Ein adaptiver finite Elementalgorithmus für Randeigenwertprobleme

Kai Rothe

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Differentialgleichungen und dynamische Systeme
Universität Hamburg

1 Einleitung

Bei der Approximationsgüte der Näherungslösung einer partiellen Differentialgleichung durch die finite Elementmethode spielt die, durch Elementunterteilung entstehende, Gitterstruktur im zu Grunde liegenden Bereich eine entscheidende Rolle. Zeichnet sich die Lösung eines Problems im gesamten Bereich durch einheitliches Glattheitsverhalten aus, so wird gleichmäßige Gitterverfeinerung in allen Teilbereichen in der Regel eine gute Approximation nach sich ziehen. Ist das Glattheitverhalten der Lösung in Teilbereichen jedoch unterschiedlich, so wird in einigen Teilbereichen eine grobe Elementunterteilung für eine gute Approximation ausreichen, während in anderen mit feinerer Unterteilung die Lösung besser erfasst werden kann. Adaptive Verfahren, die in einer Folge von Gittern in den Problembereichen zunehmende Verfeinerung herstellen, können hier mit Vorteil eingesetzt werden.

Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen mit Hilfe der finiten Elementmethode gibt es zahlreiche Programmpakete. Bei Randeigenwertaufgaben gehören adaptive Verfahren jedoch noch nicht zum Standardumfang der Programmpakete, deshalb wird in diesem Bericht eine mögliche Realisierung eines adaptiven finite Elementalgorithmus zur numerischen Lösung von Randeigenwertaufgaben dargestellt.

Zunächst wird die Problemklasse der elliptischen Randeigenwertaufgaben mit zwei Anwendungsbeispielen, bei denen Singularitäten in einspringenden Ecken auftreten, beschrieben. Um den adaptiven Algorithmus durchführen zu können, muss man in der Lage sein den Fehler einer vorliegenden Näherungslösung elementweise zu schätzen, um zu entscheiden, ob eine Unterteilung des Elements erforderlich ist oder nicht. Theoretische Grundlage dafür bildet eine Fehlerabschätzung, die, geeignet interpretiert, von statischen Problemen her übernommen werden kann. Anschließend wird mit Hilfe der Fehlerabschätzung ein Adaptivitätskonzept zur Eigenwertapproximation, für einen vom Anwender festzulegenden Teil des Spektrums, vorgestellt und die Leistungsfähigkeit an den Anwendungsbeispielen belegt.

Erwartungsgemäß stellt sich heraus, dass bei vorgegebener Elementanzahl, das durch adaptive Verfeinerung entstandene Gitter dem gleichförmig unterteilten deutlich überlegen ist. Durch geschickte Wahl, der im adaptiven Verfahren auftretenden Parameter, kann ein vorher festgelegter Bereich des Spektrums deutlich besser approximiert werden, als der Rest. Damit ist es auch möglich das Prinzip der Eigenwertapproximation bei finite Elementmethoden, das bei gleichmäßiger Elementverfeinerung die Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge immer schlechter approximiert, zu durchbrechen.

Abschließend werden die konkrete Berechnung des Fehlerindikators je Element, der Programmablaufplan des gesamten adaptiven Algorithmus und die Gitterverfeinerungsregeln dargestellt.

2 Randeigenwertprobleme

Für die im Folgenden betrachteten elliptischen Randeigenwertprobleme zweiter Ordnung auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nehmen wir an, dass es sich bei dem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ um einen stückweise hinreichend glatten, etwa um einen Lipschitz- oder polygonalen Rand handelt.

Das Randeigenwertproblem in seiner klassischen Formulierung lautet: Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ mit $u \not\equiv 0$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, genannt Eigenfunktion und Eigenwert, mit

$$\begin{aligned} -\nabla^T(\boldsymbol{k}\nabla u) + q\,u &= \lambda\,\rho\,u \quad \text{auf} \quad \Omega \\ \text{und} \qquad B\,u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Randbedingungen des Eigenwertproblems werden durch den Randoperator B beschrieben. Für die Dirichlet-Randbedingung wird beispielsweise $Bu = u$ gewählt und für die Neumann-Randbedingung $Bu = n^T\boldsymbol{k}\nabla u$. Dabei bezeichnet $n = (n_x, n_y)^T$ die äußere Normale auf Γ. Die Matrix $\boldsymbol{k} = (k_{ij})_{i,j=1,2}$ sei auf Ω symmetrisch und positiv definit mit $k_{ij} \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$. Für die Funktionen $q, \rho \in C(\overline{\Omega})$ wird zusätzlich $\rho(x,y) > 0$ und $q(x,y) \geq 0$ gefordert.

In üblicher Weise wird dem klassischen Eigenwertproblem (1) durch partielle Integration die variationelle Formulierung des Problems zugeordnet. Gesucht sind dabei $u \in H(\Omega)$ mit $u \not\equiv 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) = \lambda b(u,v) \quad \text{für alle} \quad v \in H(\Omega), \tag{2}$$

mit den auf $H(\Omega) \times H(\Omega)$ symmetrischen Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega (\nabla u)^T\,\boldsymbol{k}\,\nabla v \,+\, q\,u\,v\;d(x,y) \quad , \\ b(u,v) &:= \int_\Omega \rho\,u\,v\;d(x,y) \end{aligned}$$

und dem Sobolev Raum $H(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ für die Dirichlet-Randbedingung beziehungsweise $H(\Omega) = H^1(\Omega)$ für die Neumann-Randbedingung. Die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsforderungen an die Koeffizientenfunktionen $\boldsymbol{k}, q$ und ρ werden in der schwachen Formulierung ersetzt durch entsprechende Integrierbarkeitsforderungen.

Von den Bilinearformen a und b wird folgendes verlangt

$$\begin{array}{rcll} |a(u,v)| & \leq & C_1 ||u||_{1,\Omega}\, ||v||_{1,\Omega}\,, & \\ |b(u,v)| & \leq & C_2 ||u||_{0,\Omega}\, ||v||_{0,\Omega} & \text{für alle} \quad u,v \in H(\Omega) \quad \text{und} \\ a(u,u) & \geq & C_3 ||u||_{1,\Omega}^2 & \text{für alle} \quad u \in H(\Omega), \end{array} \tag{3}$$

mit positiven Konstanten C_1, C_2 und C_3. Damit sind durch $a(u,v)$ beziehungsweise $b(u,v)$ Skalarprodukte definiert mit zugehörigen Normen

$$||u||_a := \sqrt{a(u,u)} \quad \text{bzw.} \quad ||u||_b := \sqrt{b(u,u)} \quad ,$$

die äquivalent sind zu den üblichen Normen in $H(\Omega)$ beziehungsweise in $L_2(\Omega)$:

$$||u||_{1,\Omega} := \sqrt{\int_\Omega u^2 \,+\, u_x^2 + u_y^2 \, d(x,y)} \quad \text{bzw.} \quad ||u||_{0,\Omega} := \sqrt{\int_\Omega u^2 \, d(x,y)}\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen besitzt (2) die Eigenwerte (vgl. Babuška und Osborn [1])

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$$

mit zugehörigen $||\cdot||_b$ orthonormalen Eigenfunktionen

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \quad ,$$

die vollständig in $L_2(\Omega)$ sind.

Die Forderung (3) wird im Falle der reinen Neumann-Randbedingung und der Bilinearform

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega k_{11} u_x v_x + k_{22} u_y v_y \; d(x,y) \tag{4}$$

nicht erfüllt, da $\lambda_1 = 0$ Eigenwert zur konstanten Eigenfunktion u_1 ist. Um dieses Problem dennoch behandeln zu können, wird ein Spektralshift durchgeführt, d.h. auf beiden Seiten von (2) wird $c\, b(u,v)$ mit $c > 0$ addiert. Die Bilinearform (4) wird also ersetzt durch

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega k_{11} u_x v_x + k_{22} u_y v_y + c\,\rho\, u\, v \; d(x,y)\,. \tag{5}$$

Die Eigenwerte des geshifteten Problems (5) werden damit um c verschoben, lauten also $\lambda_j + c$.

2.1 Membranschwingung im Kreissektor

Gegeben sei der Kreissektor Ω vom Radius R mit dem Rand $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Für den Winkel ω wird $0 < \omega < 2\pi$ vorausgesetzt.

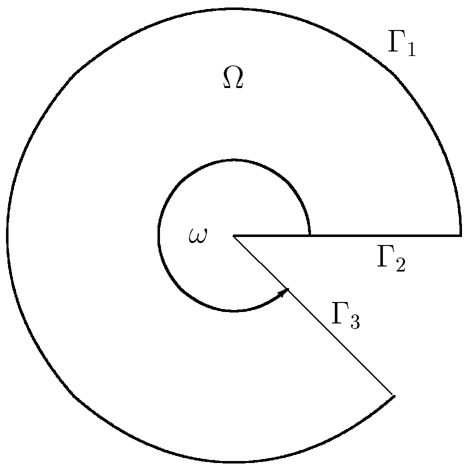

Bild 2.1 Kreissektor Ω

Die Eigenschwingungen $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ einer im Kreissektor Ω eingespannten Membran werden durch folgende Randeigenwertaufgabe in klassischer Formulierung beschrieben:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{auf} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

Die zugehörige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ ergibt sich damit aus folgendem Problem:

$$\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \, d(x,y) \quad = \quad \lambda \int_\Omega uv \, d(x,y) \,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \,. \tag{7}$$

Im Kreissektor können die Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen über einen Produktansatz in Polarkoordinaten berechnet werden (vgl. [7]). Dieses Beispiel dient als Paradigma, bei dem man auf Grund der Kenntnis der exakten Lösung eine genaue Aussage über die Approximationsgüte des adaptiven Algorithmus erhält. Für $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$ werden im Anhang A die ersten Eigenwerte mit einigen Eigenfunktionen für Vergleichszwecke angegeben. Eine genauere Untersuchung ergibt, dass sich bei einigen Eigenfunktionen in der einspringenden Ecke eine Singularität herausbildet. Wie sich aus den Bildern A.1.1 und A.1.3 ablesen und auch rechnerisch bestätigen lässt, gilt $u_1, u_6 \notin C^1(\overline{\Omega})$. Vom adaptiven Algorithmus wird bei diesen Eigenfunktionen im Bereich des Ursprungs also eine besonders feine Elementunterteilung erwartet.

2.2 Autolängsschnitt

Die Berechnung der akustischen Eigenfrequenzen und der zugehörigen Stehwellen in einem Autoinnenraum (vgl. Bild 2.2), bei starren und akustisch harten Wänden, führt (vgl. Schwarz [8] und [9]) auf ein Eigenwertproblem mit neumannschen Randdaten und wird durch folgende Randeigenwertaufgabe in klassischer Formulierung beschrieben:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{auf} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Die zugehörige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ ergibt sich aus dem folgenden Problem:

$$\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \, d(x,y) \;=\; \lambda \int_\Omega uv \, d(x,y) \,, \quad \text{für alle}\, v \in H^1(\Omega) \,. \tag{9}$$

Da auf dem gesamten Rand Neumannbedingungen vorliegen, ist der kleinste Eigenwert mit zugehöriger Eigenfunktion bekannt, d.h. es gilt $\lambda_1 = 0$ und $u_1 \equiv const.$ Die daraus resultierenden theoretischen und numerischen Probleme lassen sich durch den in (5) beschriebenen Spektralshift beheben.

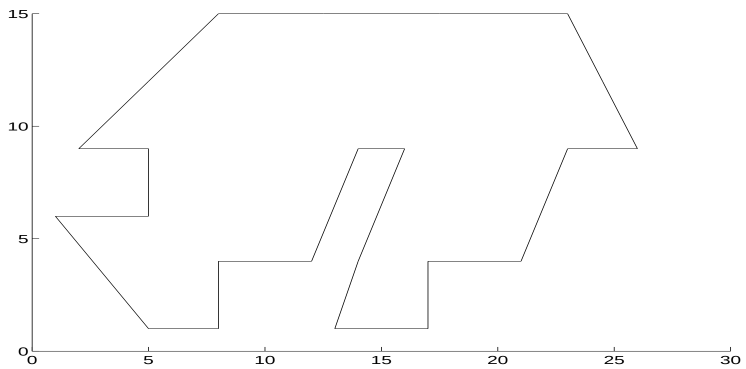

Bild 2.2 Grundgebiet Ω für den Autolängsschnitt

Auch hier weist das Grundgebiet einspringende Ecken auf, beispielsweise am oberen Ende des Fahrersitzes, so dass Eigenfunktionen mit Eckensingularitäten zu erwarten sind und adaptive Algorithmen gewinnbringend eingesetzt werden können.

