# Gruppenalgebren

## 1 Darstellung und Moduln

### 1.1 Definition:

Sei $G$ eine endliche Gruppe der Ordnung $n$ und sei $K$ ein Körper. Dann bezeichnet $K[G]$ die Gruppenalgebra von $G$ über $K$. Die Basis der Algebra besteht aus Elementen von $G$. Jedes Element $f$ dieser Algebra kann dann eindeutig als eine endliche Linearkombination

$$f = \sum_{g \in G} a_g g, \qquad \text{mit } a_g \in K$$

geschrieben werden. Es gilt:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

und

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{h \in G} \left( \sum_{\substack{xy = h \\ x, y \in G}} (a_x b_y) h \right).$$

Jede Darstellung einer Gruppe lässt sich eindeutig zu einer Darstellung der Gruppenalgebra fortsetzen.
Eine Darstellung $\rho$ in einem $K$-VR $V$ wird durch $g \cdot v = \rho_g(v)$ zum *„$K[G]$-Linksmodul“*. Andersherum ist jeder Linksmodul $V$ über $K[G]$ bereits ein $K$-Vektorraum und definiert eine Darstellung von $G$ durch $\rho_g(v) = g \cdot v$ mit $v \in V$. Linear fortgesetzt definiert das $fx$, für $f \in K[G]$ und $x \in V$. Das heißt, wir haben eine eins zu eins Korrespondenz:

$$\text{Darstellungen von } G \quad \rightleftarrows \quad \text{Linksmoduln über } K[G]$$

Fortan ist mit der Bezeichnung Modul ein $K[G]$-Linksmodul gemeint und gleichzeitig auch eine Darstellung von $G$. $K[G]$ als $K[G]$-Modul entspricht gerade der regulären Darstellung.

### 1.2 Proposition:

Falls $K$ ein Körper der Charakteristik 0 ist, so ist die Algebra $K[G]$ halbeinfach.

*Beweis:*

Dass $K[G]$ halbeinfach ist, ist äquivalent dazu, dass jedes $K[G]$-Modul $V$ halbeinfach ist. D.h. zu zeigen ist, dass jedes Untermodul $U$ von $V$ eine direkte Summe in $V$ als $K[G]$-Modul ist.
Sei $V$ ein $K[G]$-Modul und $V' \subset V$ ein Untermodul. Wir zeigen, dass $V'$ ein direkter Summand von $V$ ist. Sei $\rho$ eine $k-$lineare Projektion von $V$ auf $V'$ und $\rho^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} sps^{-1}$. D.h. $\rho^0(v) = \sum_{s \in G} sp(s^{-1}v)$.
$\rho^0$ ist eine $K[G]$-lineare Projektion von $V$ auf $V'$, also ist $V'$ direkter Summand zu $V$.

$\square$

Dieser Satz sagt nichts andere aus, als die Zerlegbarkeit einer Darstellung in irreduzible Unterdarstellungen.

Sei fortan $K = \mathbb{C}$.

## 1.3 Korollar:

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}) \qquad \text{mit Matrizenringen } M_{n_i}(\mathbb{C}) \text{ über } \mathbb{C}.$$

*Beweis:*

Wir werden für den Beweis folgende Isomorphien zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G]^{\text{opp}} &\simeq \operatorname{End}_{\mathbb{C}[G]}\big(\mathbb{C}[G]\big) && (1)\\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{End}_{\mathbb{C}[G]}\left(V_i^{n_i}\right) && (2)\\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}) && (3)\\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})^{\text{opp}} && (4) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{End}_{\mathbb{C}[G]}\big(\mathbb{C}[G]\big)^{\text{op}}$ den sogenannten „Gegenring“. Der Gegenring entsteht durch das Vertauschen der Faktoren bei der Multiplikation. D.h. sei $R$ ein Ring, dann wird der Gegenring $R^{\text{op}}$ wie folgt definiert:

- Die Menge von $R^{\text{op}}$ ist gleich der von $R$.
- Die Addition stimmt auf beiden Mengen überein.
- Die Multiplikation $\circ$ von $R^{\text{op}}$ wird durch die Multiplikation $\cdot$ von $R$ definiert:

$$a \circ b := b \cdot a \quad \forall a, b \in R^{\text{op}}.$$

Zum Verständnis eines „Gegenrings“ zeigen wir zunächst **(4)**:

