})\,.$$

Die Eigenfunktionen, die sich aus dem Fall $k = 1$ ergeben, liegen für eine einspringende Ecke ($\omega > \pi$), wegen $\nu_1 = \pi/\omega < 1$, also nicht in $C^1(\overline{\Omega})$.

Am Beispiel der ersten Eigenfunktion u_1 (vgl. Anhang B.1) kann anhand der Winkelfolge $\omega = \pi/3, 2\pi/3, \ldots, 5\pi/3$ beobachtet werden, wie sich im Ursprung eine Differenzierbarkeitssingularität herausbildet.

Für die sich aus (4) ergebenden schwachen Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ soll überprüft werden, wann $u, u_x, u_y \in L_2(\Omega)$ gilt. Die L_2-Eigenschaft der Ableitungen wird nur für u_x nachgerechnet. Für u_y ergibt sich an ν_k die gleiche Bedingung. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_x^2\, d(x,y) &= \int_0^R \int_0^\omega \Big(r^{\nu_k-1}\left((\nu_k h(r) + r h'(r))\cos\phi f(\phi)\right.\\
&\qquad \left.-h(r)\sin\phi f'(\phi)\right)\Big)^2 r\, d\phi dr\,. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Die Existenz von (24) reduziert sich damit auf die Fragestellung, wann

$$\int_0^R r^{2\nu_k-1}\,\tilde{h}(r)\,dr = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{r^{2\nu_k}}{2\nu_k}\right)\tilde{h}(r)\Big|_\rho^R - \int_0^R \left(\frac{r^{2\nu_k}}{2\nu_k}\right)\tilde{h}'(r)\,dr$$

mit beliebig oft differenzierbarem $\tilde{h}$ existiert. Dies ist der Fall, wenn $\nu_k \geq 0$ gilt, d.h. wie im Falle der klassischen Lösungen gilt $u \in H_0^1(\Omega)$ für $0 < \omega < 2\pi$.

Die zweiten Ableitungen nach x und y lauten:

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \cos^2\phi\, u_{rr} - \frac{\sin 2\phi}{r}\, u_{r\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \frac{\sin 2\phi}{r^2}\, u_\phi + \frac{\sin^2\phi}{r}\, u_r \qquad (25)\\
u_{xy} &= \frac{\sin 2\phi}{2}\, u_{rr} + \frac{\cos 2\phi}{r}\, u_{r\phi} - \frac{\sin 2\phi}{2r^2}\, u_{\phi\phi} - \frac{\cos 2\phi}{r^2}\, u_\phi - \frac{\sin 2\phi}{2r}\, u_r\\
u_{yy} &= \sin^2\phi\, u_{rr} + \frac{\sin 2\phi}{r}\, u_{r\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\, u_{\phi\phi} - \frac{\sin 2\phi}{r^2}\, u_\phi + \frac{\cos^2\phi}{r}\, u_r\,.
\end{aligned}
$$

Es taucht in den Summanden von (25) der Faktor r^{ν_k-2} auf. Man erhält

$$\nu_k \geq 2 \quad \Rightarrow \quad u \in C^2(\overline{\Omega})\,,$$

d.h. für ($\omega > \pi/2$) geht einigen Eigenfunktionen diese Eigenschaft verloren.

Es gilt $u \in H_0^2(\Omega)$, falls zusätzlich noch $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \in L_2(\Omega)$ gesichert ist. Analog zu den ersten ergibt sich die L_2-Eigenschaft der zweiten Ableitungen, wenn

$$\int_0^R r^{2\nu_k-3}\,\tilde{h}(r)\,dr \;=\; \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{r^{2\nu_k-2}}{2\nu_k-2}\right)\tilde{h}(r)\Big|_\rho^R - \int_0^R \left(\frac{r^{2\nu_k-2}}{2\nu_k-2}\right)\tilde{h}'(r)\,dr$$

existiert. Dies ist mit (23) für $\nu_k \geq 1$ der Fall. Also sind alle Eigenfunktionen $u \in H_0^2(\Omega)$, wenn $\omega \leq \pi$ gilt.

In Tabelle 3.1 sind die Eigenwerte λ_i und Eigenfunktionen u_i für das Beispiel $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$ angegeben. Die Numerierung ergibt sich aus der nach Größe sortierten Reihenfolge der positiven Nullstellen $\sigma_i^{(k)}$ der Besselfunktion J_{ν_k} zum Index $\nu_k = 3k/5$ (vgl. Anhang A.2). Die Bilder der Eigenfunktionen u_i sind im Anhang B.2 dargestellt.

Eigenwert	k für ν_k	Eigenfunktion	$\in H_0^2(\Omega)$ oder $\in C^1(\overline{\Omega})$	$\in C^2(\overline{\Omega})$
$\lambda_1 = 10.775105$	1	$u_1 = r^{\frac{3}{5}} h_1(r) f_1(\phi)$	nein	nein
$\lambda_2 = 16.803239$	2	$u_2 = r^{\frac{6}{5}} h_2(r) f_2(\phi)$	ja	nein
$\lambda_3 = 23.821170$	3	$u_3 = r^{\frac{9}{5}} h_3(r) f_3(\phi)$	ja	nein
$\lambda_4 = 31.796830$	4	$u_4 = r^{\frac{12}{5}} h_4(r) f_4(\phi)$	ja	ja
$\lambda_5 = 40.706466$	5	$u_5 = r^{\frac{15}{5}} h_5(r) f_5(\phi)$	ja	ja
$\lambda_6 = 41.368167$	1	$u_6 = r^{\frac{3}{5}} h_6(r) f_6(\phi)$	nein	nein
$\lambda_7 = 50.531635$	6	$u_7 = r^{\frac{18}{5}} h_7(r) f_7(\phi)$	ja	ja
$\lambda_8 = 53.317024$	2	$u_8 = r^{\frac{6}{5}} h_8(r) f_8(\phi)$	ja	nein
$\lambda_9 = 61.257512$	7	$u_9 = r^{\frac{21}{5}} h_9(r) f_9(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{10} = 66.297381$	3	$u_{10} = r^{\frac{9}{5}} h_{10}(r) f_{10}(\phi)$	ja	nein
$\lambda_{11} = 72.871865$	8	$u_{11} = r^{\frac{24}{5}} h_{11}(r) f_{11}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{12} = 80.289962$	4	$u_{12} = r^{\frac{12}{5}} h_{12}(r) f_{12}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{13} = 85.364392$	9	$u_{13} = r^{\frac{27}{5}} h_{13}(r) f_{13}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{14} = 91.702534$	1	$u_{14} = r^{\frac{3}{5}} h_{14}(r) f_{14}(\phi)$	nein	nein
$\lambda_{15} = 95.277573$	5	$u_{15} = r^{\frac{15}{5}} h_{15}(r) f_{15}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{16} = 98.726272$	10	$u_{16} = r^{\frac{30}{5}} h_{16}(r) f_{16}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{17} = 109.57271$	2	$u_{17} = r^{\frac{6}{5}} h_{17}(r) f_{17}(\phi)$	ja	nein
$\lambda_{18} = 111.24507$	6	$u_{18} = r^{\frac{18}{5}} h_{18}(r) f_{18}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{19} = 112.94985$	11	$u_{19} = r^{\frac{33}{5}} h_{19}(r) f_{19}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{20} = 128.02840$	12	$u_{20} = r^{\frac{36}{5}} h_{20}(r) f_{20}(\phi)$	ja	ja

Tabelle 3.1 Die kleinsten positiven Eigenwerte und Eigenfunktionen des Dirichletproblems im Kreissektor für $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$

Aus den Bildern B.2.1 und B.2.6 kann man ablesen, dass u_1 und u_6 im Ursprung eine Differenzierbarkeitssingularität besitzen.

4 Lösungen des Neumannproblems

Der Produktansatz liefert (10) und (11). Mit (8) und (12) ergeben sich für das Neumannproblem (3) die beiden gewöhnlichen Randwertprobleme

$$f'' + \mu f = 0 \quad \text{mit} \quad f'(0) = 0 \,\text{und}\, f'(\omega) = 0 \tag{26}$$

und

$$r^2 g'' + r g' + (r^2\lambda - \nu_k^2) g = 0 \quad \text{mit} \quad g'(R) = 0\,. \tag{27}$$

4.1 Eigenwerte und Eigenfunktionen

Für (26) erhält man, wegen der Randbedingungen aus der allgemeinen Lösung (13) nur für $\mu \geq 0$ nichttriviale Lösungen. Insbesondere ergibt sich für $\mu > 0$

$$0 = f'(0) = a_1\sqrt{\mu} \;\Rightarrow\; a_1 = 0 \quad \text{und} \quad 0 = f'(\omega) = -a_2\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\omega)\,.$$

Wegen $a_2 \neq 0$ lauten die Lösungen von (26)

$$\mu = \mu_k = \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \quad \text{und} \quad f_k(\phi) = \cos\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots\,.$$

Der Fall $\mu = 0$ ist in obiger Darstellung in $k = 0$ enthalten. Mit der Abkürzung $\nu_k := \sqrt{\mu_k} = \dfrac{k\pi}{\omega}$, erhält man für (27) und $\lambda > 0$ aus (16) die Lösungen

$$g_k(r) = J_{\nu_k}(\sqrt{\lambda}\cdot r) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k + n + 1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}\cdot r}{2}\right)^{2n+\nu_k}.$$

Der Fall $\lambda = 0$ ergibt in Verbindung mit der allgemeinen Lösung (14) und der Randbedingung $g'(R) = 0$ nur für $\mu = 0$ die Lösung $g = const.$ Dieser Fall ist in obiger Darstellung von g_k für $k = 0$ enthalten, da J_0 eine gerade Funktion ist.

Die Eigenwerte λ ergeben sich somit aus der Randbedingung

$$g'(R) \;=\; J'_{\nu_k}(\sqrt{\lambda}\cdot R) = \frac{1}{2}\Big(J_{\nu_k-1}(\sqrt{\lambda}\cdot R) - J_{\nu_k+1}(\sqrt{\lambda}\cdot R)\Big) = 0\,. \tag{28}$$

Bezeichnet man mit $\alpha_i^{(k)}$ die i.-te nichtnegative Nullstelle von J'_{ν_k}, so ergeben sich die Eigenwerte des Neumannproblems (3)

$$\lambda_{i,k} \;=\; \left(\frac{\alpha_i^{(k)}}{R}\right)^2 \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{29}$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{i,k}(r,\phi) \quad = \quad J_{\nu_k}\left(\frac{\alpha_i^{(k)} r}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \qquad \text{mit} \quad \nu_k = \frac{k\pi}{\omega}\,. \tag{30}$$

Besonders herausgestellt werden soll, dass sich der kleinste Eigenwert $\lambda = 0$ mit zugehöriger Eigenfunktion $u(r,\phi) = const$ im Fall $k = 0$ aus der kleinsten Nullstelle $\alpha_1^{(0)} = 0$ von J_0' ergibt.

4.2 Regularität der Lösungen

Zur Untersuchung der Regularitätseigenschaften der Eigenfunktionen $u_{i,k}$, im Folgenden ohne Indizierung angegeben, wird (30), analog zum Dirichletproblem, umformuliert

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= J_{\nu_k}\left(\frac{\alpha_i^{(k)} r}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right) \\ &= r^{\nu_k}\underbrace{\left(\frac{\alpha_i^{(k)}}{2R}\right)^{\nu_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k+n+1)}\left(\frac{\alpha_i^{(k)} r}{2R}\right)^{2n}}_{=:h(r)}\cdot\cos\left(\frac{k\pi\phi}{\omega}\right)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Die Potenzreihe $h(r)$ ist dabei für $|r| < \infty$ konvergent und beliebig oft gliedweise differenzierbar. Wegen (31) besitzen die Eigenfunktionen des Neumannproblems, genau wie die des Dirichletproblems, die Darstellung

$$u(r,\phi) \quad = \quad r^{\nu_k}\, h(r)\, f(\phi)\,, \tag{32}$$

mit beliebig oft differenzierbaren Funktionen h und f.

Im Fall $\nu_k = 0 = k$, insbesondere also für $\lambda = 0$, folgt aus (32), dass $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt. Diese Eigenfunktionen sind also Lösungen im klassischen Sinn.

Für $\nu_k > 0$ unterscheidet sich die Regularitätsuntersuchung nicht von der des Dirichletproblems, da die Darstellung der Eigenfunktionen gleich ist (vgl. (22) mit (32)).

In Tabelle 4.1 sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Neumannproblems für

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

mit ihren Differenzierbarkeitseigenschaften aufgeführt. Im Anhang B.3 sind die Bilder der ersten Eigenfunktionen dargestellt. Die erforderlichen Nullstellen von $J'_{3k/5}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ sind im Anhang A.3 aufgeführt.

Eigenwert	k für ν_k	Eigenfunktion	$\in H^2(\Omega)$ oder $\in C^1(\overline{\Omega})$	$\in C^2(\overline{\Omega})$
$\lambda_1 = 0$	0	$u_1 = 1$	ja	ja
$\lambda_2 = 1.712643$	1	$u_2 = r^{\frac{3}{5}} h_2(r) f_2(\phi)$	nein	nein
$\lambda_3 = 4.381235$	2	$u_3 = r^{\frac{6}{5}} h_3(r) f_3(\phi)$	ja	nein
$\lambda_4 = 7.946648$	3	$u_4 = r^{\frac{9}{5}} h_4(r) f_4(\phi)$	ja	nein
$\lambda_5 = 12.376465$	4	$u_5 = r^{\frac{12}{5}} h_5(r) f_5(\phi)$	ja	ja
$\lambda_6 = 14.682000$	0	$u_6 = J_0(3.83171r)$	ja	ja
$\lambda_7 = 17.649997$	5	$u_7 = r^{\frac{15}{5}} h_7(r) f_7(\phi)$	ja	ja
$\lambda_8 = 22.587302$	1	$u_8 = r^{\frac{3}{5}} h_8(r) f_8(\phi)$	nein	nein
$\lambda_9 = 23.752757$	6	$u_9 = r^{\frac{18}{5}} h_9(r) f_9(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{10} = 30.673764$	7	$u_{10} = r^{\frac{21}{5}} h_{10}(r) f_{10}(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{11} = 31.511831$	2	$u_{11} = r^{\frac{6}{5}} h_{11}(r) f_{11}(\phi)$	ja	nein

Tabelle 4.1 Die kleinsten nichtnegativen Eigenwerte und Eigenfunktionen des Neumannproblems im Kreissektor für $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$

Aus den Bildern B.3.2 und B.3.8 kann man ablesen, dass u_2 und u_8 im Ursprung eine Differenzierbarkeitssingularität besitzen.