3 Finite Elementraum und Fehlerabschätzung

Das Grundgebiet Ω des Randeigenwertproblems (2) wird auf zulässige Weise trianguliert mit der üblichen Zerlegung in eine Menge $T = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m\}$

von Dreiecken τ_i:

$$\Omega = \bigcup_{\tau \in T} \tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cdots \cup \tau_m \,.$$

Als finite Elementraum wird der Raum V_h mit linearen Dreieckselementen gewählt. Der Index h gibt für die Triangulierung T den maximalen Dreiecksdurchmesser über alle Dreiecke τ_i an. Im Falle dirichletscher Randbedingungen wird V_h also folgendermaßen definiert:

$$V_h := \{ v \in C(\Omega) \mid v|_\Gamma = 0 \text{ und } v|_\tau \text{ linear für alle } \tau \in T \} \ .$$

Liegen reine Neumann-Bedingungen auf dem Rand vor, so entfällt die Bedingung $v|_\Gamma = 0$. Die für die Beispiele im adaptiven Algorithmus verwendeten Starttriangulierungen T_0 sind im Anhang B angegeben.

Eine adaptive Verbesserung der Eigenwertnäherung aus der finiten Elementmethode ist möglich, wenn $|\lambda_h - \lambda|/|\lambda|$ abgeschätzt werden kann. Es stellt sich heraus, dass dieser relative Fehler im Wesentlichen durch den Fehler $||u_h - w||_a$ aus dem statischen Problem (10) abschätzbar ist (vgl. (11)). Damit können, einer Idee von Babuška und Rheinboldt [2] folgend, statische Fehlerschätzer auch auf Eigenwertprobleme angewendet werden.

Es seien λ_h und $u_h \in V_h$ die finite Elementapproximationen des Eigenwertes λ und der zugehörigen $|| \cdot ||_b$ normierten Eigenfunktion u, d.h. es gilt:

$$a(u_h, v) \quad = \quad \lambda_h b(u_h, v) \quad \text{für alle} \quad v \in V_h \,.$$

Entscheidend für die folgende Fehlerabschätzung ist die Verwendung konformer Elemente, d.h. es muss $V_h \subset H(\Omega)$ gelten. Wir können u_h auch als finite Elementlösung eines statischen Problems mit der rechten Seite

$$f(v) := \lambda_h b(u_h, v)$$

interpretieren, dessen exakte Lösung w die folgende Gleichung erfüllt

$$a(w, v) \quad = \quad f(v) \quad \text{für alle} \quad v \in H(\Omega). \tag{10}$$

Satz:
Unter den in (3) an die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ gestellten Voraussetzungen und mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$\left| \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda} \right| \quad \leq \quad C \, ||u_h - w||_a \quad . \tag{11}$$

Beweis:

Aus Gleichung (10) ergibt sich für alle $v \in H(\Omega)$

$$a(u_h, v) \quad = \quad a(u_h, v) - a(w, v) + \lambda_h b(u_h, v) \,. \tag{12}$$

Ziehen wir (2) von (12) ab, so folgt für alle $v \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u_h - u, v) &= a(u_h - w, v) + \lambda_h b(u_h, v) - \lambda b(u, v) \\ &= a(u_h - w, v) + (\lambda_h - \lambda) b(u_h, v) + \lambda b(u_h - u, v). \quad (13) \end{aligned}$$

Wenn wir in (13) $v = u$ wählen, erhalten wir wegen $u_h - u \in H(\Omega)$ und (2)

$$a(u_h - w, u) + (\lambda_h - \lambda) b(u_h, u) = 0.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$|\lambda_h - \lambda| \, |b(u_h, u)| = |a(u_h - w, u)| \leq ||u_h - w||_a ||u||_a$$

und damit wegen $||u||_a = \sqrt{a(u,u)} = \lambda^{1/2} \sqrt{b(u,u)}$

$$\left| \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda} \right| \leq \frac{\sqrt{b(u,u)}}{\lambda^{1/2} |b(u_h, u)|} ||u_h - w||_a \quad . \quad (14)$$

Da die Eigenfunktion u als $|| \cdot ||_b$ normiert angenommen wurde und wegen der Konvergenz der finite Elementapproximation gegen die kontinuierliche Lösung, d.h. $u_h \to u$, ist der Bruch auf der rechten Seite von (14) beschränkt durch eine positive Konstante C und wir erhalten (11). □

Im Hinblick auf mögliche Erweiterung in der Anwendung sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass sich die Gültigkeit des Satzes nicht auf die in (1) dargestellte Klasse von Randeigenwertaufgaben zweiter Ordnung beschränkt. Maßgebend ist die schwache Formulierung (2) mit den Eigenschaften (3). Das im Folgenden vorgestellte adaptive Konzept ist in diesem Sinne erweiterbar, falls es für die gegebenen Bilinearformen a und b zusätzlich noch gelingt, beispielsweise aus der Fehlergleichung (22), einen elementweisen Fehlerschätzer zu entwickeln.

4 Adaptivitätskonzepte und Fehlerschätzer

Das Hauptergebnis aus dem letzten Abschnitt ist Ungleichung (11). Sie besagt, dass der relative Fehler in der Eigenwertapproximation beschränkt ist durch eine Konstante und den Fehler eines zugehörigen statischen Problems. Für adaptive Eigenwertapproximationen können wir also die für statische Probleme entwickelten Fehlerschätzer oder Fehlerindikatoren verwenden.

Zunächst beschreiben wir, wie in [5], Fehlerschätzer und -indikatoren für statische Probleme. Wollen wir nur ein einziges Eigenpaar approximieren, so kann dieser Fall direkt auf das statische Problem (10) angewendet werden. Sind wir aber an der adaptiven Approximation mehrerer Eigenwerte interessiert, so ist eine Erweiterung erforderlich. Verwendet werden die entwickelten Adaptivitätskonzepte dann im dritten Schritt des adaptiven Algorithmus, wie er in Bild 6.1 dargestellt ist.

Wir nehmen an, dass eine Approximationsfolge bestehend aus Elementen u_h aus der finiten Elementmethode für die exakte Lösung w eines statischen Problems vorliegt. Dann heißt η Fehlerschätzer für $||u_h - w||$, falls positive Konstanten k und K für alle u_h existieren, mit

$$k\,\eta \;\leq\; ||u_h - w|| \;\leq\; K\,\eta\,. \tag{15}$$

Damit gilt dann $\lim\limits_{u_h \to w} \eta = 0$. Der Fehlerschätzer heißt asymptotisch exakt, falls mit $s > 0$ überdies gilt

$$||u_h - w|| \;=\; (1 + O(h^s))\,\eta\,.$$

Man spricht von einem Fehlerindikator, falls η beispielsweise aus einer Heuristik entstanden ist, den Fehler $||u_h - w||$ akzeptabel annähert, aber die Ungleichungen (15) nur näherungsweise erfüllt.

Bei der finiten Elementmethode ergibt sich der gesamte Fehler häufig aus der Summation der Fehler je Element τ der Triangulierung T, so dass sich der Fehlerschätzer η oft aus der Summation lokaler elementweiser Fehlerschätzer η_τ in folgender Weise zusammensetzt

$$\eta^2 \;=\; \sum_{\tau \in T} \eta_\tau^2 \quad . \tag{16}$$

Damit ist die Grundlage für einen adaptiven Algorithmus geschaffen. Ist nämlich der Fehler in einem Element groß, angezeigt durch den entsprechenden Fehlerschätzer η_τ, so wird in dem Bereich schlecht approximiert und das Element im folgenden Gitter des adaptiven Algorithmus verfeinert. Die hier verwendete Strategie zur Dreiecksverfeinerung wird aus dem Sofwarepaket PLTMG (vgl. [3]) übernommen und in Abschnitt 7 genauer beschrieben. Beim Kreissektor beispielsweise erwarten wir eine starke Verfeinerung auf Grund der Singularität im Bereich der einspringenden Ecke. Damit stellt sich, in Abhängigkeit davon wo sich das Element im Gebiet Ω befindet, eine unterschiedliche Elementgröße ein, die später im Algorithmus zu etwa gleich großen Summanden in (16) führen wird. Von Goering, Roos und Tobiska [5] wird in diesem Sinne das folgende Konzept vorgeschlagen:

1. Wähle eine Konstante γ mit $0 \leq \gamma \leq 1$
2. Es sei $\eta_{\max} := \max \eta_\tau$ für alle Dreiecke $\tau \in T$
3. Verfeinere τ, falls $\quad \eta_\tau \;\geq\; \gamma\,\eta_{\max}\,.$

Tabelle 4.1 Adaptives Konzept 1

Mit dem Parameter γ, der a priori gewählt wird, soll die Sensitivität der Verfeinerung festgelegt werden. Bei $\gamma = 1$ werden nur die Elemente mit maximalem Fehler verfeinert und bei $\gamma = 0$ alle Elemente.

Die numerische Praxis zeigt jedoch, dass die Wahl von γ problematisch ist. Wählt man γ zu groß, so werden unter Umständen im neuen Gitter zu wenig Elemente unterteilt. Dies führt im nächsten Schritt zu einer Rechnung auf einem vergleichbar großen Gitter, die im Ergebnis keinen wesentlichen Approximationszugewinn nach sich zieht und daher unverhältnismäßig Zeit kostet. Wählt man γ zu klein, so erhält man im neuen Gitter eine eher gleichmäßige Unterteilung, also keine echte Adaptivität. Erschwerend kommt hinzu, dass bei konstant gehaltenem γ in einer Gittersequenz die Anzahl der zu verfeinernden Dreiecke stark differiert. Dies liegt daran, dass die Gesamtanzahl der Dreiecke wächst und außerdem die Grundtendenz besteht, dass sich die η_τ in ihrer Größenordnung untereinander annähern, wann dieser Zustand jedoch eintritt ist a priori nicht feststellbar. Dieses Verhalten spricht für ein sich je Gitter dynamisch anpassendes γ, dass der Tendenz zur gleichmäßigen Verfeinerung entgegenwirkt. Insgesamt besteht der Bedarf an einer moderaten und kalkulierbaren Gittervergrößerung, die beispielsweise durch Verfeinerung einer fest vorgegebenen Elementanzahl realisiert werden kann.

Mit dem folgenden Konzept kann man unter Vorgabe von δ, der Mindestanzahl zu verfeinernder Elemente, eine entsprechende Gittervergrößerung je Schritt erreichen.

1. Wähle $\gamma = 0.95$ und δ und berechne $\eta_{\max} := \max \eta_\tau$
2. Setze $i = 0$ (Zähler der zur Verfeinerung markierten Dreiecke)
3. Schleife über alle Dreiecke τ
   a) Wenn Dreieck τ noch nicht markiert ist und $\eta_\tau \geq \gamma\, \eta_{\max}$,
      dann markiere Dreieck τ und setze $i := i + 1$
   b) Wenn $i \geq \delta$ oder $i \geq$ Anzahl der Dreiecke gehe zu 5.
   Schleifende
4. Setze $\gamma := \gamma - 0.05$ und gehe zu 3.
5. Generiere das neue Gitter

Tabelle 4.2 Adaptives Konzept 2

Am Beispiel des Autolängsschnittes wird in der folgenden Tabelle 4.9 gezeigt, wie sich γ dynamisch anpasst.

Die tatsächliche Anzahl der zu verfeinernden Dreiecke ist in der Regel allerdings höher als δ, wie aus Tabelle 4.7 ablesbar ist, da man sonst keine zulässige Triangulierung erhält. Auf zulässige Triangulierungen wird in Abschnitt 7 im Rahmen der Gitterverfeinerung eingegangen. Je nach Vorgabe von δ und der Gesamtanzahl der auszuwertenden Gitter kann man so die Größenordnung der Dimension des für das letzte Gitter zu lösenden Systems steuern (vgl. Tabelle 4.8). Damit ist auch eine bessere Vergleichbarkeit der

Ergebnisse auf den einzelnen Gittern gegeben. Dies ist dann wichtig, wenn man bei vorgegebener Dimension des algebraischen Systems Strategien entwickeln möchte, beispielsweise für die Gewichtung des lokalen Fehlerschätzers aus (19).

Die bisher vorgeschlagenen Adaptivitätskonzepte beziehen sich nur auf die Verbesserung eines einzigen Eigenwertes. Die numerischen Beispiele (vgl. Tabelle 4.10) bestätigen auch die Erwartung, dass bei fest vorgegebenem Eigenwert im lokalen Fehlerschätzer dieser Eigenwert auch besonders gut approximiert wird.