Sei $A = M_n(\mathbb{C}[G])$. Die Identitätsabbildung ist ein Algebraisomorphismus zwischen $(A_1 \oplus A_2)^{\text{opp}} \simeq A_1^{\text{opp}} \oplus A_2^{\text{opp}}$. Damit reicht es, Folgendes zu betrachten:
Definiere eine Abbildung $\varphi : A \longrightarrow A^{\text{opp}}$ durch $\varphi(A) = A^T$. Diese Abbildung ist eindeutig linear, bijektiv und bildet die Identität auf die Identität ab. Durch

$$\varphi(XY) = (XY)^T = Y^T X^T = \varphi(Y)\varphi(X) = \varphi(X) * \varphi(Y)$$

wird $\varphi$ zum Algebraisomorphismus und somit gilt $A^{\text{opp}} \simeq A$.

zu (1):

Definiere $\varphi : \mathbb{C}[G]^{\text{opp}} \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G])$ durch $\varphi(a) : x \mapsto xa$ mit $a, x \in \mathbb{C}[G]$. $\varphi(a)$ ist ein Links-$\mathbb{C}[G]$-Modulhomomorphimus. Es gilt:

$$\varphi(a * b)(x) = \varphi(ba)(x) = x(ba) = (xb)a = \varphi(a)(xb) = \big(\varphi(a) \circ \varphi(b)\big)(x)$$

*Injektivität:* Es sei $\varphi(a) = 0$ für ein $a \in \mathbb{C}[G]$. Dann gilt insbesondere:

$$0 = \varphi(a)1 = 1a = a.$$

*Surjektivität:* Für jedes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G])$, sei $f(1_{\mathbb{C}[G]}) = a$, für jedes $a \in \mathbb{C}[G]$ gilt dann

$$f(a) = f(a1) = xf(1) = xa = \varphi(a)(x).$$

Damit ist $f = \varphi\big(f(1)\big)$. $\varphi$ ist somit ein Algebrenisomorphismus.

zu (2):
Aus der Proposition wissen wir, dass sich $\mathbb{C}[G]$ in irreduzible Unterdarstellungen zerlegen lässt, d.h.

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{n_i}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\big(\mathbb{C}[G]\big) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{n_i}\right) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{n_i}, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{n_j}\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i,j}^{k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(V_i^{n_i}, V_j^{n_j}\right) \\ \text{Schur's Lemma} \quad &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} End_{\mathbb{C}[G]}\left(V_i^{n_i}\right) \end{aligned}$$

zu (3):
Betrachten wir nun eine Komponente $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V^n)$. Das ist isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\bigoplus_{j=1}^n V_{(j)}, \bigoplus_{i=1}^n V_{(i)}\right)$ und sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\bigoplus_{j=1}^{n} V_{(j)}, \bigoplus_{i=1}^{n} V_{(i)}\right) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ \varphi &\mapsto (\lambda_{ij})_{ij}. \end{aligned}$$

Für ein Element $\varphi_{|V_{(j)}}^{|V_{(i)}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(G)}\big(V_{(j)}, V_{(i)}\big)$ gilt:

$$\varphi_{|V_{(j)}}^{|V_{(i)}} = \lambda_{ij} \cdot \mathrm{id}_{V_{(j)} \longrightarrow V_{(i)}}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(G)}\big(V_{(j)}, V_{(i)}\big)$ ist nach Schur's Lemma isomorph zu $\mathbb{C}$. Und anders herum

$$\sum \lambda_{ij} \mathrm{id}_{V_{(j)} \longrightarrow V_{(i)}} \mapsto (\lambda_{ij})$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass dies einen Algebrenisomorphisus definiert. Damit ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\bigoplus_{j=1}^n V_{(j)}, \bigoplus_{i=1}^n V_{(i)}\right)$ isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$. $\square$

# 2 Zerlegung der Algebra $\mathbb{C}[G]$

Sei fortan $K = \mathbb{C}$. Aus dem Korollar folgt, dass $\mathbb{C}[G]$ eine direkte Summe der Matrixalgebren $M_{n_i}(\mathbb{C})$ ist. Seien $\rho_i : G \longrightarrow GL(W_i)$, $1 \le i \le h$ die bis auf Isomorphie eindeutigen irreduziblen Darstellung von $G$ mit $n_i = \dim(W_i)$. so dass der Ring $\mathrm{End}(W_i)$ von Endomorphismen von $W_i$ isomorph zu $M_{n_i}(\mathbb{C})$ ist. Die Abbildung $\rho_i : G \longrightarrow GL(W_i)$ werden linear zu einem „*Algebra-Homomorphismus*" $\tilde{\rho}_i : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathrm{End}(W_i)$ fortgesetzt. Die $(\tilde{\rho}_i)$ definieren einen Homomorphismus

$$\tilde{\rho} : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \bigoplus_{i=l}^{i=k} \mathrm{End}(W_i) \;\simeq\; \bigoplus_{i=l}^{i=k} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

## 2.1 Proposition:

Der Homomorphismus $\tilde{\rho}$ ist ein Isomorphismus.