5 Lösungen des Problems mit gemischten Randdaten

Der Produktansatz liefert (10) und (11). Mit (9) und (12) ergeben sich für das Problem mit den gemischten Dirichletschen und Neumannschen Randdaten (5) die beiden gewöhnlichen Randwertprobleme

$$f'' + \mu f = 0 \quad \text{mit} \quad f'(0) = 0 \text{ und } f(\omega) = 0 \tag{33}$$

und

$$r^2 g'' + r g' + (r^2 \lambda - \nu_k^2) g = 0 \quad \text{mit} \quad g(R) = 0\,. \tag{34}$$

5.1 Eigenwerte und Eigenfunktionen

Für (33) erhält man, wegen der Randbedingungen aus der allgemeinen Lösung (13) nur für $\mu > 0$ nichttriviale Lösungen. Insbesondere ergibt sich

$$0 = f'(0) = a_1 \sqrt{\mu} \;\Rightarrow\; a_1 = 0 \quad \text{und} \quad 0 = f(\omega) = a_2 \cos(\sqrt{\mu}\omega)\,.$$

Wegen $a_2 \neq 0$ lauten die Lösungen von (33)

$$\mu = \mu_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2\omega}\right)^2 \text{ und } f_k(\phi) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi\phi}{2\omega}\right) \text{ mit } k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Mit der Abkürzung $\nu_k := \sqrt{\mu_k} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2\omega}$, erhält man für (34) nur für $\lambda > 0$ aus (16) die Lösungen

$$g_k(r) = J_{\nu_k}(\sqrt{\lambda}\cdot r) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k+n+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}\cdot r}{2}\right)^{2n+\nu_k} .$$

Die Eigenwerte λ ergeben sich aus der Randbedingung

$$g(R) = J_{\nu_k}(\sqrt{\lambda}\cdot R) = 0 .$$

Bezeichnet man mit $\beta_i^{(k)}$ die i.-te positive Nullstelle von J_{ν_k}, so ergeben sich die Eigenwerte des Problems mit gemischten Randdaten (5)

$$\lambda_{i,k} \quad = \quad \left(\frac{\beta_i^{(k)}}{R}\right)^2 \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{35}$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{i,k}(r,\phi) \quad = \quad J_{\nu_k}\left(\frac{\beta_i^{(k)} r}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{(2k+1)\pi\phi}{2\omega}\right) \text{ mit } \nu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega} . \tag{36}$$

5.2 Regularität der Lösungen

Zur Untersuchung der Regularitätseigenschaften der Eigenfunktionen $u_{i,k}$, im Folgenden ohne Indizierung angegeben, wird (36), analog zum Dirichletproblem, umformuliert

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= J_{\nu_k}\left(\frac{\beta_i^{(k)} r}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{(2k+1)\pi\phi}{2\omega}\right) \qquad (37)\\ &= r^{\nu_k}\underbrace{\left(\frac{\beta_i^{(k)}}{2R}\right)^{\nu_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu_k+n+1)}\left(\frac{\beta_i^{(k)} r}{2R}\right)^{2n}}_{=:h(r)}\cdot\cos\left(\frac{(2k+1)\pi\phi}{2\omega}\right) . \end{aligned}$$

Die Potenzreihe $h(r)$ ist dabei für $|r| < \infty$ konvergent und beliebig oft gliedweise differenzierbar. Wegen (37) besitzen die Eigenfunktionen des gemischten Randwertproblems, genau wie die des Dirichletproblems, die Darstellung

$$u(r,\phi) \quad = \quad r^{\nu_k}\,h(r)\,f(\phi)\,, \tag{38}$$

mit beliebig oft differenzierbaren Funktionen h und f.

Im Vergleich zum Dirichletschen bzw. Neumannschen Problem gibt es keinen qualitativen Unterschied in der Regularitätsuntersuchung der Eigenfunktionen, da (38) die gleiche Darstellung, wie (22) und (32) besitzt. Nur die

Indizes der Besselfunktionen haben sich geändert und werden jetzt durch $\nu_k = (2k+1)\pi/2\omega$ berechnet.

In Tabelle 5.1 sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen für

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

mit ihren Differenzierbarkeitseigenschaften aufgeführt. Im Anhang B.4 sind die Bilder der ersten Eigenfunktionen dargestellt. Die erforderlichen Nullstellen von $J_{3(2k+1)/10}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ findet man im Anhang A.4.

Eigenwert	k für ν_k	Eigenfunktion	$\in H^2(\Omega)$ oder $\in C^1(\overline{\Omega})$	$\in C^2(\overline{\Omega})$
$\lambda_1 = 8.14589$	0	$u_1 = r^{\frac{3}{10}} h_1(r) f_1(\phi)$	nein	nein
$\lambda_2 = 13.663$	1	$u_2 = r^{\frac{9}{10}} h_2(r) f_2(\phi)$	nein	nein
$\lambda_3 = 20.1907$	2	$u_3 = r^{\frac{15}{10}} h_3(r) f_3(\phi)$	ja	nein
$\lambda_4 = 27.69096$	3	$u_4 = r^{\frac{21}{10}} h_4(r) f_4(\phi)$	ja	ja
$\lambda_5 = 35.78696$	0	$u_5 = r^{\frac{3}{10}} h_5(r) f_5(\phi)$	nein	nein
$\lambda_6 = 36.13621$	4	$u_6 = r^{\frac{27}{10}} h_6(r) f_6(\phi)$	ja	ja
$\lambda_7 = 45.50555$	5	$u_7 = r^{\frac{33}{10}} h_7(r) f_7(\phi)$	ja	ja
$\lambda_8 = 47.21243$	1	$u_8 = r^{\frac{9}{10}} h_8(r) f_8(\phi)$	nein	nein
$\lambda_9 = 55.78282$	6	$u_9 = r^{\frac{39}{10}} h_9(r) f_9(\phi)$	ja	ja
$\lambda_{10} = 59.6795$	2	$u_{10} = r^{\frac{15}{10}} h_{10}(r) f_{10}(\phi)$	ja	nein
$\lambda_{11} = 66.9543$	7	$u_{11} = r^{\frac{45}{10}} h_{11}(r) f_{11}(\phi)$	ja	ja

Tabelle 5.1 Die kleinsten positive Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems mit gemischten Randdaten im Kreissektor für $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$

Aus den Bildern B.4.1, B.4.2, B.4.5 und B.4.8 kann man ablesen, dass u_1, u_2, u_5 und u_8 im Ursprung eine Differenzierbarkeitssingularität besitzen.

A Nullstellen der Besselfunktionen

Die Nullstellen wurden ermittelt mit Hilfe des folgenden Mathematicabefehls

$$\mathbf{N[FindRoot[BesselJ}[\nu_k, x]\mathbf{==0,}\ \{x, x_0\}\mathbf{],10]} \quad ,$$

wobei x_0 ein vorzugebender Startwert ist.

A.1 Nullstellen von $J_{3/n}$ für $n = 1, \ldots, 5$

Zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes λ_1 $(k = 1)$ und der zugehörigen Eigenfunktion des Dirichletproblems (vgl. (19) und (20)) in der Folge von Kreissektoren (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{n\pi}{3} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, 5 \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden die Nullstellen $\sigma_1^{(1)}$ der Besselfunktionen $J_{\nu_{1,n}}$ benötigt, zu den Indizes

$$\nu_{1,n} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{3}{n} \, .$$

n	$\nu_{1,n}$	$\sigma_1^{(1)}$
1	3	6.38016
2	3/2	4.49341
3	1	3.8317
4	3/4	3.49101
3	3/5	3.28255

Tabelle A.1 Die kleinste positive Nullstelle $\sigma_1^{(1)}$ von $J_{\nu_{1,n}}$

A.2 Nullstellen von $J_{3k/5}$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Dirichletproblems (vgl. (19) und (20)) im Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden die Nullstellen $\sigma_i^{(k)}$ der Besselfunktionen J_{ν_k} zu den Indizes

$$\nu_k = \frac{k\pi}{\omega} = \frac{3k}{5}$$

benötigt.

k	ν_k	$\sigma_1^{(k)}$	$\sigma_2^{(k)}$	$\sigma_3^{(k)}$	$\sigma_4^{(k)}$	$\sigma_5^{(k)}$
1	3/5	3.282545586	6.431809016	9.576143992	12.71913894	15.86158209
2	6/5	4.099175397	7.301850740	10.46769862	13.62234328	16.77209534
3	9/5	4.880693632	8.142320387	11.33518320	14.50546492	
4	12/5	5.638867759	8.960466622	12.18323893	15.37169414	
5	15/5	6.380161895	9.761023129	13.01520072	16.22346616	
6	18/5	7.108560677	10.54727782	13.83355842		
7	21/5	7.826717823	11.32162155	14.64022811		
8	24/5	8.536501912	12.08585562	15.43672089		
9	27/5	9.239285262	12.84137607	16.22425289		
10	30/5	9.936109524	13.58929017	17.00381966		
11	33/5	10.62778663	14.33049314			
12	36/5	11.31496347	15.06572066			
13	39/5	11.99816489	15.79558575			
14	42/5	12.67782347	16.52060543			
15	45/5	13.35430047				
16	48/5	14.02790120				
17	51/5	14.69888626				
18	54/5	15.36748017				
19	57/5	16.03387788				

Tabelle A.2 Die kleinsten positiven Nullstellen $\sigma_i^{(k)}$ von J_{ν_k}

A.3 Nullstellen von $J'_{3k/5}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Neumannproblems (vgl. (29) und (30)) im Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden die Nullstellen $\alpha_i^{(k)}$ von J'_{ν_k} (vgl. (28)) zu den Indizes

$$\nu_k = \frac{k\pi}{\omega} = \frac{3k}{5} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

benötigt.

k	ν_k	$\alpha_1^{(k)}$	$\alpha_2^{(k)}$	$\alpha_3^{(k)}$	$\alpha_4^{(k)}$	$\alpha_5^{(k)}$
0	0	0	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237
1	3/5	1.30868	4.75261	7.94115	11.1027	14.2553
2	6/5	2.09314	5.61354	8.82863	12.0036	
3	9/5	2.81898	6.43755	9.68807	12.8819	
4	12/5	3.51802	7.23593	10.5257		
5	15/5	4.20119	8.01524			
6	18/5	4.87368	8.77963			
7	21/5	5.53839	9.53198			
8	24/5	6.19714	10.2743			
9	27/5	6.85114				
10	30/5	7.50127				
11	33/5	8.14814				

Tabelle A.3 Die kleinsten nichtnegativen Nullstellen $\alpha_i^{(k)}$ von J'_{ν_k}

A.4 Nullstellen von $J_{3(2k+1)/10}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems mit gemischten Dirichletschen und Neumannschen Randdaten (vgl. (35) und (36)) im Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden die Nullstellen $\beta_i^{(k)}$ von J_{ν_k} zu den Indizes

$$\nu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega} = \frac{3(2k+1)}{10} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

benötigt.

k	ν_k	$\beta_1^{(k)}$	$\beta_2^{(k)}$	$\beta_3^{(k)}$	$\beta_4^{(k)}$
0	3/10	2.85410	5.98222	9.11934	12.2587
1	9/10	3.69635	6.87113	10.0253	13.1735
2	15/10	4.49341	7.72525	10.9041	
3	21/10	5.26222	8.55385	11.7614	
4	27/10	6.01134	9.36271		
5	33/10	6.74578	10.1558		
6	39/10	7.46879	10.9358		
7	45/10	8.18256	11.7049		
8	51/10	8.88870			
9	57/10	9.58839			
10	63/10	10.2825			
11	69/10	10.9719			

Tabelle A.4 Die kleinsten positiven Nullstellen $\beta_i^{(k)}$ von J_{ν_k}

B Verschieden Eigenfunktionen

Der Plotbefehl für die Eigenfunktionen des Dirichletproblems im Kreissektor zum Radius $R = 1$, sowie den Werten $\nu_k, \sigma_i^{(k)}$ und ω in Mathematica lautet:

ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], BesselJ[ν_k,$\sigma_i^{(k)}$r] Sin[$\frac{k\pi}{\omega}$ t]}, {r,0,1},{t,0, ω },PlotPoints->{35,35}]

B.1 Die 1. Eigenfunktion des Dirichletproblems in verschiedenen Kreissektoren

Für die Kreissektoren (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{n\pi}{3} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, 5 \quad \text{und} \quad R = 1$$

wird im Folgenden der kleinste Eigenwert λ_1 mit zugehöriger Eigenfunktion, die sich aus (19) und (20) ergeben, dargestellt.

Die zugehörigen Nullstellen der Besselfunktionen können aus Anhang A.1 entnommen werden.

