Übung

$S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\},\ A_3 = \{(1),(123),(132)\}$.
Sei $\theta : A_3 \to GL(\mathbb{C})$ mit:
$\theta(1) = 1,\ \theta((123)) = exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right),\ \theta((132)) = exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)$.
Konstruiere die von θ induzierte S_3-Darstellung $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^2)$.

Lösung

Die Linksnebenklassen in G/H sind $\sigma_1 = \{(1),(123),(132)\} = A_3$ und $\sigma_2 = \{(12),(23),(13)\}$.
Sei $R = \{r_1 = (1), r_2 = (12)\}$ ein Repräsentantensystem von G/H. Nun gilt für $r \in R, g \in S_3 :\ gr = \widetilde{r}h$ für ein $\widetilde{r} \in R$ und ein $h \in A_3$, das heißt, es gilt: $\rho_g(\rho_r(w)) = \rho_{\widetilde{r}}(\rho_h(w))$ für $w \in \mathbb{C}$.
Wir bestimmen nun für alle gr_1, gr_2 mit $g \in S_3$ zunächst die zugehörigen $\widetilde{r} \in R, h \in H$:

$$\begin{array}{lrcl}
g = (1): & (1)(1) = (1)(1) & \text{und} & (1)(12) = (12)(1) \\
g = (12): & (12)(1) = (12)(1) & \text{und} & (12)(12) = (1)(1) \\
g = (23): & (23)(1) = (12)(132) & \text{und} & (23)(12) = (123) = (1)(123) \\
g = (13): & (13)(1) = (12)(123) & \text{und} & (13)(12) = (132) = (1)(132) \\
g = (123): & (123)(1) = (1)(123) & \text{und} & (123)(12) = (23) = (12)(132) \\
g = (132): & (132)(1) = (1)(132) & \text{und} & (132)(12) = (13) = (12)(123)
\end{array}$$

Da nun $\mathbb{C}^2 = \rho_{r_1}\mathbb{C} \oplus \rho_{r_2}\mathbb{C}$ gelten soll und in der darstellenden Matrix R_g von ρ_g die Zeilen permutiert werden, falls $r \neq \widetilde{r}$, haben die darstellenden Matrizen von ρ folgende Gestalt:

$$R_{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_{(1)} & 0 \\ 0 & \theta_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{(1)} \\ \theta_{(1)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$R_{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{(123)} \\ \theta_{(132)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \\ exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$
$$R_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{(132)} \\ \theta_{(123)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) \\ exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$
$$R_{(123)} = \begin{pmatrix} \theta_{(123)} & 0 \\ 0 & \theta_{(132)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) & 0 \\ 0 & exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) \end{pmatrix}$$
$$R_{(132)} = \begin{pmatrix} \theta_{(132)} & 0 \\ 0 & \theta_{(123)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) & 0 \\ 0 & exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Man kann nun leicht nachrechnen, dass tatsächlich $\rho_{g_1}\rho_{g_2} = \rho_{g_1g_2}$ für alle $g_1, g_2 \in S_3$ gilt.