*Beweis:*

Sei $\rho \in \ker \tilde{\rho}$. Dann hebt $\rho$ alle irreduziblen Darstellungen von $G$ auf, also auch die reguläre Darstellung. Die reguläre Darstellung ist der $\mathbb{C}[G]$- Modul $\mathbb{C}[G]$, also gilt $\rho \cdot x = 0 \, \forall x \in \mathbb{C}[G]$. Das heißt, $\rho = 0$. Also ist $\ker \tilde{\rho} = 0$ und somit $\tilde{\rho}$ injektiv.
$\mathbb{C}[G]$ und $\bigoplus M_{n_i}(\mathbb{C})$ haben beide die Dimension $g = \sum n_i^2$. Damit ist $\tilde{\rho}$ ein Isomorphismus. □

## 2.2 Proposition:

Sei $(u_i)_{1 \le i \le h}$ ein Element von $\bigoplus_{i=1}^k \mathrm{End}(W_i)$ und sei $u = \sum_{s \in G} u(s)s$ ein Element von $\mathbb{C}[G]$, so dass $\tilde{\rho}_i(u) = u_i$ für alle $i$. Der $s$-te Koeffizient $u(s)$ von $u$ ist gegeben durch

$$u(s) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{h} n_i \mathrm{Tr}_{W_i}\big(\rho_i(s^{-1})u_i\big), \qquad \text{mit } n_i = \dim(W_i),\ |G| = g.$$

*Beweis:*

Es genügt, die Formel auf den Fall zu überprüfen, dass $u$ gleich einem Element $t \in G$ ist. Dann

$$u(s) = \delta_{st} \quad \text{und} \quad \mathrm{Tr}_i\big(\rho_i(s^{-1})u_i\big) = \chi_i(s^{-1}t),$$

dabei ist $\chi_i$ der irreduzible Charakter von $G$ zu $W_i$. Daher bleibt zu zeigen, dass

$$\delta_{st} = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s^{-1}t).$$

Das folgt aus dem Vortrag über die Zerlegung der regulären Darstellung. □

## 2.3 Beispiel:

Sei $G = {}^{\mathbb{Z}}\!/_{3\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $W_j = \mathrm{span}(\lambda_j)$ mit $j \in \{0, 1, 2\}$, d.h. ein Element $u_j$ aus $W_j$ ist dann eben ein Vielfaches von $\lambda_j$. und sei $\rho_{\bar{k}}(x_j) = e^{\frac{k2\pi ji}{n}} \cdot x_j$. Dann gilt für die Koeffizienten

$$u(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\frac{k2\pi ji}{n}} x_j.$$

Genauer mit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$\begin{aligned}
u(\bar{0}) &= \frac{1}{3}(3-2+1) = \frac{2}{3}\\
u(\bar{1}) &= \frac{1}{3}(3-2\bar{\omega}+\omega) = 1+\frac{\omega-2\bar{\omega}}{3}\\
u(\bar{2}) &= \frac{1}{3}(3-2\omega+\bar{\omega}) = 1+\frac{\bar{\omega}-2\omega}{3}
\end{aligned}$$

Damit ist $u$:

$$u = \frac{2}{3}\bar{0} + \left(1+\frac{\omega-2\bar{\omega}}{3}\right)\bar{1} + \left(\frac{1+\bar{\omega}-2\omega}{3}\right)\bar{2}.$$

Dann gilt beispielsweise für $u \cdot x_1$ :

$$\begin{aligned}
u \cdot x_1 &= \left(\frac{2}{3} + \left(1+\frac{\omega-2\bar{\omega}}{3}\right)\omega + \left(1+\frac{\bar{\omega}-2\omega}{3}\right)\bar{\omega}\right)x_1\\
&= \left(\frac{2}{3} + (\omega+\bar{\omega}) + \frac{\bar{\omega}-2+\omega-2}{3}\right)x_1\\
&= \left(\frac{2}{3} - 1 - \frac{5}{3}\right)x_1\\
&= -2x_1
\end{aligned}$$

## 2.4 Übungsaufgabe:

Sei $u = \sum u(s)s$ und $v = \sum v(s)s$ zwei Elemente von $\mathbb{C}[G]$. Setze $\langle u, v\rangle = g\sum_{s\in G} u(s^{-1})v(s)$. Zeige

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{h} n_i \mathrm{Tr}_{W_i}\big(\bar{\rho}_i(uv)\big).$$

(Tipp: Betrachte den Fall, dass $u$ und $v$ zu $G$ gehören.)