1 Einschub:

Wir beginnen heute mit einem kleinen Einschub zu den Konjugationsklassen von S_d

Alle zueinander konjugierten Elemente bilden eine Äquivalenzklasse, die sogenannte Konjugationsklasse von h, $G \cdot h = \{ghg^{-1}|g \in G\}$, wobei anstelle von h jedes Element der Konjugationsklasse gewählt werden kann.

Im folgenden wollen wir nun zeigen, dass es eine Bijektion zwischen den Partitionen von n und den Konjugationsklassen von S_d gibt, wobei eine Partition $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die jeweiligen Zyklenlängen eines Elementes $\sigma \in S_d$ sind.

1.1 Satz

Seien $g, h \in S_n$ und $g = (i_1, \ldots, i_{l_1}) \cdots (i_m, \ldots, i_n)$ und $h = (j_1, \ldots, j_{l'_1}) \cdots (j_{m'}, \ldots, j_{n'})$ mit Zyklenlängen $l_1 \geq \ldots \geq l_k \geq 0$ und $l'_1 \geq \ldots \geq l'_k \geq 0$, dann gilt $g = \sigma h \sigma^{-1}$ für ein $\sigma \in G$ genau dann wenn $l_i = l'_i \;\; \forall \; i \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis:

$" \Rightarrow "$
Sei $g = \sigma h \sigma^{-1}$. Wendet man die Abb. $\sigma h \sigma^{-1}$ auf $\sigma(i_k)$ an, so erhält man $\sigma(\pi(i_k))$, dass ist aber nichts anderes als $\pi(\sigma i_k)$. Daraus folgt dann aber, dass die Zyklenlänge unter Konjunktion erhalten bleibt.
$" \Leftarrow "$
Sei nun $l_i = l'_i \;\; \forall \; i \in \{1, \ldots, k\}$, dann lässt sich leicht eine Permutation finden mit $g = (\sigma j_1, \ldots, \sigma j_{l'_1}) \cdots (\sigma j_{m'}, \ldots, \sigma j_{n'})$, dann sind aber g und h konjugiert.

q.e.d

2 Das Äußere Produkt der Standard Darstellung

Im Folgenden wollen wir uns mit dem Äußeren Produkt der Standard Darstellung beschäftigen um einen ersten Einblick in mögliche irreduzible Darstellungen zu erhalten.

2.1 Präposition

Jedes Äußere Produkt $\Lambda^k V$ der Standard Darstellung V von S_d ist irreduzibel
für $k \in \{1, \ldots, d-1\}$

Beweis:

Wegen der Zerlegung $\mathbb{C}^d = V \bigoplus U$ folgt das V irreduzibel ist, wenn gilt $(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = 2$ Da

$$\Lambda^k \mathbb{C}^d = (\Lambda^k V \bigotimes \Lambda^0 U) \bigoplus (\Lambda^{k-1} V \bigotimes \Lambda^1 U) = \Lambda^k V \bigoplus \Lambda^{k-1} V$$

genügt es zu zeigen, dass $(\chi, \chi) = 2$, wobei χ Charakter der Darstellung $\Lambda^k \mathbb{C}^d$. Sei $A = \{1, \ldots, d\}$. Sei B eine Teilmenge von A mit k Elementen und $g \in G = S_d$, definiere

$$\{g\}_B = \begin{cases} 0 & \text{,wenn } g(B) \neq B \\ 1 & \text{,wenn } g(B) = B \text{ und } g_{|B} \text{ grade Permutation} \\ -1 & \text{,wenn } g(B) = B \text{ und } g_{|B} \text{ ungerade} \end{cases} \tag{1}$$

wir betrachten nun $\chi(g) = \sum_B \{g\}_B = \sum_{B_{|g(B)=B}} \{g\}_B = \sum_B g_{|B}$ und es gilt:

$$(\chi,\chi) = \frac{1}{d!} \sum_{g\in G} (\sum_B \{g\}_B)^2 = \frac{1}{d!} \sum_{g\in G} \sum_B \sum_C \{g\}_B \{g\}_C$$

$$= \frac{1}{d!} \sum_B \sum_C \sum_g (sgn\ g_{|B}) \cdot (sgn\ g_{|C})$$

Dann ist g gegeben durch vier Permutationen und zwar jeweils eine aus $B \cap C$, $B \setminus B \cap C$, $C \setminus B \cap C$ und $A \setminus B \cup C$ Sei nun l die Kardinalität von $B \cap C$, dann kann die Summe wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{d!} \sum_B \sum_C \sum_{a\in G_l} \sum_{b\in G_{k-l}} \sum_{c\in G_{k-l}} \sum_{h\in G_{d-2k+1}} (\text{sgn a})^2 \cdot (\text{sgn b}) \cdot (\text{sgn c})$$

$$\frac{1}{d!} \sum_B \sum_C l!(d-2k+l)! (\sum_{b\in G_{k-l}} (\text{sgn b})) \cdot (\sum_{c\in G_{k-l}} (\text{sgn c}))$$