Man kann also die bei gleichmäßiger Verfeinerung vorliegende Tendenz, dass kleinere Eigenwerte besser approximiert werden als größere, mit diesem Adaptivitätskonzept durchbrechen. Die Konsequenz ist aber, dass nicht im Fehlerschätzer berücksichtigte Eigenwerte, ob größer oder kleiner, auch entsprechend schlechter approximiert werden.

Möchten wir nun eine vorgegebene Zahl von Eigenwerten, numeriert mit $j = 1, \cdots, n$, in einem bestimmten Teil des Spektrums gleichmäßig gut approximieren, so werden wir das bisherige Konzept erweitern müssen. In die Fehlerschätzer werden die für diese Eigenwerte bisher ermittelten Approximationsinformationen mit integriert werden müsssen. Wir werden dem dadurch gerecht, dass wir die durch $\tilde{\omega}_j$ gewichtete Summe der relativen Fehler der Eigenwertapproximationen

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\omega}_j \left| \frac{\lambda_{h,j} - \lambda_j}{\lambda_j} \right|^2 \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\omega}_j \geq 0 \tag{17}$$

versuchen adaptiv zu verbessern. Um (17) in den adaptiven Prozess einzubinden, wenden wir (11) in Verbindung mit (15) und (16) an:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \tilde{\omega}_j \left| \frac{\lambda_{h,j} - \lambda_j}{\lambda_j} \right|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \tilde{\omega}_j \, ||u_{h,j} - w_j||_a^2 \leq \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \tilde{\omega}_j K_j^2 \, \eta_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \tilde{\omega}_j K_j^2 \left(\sum_{\tau \in T} \eta_{j,\tau}^2 \right) = \sum_{\tau \in T} \left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{C_j^2 \tilde{\omega}_j K_j^2}_{=:\omega_j} \eta_{j,\tau}^2 \right) \\
&= \sum_{\tau \in T} \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j \, \eta_{j,\tau}^2 \right) .
\end{aligned} \tag{18}$$

Durch Vorgabe der Gewichte ω_j können wir so indirekt Einfluss auf die Ausgangsgewichtung in (17) nehmen. Wir sind also in der Lage Schwerpunkte zu setzen, insbesondere wird das Gewicht ω_j nur dann größer als Null gesetzt, wenn ein vorrangiges Interesse an der Verbesserung des j-ten Eigenwertes besteht.

Der lokale Fehlerschätzer zum Element τ für den j-ten Eigenwert $\eta_{j,\tau}^2$ wird bei mehreren gesuchten Eigenwerten daher ersetzt durch den gewichteten lokalen Fehlerschätzer zum Element τ

$$\tilde{\eta}_\tau^2 \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, \eta_{j,\tau}^2\,. \tag{19}$$

Wollen wir mehrere Eigenwerte adaptiv gleichmäßig gut approximieren, so werden wir im Adaptivitätskonzept 2 in Tabelle 4.2 den elementweisen Fehlerschätzer η_τ also durch $\tilde{\eta}_\tau$ ersetzen. Am Beispiel des Autolängsschnittes in Tabelle 4.11 stellt sich heraus, dass eine Gleichgewichtung der ω_j für die Eigenwerte, an denen Interesse besteht, eine gute Wahl ist, falls a priori keine Informationen über das Approximationsverhalten der Eigenwerte vorliegt.

Wie die Fehlerschätzer beziehungsweise die hier verwendeten Fehlerindikatoren $\eta_{j,\tau}$ konkret berechnet werden, wird in Abschnitt 5 beschrieben.

4.1 Beispiel: Kreissektor

Am Beispiel des Kreissektors mit dem Startgitter T_0 aus Anhang B.1 veranschaulichen wir, dass in Singularitäten an einspringenden Ecken der Approximationsfehler besonders hoch ist und damit das Gitter dort verstärkt verfeinert wird. Wir verwenden das Adaptivitätskonzept 2 mit einer garantierten Mindestanzahl zu verfeinernder Elemente von $\delta = 100$. Im gewichteten Fehlerschätzer (19) wählen wir jeweils nur ein von Null verschiedenes Gewicht ω_j, um die spezielle Gitterverfeinerung, die sich bei Approximation der zugehörigen Eigenfunktion u_j einstellt, besser herauszustellen. Die Bilder 4.3 - 4.6 zeigen alle das sich nach 8 Adaptionsschritten einstellende Gitter T_8.

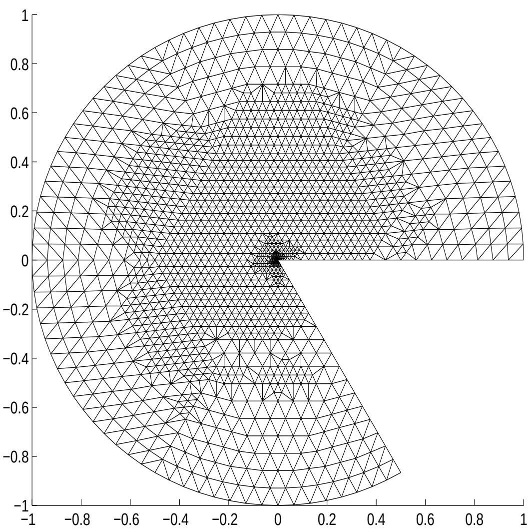

Bild 4.3 Gitter T_8 (Dimension = 1645) mit $\delta = 100$ und $\omega_1 = 1$ zur Approximation von u_1

Den Ausführungen in Abschnitt 2.1 und speziell den Bildern A.1.1 und A.1.3 im Anhang entnehmen wir, dass $u_1, u_6 \notin C^1(\overline{\Omega})$ gilt, was hervorgerufen wird durch die Singularität der ersten Ableitung im Ursprung. Dementsprechend stellt sich an der einspringenden Ecke ein großer Approximationsfehler ein, auf den der adaptive Algorithmus mit starker Verfeinerung in dem Bereich reagiert, verdeutlicht in den Bildern 4.3 und 4.4.

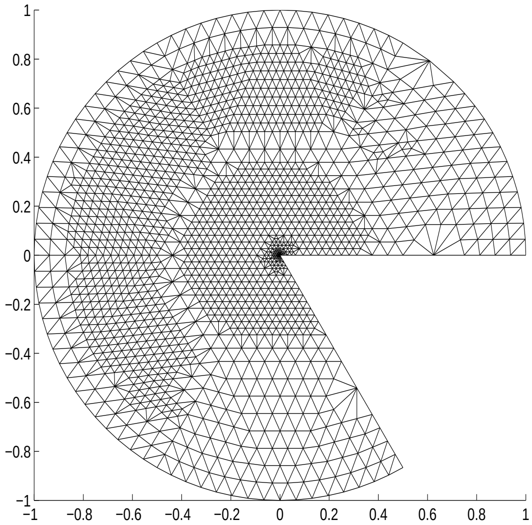

Bild 4.4 Gitter T_8 (Dimension = 1649) mit $\delta = 100$ und $\omega_6 = 1$ zur Approximation von u_6

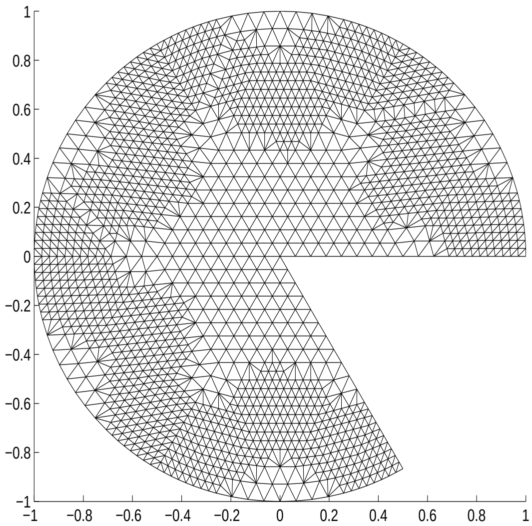

Bild 4.5 Gitter T_8 (Dimension = 1778) mit $\delta = 100$ und $\omega_5 = 1$ zur Approximation von u_5

Für die glatteren Eigenfunktionen $u_5, u_7 \in C^2(\overline{\Omega})$ stellen sich in T_8 keine derart lokal extremen Verfeinerungen ein. Dennoch zeigt ein Vergleich der

Gitter aus den Bildern 4.5 und 4.6 mit den im Anhang dargestellten Eigenfunktionen in den Bildern A.1.2 und A.1.4, dass sich die Symmetrien der Eigenfunktionen als Symmetrien in den Gittern widerspiegeln.

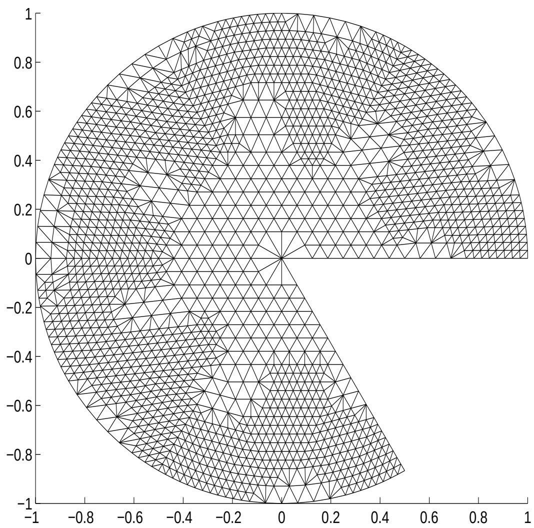

Bild 4.6 Gitter T_8 (Dimension = 1818) mit $\delta = 100$ und $\omega_7 = 1$ zur Approximation von u_7

4.2 Beispiel: Autolängsschnitt

Am Beispiel des Autolängsschnittes mit dem im Anhang B.2 dargestellten Startgitter T_0 bestehend aus 35 Dreiecken demonstrieren wir die Wirkungsweise des Adaptivitätskonzeptes 2. Für den gewichteten Fehlerschätzer geben wir in den Tabellen nur die von Null verschiedenen Gewichte ω_j zur Appromimation des j-ten Eigenwertes an.

Gitter	$\omega_2 = 1$	$\omega_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\omega_5 = 1$	$\omega_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\omega_8 = 1$
T_0	105	105	105	105	105	105	105
T_1	420	420	420	420	420	420	420
T_2	704	648	644	639	587	655	646
T_3	777	718	721	569	625	766	628
T_4	692	709	714	608	707	639	662
T_5	715	679	775	744	698	791	690
T_6	711	739	744	664	703	754	722
T_7	816	820	767	696	752	812	796
T_8	751	797	776	795	749	813	697
T_9	919	791	790	746	824	768	796

Tabelle 4.7 Anzahlen der zum Gitter T_i neu hinzukommenden Dreiecke für $\delta = 150$

Die Tabellen 4.7 und 4.8 verdeutlichen die Wirkungsweise des Parameters δ, der die Mindestanzahl zu verfeinernder Dreieckselemente vom Gitter T_i auf T_{i+1} angibt. Es stellt sich heraus, dass sich über δ die Gittervergrößerung gezielt steuern lässt.

Da Gitter T_0 aus 35 und T_1 aus 140 Elementen besteht, werden in diesen Gittern bei $\delta = 150$ alle Dreiecke verfeinert. Die Adaptivität kommt somit erst ab T_2 zum Einsatz. Vom zweiten bis zum neunten Gitter liegt der Mittelwert der neu hinzukommenden Dreiecke bei 726, mit einer Standardabweichung von 68. Würde jedes der 150 zur Verfeinerung vorgesehenen Dreiecke regulär in 4 kongruente Teildreiecke zerlegt, wie es die Verfeinerungsregel im Wesentlichen vorsieht, so läge der Zuwachs je Gitter bei 450 Dreiecken.

Im Algorithmus kommt es real zu größeren Dreiecksanzahlzuwächsen, da das Aneinanderstoßen regulär verfeinerter und nicht verfeinerter Dreiecke keine zulässige Triangulierung zur Folge hat. In Abschnitt 7 wird beschrieben, wie dieses Problem durch irreguläre Dreiecke behoben wird. Wir haben im Adaptivitätskonzept 2 durch den Parameter δ also eine steuerbare Gittervergrößerung erreicht.

Als Konsequenz der steuerbaren Dreiecksanzahl je Gitter ergibt sich eine entsprechend steuerbare Dimension des zugehörigen Matrixeigenwertproblems, dargestellt in Tabelle 4.8.