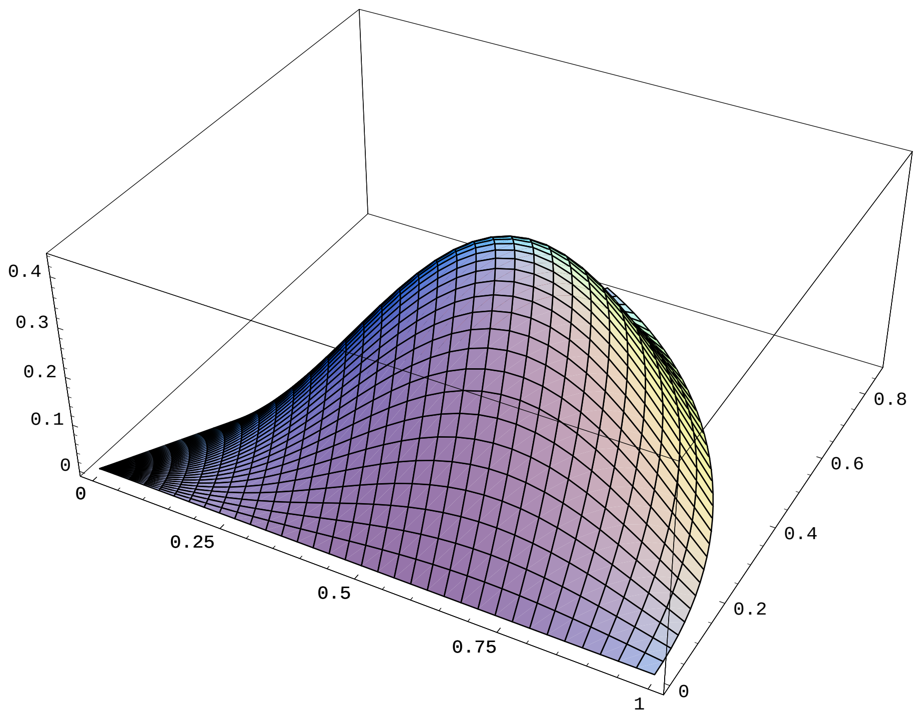

Bild B.1.1

$$\omega = \frac{\pi}{3} : \qquad u_1(r,\phi) = J_3(6.38016 \cdot r) \cdot \sin(3\phi) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 40.7064$$

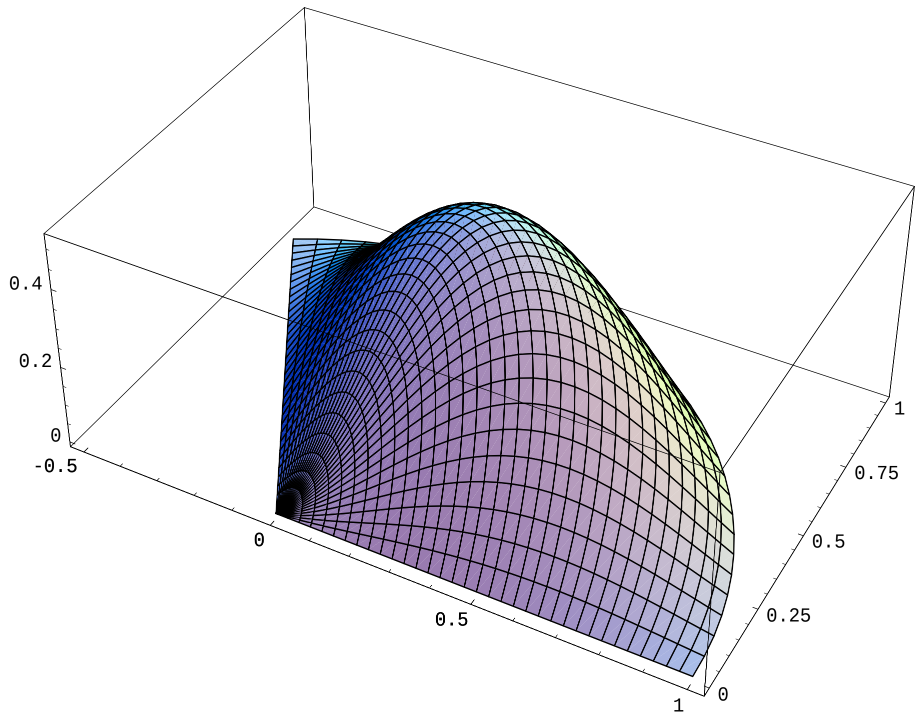

Bild B.1.2

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \quad : \qquad u_1(r,\phi) = J_{3/2}(4.49341 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{2}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 20.1907$$

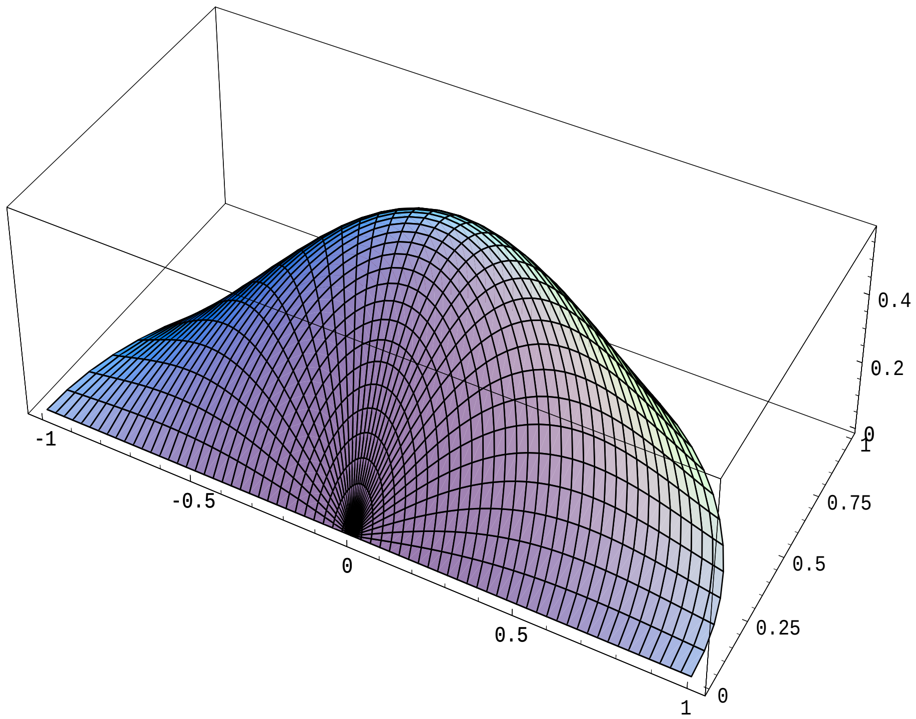

Bild B.1.3

$$\omega = \pi \quad : \qquad u_1(r,\phi) = J_1(3.8317 \cdot r) \cdot \sin(\phi) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 14.6819$$

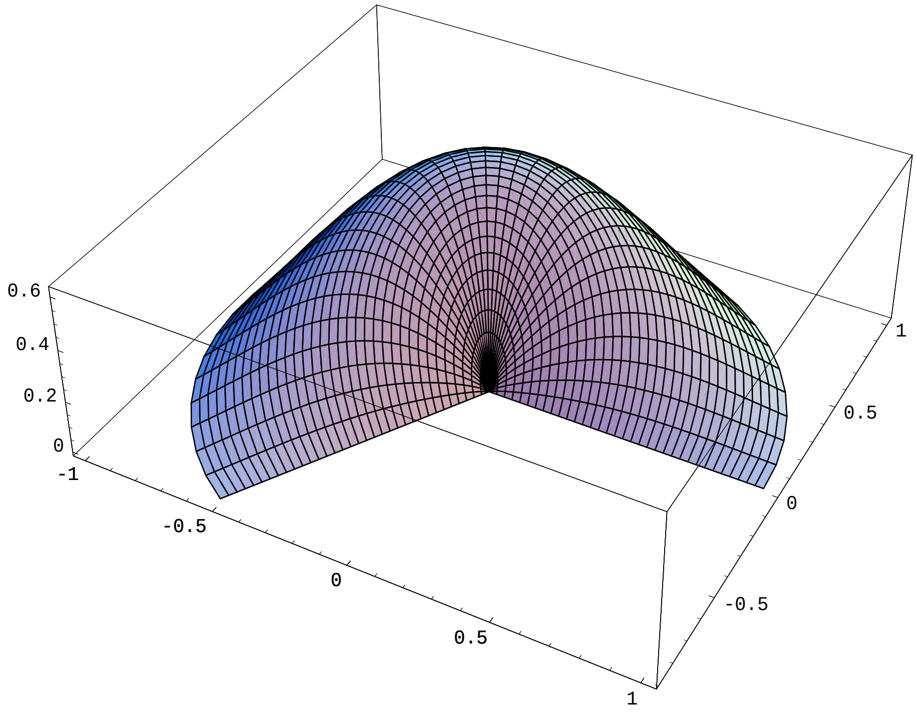

Bild B.1.4

$$\omega = \frac{4\pi}{3} : \qquad u_1(r,\phi) = J_{3/4}(3.49101 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{4}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 12.1872$$

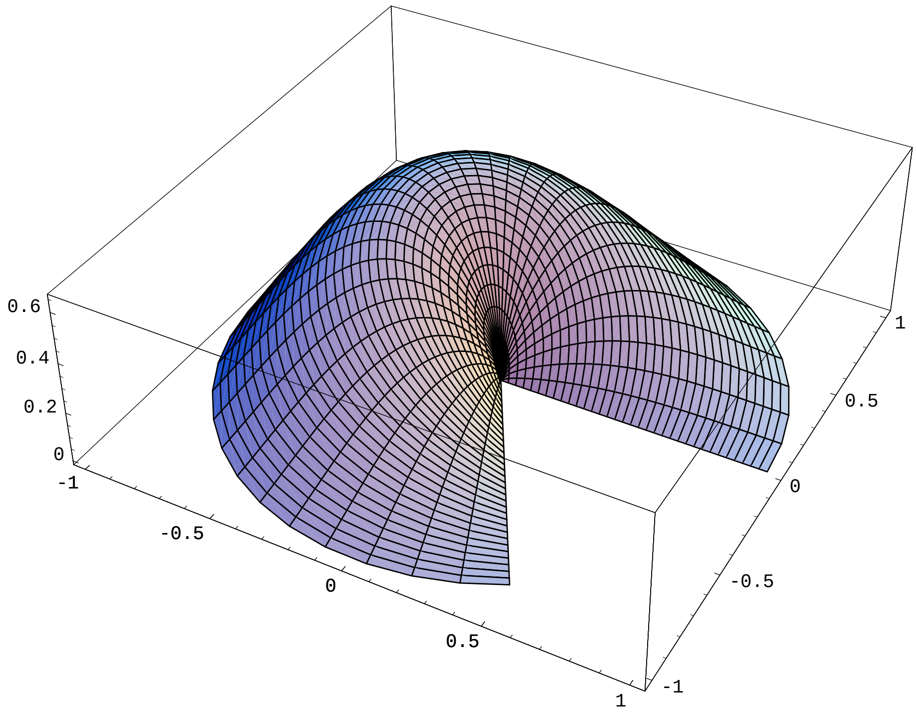

Bild B.1.5

$$\omega = \frac{5\pi}{3} : \qquad u_1(r,\phi) = J_{3/5}(3.28255 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 10.7751$$

B.2 Eigenfunktionen des Dirichletproblems

Für den Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden im Folgenden die ersten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen, die sich aus (19) und (20) ergeben (vgl. auch Tabelle 3.1), dargestellt. Die zugehörigen Nullstellen der Besselfunktionen können aus Anhang A.2 entnommen werden.

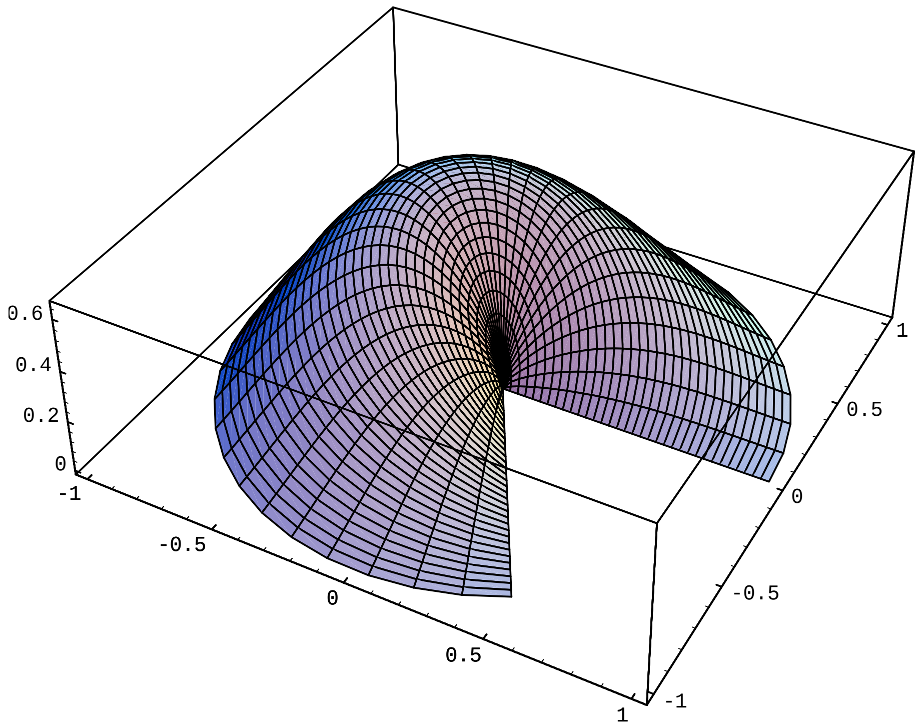

Bild B.2.1

$$u_1(r,\phi) = J_{3/5}(3.282545586 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 10.775105$$

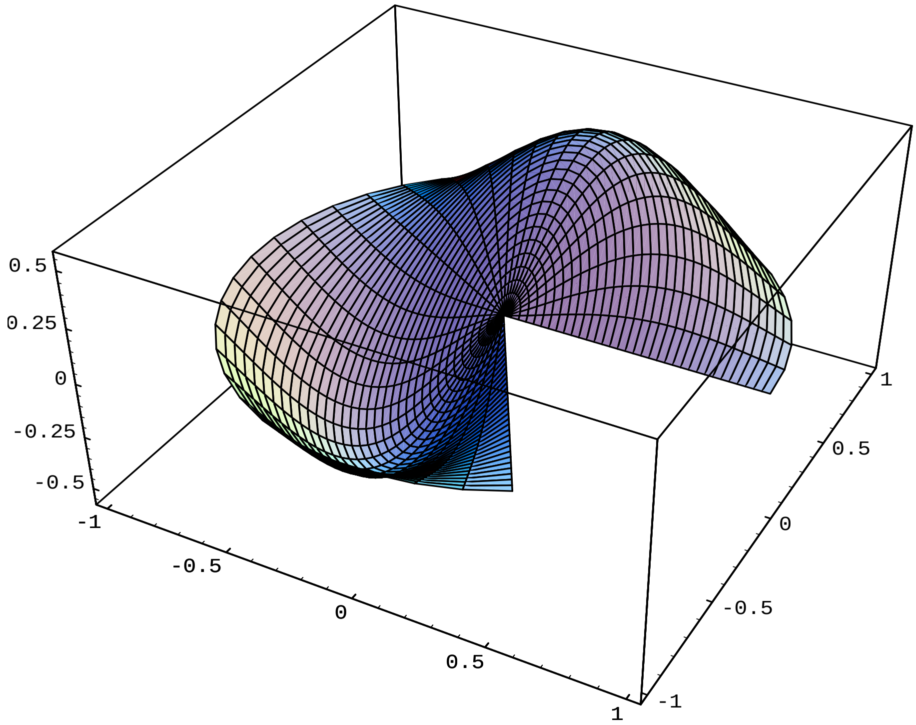

Bild B.2.2

$$u_2(r,\phi) = J_{6/5}(4.099175397 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{6\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_2 = 16.803239$$