Die beiden letzten Summen ergeben 0, außer es gilt $k - l = 1$ oder 0.

Sei $k = l$

$$\Rightarrow \frac{1}{d!} \sum_B k!(d-k)! = \frac{1}{d!} \binom{d}{k} k!(d-k)! = 1$$

für $k - l = 1$ analog und somit folgt $(\chi,\chi) = 2$.

q.e.d

Im Gegensatz hierzu sind die äußeren Produkte der Standarddarstellung von S_d so gut wie nie irreduzibel. Die Präposition sagt lediglich aus, dass jede irreduzible reelle Darstellung ein Inneres Produkt beinhaltet, welches invariant unter der Gruppenverknüpfung ist und soll uns eine erste Möglichkeit zur Erzeugung irreduzibler Darstellung geben.

3 Young Diagramm und Frobenius Formel

Nachdem wir nun ein erstes Beispiel zum gewinnen irreduzibler Darstellungen gesehen haben. Wollen wir uns in diesem Abschnitt mit einer besonderen Darstellungsform solcher beschäftigen.

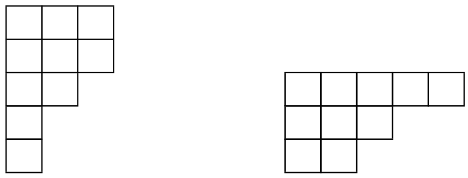
Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_d ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen. Wie wir aus der Einleitung bereits wissen, ist sie dann auch gleich der der Partitionen $p(d) = \{d : d = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \ , \ \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1\}$.

3.1 Young Diagramm

Zu jeder Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ existiert ein Young Diagramm, wobei dieses aus k Kästchen-Reihen besteht und jede i-te Reihe aus λ_i Kästchen besteht $i \in \{1, \ldots, k\}$. Das Young Diagramm zur konjugierten Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda_k)'$ zu λ ist dann einfach das Transponierte.

Hier ein Beispiel für ein Young Diagramm der Partition $(3, 3, 2, 1, 1)$ und der hierzu konjugierten

(5, 3, 2).



Im Allgemeinen ist ein solches Diagramm mit Zahlen von 1 bis d gefüllt. Die Standardschemata sind dann diejenigen Diagramme, welche innerhalb jeder Spalte von oben nach unten und in jeder Zeile von links nach rechts aufsteigend nummeriert sind. Die Projektoren zu allen Schemata gleicher Tableaux sind nicht linear unabhängig, jedoch solche zu allen möglichen Standardschemata eines gegebenen Tableau. Die Zahl der orthogonalen Projektoren R_{ik} (zu Standardschemata), die sich so aus Tableaux der Ordnung n konstruieren lassen, und die Summe der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der S_d ist gleich. Im folgenden werden wir zeigen, dass die R_{ik} die Projektoren der irreduziblen Darstellungen von S_d sind.

Sei nun ein Tableau gegeben z.B. das kanonische, definiere zwei Untergruppen von S_d :

$$P_\lambda = \{g \in S_d \text{ :gerhält jede Zeile}\}$$

und

$$Q_\lambda = \{g \in S_d \text{ :gerhält jede Spalte}\}$$

Wir betrachten nun zwei Elemente dieser Untergruppen in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}S_d$:

$$a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} e_g \text{ und } b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} \text{sgn(g) } e_g$$

Sei V nun ein beliebiger VR und S_d permutiert Faktoren über das d-te Tensorprodukt $V^{\bigotimes d}$, dann ist das Bild von $\varphi(a_\lambda)$ unter der Abb. $\varphi : \mathbb{C}S_d \to End(V^{\bigotimes d})$:

$$Im(\varphi(a_\lambda)) = Sym^{\lambda_1} V \bigotimes \ldots \bigotimes Sym^{\lambda_k} V \subset V^{\bigotimes d}$$

,wobei man die Inklusion auf der rechten Seite erhält, indem man die Faktoren von $V^{\bigotimes d}$ nach den Zeilen des Young Tableaus gruppiert. Ähnliches erhält man für b_λ:

$$Im(\varphi(b_\lambda)) = Sym^{\mu_1} V \bigotimes \ldots \bigotimes Sym^{\mu_t} V \subset V^{\bigotimes d}$$

wobei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ die konjugierte Partition zu λ ist.