Gitter	$\omega_2 = 1$	$\omega_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\omega_5 = 1$	$\omega_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\omega_8 = 1$
T_0	30	30	30	30	30	30	30
T_1	94	94	94	94	94	94	94
T_2	327	327	327	327	327	327	327
T_3	693	670	669	661	638	673	664
T_4	1097	1048	1048	961	964	1074	993
T_5	1458	1420	1421	1280	1336	1408	1340
T_6	1831	1779	1826	1671	1705	1815	1696
T_7	2203	2162	2211	2014	2069	2213	2068
T_8	2623	2587	2609	2375	2462	2635	2474
T_9	3009	2997	3013	2781	2845	3054	2833
T_{10}	3478	3409	3420	3161	3269	3452	3244

Tabelle 4.8 Dimensionen im Gitter T_i für $\delta = 150$

Ein weiterer Vorteil der gleichen Größenordnung in der Dimension im i-ten Gitter liegt in der Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Dies nutzen wir beispielsweise bei der Entwicklung von Gewichtungsstrategien des lokalen Fehlerschätzers in Tabelle 4.11.

Als Nächstes wird die Wirkung des Parameters γ untersucht. 100γ gibt an, wieviel Fehlerprozent bezüglich des Maximalfehlers ein Fehler im Dreieck besitzen muss, um noch zur Verfeinerung zugelassen zu werden. Durch die Startvorgabe $\gamma = 0.95$ in jedem Gitter T_i und anschließendes schrittweises Absenken von γ wird sichergestellt, dass mindestens die δ Dreiecke mit dem größten Fehler verfeinert werden.

Aus Tabelle 4.9 können wir ablesen, dass γ von 0.95 auf nahezu 0 absinkt, falls im Gitter weniger als δ Dreiecke vorhanden sind. Mit feiner werdendem Gitter sinkt γ immer weniger. Dies liegt einerseits an der zunehmenden Dreiecksanzahl, andererseits aber auch an der zu beobachtenden Tatsache, dass sich die Fehler der Elemente, auf Grund des adaptiven Prozesses, untereinander angleichen.

Gitter	$\omega_2 = 1$	$\omega_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\omega_5 = 1$	$\omega_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\omega_8 = 1$
T_0	0.00	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.10
T_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05
T_2	0.05	0.10	0.10	0.20	0.15	0.10	0.25
T_3	0.05	0.10	0.10	0.20	0.15	0.10	0.25
T_4	0.05	0.15	0.15	0.20	0.20	0.15	0.30
T_5	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.20	0.40
T_6	0.10	0.20	0.25	0.35	0.30	0.25	0.50
T_7	0.15	0.25	0.35	0.50	0.40	0.30	0.60
T_8	0.25	0.35	0.50	0.55	0.45	0.45	0.55
T_9	0.30	0.45	0.60	0.60	0.45	0.50	0.55
T_{10}	0.45	0.50	0.50	0.50	0.55	0.60	0.50

Tabelle 4.9 Dynamische Änderung des Parameters γ im Gitter T_i für $\delta = 150$

Der Hauptgedanke bei der Verwendung des adaptiven Algorithmus besteht darin, eine vorgegebene Anzahl von Dreieckselementen möglichst optimal zu nutzen. Dazu sollen sie in ihrer Größe und Lage so platziert werden, dass eine möglichst gute Approximation eines oder mehrerer vorher ausgewählter Eigenwerte erreicht wird. Die beiden folgenden Tabellen 4.10 und 4.11 bestätigen, dass genau dieser Effekt beim verwendeten Algorithmus eintritt.

Die relativen Fehler r_j für die Eigenwerte λ_j in Tabelle 4.10 beziehen sich auf die Eigenwertapproximationen des Gitters T_8, mit den in Tabelle 4.8 angegebenen Dimensionen. Der bekannte Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit zugehöriger konstanter Eigenfunktion wurde nicht berücksichtigt. Da die weiteren exakten Eigenwerte unbekannt sind, wurden stattdessen die bestmöglichen vorhandenen Eigenwertapproximationen verwendet (vgl. Anhang A.2).

	$\omega_2 = 1$	$\omega_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\omega_5 = 1$	$\omega_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\omega_8 = 1$
r_2	$3.2e-6$	$2.5e-5$	$3.0e-5$	$2.2e-5$	$2.0e-5$	$1.5e-5$	$5.0e-5$
r_3	$1.8e-5$	$4.5e-6$	$1.8e-5$	$4.5e-5$	$1.7e-5$	$1.1e-5$	$7.6e-5$
r_4	$2.2e-5$	$1.3e-5$	$5.0e-6$	$3.0e-5$	$1.0e-5$	$2.2e-5$	$3.9e-5$
r_5	$1.8e-5$	$1.8e-5$	$1.7e-5$	$5.2e-6$	$1.6e-5$	$2.1e-5$	$1.6e-5$
r_6	$1.8e-5$	$2.1e-5$	$1.2e-5$	$3.4e-5$	$6.6e-6$	$1.8e-5$	$4.2e-5$
r_7	$4.4e-5$	$2.0e-5$	$3.9e-5$	$8.3e-5$	$2.8e-5$	$7.0e-6$	$1.2e-5$
r_8	$2.6e-5$	$3.0e-5$	$3.1e-5$	$1.7e-5$	$2.6e-5$	$2.8e-5$	$6.5e-6$

Tabelle 4.10 Relative Fehler r_j für λ_j im Gitter T_8 für $\delta = 150$

Gewichtungsstrategie		μ_4	σ_4	μ_5	σ_5
1.	$\omega_2 = 1$	1.74	0.73	1.36	0.59
2.	$\omega_3 = 1$	1.69	0.50	1.22	0.32
3.	$\omega_4 = 1$	1.80	0.59	1.40	0.50
4.	$\omega_5 = 1$	2.19	1.26	1.86	1.33
5.	$\omega_6 = 1$	1.74	0.65	1.32	0.46
6.	$\omega_7 = 1$	1.69	0.34	1.24	0.27
7.	$\omega_8 = 1$	2.15	0.97	1.90	1.01
8.	$\omega_2 = \omega_3 = 1$	1.51	0.44	1.15	0.38
9.	$\omega_3 = \omega_4 = 1$	1.51	0.42	1.15	0.38
10.	$\omega_4 = \omega_5 = 1$	1.51	0.58	1.22	0.53
11.	$\omega_5 = \omega_6 = 1$	1.58	0.66	1.15	0.47
12.	$\omega_6 = \omega_7 = 1$	1.38	0.20	1.14	0.19
13.	$\omega_7 = \omega_8 = 1$	1.46	0.19	1.16	0.16
14.	$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1$	1.45	0.42	1.12	0.41
15.	$\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 1$	1.39	0.42	1.13	0.40
16.	$\omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 1$	1.50	0.57	1.11	0.42
17.	$\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = 1$	1.35	0.22	1.07	0.19
18.	$\omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 1$	1.43	0.17	1.08	0.13
19.	$\omega_2 = \cdots = \omega_5 = 1$	1.39	0.43	1.08	0.41
20.	$\omega_3 = \cdots = \omega_6 = 1$	1.39	0.42	1.08	0.35
21.	$\omega_4 = \cdots = \omega_7 = 1$	1.35	0.27	1.05	0.21
22.	$\omega_5 = \cdots = \omega_8 = 1$	1.33	0.25	1.05	0.19
23.	$\omega_2 = \cdots = \omega_6 = 1$	1.38	0.43	1.08	0.39
24.	$\omega_3 = \cdots = \omega_7 = 1$	1.35	0.26	1.04	0.21
25.	$\omega_4 = \cdots = \omega_8 = 1$	1.35	0.30	1.07	0.20
26.	$\omega_2 = \cdots = \omega_7 = 1$	1.34	0.27	1.02	0.24
27.	$\omega_3 = \cdots = \omega_8 = 1$	1.35	0.28	1.04	0.21
28.	$\omega_2 = \cdots = \omega_8 = 1$	1.35	0.32	1.02	0.23

Tabelle 4.11 Mittelwerte μ_i der Fehlerprozente mit Standardabweichungen σ_i für verschiedene Gewichtungen im lokalen Fehlerschätzer (19)

Es zeigt sich, dass der relative Fehler für den Eigenwert besonders klein wird, an dem sich auch der lokale Fehlerschätzer orientiert. Die Gewichtungsstrategie in (19) für eine gute Appromimation von λ_j lautet demnach: Setze $\omega_j = 1$ und alle anderen Gewichte gleich Null.

Wollen wir im unteren Bereich des Spektrums, z.B. die Eigenwerte $\lambda_2, \cdots, \lambda_8$, besonders gut approximieren, so werden wir im lokalen Fehlerschätzer (19) die Gewichte entsprechend einstellen müssen. In Tabelle 4.11 untersuchen wir verschiedene Gewichtungen. Die Rechnung wurde für $\delta = 50$ durchgeführt. Dargestellt werden Mittelwerte μ_i der Fehlerprozente mit zugehörigen Standardabweichungen σ_i für die Gitter T_i mit $i = 4, 5$, wobei sich μ_i und σ_i durch folgende Formeln berechnen:

$$\mu = \frac{1}{7} \sum_{j=2}^{8} \left| \frac{\lambda_{h,j} - \lambda_j}{\lambda_j} \right| \cdot 100 \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{8} \left(\left| \frac{\lambda_{h,j} - \lambda_j}{\lambda_j} \right| \cdot 100 - \mu \right)^2 .$$

Bei verschiedenen Gewichtungen im lokalen Fehlerschätzer stellten sich in T_4 auch verschiedene Dimensionen (Mittelwert von 489) des zu lösenden Matrixeigenwertproblems ein. Entsprechendes galt auch für das Gitter T_5 mit einem Dimensionsmittelwert von 632. Um Vergleichbarkeit zwischen den Gewichtungsstrategien herzustellen, sind die in Tabelle 4.11 dargestellten μ_i und σ_i deshalb durch lineare Interpolation zwischen dem 4. und 5. Gitter mit Auswertung an den Mittelwerten 489 und 632 entstanden. Durch die gleichmäßige Gittervergrößerung nach Adaptivitätskonzept 2 ergaben sich für die Dimensionsmittelwerte geringe Standardabweichungen, so dass wir durch lineare Interpolation keinen allzugroßen Fehler gemacht haben. Die Zahlen aus Tabelle 4.11 führen daher nur zu einer qualitativen Aussage.

Die Gewichtungsstrategien 1. - 7. aus Tabelle 4.11, bei denen nur ein ω_j von Null verschieden gewählt wurde, zeichnen sich durch ein vergleichsweise hohes μ_i aus, im Einklang mit Tabelle 4.10, bei der auch nur ein Eigenwert besonders gut approximiert wird und die anderen entsprechend schlechter. Durch Hinzunahme weiterer Gewichte kann μ_i dann gesenkt werden, bis schließlich in der 28. Strategie, bei Beteiligung aller sieben Eigenwerte, μ_i nahezu den kleinsten Wert annimmt. Bei den Standardabweichungen stellen wir eine ähnliche Tendenz fest.

Als Strategie zur gleichmäßig guten Approximation einer fest vorgegebenen Anzahl von Eigenwerten, im unteren Teil des Spektrums, bietet sich daher für diese Eigenwerte Gleichgewichtung im lokalen Fehlerschätzer an.

Das Ergebnis dieser Strategie ist dadurch erklärbar, dass pro Element die Approximationsgüte je Eigenwert aufsummiert wird, und am Ende die Elemente verfeinert werden, die einen schlechten Indikator $\tilde{\eta}_T$ aufweisen. Unsere Annahme die zur Betrachtung von (17) führte, wird also am Beispiel bestätigt.

Diese Strategie sollte angewendet werden, wenn a priori keine Informationen über das Approximationsverhalten der Eigenwerte vorliegen. Sollte sich etwa im Verlauf einer Rechnung herausstellen, dass einige Eigenwerte schlechter approximierbar sind, so kann durch entsprechende Nachregulierung der Gewichte deren Approximationsverhalten verbessert werden.

Um die Wirkungsweise des gewichteten Fehlerschätzers graphisch zu veranschaulichen betrachten wir die Bilder 4.12 bis 4.14. In Bild 4.12 wurde nur der zweite, d.h. $\omega_2 = 1$, und in Bild 4.13 nur der dritte Eigenwert, d.h. $\omega_3 = 1$, in den Fehlerschätzer einbezogen. Die besonders starken Verfeinerungen liegen in Bild 4.12 an den einspringenden Ecken am oberen Ende der vorderen Rückenlehne, während in Bild 4.13 zusätzlich verstärkt bei den einspringenden Ecken in beiden Sitzbereichen verfeinert wurde.

