

Anleitungsaufgaben zu komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \frac{(2-3i)^2}{3+4i}$ und $z_2 := \sqrt{3} - i$.

- Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2 .
- Man bestimme z_2^9 .
- Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w + z_2)^3 = 8i$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmenge in der komplexen Zahlenebene:

- $\{w \in \mathbb{C} : |w + z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,
- $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} : 9\operatorname{Re}(z^2) + 13(\operatorname{Im}(z))^2 = 36\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi, 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

Man untersuche die Folge

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{2+i}{3}(i-1+z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 4:

- a) Man bestimme das Bild von $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z), 0 \leq \Im(z), \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \leq 1\}$ unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.
- b) Man berechne:
- (i) $\exp(1+i\pi)$, (ii) $\exp(2+i\pi/2)$, (iii) $\exp(1+i\pi) \cdot \exp(2+i\pi/2)$
- sowie $\exp(3+i3\pi/2)$ und überprüfe an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in \mathbb{C} ,

Aufgabe 5:

- a) Man bestimme das Bild von

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 16 \leq |z| \leq 25, \pi/2 \leq \arg(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \ln(\sqrt{z})$ definierten Abbildung. Dabei sind für \sqrt{z} und $\ln w$ die jeweils zugehörigen Hauptwerte zu wählen.

- b) Man berechne für $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = -\sqrt{3} + i$

- (i) $\ln(z_1)$,
 (ii) $\ln(z_2)$,
 (iii) $\ln(z_1) + \ln(z_2)$
 (iv) $\ln(z_1 z_2)$

und überprüfe, ob die folgende Beziehung gilt

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2),$$

wobei $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus ist.

Aufgabe 6:

Die komplexen trigonometrischen Funktionen sind definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

- a) Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und $\cos z$.

b) Man zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten

$$\sin z = \frac{1}{i} \sinh(iz), \quad \cos z = \cosh(iz).$$

c) Man bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Aufgabe 7:

a) Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

- (i) der Geraden $\Re(z) = -1$,
- (ii) des Strahls $\Im(z) > 0 \wedge \Re(z) = 0$,
- (iii) des Kreises $|z| = 4$,
- (iv) des Kreises $|z - 1| = 1$ und
- (v) des Kreises $|z - 1| = 3$.

b) Man berechne die Punkte z und z' , die symmetrisch liegen zu beiden Kreisen

$$K_1 : |z| = 1 \quad \text{und} \quad K_2 : |z - 4i| = 2.$$

Aufgabe 8:

a) Man bestimme eine Möbius-Transformation $T : z \rightarrow w$ mit $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$,
 $T(2) = \frac{1}{2}$.

b) Welches sind die Bilder von

- (i) der reellen Achse,
- (ii) der imaginären Achse,
- (iii) des Einheitskreises $|z| = 1$?

c) Man bestimme das Urbild von $|w| = 1$.

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in \mathbb{C} sind:

- (i) $f(z) = z^2 \cos z$,
- (ii) $f(z) = \operatorname{Im}(z^3)$,
- (iii) $f(z) = \exp(\bar{z})$,
- (iv) $f(z) = z + \bar{z} + 1$.

b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, d.h. eine Funktion v , für die die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung von a), dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := z^2$ definierte konforme Abbildung .

- a) In welche Kurven der w -Ebene gehen die Geraden der z -Ebene $c_1(t) = t + i$ und $c_2(t) = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ unter f über?
- b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 12:

- a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it, t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T , wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it, t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq \sqrt{5}\}$ (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\int_0^{\pi} e^{2+3it} dt,$

b) $\int_1^2 \frac{1}{4it + 3} dt,$

c) $\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z} dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $\oint_c 6\bar{z} - 5 dz$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int_c 2z - 3 dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1 - i$ nach $-i$,

b) $\int_c ze^z dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \leq t \leq 0$,

c) $\int_{-i}^1 \frac{z+1}{z} dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \frac{5z}{z^2 - 2z + 2}$, $z_0 = -1$ und $z_0 = -1 - i$,

(ii) $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$, $z_0 = \frac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z + 5)$, $z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Aufgabe 17:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\oint_c \frac{1}{z+2} dz$, $c: |z+1-i| = 1$,

b) $\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2+3}{z+1} dz$, $c_1: |z+i| = 1.3$, $c_2: |z+i| = 1.5$,

$$c) \oint_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz, \quad c_1 : |z + 2| = 2, \quad c_2 : |z - 1.5| = 2,$$

$$d) \oint_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} dz, \quad c : |z - i| = 3,$$

$$e) \oint_c \frac{\ln z}{(z - 1 - i)^5} dz, \quad c : |z - 1 - 2i| = 2.$$

Aufgabe 18:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$a) \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad b) \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 19:

Man bestimme die Laurententwicklung der Funktionen

$$a) \quad f(z) = \frac{\exp(z - 2)}{z - 2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2,$$

$$b) \quad f(z) = z^2 \cosh\left(\frac{1}{z + 1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1$$

und gebe die Residuen von $f(z)$ in z_0 an.

Aufgabe 20:

Für die folgenden Funktionen

$$a) \quad f(z) = \frac{z^2 + z - 2}{z^3 - 2z^2}, \quad b) \quad f(z) = \frac{1 + z - \exp(z)}{z^4},$$

$$c) \quad f(z) = \cosh \frac{1}{z} - \sinh \frac{1}{z}, \quad d) \quad f(z) = \frac{z - \pi}{\sin z}.$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4}.$$

- Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung von f .
- Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_{c_{1,2}} f(z) dz$$

für die Kreise $c_k : |z - 1.5| = k$, $k = 1, 2$.

Aufgabe 22:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx,$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324} dx \quad \text{und}$$

$$c) \int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}} dx.$$

Aufgabe 23:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi} d\varphi,$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos^2 \varphi}.$$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ bzw. } \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Man berechne zu f die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ und überprüfe deren Stetigkeit in $\omega = 0$.
- b) Man berechne die Inverse-Fouriertransformierte zu

$$F(\omega) = \frac{2i(\omega \cos \omega - \sin \omega)}{\omega^2}$$

unter Verwendung von

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi i & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ -\pi i & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

und ohne das Ergebnis aus a).