Setze $c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}S_d$, dann nennen wir c_λ Young-Symmetrizer. Sei z.B. $\lambda = d$, dann ist $c_{(d)} = a_d = \sum_{g \in S_d} e_g$ und das Bild von $c_{(d)}$ auf $V^{\bigotimes d}$ ist $Sym^d V$. Sei $\lambda = (1, \ldots, 1)$, dann gilt $c_{(1,\ldots,1)} = b_{(1,\ldots,1)} = \sum_{g \in S_d}$ sgn(g)e_g und das Bild von $c_{(1,\ldots,1)}$ ist $\Lambda^d V$. Wir sehen, dass das Bild des Symmetrizers c_λ in $V^{\bigotimes d}$ im wesentlichen alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von GL(V) bestimmt. Hieraus lässt sich folgendes Theorem ableiten.

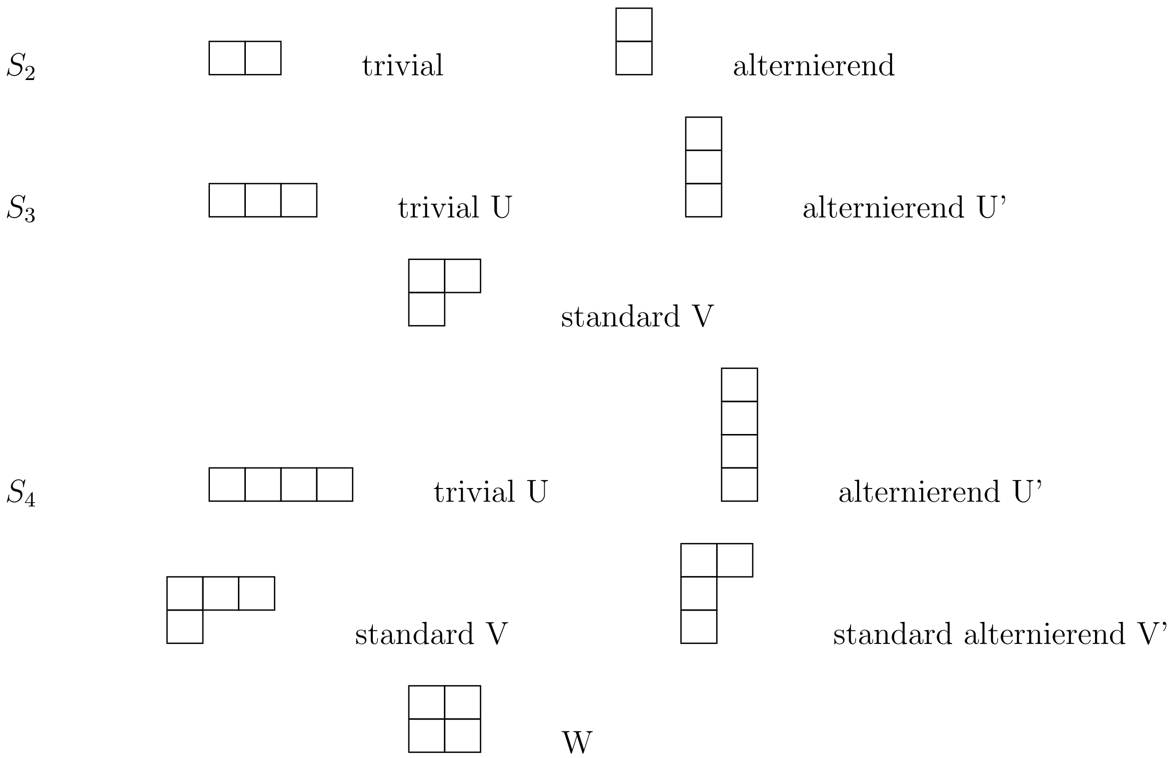
3.2 Theorem

Gelte für λ, $c_\lambda^2 = n_\lambda \cdot c_\lambda$ und das Bild von c_λ (bzgl Rechtsmultiplikation in $\mathbb{C}S_d$) ist eine irreduzible Darstellung V_λ von S_d. Jede irreduzible Darstellung von S_d kann auf diese Weise durch eine eindeutige Partition erhalten werden.