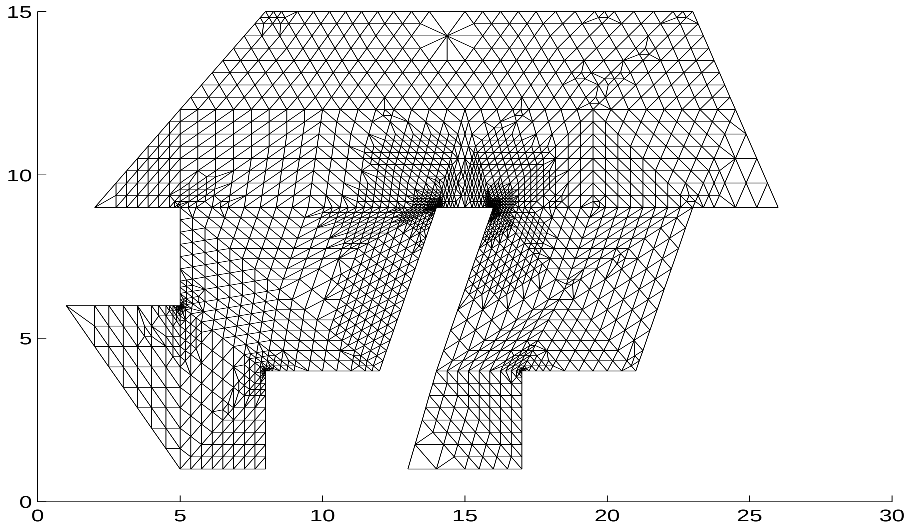

Bild 4.12 Gitter T_7 (Dimension = 2203) für den Autolängsschnitt mit $\delta = 150$ und $\omega_2 = 1$

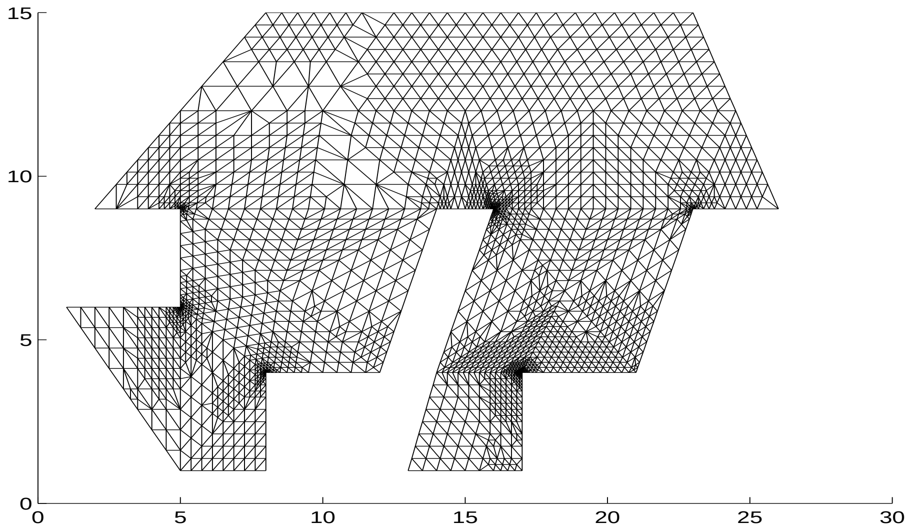

Bild 4.13 Gitter T_7 (Dimension = 2162) für den Autolängsschnitt mit $\delta = 150$ und $\omega_3 = 1$

In Bild 4.14 wurden dann der zweite und dritte Eigenwert gleichgewichtig im Fehlerschätzer ($\omega_2 = \omega_3 = 1$) berücksichtigt. Als Konsequenz wurde in allen Problembereichen verstärkt verfeinert. Auch in anderen Bereichen wurden die Eigenschaften beider Gitter übernommen, wenn auch in etwas abgeschwächter Form. Bild 4.14 kann daher als Überlagerung der adaptiven Verfeinerungen der Bilder 4.12 und 4.13 interpretiert werden.

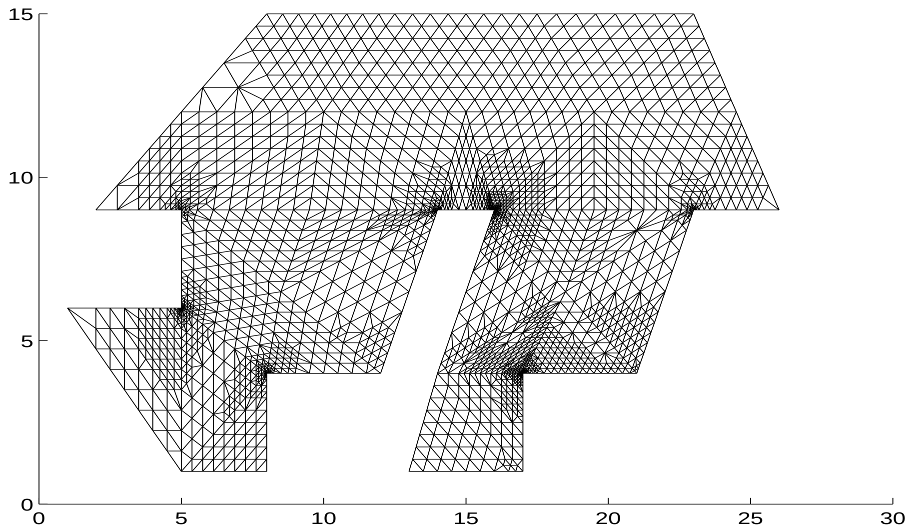

Bild 4.14 Gitter T_7 (Dimension = 2155) für den Autolängsschnitt mit $\delta = 150$ und $\omega_2 = \omega_3 = 1$

5 Ein Fehlerindikator aus der Fehlergleichung

Wesentlich für die praktische Durchführbarkeit eines adaptiven Algorithmus ist immer die einfache Berechenbarkeit der lokalen Fehlerschätzer oder -indikatoren aus (19). Einen solchen Fehlerindikator wollen wir im Folgenden bezüglich eines festen Eigenwertes mit zugehöriger Eigenfunktion entwickeln.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Eigenwertaufgabe in ihrer schwachen Formulierung (2):

Gesucht sind $u \in H(\Omega)$ mit $u \not\equiv 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$a(u, v) \quad = \quad \lambda b(u, v) \quad \text{für alle} \quad v \in H(\Omega),$$

erfüllen. Wobei wiederum $H(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ im Falle von Dirichlet beziehungsweise $H(\Omega) = H^1(\Omega)$ im Falle von Neumann Randbedingungen gelten soll.

Es sei $u_h \in V_h$ die finite Elementapproximationen von u und λ_h die von λ. Sie erfüllen die Gleichung

$$a(u_h, v) \quad = \quad \lambda_h b(u_h, v) \quad \text{für alle} \quad v \in V_h, \tag{20}$$

wobei V_h der finite Elementraum ist. Das (20) zugeordnete statische Problem, d.h. mit fest vorgegebenem u_h und λ_h,

$$a(w,v) \;=\; \lambda_h b(u_h,v) \quad \text{für alle} \quad v \in H(\Omega) \tag{21}$$

habe die Lösung w wie vorher in (10). Den Fehler $e := u_h - w$ wollen wir im Folgenden in der Energienorm,

$$||u_h - w||_a^2 \;= a(e,e) = \sum_{\tau\in T} a_\tau(e,e)\,,$$

wie es für Ungleichung (11) beziehungsweise (18) erforderlich ist, näherungsweise bestimmen. Dabei sei a_τ die Restriktion der Bilinearform a auf das Dreieck τ der Triangulierung T.

Aus (21) erhalten wir die sogenannte Fehlergleichung

$$a(e,v) \;=\; a(u_h,v) - \lambda_h b(u_h,v) \quad \text{für alle} \quad v \in H(\Omega). \tag{22}$$

Wir behandeln hier den Fall der Bilinearform a, deren Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{k}$ aus (1) die Gestalt $k_1 := k_{11}$ und $k_2 := k_{22}$, sowie $k_{12} = 0 = k_{21}$ besitzt.

Zur Berechnung der lokalen Fehlerindikatoren greifen wir jetzt auf eine Idee von Bank und Weiser [4] für statische Probleme zurück, die auch in Goering, Roos und Tobiska [5] diskutiert wird. In [4] werden die Eigenschaften näher untersucht.

Der Ableitungsterm in der Bilinearform $a(u_h,v)$ der rechten Seite von (22) wird über jedes Dreieck $\tau \in T$ partiell integriert. Dabei gilt die zweite Gleichheit in (23) nur, falls mit der Triangulierung T auch der Rand Γ exakt wiedergegeben wird, wie beispielsweise bei polygonalen Rändern. Ist dies nicht der Fall, so haben wir hier einen zusätzlichen Fehler, der sich auch durch die folgende Argumentation zieht, aber nicht mehr extra aufgeführt wird. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
a(u_h,v) &= \int_\Omega k_1\, u_{h,x} v_x \;+\; k_2\, u_{h,y} v_y + q u_h v \; d(x,y) \\
&= \sum_{\tau\in T} \int_\tau k_1\, u_{h,x} v_x \;+\; k_2\, u_{h,y} v_y + q u_h v \; d(x,y) \\
&= -\sum_{\tau\in T} \int_\tau ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y - q u_h)\, v \; d(x,y) \qquad (23) \\
&\quad + \sum_{\tau\in T} \int_{\partial\tau} (k_1 u_{h,x} n_x + k_2 u_{h,y} n_y)\, v \; ds\,.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass im Falle konstanter Koeffizienten k_i und linearer Ansatzfunktionen im Dreieck τ die Integranden $(k_1 u_{h,x})_x$ und $(k_2 u_{h,y})_y$ in (23) gleich Null sind und falls auch noch $q \equiv 0$ gilt, das entsprechende Integral verschwindet.

Wir werden jetzt die Randintegrale der rechten Seite von (23) umschreiben. Zunächst bezeichnen wir mit E_0 die Menge aller Dreieckskanten und mit $E_1 \subset E_0$ die Menge der inneren Kanten. Wir weisen jeder Kante $\epsilon \in E_0$ eine Normalenrichtung n^ϵ zu, die mit der äußeren Normalen im Falle einer Randkante, falls also $\epsilon \in E_0 \backslash E_1$ gilt, übereinstimmt und sonst im Vorzeichen beliebig ist.

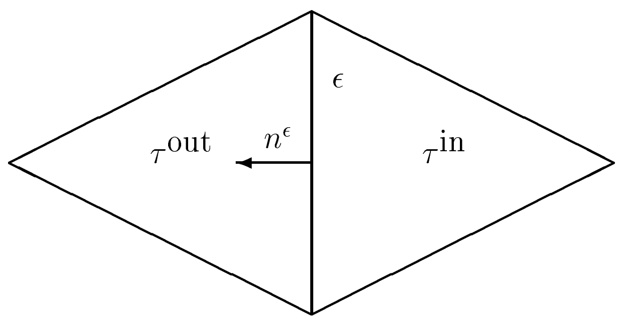

Bild 5.1 Dreiecke τ^{in} und τ^{out} mit gemeinsamer Kante ϵ

Es sei ϵ die innere Kante zweier Dreiecke, wie in Bild 5.1 angegeben. Mit τ^{in} bezeichnen wir das Dreieck, für das n^ϵ äußere Normale ist und mit τ^{out} das Dreieck, für das n^ϵ innere Normale ist. Wir definieren nun die Sprünge der partiellen Ableitungen von u_h auf der Kante ϵ durch

$$\begin{aligned} (u_{h,x})^\epsilon &:= u_{h,x}^{\mathrm{out}} - u_{h,x}^{\mathrm{in}} \\ (u_{h,y})^\epsilon &:= u_{h,y}^{\mathrm{out}} - u_{h,y}^{\mathrm{in}}, \end{aligned}$$

und bemerken, dass die Produkte $(u_{h,x})^\epsilon \, n_x^\epsilon$ und $(u_{h,y})^\epsilon \, n_y^\epsilon$ nicht von der Richtung der Normalen $n^\epsilon = (n_x^\epsilon, n_y^\epsilon)$ abhängen. Damit können wir das Randintegral der rechten Seite von (23) umschreiben und erhalten

$$\begin{aligned} a(u_h, v) \;&=\; -\sum_{\tau \in T} \int_\tau ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y - q u_h) \, v \, d(x,y) \\ &\quad + \int_\Gamma (k_1 u_{h,x} n_x + k_2 u_{h,y} n_y) \, v \, ds \\ &\quad - \sum_{\epsilon \in E_1} \int_\epsilon (k_1 (u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2 (u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon) \, v \, ds. \end{aligned} \tag{24}$$

5.1 Neumannsche Randdaten

In diesem Abschnitt wählen wir speziell $H(\Omega) := H^1(\Omega)$ und werden das Vorangegangene entsprechend spezialisieren. Zu Grunde gelegt wird die Bilinearform a in ihrer geshifteten Form mit $c > 0$:

$$a(u_h, v) \;=\; \int_\Omega k_1\, u_{h,x} v_x \;+\; k_2\, u_{h,y} v_y + q u_h v + c\,\rho\, u_h\, v\; d(x,y). \tag{25}$$

Aus (22) erhalten wir nun in Verbindung mit (24) für alle $v \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(e,v) \;=\;& (c-\lambda_h) b(u_h,v) - \sum_{\tau\in T} \int_\tau ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y - q u_h)\, v\, d(x,y) \\ &+ \int_\Gamma (k_1 u_{h,x} n_x + k_2 u_{h,y} n_y)\, v\, ds \\ &- \sum_{\epsilon\in E_1} \int_\epsilon (k_1 (u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2 (u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\, v\, ds. \end{aligned} \tag{26}$$

Wir bemerken, dass sich der Shift c in der Fehlergleichung heraussubtrahiert, d.h. der Faktor $c - \lambda_h$ ist gleich dem negativen Eigenwert des ungeshifteten Problems, da λ_h Eigenwertnäherung aus dem geshifteten Problem ist.

