1 Wiederholung

1.1 Eigenschaften von Charakteren

Sei χ_ρ der Charakter der linearen Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ mit $dim(V) = n$. Dann gilt:

(1) $\chi_\rho(id) = n$

(2) $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$

(3) $\chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s)$

1.2 Direkte Summe von Darstellungen und deren Charaktere

Seien V_1, V_2 endlichdimensiobale $\mathbb{C}-$Vektorräume und
$\rho^1 : G \to GL(V_1), \rho^2 : G \to GL(V_2)$ lineare Darstellungen von G.
Weiter seien $\chi_{\rho^1}, \chi_{\rho^2}$ die zugehörigen Charaktere. Für den Charakter χ_ρ von der direkten Summendarstellung $\rho : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ gilt: $\chi_\rho = \chi_{\rho^1} + \chi_{\rho^2}$

2 Schurs Lemma

2.1 Schurs Lemma

Seien $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ zwei irreduzible Darstellungen von G und sei f eine lineare Abbildung von V_1 nach V_2, so dass $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ für alle $s \in G$. Dann:

(1) Falls ρ^1 und ρ^2 nicht isomoprh sind, gilt $f = 0$

(2) Falls $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$, ist f ein skalares Vielfaches der Identität.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_s^1"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_s^2"] \\
V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

Beweis: (1) Der Fall $f = 0$ ist trivial. Wir nehmen also an $f \neq 0$ und sei W_1 der Kern. Für $x \in W_1$ gibt es $f\rho_s^1 x = \rho_s^2 f x = 0$, woraus folgt, dass $\rho_s^1 x \in W_1$, und damit W_1 invariant unter G ist. Da V_1 irreduzibel unter ρ^1 ist, gilt $W_1 = V_1$ oder $W_1 = 0$. Der erste Fall ist ausgeschlossen, da sonst $f = 0$ wäre. Mit dem gleichen Argument, gilt, dass das Bild W_2 von f (also die Menge fx mit $x \in V_1$) gleich V_2 ist. Aus den zwei Eigenschaften $W_1 = 0$ und $W_2 = V_2$ kann gefolgert werden, dass f ein Isomorphismus von V_1 nach V_2 ist. Damit ist (1) gezeigt. Wir nehmen an, dass $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, und sei λ ein Eigenwert von f. Aufgrund der Tatsache, dass die Skalare komplex (und die komplexen Zahlen abgeschlossen) sind, existiert mindestens ein Eigenwert.

Sei $f' = f - \lambda$. Da λ ein Eigenwert von f ist, ist der Kern von $f' \neq 0$. Andererseits gilt $\rho_s^2 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$. Der Beweis zu (1) zeigt, dass dies nur mglich ist, wenn $f' = 0$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $f = \lambda$ □

Seien V_1 und V_2 weiterhin irreduzibel und beschreibe g die Ordnung der Gruppe G. Dann folgt:

2.2 Korollar:

Sei h eine lineare Abbildung von V_1 nach V_2 und wir definieren

$$h^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1.$$

Dann gilt:

(1) Falls ρ^1 und ρ^2 nicht isomoprh sind, gilt $h^0 = 0$

(2) Falls $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$, f ist ein skalares Vielfaches der Identitt mit Vielfachheit $(1/n)Tr(h)$, mit $dim(V_1) = n$.