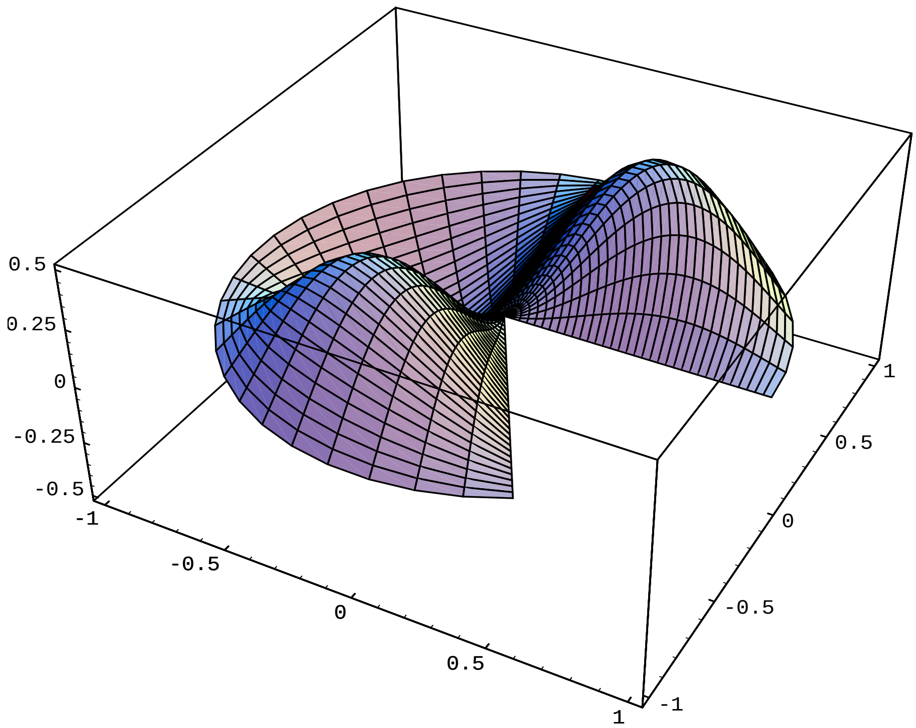

Bild B.2.3

$$u_3(r,\phi) = J_{9/5}(4.880693632 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{9\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_3 = 23.821170$$

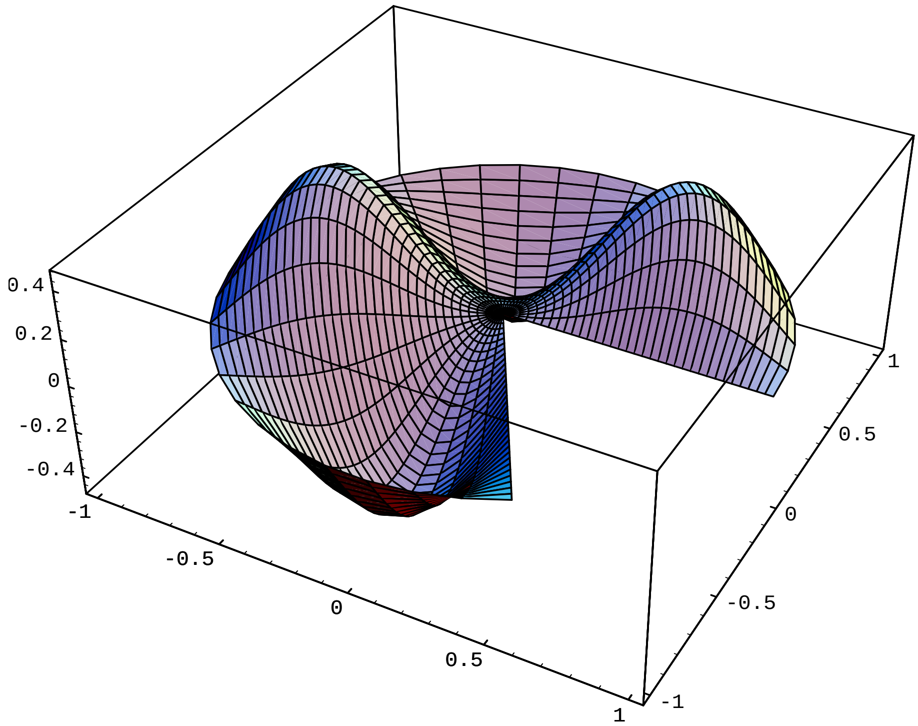

Bild B.2.4

$$u_4(r,\phi) = J_{12/5}(5.638867759 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{12\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_4 = 31.796830$$

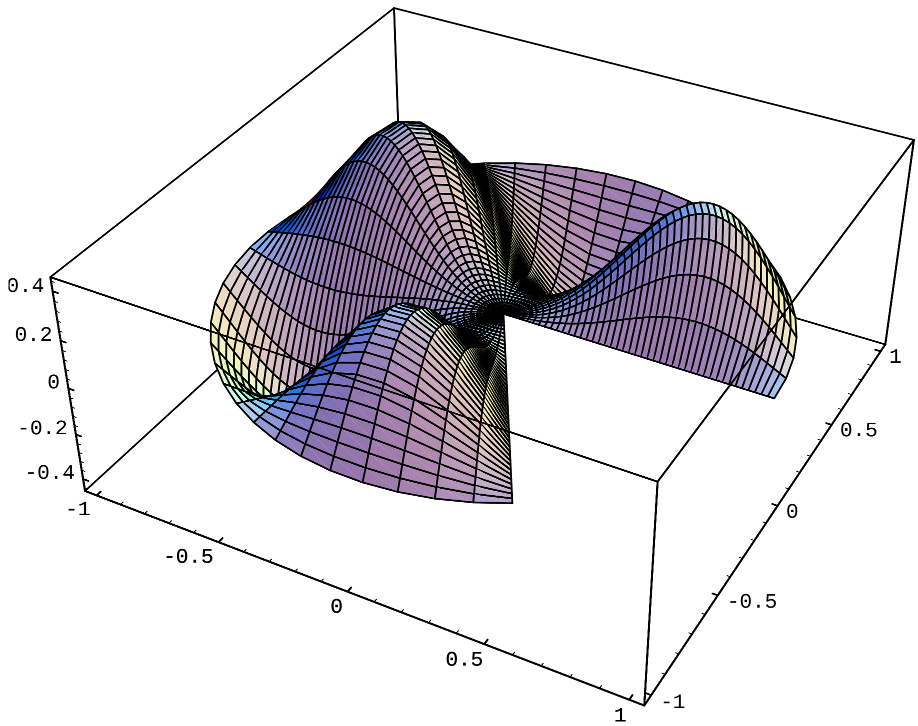

Bild B.2.5

$$u_5(r,\phi) = J_{15/5}(6.380161895 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{15\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_5 = 40.706466$$

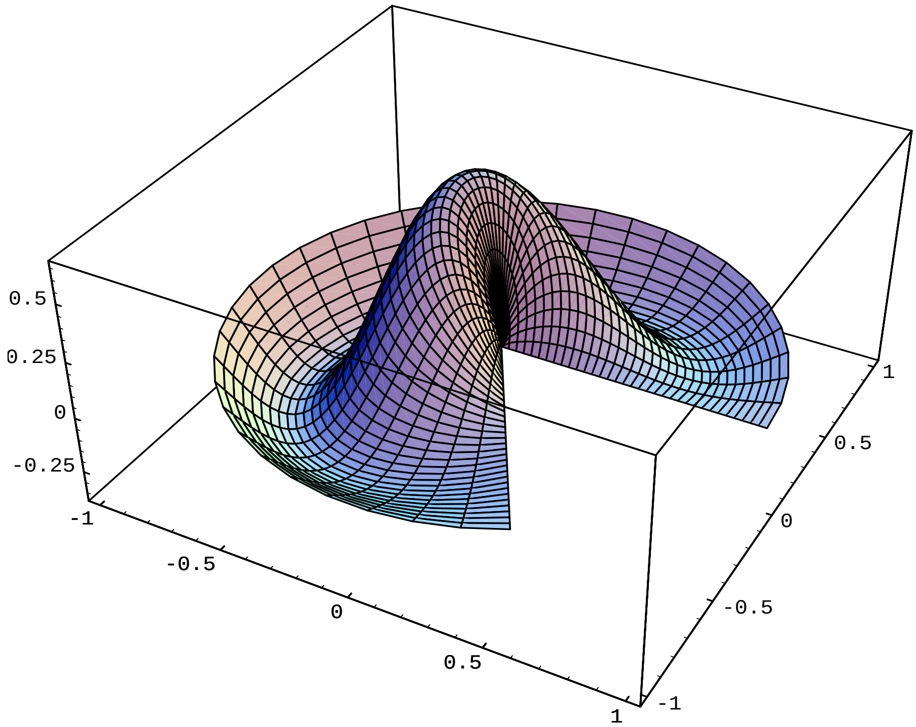

Bild B.2.6

$$u_6(r,\phi) = J_{3/5}(6.431809016 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_6 = 41.368167$$

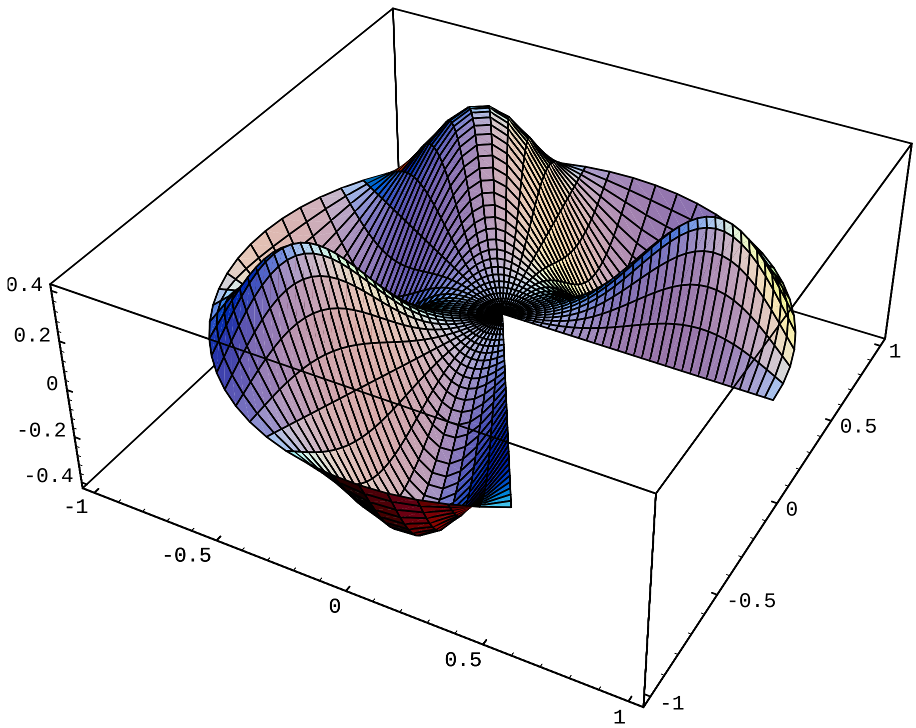

Bild B.2.7

$$u_7(r,\phi) = J_{18/5}(7.108560677 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{18\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_7 = 50.531635$$

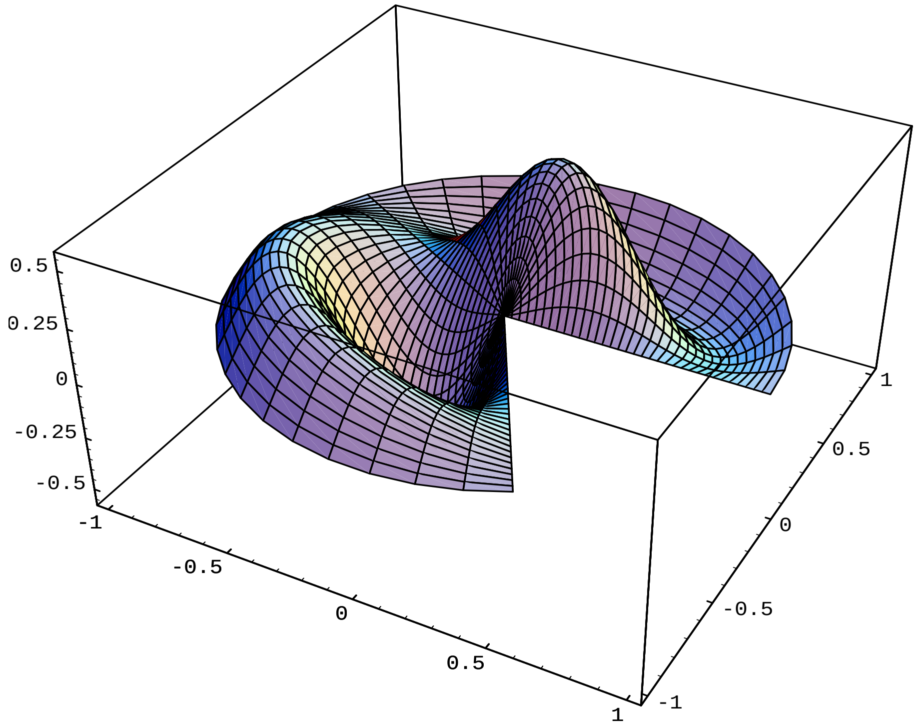

Bild B.2.8

$$u_8(r,\phi) = J_{6/5}(7.301850740 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{6\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_8 = 53.317024$$