Restringieren wir jetzt Gleichung (26) auf jedes Element τ, so erhalten wir die elementweise Fehlergleichung. Diese wird nicht in $H^1(\tau)$, sondern näherungsweise im Vektorraum $P_2^0(\tau)$ der quadratischen Polynome auf τ, die in den Ecken des Dreiecks τ verschwinden, gelöst.

Gesucht ist also der Fehler $e_\tau \in P_2^0(\tau)$, der die folgende Gleichung für alle $v \in P_2^0(\tau)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} a_\tau(e_\tau\,,\, v) \;=\;& \int_\tau ((q + (c-\lambda_h)\rho) u_h - ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y))\, v\, d(x,y) \\ &+ \int_{\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 u_{h,x} n_x^\epsilon + k_2 u_{h,y} n_y^\epsilon)\, v\, ds \\ &- \frac{1}{2} \int_{\partial\tau\setminus\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 (u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2 (u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\, v\, ds\;. \end{aligned} \tag{27}$$

Der Sprung der partiellen Ableitungen an einer inneren Kante wird halbiert und den zugehörigen Dreiecken je zur Hälfte zugeordnet.

Wir hoffen, dass der tatsächliche Fehler je Element τ durch e_τ gut approximiert wird. Da hier nur eine Fehlernäherung berechnet wird, liegt am Ende auch nur ein Fehlerindikator und kein Fehlerschätzer vor.

5.2 Dirichletsche Randdaten

Es wird nun $H(\Omega) := H_0^1(\Omega)$ gewählt. Mit den gleichen Bezeichnungen wie vorher ergibt sich (26), mit dem Unterschied, dass kein Shift durchgeführt wird, d.h. $c = 0$ gilt, und dass das Randintegral über Γ auf Grund der von v erfüllten homogenen Randbedingung verschwindet. Die Fehlergleichung lautet also

$$\begin{aligned} a(e,v) &= -\lambda_h b(u_h,v) - \sum_{\tau\in T}\int_\tau ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y - q\,u_h)\,v\,d(x,y) \\ &\quad - \sum_{\epsilon\in E_1}\int_\epsilon (k_1(u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2(u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\,v\,ds. \end{aligned} \tag{28}$$

Restringieren der Gleichung (28) auf jedes Element τ ergibt wiederum eine elementweise Fehlergleichung, die für alle $v \in P_2^0(\tau)$ gelöst wird

$$\begin{aligned} a_\tau(e_\tau\,,\,v) &= \int_\tau ((q-\lambda_h\,\rho)u_h - ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y))\,v\;d(x,y) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\partial\tau\setminus\partial\tau\cap\Gamma} (k_1(u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2(u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\,v\,ds\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Die Erweiterung auf einen Rand mit gemischten Dirichlet- und Neumann-Randdaten kann entsprechend durchgeführt werden.

5.3 Konkrete Berechnung des Fehlerindikators

Haben wir e_τ berechnet, so definieren wir den in (16) gesuchten Fehlerindikator η_τ für das Dreieck τ durch

$$\eta_\tau \;:=\; \sqrt{a_\tau(e_\tau\,,\,e_\tau)} \quad .$$

Um zu zeigen, wie einfach die Berechnung der lokalen Fehlerindikatoren ist, formulieren wir den Vorgang im Folgenden genauer.

Das Dreieck τ besitze die Eckpunkte $P_j = (x_j, y_j)$, $j = 1,2,3$. Da für die Basiselemente $v_i \in P_2^0(\tau)$ die Bedingung $v_i(P_j) = 0$ gilt, besitzt der Raum $P_2^0(\tau)$ nur noch die Dimension 3, d.h. $i = 1,2,3$.

Die gesuchte Fehlerapproximation e_τ habe die Darstellung

$$e_\tau = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j v_j \quad .$$

Dann ergibt sich e_τ aus der Fehlergleichung (27) beziehungsweise (29) als Lösung des folgenden linearen positiv definiten 3×3 Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{3} a_\tau(v_j, v_i)\alpha_j \;=\; f_\tau(v_i)\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

Im Falle neumannscher Randdaten (27) lautet die rechte Seite

$$\begin{aligned} f_\tau(v) \quad := \quad & \int_\tau ((q+(c-\lambda_h)\rho)u_h - ((k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y))\, v\, d(x,y) \\ & + \int_{\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 u_{h,x} n_x^\epsilon + k_2 u_{h,y} n_y^\epsilon)\, v\, ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{\partial\tau\setminus\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 (u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2 (u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\, v\, ds \end{aligned}$$

Wählt man als Basiselemente v_i diejenigen, die in den Seitenmittelpunkten des Dreiecks τ umschichtig den Wert eins und sonst den Wert null annehmen, so entspricht die Berechnung der Matrixelemente $a_\tau(v_i, v_j)$ genau der Berechnung üblicherweise des rechten unteren 3×3 Blocks der Steifigkeitselementmatrix bei quadratischem Ansatz. Man transformiert also zunächst das Dreieck τ in x, y-Koordinaten auf das Referenzdreieck in ξ, η-Koordinaten mittels

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\xi,\eta) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

und wählt dann für die transformierten Basisfunktionen die übliche Darstellung in baryzentrischen Koordinaten

$$L_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi,\eta) = \xi, \quad L_3(\xi,\eta) = \eta,$$

also

$$v_1(\Phi(\xi,\eta)) = 4L_1L_2, \quad v_2(\Phi(\xi,\eta)) = 4L_2L_3, \quad v_3(\Phi(\xi,\eta)) = 4L_1L_3\,.$$

Die Berechnung der rechten Seite f erfordert die Auswertung von drei Integralen, in die der berechnete Eigenwert λ_h und die zugehörige Eigenfunktion u_h eingehen.

Bei der Berechnung des Teilintegrals mit dem Integranden

$$(q + (c-\lambda_h)\rho)u_h v$$

geht man analog wie bei den oben angeführten Matrixelementen $a_\tau(v_i, v_j)$ vor, wobei man hier die Darstellung von u_h in der Form

$$u_h = \sum_{i=1}^{3} u_{h,i} L_i$$

im Referenzelement zu berücksichtigen hat. Mit $u_{h,i}$ haben wir dabei die berechneten Knotenvariablen von u_h in P_i in lokaler Numerierung bezeichnet.

Die Berechnung des Teilintegrals mit dem Integranden

$$(k_1 u_{h,x})_x + (k_2 u_{h,y})_y)\, v$$

verläuft wie die des vorhergehenden, mit der Besonderheit, dass bei linearem Ansatzes im Dreieck $u_{h,x}$ und $u_{h,y}$ konstant sind. Sind auch noch die Koeffizienten k_1 und k_2 konstant, so ist der zweite Integralbeitrag gleich null.

Die beiden Randintegrale

$$\int_{\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 u_{h,x} n_x^\epsilon + k_2 u_{h,y} n_y^\epsilon)\, v\, ds \quad \text{und} \quad \int_{\partial\tau\setminus\partial\tau\cap\Gamma} (k_1 (u_{h,x})^\epsilon n_x^\epsilon + k_2 (u_{h,y})^\epsilon n_y^\epsilon)\, v\, ds$$

lassen sich in gleicher Weise berechnen, mit dem Unterschied, dass für Neumann-Randkanten die partiellen Ableitungen selbst und nicht die Sprünge in den partiellen Ableitungen eingesetzt werden. Im Falle einer Dirichlet-Randkante entfällt das Integral. Programmtechnisch lässt sich dieses am einfachsten dadurch erreichen, dass der Integrand gleich null gesetzt wird.

Wir hatten bereits bemerkt, dass die Produkte $(u_{h,x})^\epsilon\, n_x^\epsilon$ und $(u_{h,y})^\epsilon\, n_y^\epsilon$ nicht von der Richtung der Normalen n^ϵ abhängen, damit können wir bei der Berechnung τ als τ^{in} und n^ϵ als äußere Normale annehmen. Parametrisieren wir die Kante ϵ mit dem Anfangs- und Endpunkt P_i und P_j durch $\epsilon(t) = P_i + t(P_j - P_i)$ mit $t \in [0,1]$, so können wir direkt gaußsche Quadraturformeln im Einheitsintervall, wie sie etwa von Schwarz [8] angegeben werden, verwenden. Eine Arbeitsersparnis ergibt sich noch dadurch, dass nur eine der gewählten Basisfunktionen v_i auf der aktuell auszuwertenden Kante von Null verschieden ist.

Haben wir jetzt die Fehlerapproximation e_τ berechnet, so ergibt sich der Fehlerindikator im Dreieck τ aus den berechneten Größen durch

$$\eta_\tau = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_\tau(v_i)} \quad .$$

6 Der ganze adaptive Algorithmus

Einen Überblick über den Ablauf des gesamten adaptiven Algorithmus gibt Bild 6.1. Bisher haben wir nur den für die Adaptivität maßgeblichen Teil 3 beschrieben.

Um die Teile 0 und 4 realisieren zu können, ist eine Datenstruktur festzulegen, mit der die Gitterinformationen erfasst werden. Im Anschluss daran können auch erst in Teil 1 die Systemmatrizen erstellt werden. Der Eigenwertlöser aus Teil 2 orientiert sich dann an der Speicherstruktur der Systemmatrizen.