Dieses Theorem wird erst im nächsten Vortrag bewiesen werden. Als Korollar lässt sich hieraus allerdings noch folgern, dass sich jede irreduzible Darstellung von S_d über $\mathbb{Q}$ definieren lässt, da $c_\lambda \in \mathbb{Q}S_d$. Ein solcher Zusammenhang zwischen Konjugationsklassen und irreduziblen Darstellungen von wie bei S_d, hat sich für allgemeine Gruppen nie zeigen lassen.

3.3 Beispiel

Wir wollen nun die bereits in vorherigen Vorträgen beschriebenen irreduziblen Darstellungen von S_d mit Hilfe von Young Diagrammen beschreiben.



Die Darstellungen von S_4 haben wir bereits im Vortrag "Charakter: Grundelegende Definition" kennen gelernt. U,U',V,V' und W entsprechen dabei den Darstellungen ρ^i mit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frobenius Formel für die Charaktere χ_λ von V_λ, welche ebenfalls eine Formel für die Dimension von V_λ beinhaltet.

Sei C_l eine Konjugationsklasse in S_d, gegeben durch eine Partition

$$i = \{i_1, \dots, i_d\} \text{ mit } \sum \alpha i_\alpha = d$$

C_l besteht dann aus den Permutationen die i_1 1-Zyklen, ..., i_d d-Zyklen haben.
Im nächsten Schritt führen wir unabhängige Variablen $x_1, \dots, x_k$ ein, wobei wobei k größer gleich der Anzahl der Zeilen des Young Diagramms von λ. Wir definieren nun die Produktsummeen $P_j(x)$ für $j \in \{1, \dots, d\}$ und die Diskriminante Δx durch:

$$P_j(x) = x_1^j + \dots + x_k^j$$

$$\Delta x = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Weiter sei $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k)$ eine formale Potenzreihe und $l_1, \ldots, l_k$ ein k-Tupel $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$[f(x)]_{l_1,\ldots,l_k} = \text{Koeffizient von } x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} \text{ in f}$$

Gegeben sei eine Partition $\lambda : \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 0$ von d, setze:

$$l_1 = \lambda_1 + k - 1, \ldots, l_k = \lambda_k$$

Dann ist der Charakter von V_λ ausgewertet an $g \in C_l$ gegeben durch:

3.4 Frobenius Formel

.

$$\chi_\lambda(C_l) = [\Delta x \cdot \prod_j P_j(x)^{l_j}]_{l_1,\ldots,l_k}$$

Im folgenden wollen wir die Frobenius Formel jetzt nutzen um die Dimension von V_λ zu bestimmen. Dafür betrachten wir die Konjugationsklasse der Identität, welche zu i=(d) gehört. Dann gilt:

$$dim(V_\lambda) = \chi_\lambda(C_{(d)}) = [\Delta x \cdot (x_1 + \ldots + x_k)^d]_{l_1,\ldots,l_k}$$

Dann ist $\Delta(x)$ die Vandermonde-Determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & x_k & \ldots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\ x_k^{\sigma(1)-1} \cdots x_1^{\sigma(k)-1} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Für den restlichen Term gilt:

$$(x_1 + \ldots + x_k)^d = \sum \tfrac{d!}{r_1! \cdots r_k!} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$$

die Summe über k-Tupel $(r_1, \ldots, r_k)$ mit $\sum_{i=1}^k r_i = d$. Um den Koeffizienten von $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ im Produkt zu finden, verknüpfen wir übereinstimmende Terme und erhalten:

$$\sum sgn(\sigma) \cdot \tfrac{d!}{(l_1 - \sigma(k)+1)! \cdots (l_k - \sigma(1)+1)!}$$

Die Summe über alle $\sigma \in S_k$ mit $l_{k-l+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Dann kann die Summe geschrieben werden als:

$$\tfrac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^k l_j(l_j - 1) \cdots (l_j - \sigma(k-j+1) + 2)$$

$$= \tfrac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \begin{pmatrix} 1 & l_k & l_k(l_k-1) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \ldots \end{pmatrix}$$

Durch Spaltenreduktion erhalten wir die Vandermonde-Determinante und somit:

$$dim(V_\lambda) = \frac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{i<j}(l_i - l_j)$$

mit $l_i = \lambda_i + k - i$.