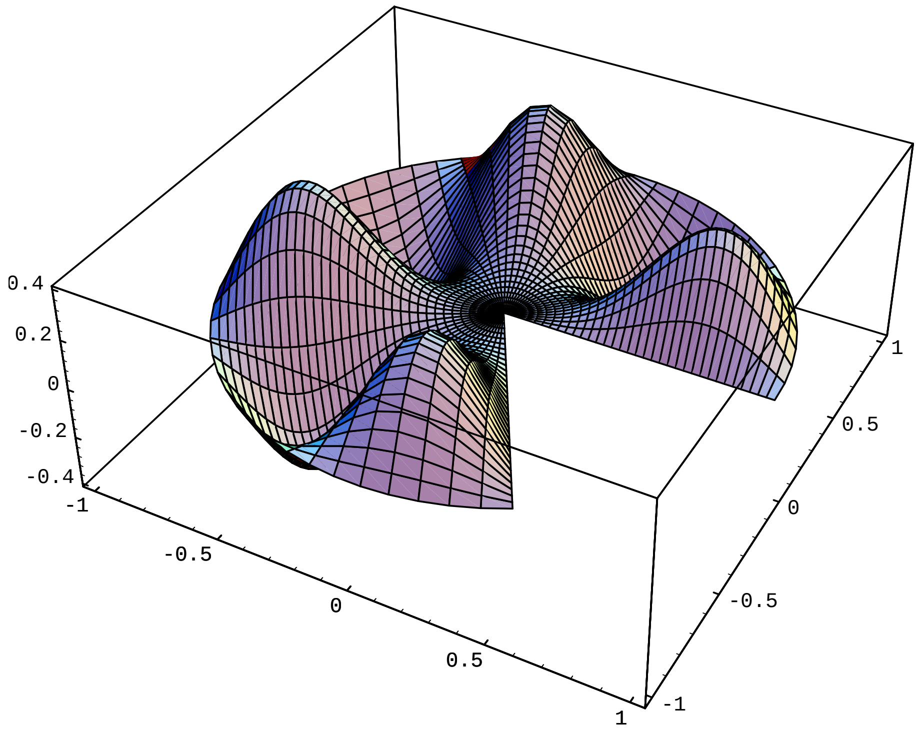

Bild B.2.9

$$u_9(r,\phi) = J_{21/5}(7.826717823 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{21\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_9 = 61.257512$$

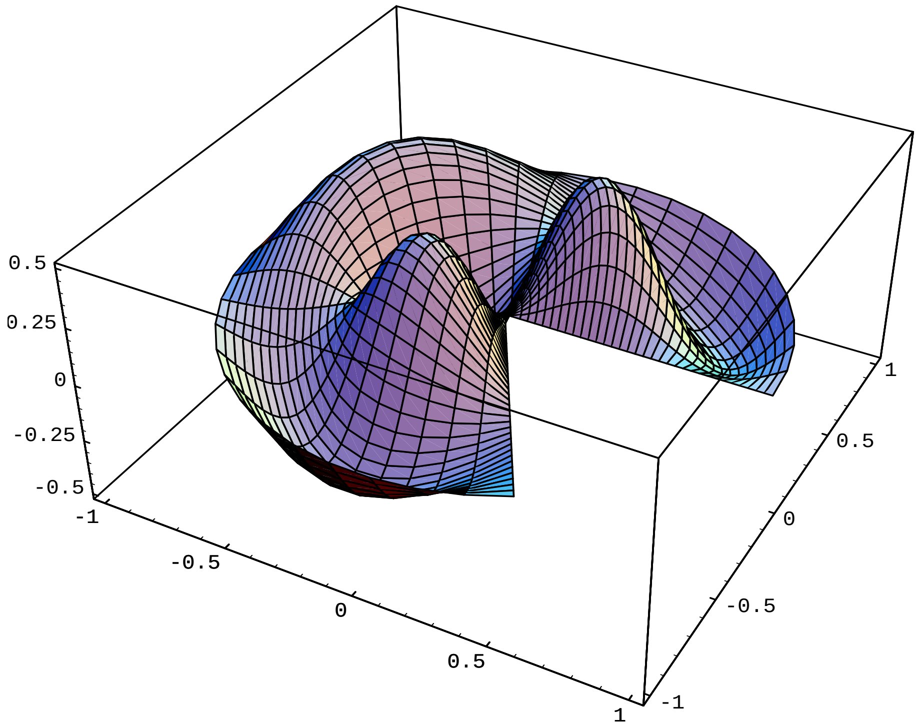

Bild B.2.10

$$u_{10}(r,\phi) = J_{9/5}(8.142320387 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{9\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{10} = 66.297381$$

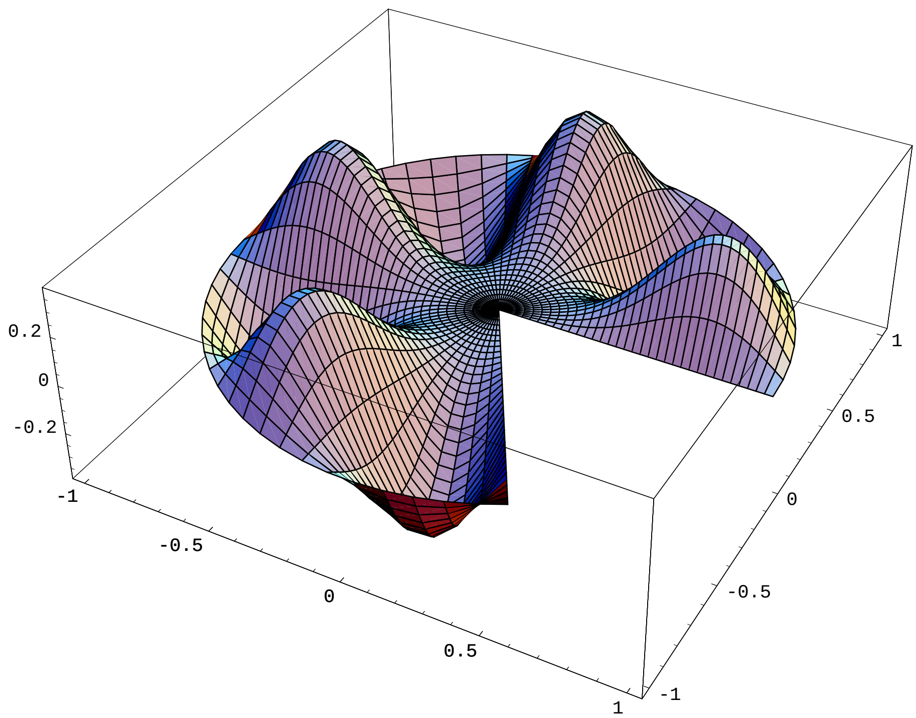

Bild B.2.11

$$u_{11}(r,\phi) = J_{24/5}(8.536501912 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{24\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{11} = 72.871865$$

B.3 Eigenfunktionen des Neumannproblems

Für den Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden im Folgenden die ersten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen, die sich aus (29) und (30) ergeben (vgl. auch Tabelle 4.1), dargestellt. Die zugehörigen Nullstellen der Besselfunktionen können aus Anhang A.3 entnommen werden.

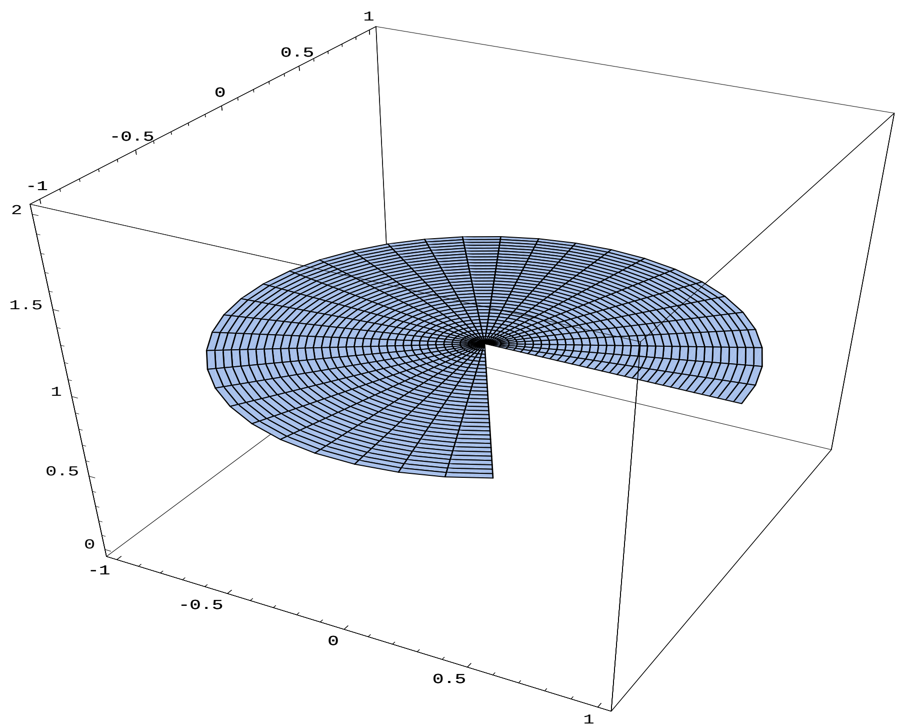

Bild B.3.1

$$u_1(r,\phi) = J_0(0 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{0}{5}\right) = 1 \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 0$$

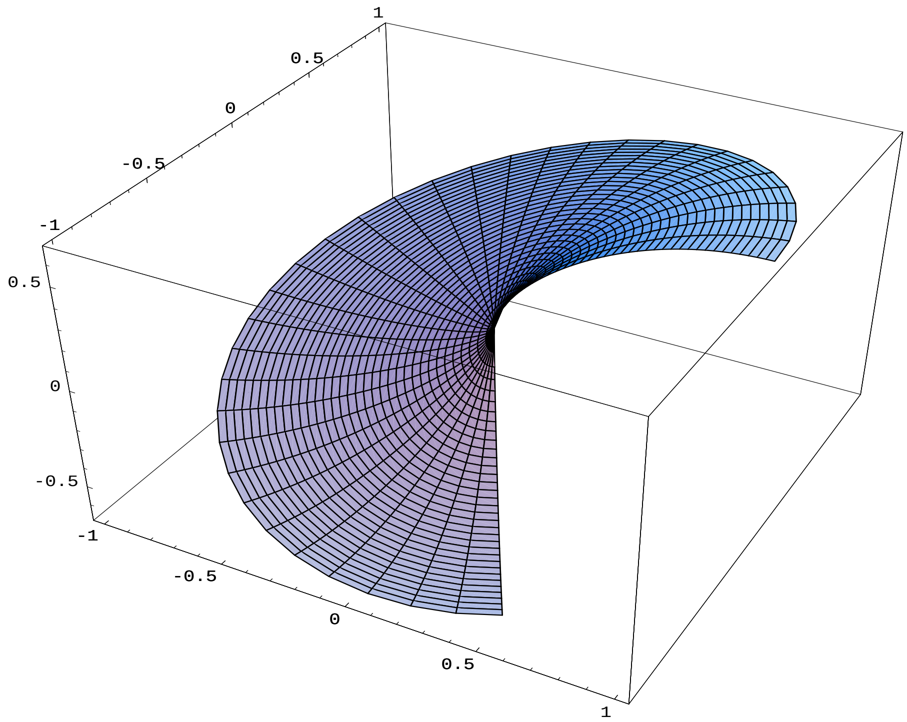

Bild B.3.2

$$u_2(r,\phi) = J_{3/5}(1.30868 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_2 = 1.712643$$

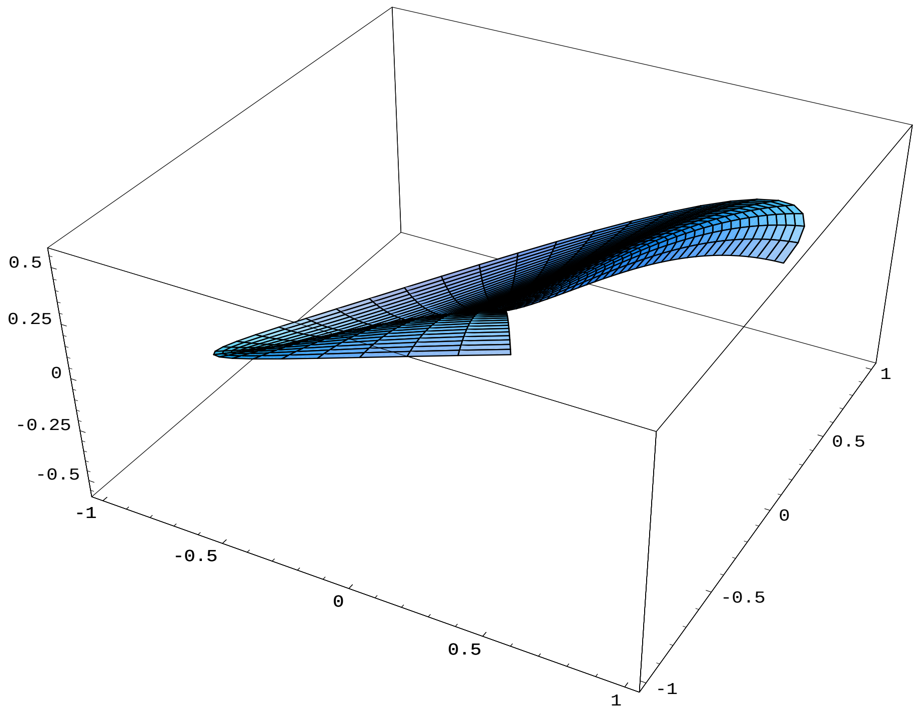

Bild B.3.3

$$u_3(r,\phi) = J_{6/5}(2.09314 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{6\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_3 = 4.381235$$

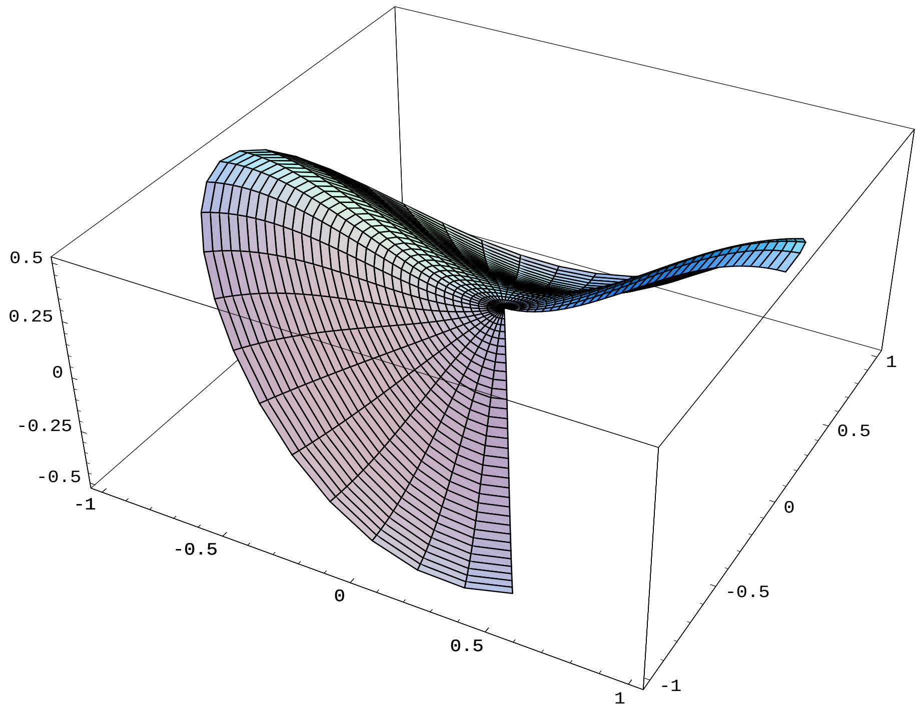

Bild B.3.4

$$u_4(r,\phi) = J_{9/5}(2.81898 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{9\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_4 = 7.946648$$