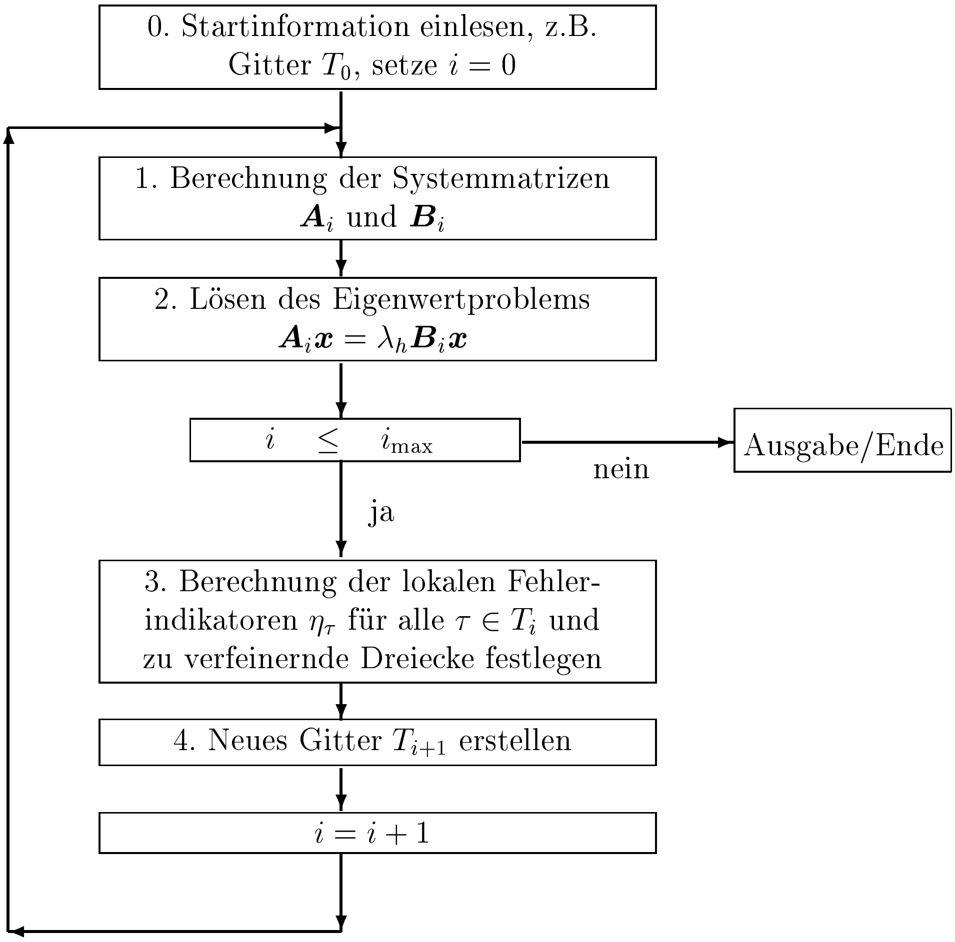

Bild 6.1 Schema des adaptiven Algorithmus

7 Gitterverfeinerung

In diesem Abschnitt werden die Regeln, nach denen das neue Gitter T_{i+1} erstellt wird, also Schritt 4 aus Bild 6.1, beschrieben. Wir gehen davon aus, dass eine zulässige Triangulierung T_i des Gebietes Ω vorliegt, beispielsweise anfangs gegeben durch ein Startgitter aus Anhang B. Nachdem in Schritt 3 aus Bild 6.1 die Dreiecke markiert wurden, die auf Grund der Ergebnisses des Fehlerschätzers verfeinert werden sollen, besteht jetzt die Aufgabe darin, mit diesen Informationen eine neue zulässige Triangulierung T_{i+1} herzustellen. Benutzt werden dabei Verfeinerungsregeln, wie sie von Bank [3] im Softwarepaket PLTMG vorgeschlagen werden. Die Wirkungsweise dieser Regeln wird im Folgenden beschrieben.

Ein, auf Grund des Fehlerschätzers, zur Verfeinerung markiertes Dreieck wird im Normalfall regulär, d.h. in vier kongruente Teildreiecke, wie im Bild 7.1 dargestellt, unterteilt.

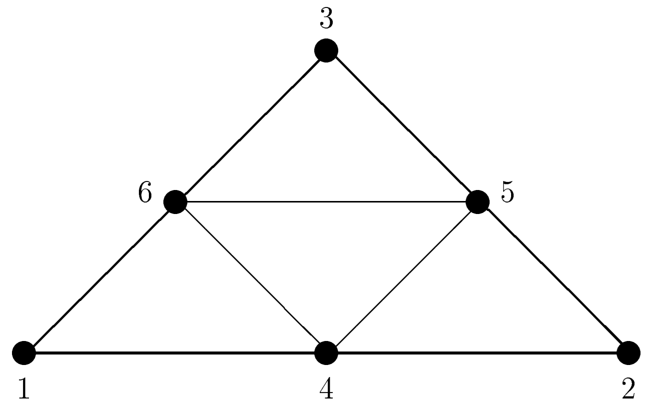

Bild 7.1 Reguläre Unterteilung eines Dreiecks

Der Vorteil dieser Unterteilung besteht darin, dass die Winkel erhalten bleiben. Wird also nur regulär verfeinert, so werden die Winkel der neuen Triangulierung insbesondere nicht stumpfer als die der vorhergehenden Triangulierung. Man muss damit nur in der Anfangstriangulierung T_0 allzu stumpfe Winkel vermeiden, um die Approximationsgüte der finiten Elementmethode nicht zu beeinträchtigen.

Auf eine Variante der regulären Unterteilung zur Behandlung stumpfer Winkel, wie sie etwa von Leinen in [6] angegeben wird, die jedoch nicht winkelerhaltend ist, gehen wir hier nicht ein, da wir in den Startgittern im Anhang B stumpfe Winkel vermeiden.

Im ersten Schritt der Verfeinerung des aktuellen Gitters T_i werden, wie in Tabelle 7.3 beschrieben, alle Dreiecke τ, für die der Fehlerindikator η_τ nach Tabelle 4.2 dies anzeigt, regulär unterteilt. Am Ende dieses ersten Verfeinerungsschrittes wird in der Regel jedoch keine zulässige Triangulierung stehen.

In einem iterativen Prozess, der durch die Anzahl der Dreiecke von T_i beschränkt ist, werden nun im zweiten Schritt alle noch nicht unterteilten Dreiecke von T_i, die zwei oder drei regulär unterteilte Nachbardreiecke besitzen, auch regulär unterteilt. Dieser Prozess endet entweder mit der Unterteilung aller Dreiecke von T_i oder damit, dass Dreiecke von T_i übrigbleiben, die höchstens ein regulär unterteiltes Nachbardreieck besitzen.

Um eine zulässige Triangulierung T_{i+1} zu erreichen, werden die eventuell verbleibenden Dreiecke mit nur einem unterteilten Nachbardreieck in einem dritten und letzten Schritt irregulär in jeweils zwei Teildreiecke, wie in Bild 7.2 angegeben, unterteilt.

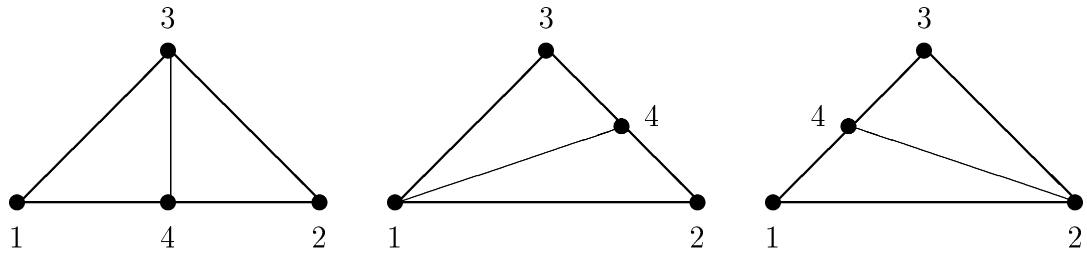

Bild 7.2 Irreguläre Unterteilung eines Dreiecks

Die aus einer irregulären Unterteilung hervorgehenden Teildreiecke besitzen jedoch andere Winkel als das Ausgangsdreieck, insbesondere können bei fortgeführter irregulärer Unterteilung die, die Approximationsgüte hemmenden, stumpfen Winkel erzeugt werden. Deshalb wird die irreguläre Unterteilung nur als Hilfskonstruktion eingesetzt, die gegebenenfalls bei weiterer Verfeinerung im zweiten Schritt von Tabelle 7.3 wieder aufgehoben wird.

Liegen bereits in der Triangulierung T_i irreguläre Dreiecke vor, so werden diese erforderlichenfalls wieder (paarweise) zusammengefügt. Dieser Fall tritt ein, falls eines der Teildreiecke laut Fehlerindikator η_τ zu verfeinern ist oder eines der Teildreiecke ein regulär unterteiltes Nachbardreieck besitzt. Das aus den beiden zusammengefügten irregulären Teildreiecken enstehende (ursprüngliche) Dreieck wird dann regulär unterteilt, wobei gegebenenfalls schließlich noch irreguläre Unterteilungen der neu erzeugten regulären Dreiecke erforderlich sind, um eine zulässige Triangulierung T_{i+1} zu erhalten. Wir fassen den Programmablauf in Tabelle 7.3 zusammmen.

Bestimme zu jedem Dreieck die Nachbardreiecke	0

Verfeinere Dreiecke nach Fehlerindikator, löse dabei ggf. irreguläre Dreiecke paarweise in reguläre auf	1

Iteration über alle noch nicht verfeinerten Dreiecke	2
Verfeinere reguläre Dreiecke in reguläre, falls sie mindestens zwei verfeinerte Nachbardreiecke besitzen	a
Verfeinere irreguläre Dreiecke paarweise in reguläre, falls sie mindestens ein verfeinertes Nachbardreieck besitzen	b

Verfeinere reguläre Dreiecke irregulär, falls sie genau ein verfeinertes Nachbardreieck besitzen	3

Tabelle 7.3 Programmablaufplan zur Gitterverfeinerung

A Eigenwerte und Eigenfunktionen

A.1 Membranschwingung im Kreissektor

Für den Kreissektor (vgl. Bild 2.1) mit $\omega = \frac{5\pi}{3}$ und $R = 1$ werden im Folgenden die ersten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen in Polarkoordinaten dargestellt. J_ν bezeichnet die Besselfunktion.

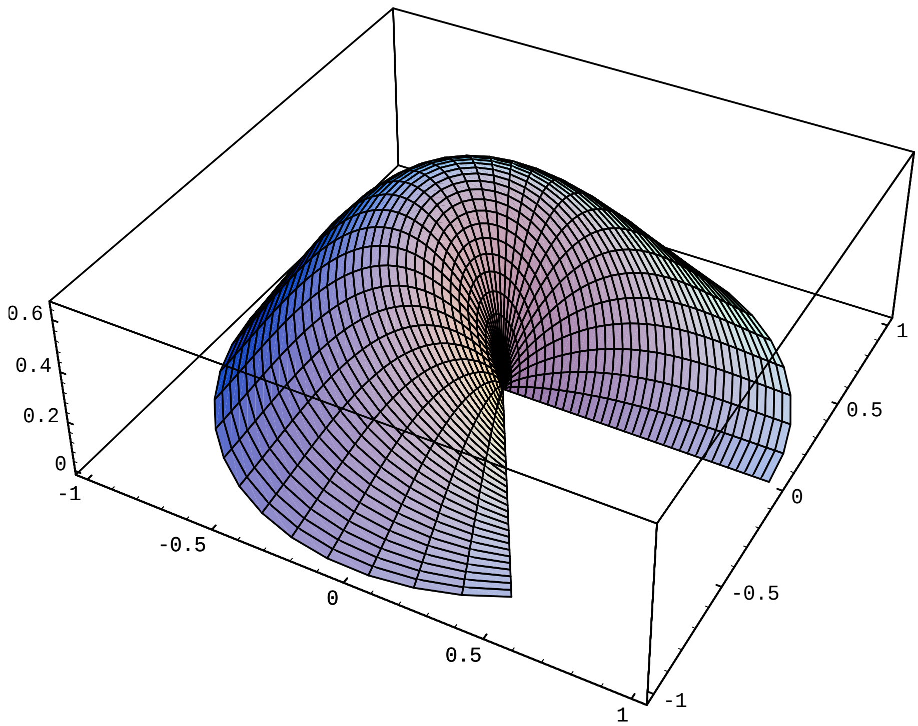

Bild A.1.1

$$u_1(r,\phi) = J_{3/5}(3.282545586 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_1 = 10.775105$$

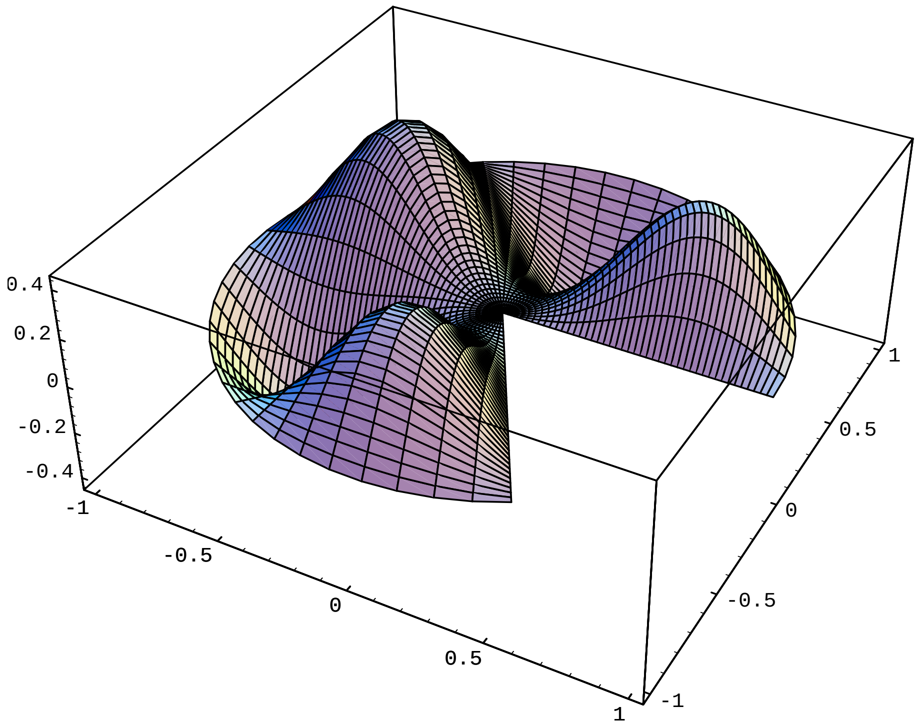

Bild A.1.2

$$u_5(r,\phi) = J_{15/5}(6.380161895 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{15\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_5 = 40.706466$$