Beweis: Wir haben $\rho_s^2 h^0 = h^0 \rho_s^1$. Es gilt:

$$(\rho_s^2)^{-1} h^0 \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_s^2)^{-1} (\rho_t^2)^{-1} h p_t^1 \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_{ts}^2)^{-1} h \rho_{ts}^1 = h^0$$

Wir wenden Satz 1 mit $f = h^0$ an und sehen dass im Fall (1) gilt: $h^0 = 0$. Im Fall (2) gilt, dass $h^0 = \lambda$ für ein komplexes Skalar λ. Außerdem gilt in Fall (2):

$$Tr(h^0) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} Tr((\rho_t^1)^{-1} h p_t^1) = Tr(h),$$

und da $Tr(\lambda) = n\lambda$, gilt $\lambda = (1/n)Tr(h)$. □

Nun wandeln wir das Korollar wie folgt um: wir nehmen an, dass ρ^1 und ρ^2 in Matrixform gegeben sind:

$$\rho_t^1 = (r_{i_1 j_1}(t)), \rho_t^2 = (r_{i_2 j_2}(t)).$$

Die lineare Abbildung h wird durch die Matrix $(h_{j_2 j_1})$ und h^0 durch $(h^0_{i_2 i_1})$ definiert. Denn aus der Definition von h^0 folgt:

$$(*) h^0_{i_2 i_1} = \frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) h_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t)$$

Die rechte Seite ist eine lineare Abbildung in Abhängigkeit von $h_{j_2 j_1}$. Im Fall (1) und bei geeigneter Wahl von $h_{j_2 j_1}$ (da diese lineare Abbildung beliebig gewählt werden kann) verschwindet diese für alle Werte, weil ihre Koeffizienten den Wert 0 annehmen. Es folgt:

2.3 Korollar:

Im Fall (1) gilt:

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2j_2}(t^{-1})r_{j_1i_1}(t) = 0$$

für beliebige i_1, i_2, j_1, j_2

Im Fall (2) gilt gleichermaßen $h^0 = \lambda$, also $h^0_{i_2i_1} = \lambda\delta_{i_2i_1}$ mit $\lambda = (1/n)Tr(h)$. Daraus folgt $\lambda = (1/n)\sum \delta_{j_2j_1}h_{j_2j_1}$. Mit $(*)$ gilt daher:

$$\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2j_2}(t^{-1})h_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j_2}\delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1}h_{j_2j_1}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $h_{j_2j_1}$ erhalten wir nun:

2.4 Korollar:

Im Fall (2) gilt:

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2j_2}(t^{-1})r_{j_1i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum \delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1} = \begin{cases} 1/n, & \text{wenn } i_1 = i_2 \text{ und } j_1 = j_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Einige Vorbemerkungen zum nächsten Abschnitt:

(1) Seien Φ und Ψ Funktionen auf G (also $f : G \to \mathbb{C}$), dann definiere

$$(**)\langle\Phi,\Psi\rangle := \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\Phi(t^{-1})\Psi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\Phi(t)\Psi(t^{-1}).$$

Dann gilt $\langle\Phi,\Psi\rangle = \langle\Psi,\Phi\rangle$. Außerdem ist $\langle\Phi,\Psi\rangle$ linear in Φ und in Ψ. Damit folgt aus der Anwendung der Korollare 1.3 und 1.4:

$$\langle r_{i_2j_2}, r_{j_1i_1}\rangle = 0 \text{ und } \langle r_{i_2j_2}, r_{j_1i_1}\rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1}$$

(2) Nun nehmen wir an, dass die Matrizen $(r_{ij}(t))$ unitär sind. Dies kann, wie bereits gezeigt, durch eine geeignete Basiswahl erreicht werden. In diesem Fall gilt $r_{ij}(t^{-1}) = \overline{r_{ji}(t)}$. Die Korollare 2.3 und 2.4 führen damit zu "orthogonalen Relationen" für ein Skalarprodukt $(\Phi|\Psi)$, welche im folgenden Kapitel definiert werden:

3 Orthogonale Relationen für Charaktere

Seien Φ und Ψ zwei komplexwertige Funktionen auf G. Nun sei:

$$(\Phi|\Psi) := \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\Phi(t)\overline{\Psi(t)}$$