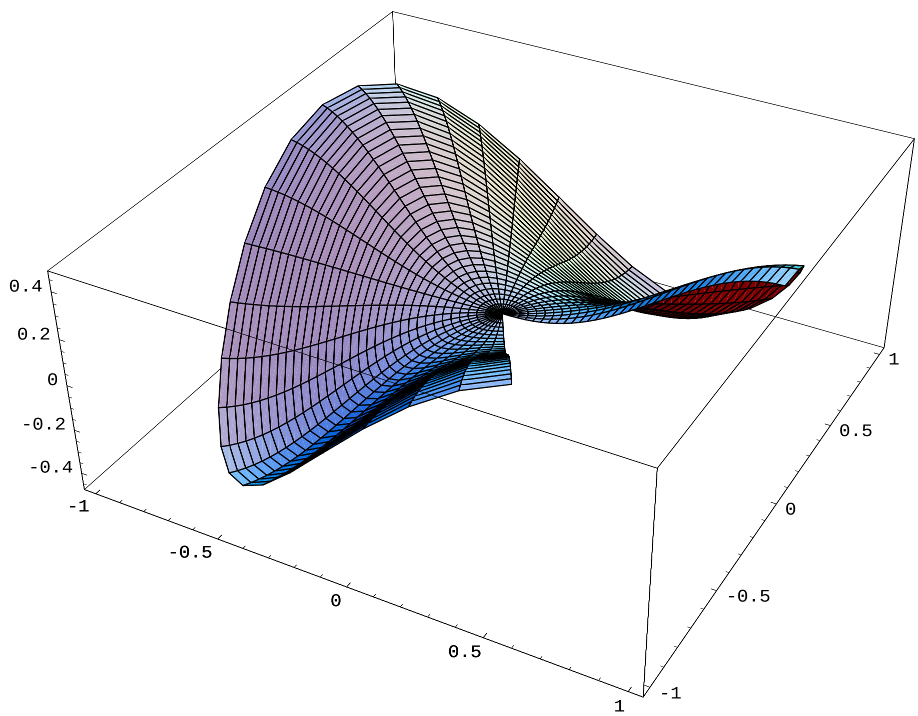

Bild B.3.5

$$u_5(r,\phi) = J_{12/5}(3.51802 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{12\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_5 = 12.376465$$

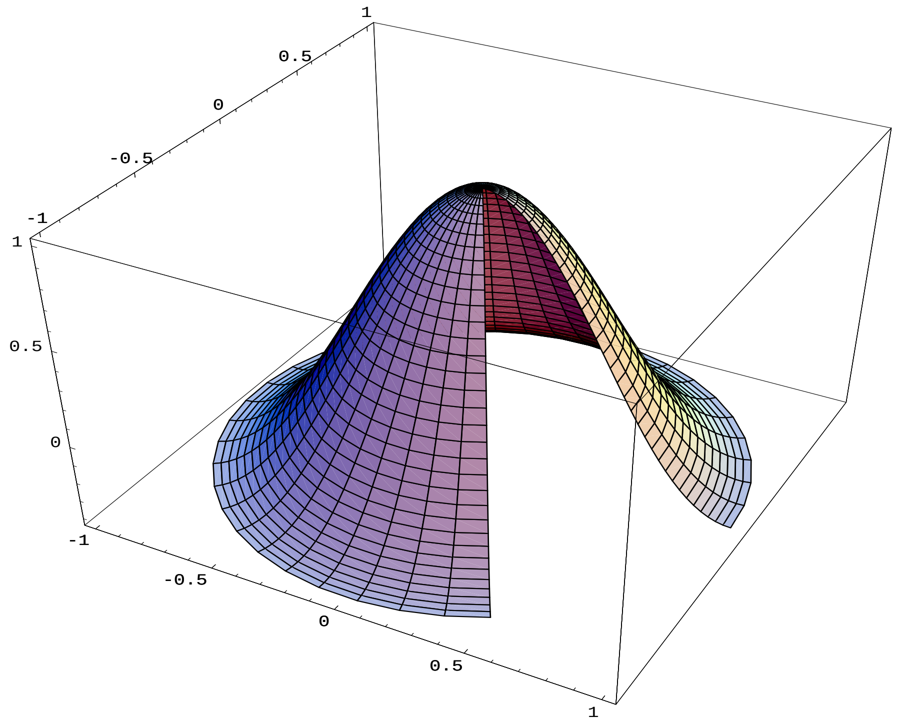

Bild B.3.6

$u_6(r, \phi) = J_0(3.83171 \cdot r)$ zu $\lambda_6 = 14.68200$

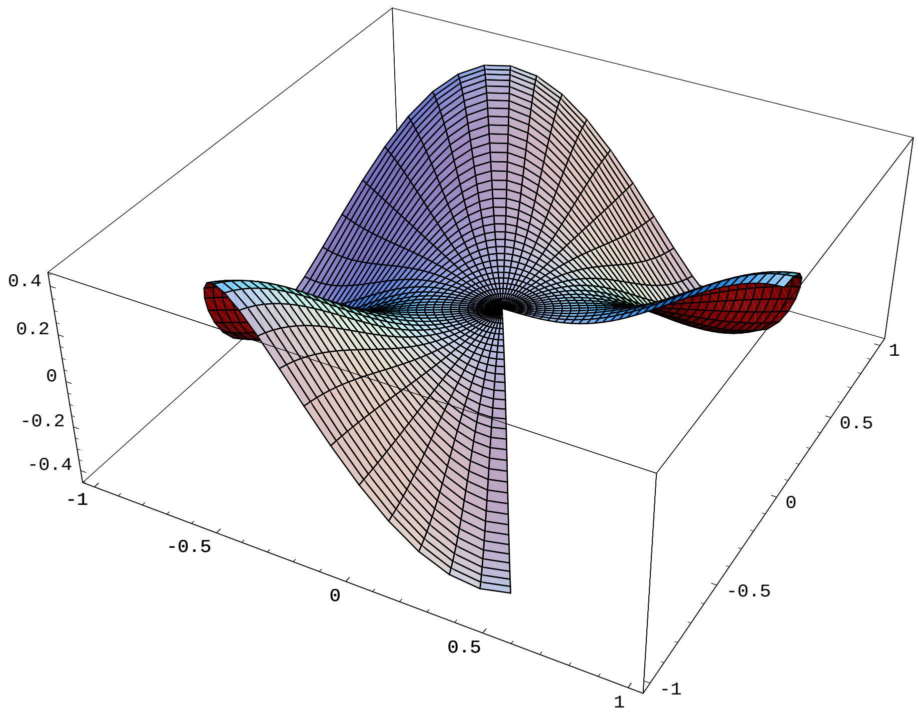

Bild B.3.7

$u_7(r, \phi) = J_{15/5}(4.20119 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{15\phi}{5}\right)$ zu $\lambda_7 = 17.649997$

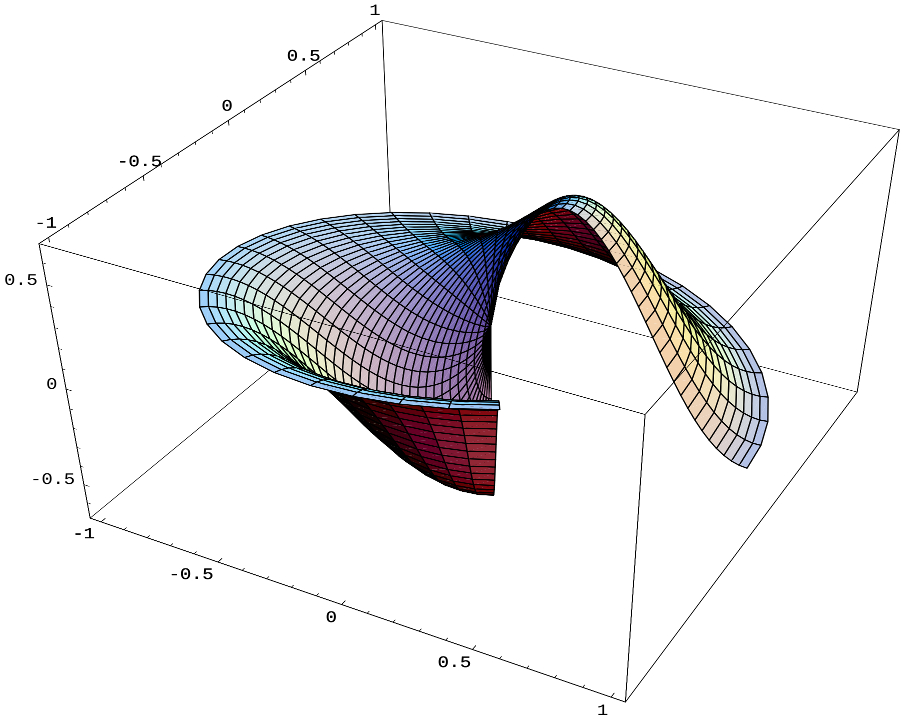

Bild B.3.8

$$u_8(r,\phi) = J_{3/5}(4.75261 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_8 = 22.587302$$

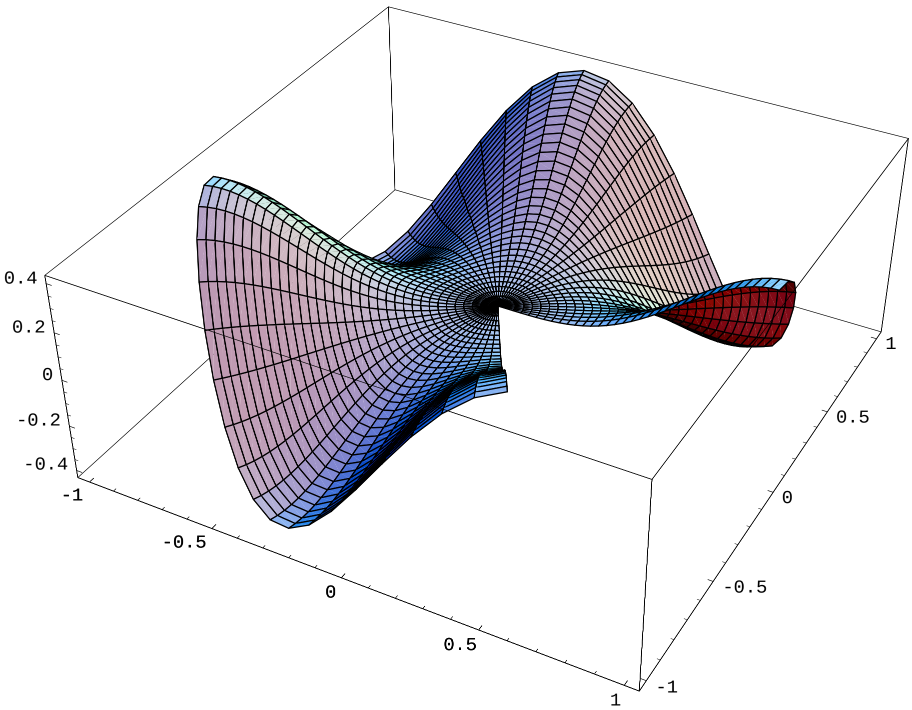

Bild B.3.9

$$u_9(r,\phi) = J_{18/5}(4.87368 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{18\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_9 = 23.752757$$

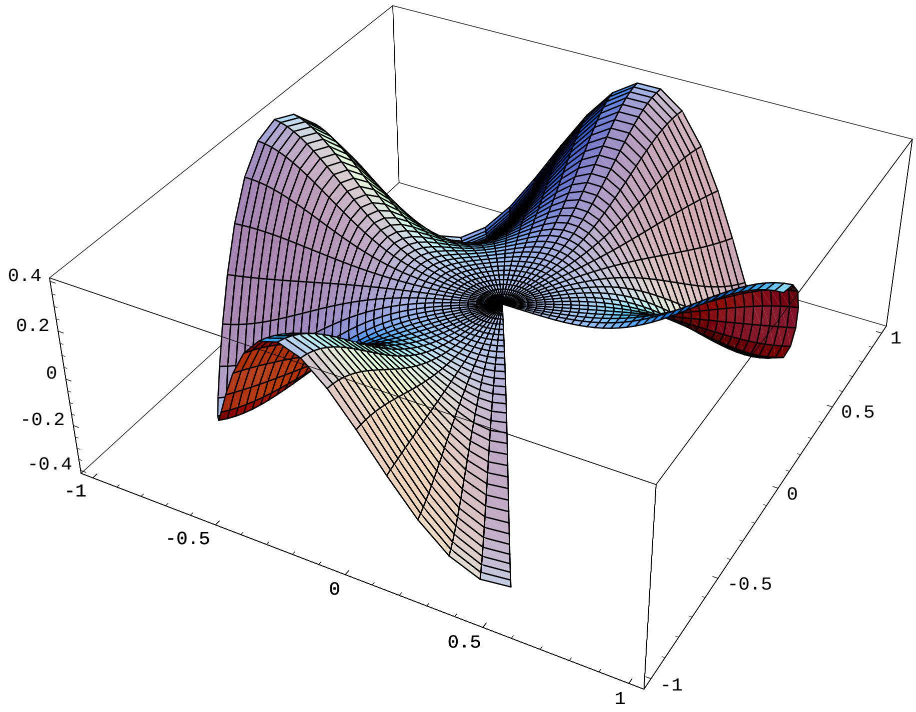

Bild B.3.10

$$u_{10}(r,\phi) = J_{21/5}(5.53839 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{21\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{10} = 30.673764$$