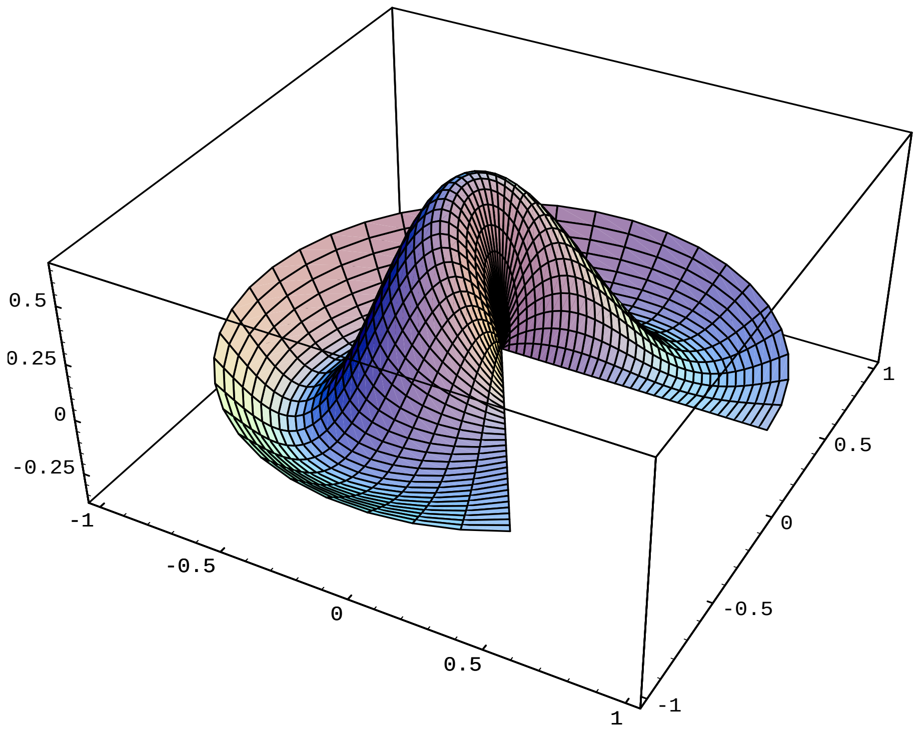

Bild A.1.3

$$u_6(r,\phi) = J_{3/5}(6.431809016 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{3\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_6 = 41.368167$$

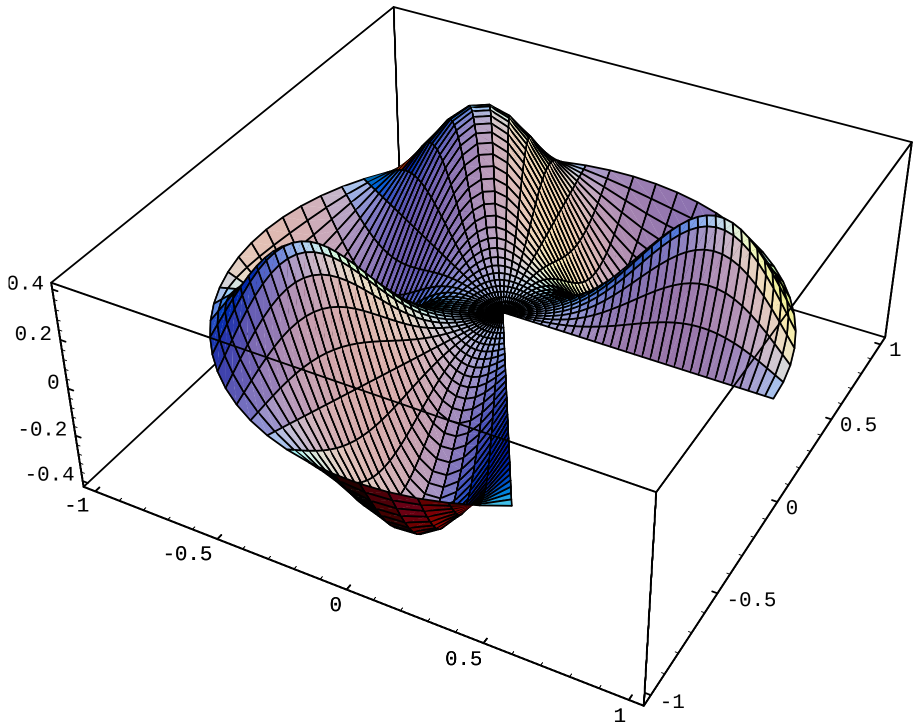

Bild A.1.4

$$u_7(r,\phi) = J_{18/5}(7.108560677 \cdot r) \cdot \sin\left(\frac{18\phi}{5}\right) \quad \text{zu} \quad \lambda_7 = 50.531635$$

Eigenwerte											
λ_1	=	10.775105	λ_2	=	16.803239	λ_3	=	23.821170	λ_4	=	31.796830
λ_5	=	40.706466	λ_6	=	41.368167	λ_7	=	50.531635	λ_8	=	53.317024
λ_9	=	61.257512	λ_{10}	=	66.297381	λ_{11}	=	72.871865	λ_{12}	=	80.289962
λ_{13}	=	85.364392	λ_{14}	=	91.702534	λ_{15}	=	95.277573	λ_{16}	=	98.726272
λ_{17}	=	109.57271	λ_{18}	=	111.24507	λ_{19}	=	112.94985	λ_{20}	=	128.02840

Tabelle A.1.5 Die kleinsten Eigenwerte im Kreissektor
für $\omega = 5\pi/3$ und $R = 1$

A.2 Autolängsschnitt

Die in Tabelle A.2.1 angegebenen Eigenwertnäherungen $\tilde{\lambda}$ wurden mit der PDE Toolbox unter MATLAB, d.h. über die finite Elementmethode mit 32768 linearen aus dem Startgitter gleichmäßig verfeinerten Dreieckselementen und einem resultierenden Gleichungssystem der Dimension 16769, berechnet.

Eigenwerte			
$\tilde{\lambda}_1 = 0$	$\tilde{\lambda}_6 = 0.1367$	$\tilde{\lambda}_{11} = 0.3454$	$\tilde{\lambda}_{16} = 0.5583$
$\tilde{\lambda}_2 = 0.01263$	$\tilde{\lambda}_7 = 0.1423$	$\tilde{\lambda}_{12} = 0.3735$	$\tilde{\lambda}_{17} = 0.615$
$\tilde{\lambda}_3 = 0.04449$	$\tilde{\lambda}_8 = 0.1998$	$\tilde{\lambda}_{13} = 0.3848$	$\tilde{\lambda}_{18} = 0.6834$
$\tilde{\lambda}_4 = 0.05627$	$\tilde{\lambda}_9 = 0.2703$	$\tilde{\lambda}_{14} = 0.3953$	$\tilde{\lambda}_{19} = 0.731$
$\tilde{\lambda}_5 = 0.1159$	$\tilde{\lambda}_{10} = 0.2902$	$\tilde{\lambda}_{15} = 0.4656$	$\tilde{\lambda}_{20} = 0.7658$

Tabelle A.2.1 Eigenwertnäherungen für den Autolängsschnitt

B Starttriangulierungen

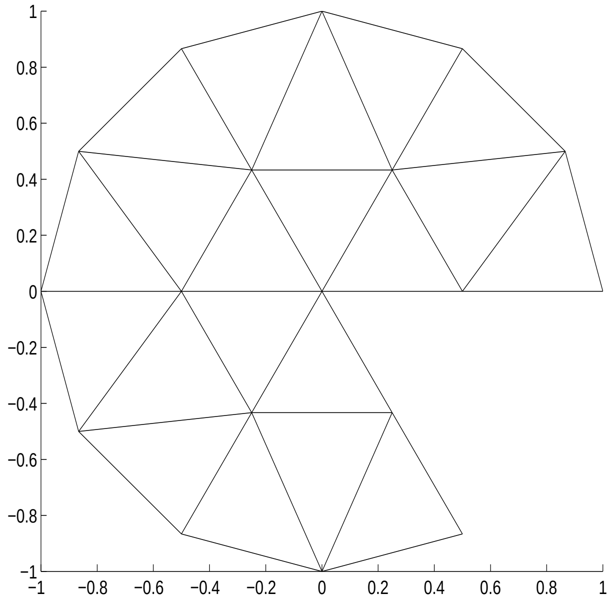

Bild B.1 Triangulierung T_0 des Kreissektors mit $R = 1$ und $\omega = \dfrac{5\pi}{3}$

Ist der Rand nicht polygonal, wie im Falle des Kreissektors (Bild 2.1), so gibt die Triangulierung T den Bereich Ω nicht exakt wieder. Bei Verfeinerung sind die neuen Randknoten so zu bestimmen, dass sie auf Γ liegen. Auf eine Randapproximation mit geeigneten krummberandeten Elementen wird hier verzichtet.

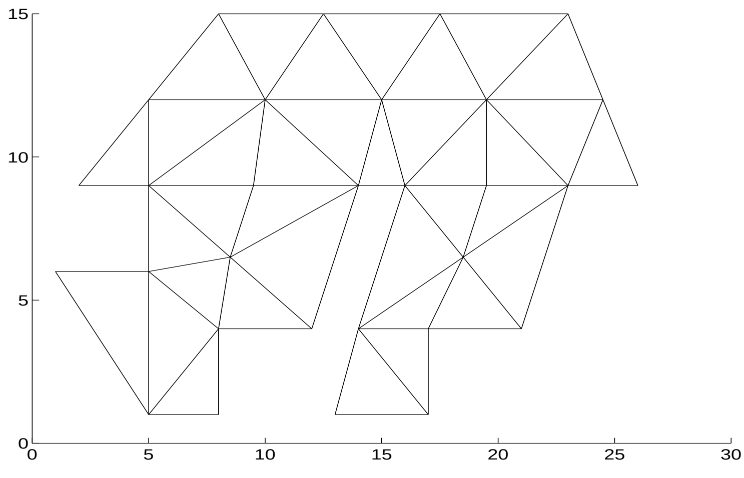

Bild B.2 Triangulierung T_0 des Autolängsschnittes

Literatur

[1] I. Babuška and J. Osborn,
Eigenvalue Problems, in: P.G. Ciarlet and J.L. Lions (eds.), Handbook of Numerical Analysis, Vol.II, Finite Element Methods (Part 1)
(North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokio 1991.)

[2] I. Babuška and W.C. Rheinboldt,
A-posterior error estimates for the finite element method.
(Internat. J. Numer. Meth. Engrg. 12 (1978) 1597 — 1615.)

[3] R.E. Bank,
PLTMG: A software package for solving elliptic partial differential equations. Users Guide 7.0
(SIAM,Philadelphia,1994).

[4] R.E. Bank and A. Weiser,
Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations.
(Math. Comp. Vol.44 No.170 (1985) 283 — 301.)

[5] H. Goering,H.G. Roos and L. Tobiska,
Finite Element Methode.
(Akademie Verlag, Berlin, 3.Aufl., 1993).

[6] P. Leinen,
Ein schneller adaptiver Löser für elliptische Randwertprobleme auf Seriell- und Parallelrechnern.
(Dissertation, Universität Dortmundt, 1990).

[7] K. Rothe,
Randeigenwertprobleme im Kreissektor mit einspringender Ecke.
(Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Bericht 37, Reihe B, Universität Hamburg, 2002).

[8] H.R. Schwarz,
Methode der Finiten Elemente.
(Teubner, Stuttgart, 3.Aufl., 1991).

[9] H.R. Schwarz,
FORTRAN-Programme zur Methode der Finiten Elemente.
(Teubner, Stuttgart, 3. Aufl., 1991).