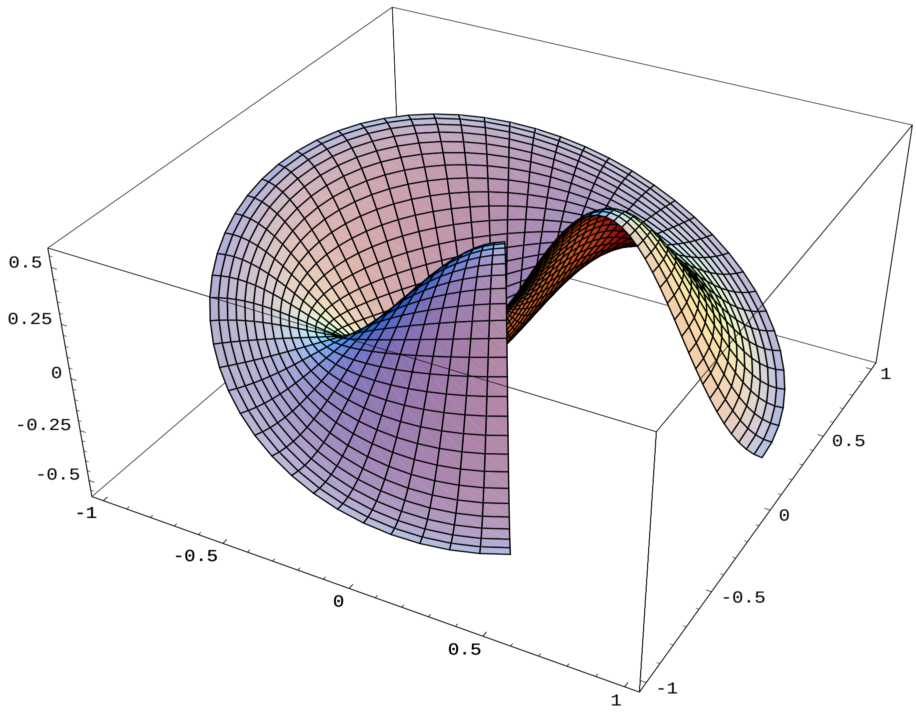

Bild B.3.11

$$u_{11}(r,\phi) = J_{6/5}(5.61354 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{6\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{11} = 31.511831$$

B.4 Eigenfunktionen des Problems mit gemischten Randdaten

Für den Kreissektor (vgl. Bild 1.1) mit

$$\omega = \frac{5\pi}{3} \quad \text{und} \quad R = 1$$

werden im Folgenden die ersten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen, die sich aus (35) und (36) ergeben (vgl. auch Tabelle 5.1), dargestellt. Die zugehörigen Nullstellen der Besselfunktionen können aus Anhang A.4 entnommen werden.

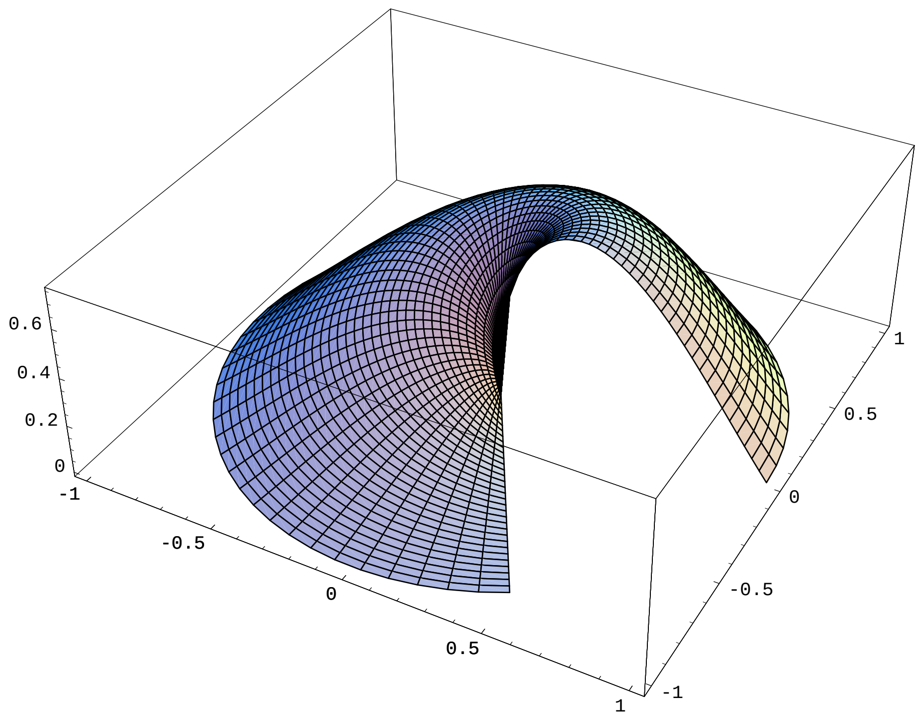

Bild B.4.1

$$u_1(r,\phi) = J_{3/10}(2.8541 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{3\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 8.14589$$

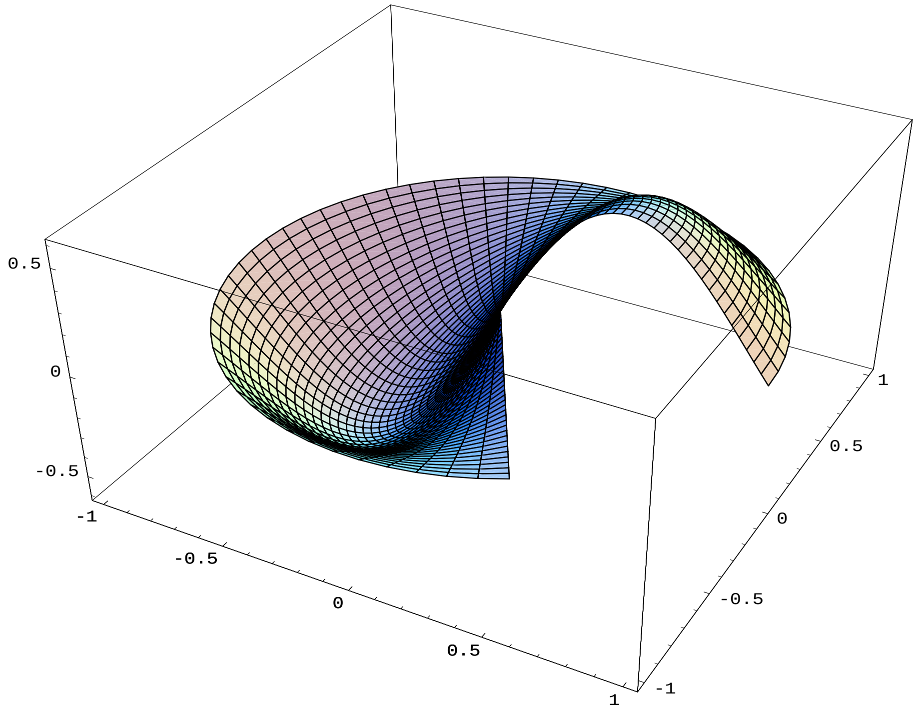

Bild B.4.2

$$u_2(r,\phi) = J_{9/10}(3.69635 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{9\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_2 = 13.6630$$

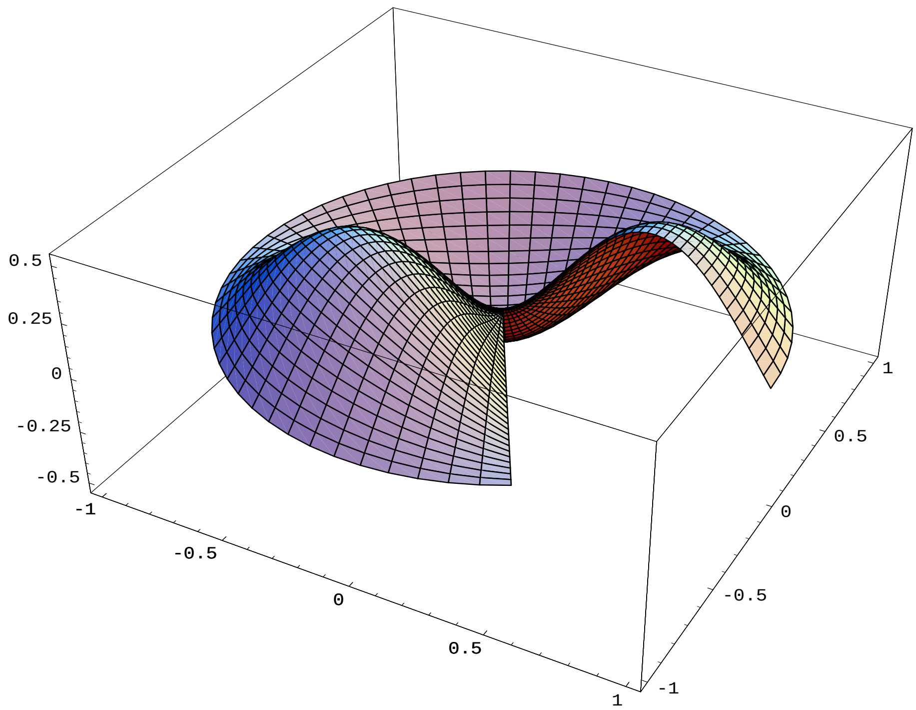

Bild B.4.3

$$u_3(r,\phi) = J_{15/10}(4.49341 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{15\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_3 = 20.1907$$

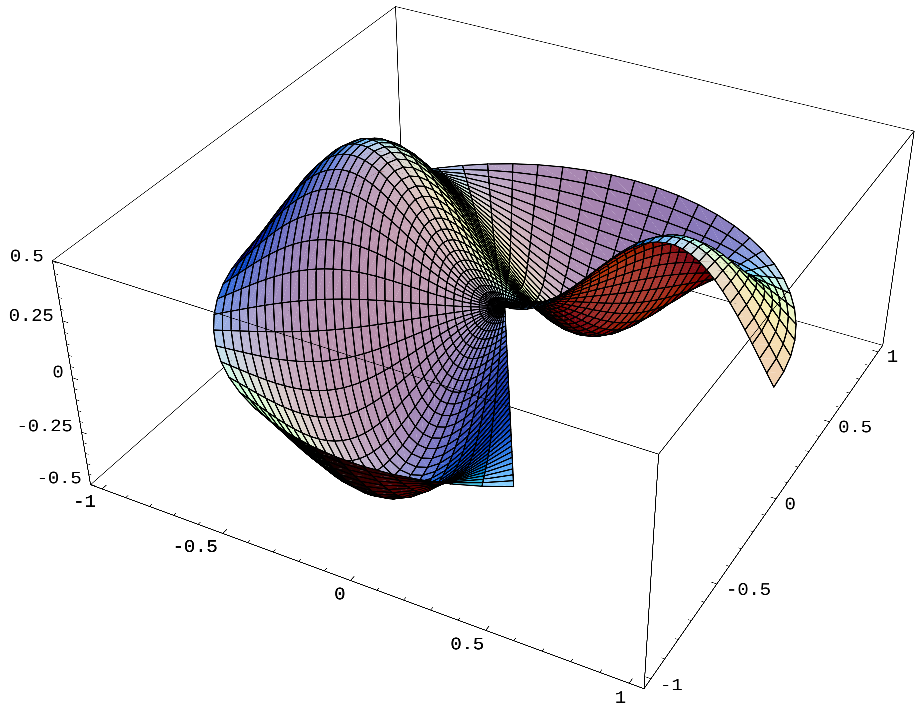

Bild B.4.4

$$u_4(r,\phi) = J_{21/10}(5.26222 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{21\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_4 = 27.69096$$

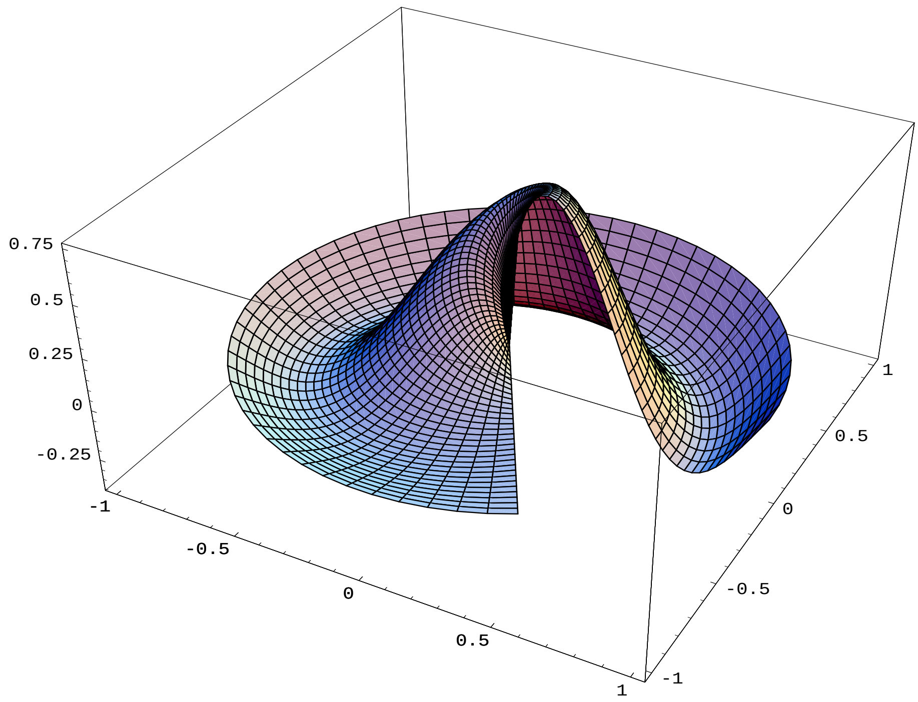

Bild B.4.5

$$u_5(r,\phi) = J_{3/10}(5.98222 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{3\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_5 = 35.78696$$

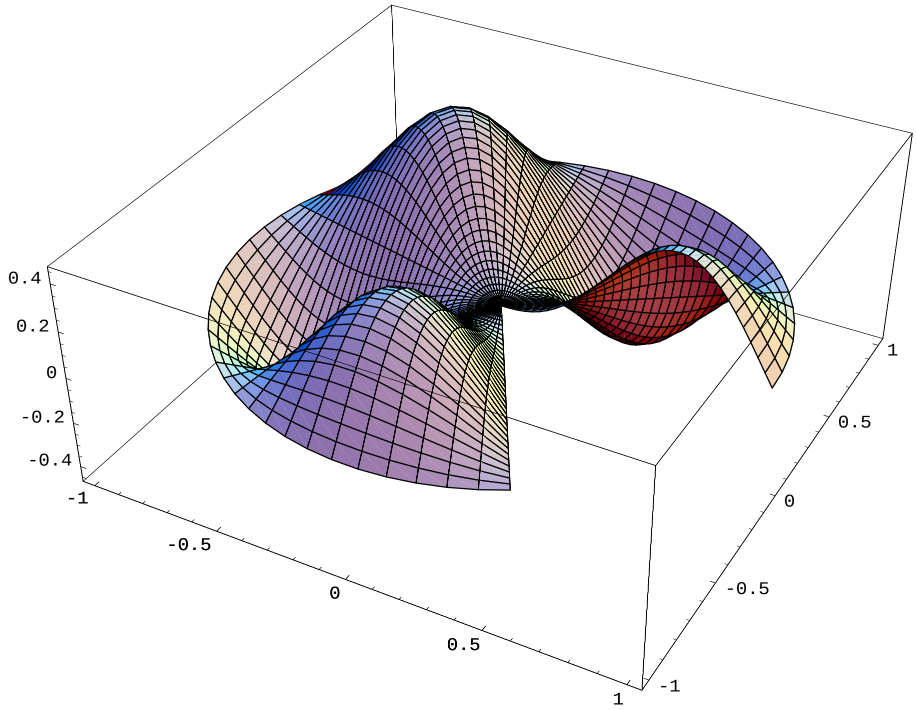

Bild B.4.6

$$u_6(r,\phi) = J_{27/10}(6.01134 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{27\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_6 = 36.13621$$

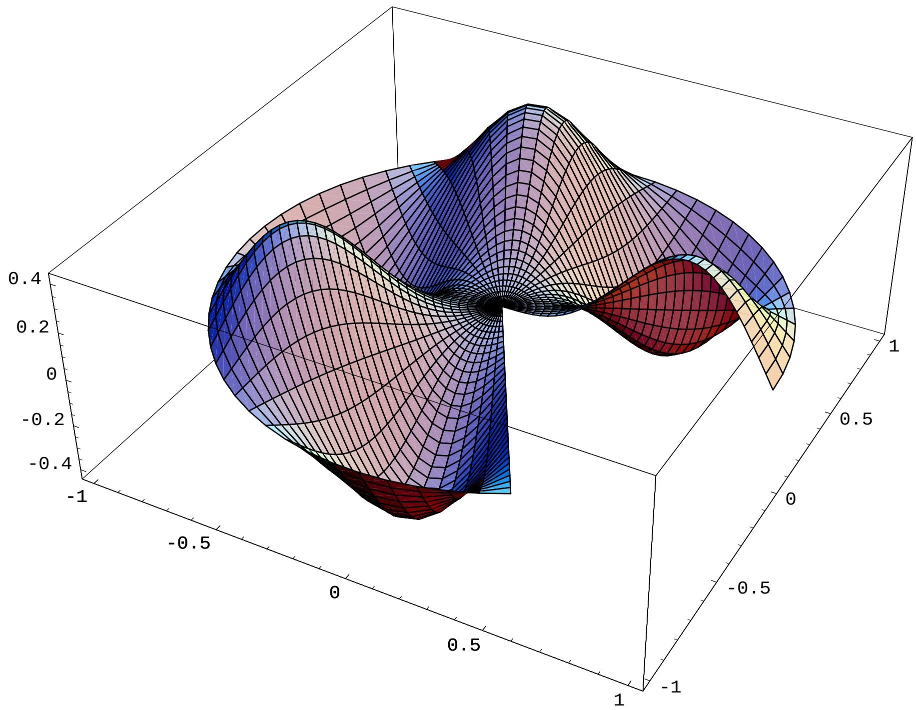

Bild B.4.7

$$u_7(r,\phi) = J_{33/10}(6.74578 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{33\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_7 = 45.50555$$

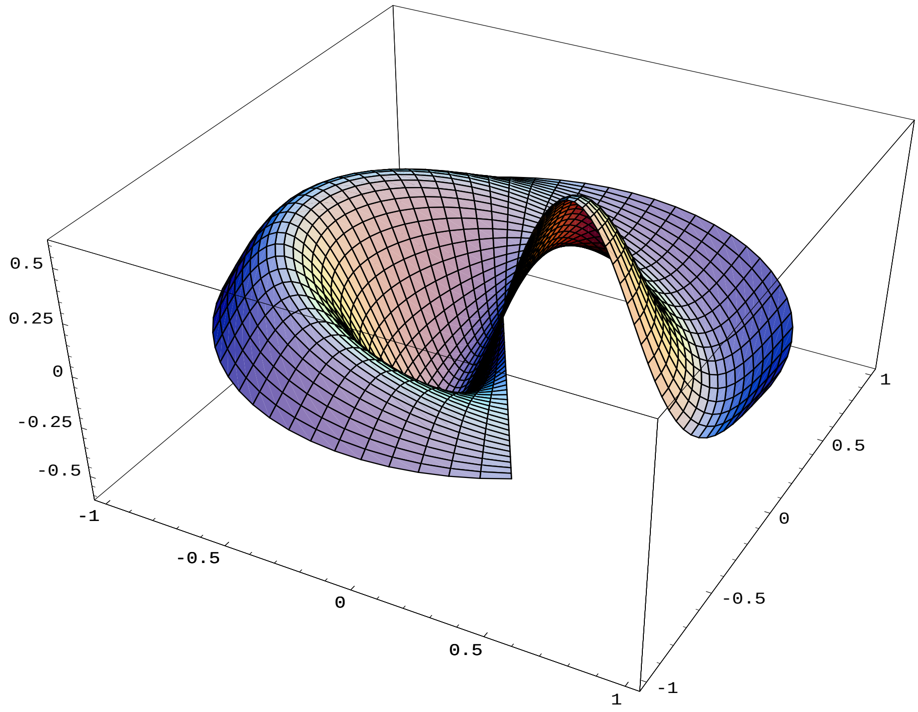

Bild B.4.8

$$u_8(r,\phi) = J_{9/10}(6.87113 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{9\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_8 = 47.21243$$

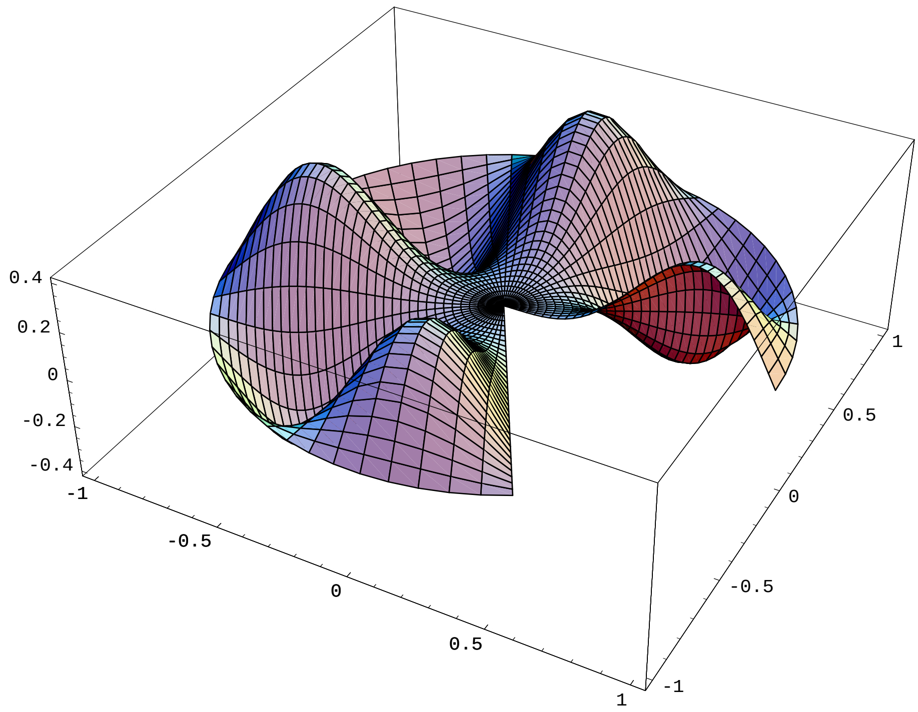

Bild B.4.9

$$u_9(r,\phi) = J_{39/10}(7.46879 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{39\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_9 = 55.78282$$

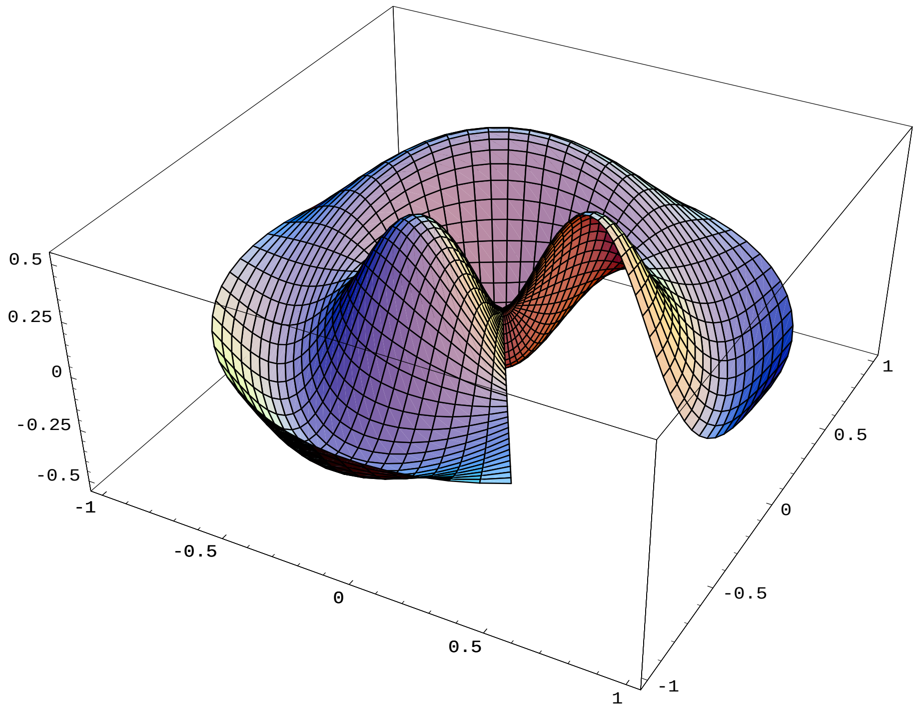

Bild B.4.10

$$u_{10}(r,\phi) = J_{15/10}(7.72525 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{15\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{10} = 59.6795$$

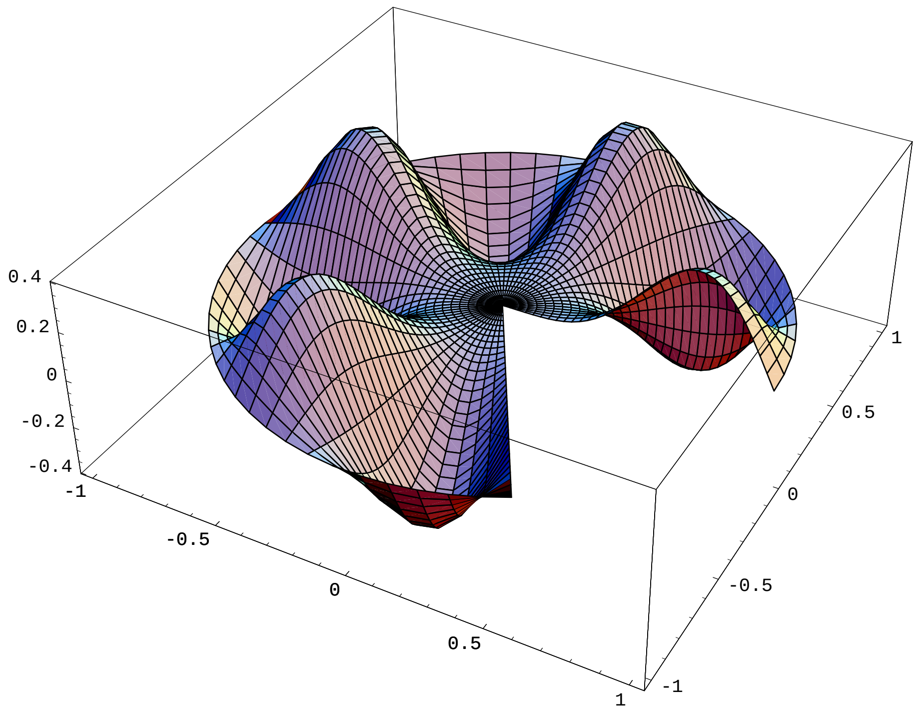

Bild B.4.11

$$u_{11}(r,\phi) = J_{45/10}(8.18256 \cdot r) \cdot \cos\left(\frac{45\phi}{10}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_{11} = 66.95429$$

Literatur

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.),
Handbook of Mathematical Functions.
(Dover Publications, Inc., 7. printing, New York 1970)

[2] H. Goering,H.G. Roos and L. Tobiska,
Finite Element Methode.
(Akademie Verlag, Berlin, 3.Aufl., 1993).

[3] Ch. Grossmann and H.G. Roos,
Numerik partieller Differentialgleichungen.
(Teubner, Stuttgart, 2.Aufl., 1994).

[4] W. Hackbusch,
Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.
(Teubner, Stuttgart, 1986).

[5] C. Johnson,
Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.
(Cambridge University Press, 5. printing, 1994)

[6] N. Sieber und H.-J. Sebastian,
Spezielle Funktionen.
(Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 2. Aufl., 1980).

[7] W.A. Strauss,
Partielle Differentialgleichungen.
(Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1995).

[8] H. Voss,
A new justification of the finite dynamic element methods.
(Int. S. Num. Math. 83, 232 — 242, Birkhäuser, Basel, 1987.)

[9] N.M. Wigley,
Mixed boundary value problems in plane domains with corners.
(Math. Z. 115 (1970) 33 — 52.)