Dies ist eine hermitesche Form (linear in Φ, semilinear in Ψ und $(\Phi|\Phi) > 0$ für alle $\Phi \neq 0$). Nun übertragen wir diese Struktur auf die Formel $(**)$ mit $\tilde{\Psi}(t) := \overline{\Psi(t^{-1})}$. Daraus ergibt sich:

$$(\Phi|\Psi) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\Phi(t)\overline{\Psi(t)} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\Phi(t)\tilde{\Psi}(t^{-1}) = \langle\Phi,\tilde{\Psi}\rangle$$

Sei nun χ der Charakter einer Darstellung von G, dann gilt (nach Eigenschaften von Charakteren) $\tilde{\chi} = \chi$, so dass $(\Phi|\chi) = \langle\Phi,\chi\rangle$ für alle Funktionen Φ auf G. Also können wir $(\Phi|\chi)$ und $\langle\Phi,\chi\rangle$ synonym verwenden, solange wir es mit Charakteren zu tun haben.

3.1 Theorem:

(1) Sei χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung, dann gilt $(\chi|\chi) = 1$, man sagt "χ hat die Norm 1".

(2) Seien χ und χ' die Charaktere zweier nichtisomorpher Darstellungen, dann gilt $(\chi|\chi') = 0$, man sagt "χ und χ' sind orthogonal".

Sei ρ eine irreduzible Darstellung mit Charakter χ, gegeben in Matrixform $\rho_t = (r_{ij}(t))$. Dann gilt $\chi(t) = \sum r_{ij}(t)$, denn:

$$(\chi|\chi) = \langle\chi,\chi\rangle = \sum_{i,j}\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle.$$

Mit Korollar 1.4 gilt dann $\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle = \delta_{ij}/n$, wobei n der Grad der Darstellung ρ ist. Damit folgt:

$$(\chi|\chi) = (\sum_{i,j}\delta_{ij})/n = n/n = 1,$$

da jedes i und j jeweils n Werte annimmt. Der Beweis von (ii) läuft analog unter Verwendung von Korollar 1.3.

3.2 Beispiel:

Wir betrachten nun noch mal die Charaktertafel von S_4:

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ord	1	6	8	6	3
ρ^1	1	1	1	1	1
ρ^4	3	-1	0	1	-1

Es handelt sich hierbei um zwei irreduzible Darstellungen von S_4.
Wir zeigen nun $(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_4}) = 1$ und $(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_1}) = 0$. Es gilt:

$$(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_4}) = \frac{1}{24}(\chi_{\rho_4}(id)\chi_{\rho_4}(id^{-1}) \;+\; 6(\chi_{\rho_4}((12))\chi_{\rho_4}((12)^{-1}))) +$$

$$8(\chi_{\rho_4}((123))\chi_{\rho_4}((123)^{-1}) + 6(\chi_{\rho_4}((1234))\chi_{\rho_4}((1234)^{-1}) + 3(\chi_{\rho_4}((12)(34))\chi_{\rho_4}(((12)(34))^{-1}) =$$

$$\frac{1}{24}(3^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2) = 1$$

Analog dazu:

$$(\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_1}) = \frac{1}{24}(1 \cdot (1 \cdot 3) + 6 \cdot (1 \cdot (-1)) + 8 \cdot (1 \cdot 0) + 6 \cdot (1 \cdot (-1)) + 3 \cdot (1 \cdot (-1)) = 0$$

3.3 Theorem:

Sei V eine lineare Darstellung von G, mit Charakter Φ und V zerfalle in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.
Sei zustzlich W eine irreduzible Darstellung mit Charakter χ, dann gilt:
die Anzahl der W_i isomorph zu W, ist gleich dem Skalarprodukt $(\Phi|\chi) = \langle \Phi, \chi \rangle$.

Beweis: Sei χ_i der Charakter von W_i. Nach 1.2. (Wiederholung) gilt:

$$\phi = \chi_1 + \cdots + \chi_k.$$

Aus der Linearität des Skalarprodukts folgt nun $(\Phi|\chi) = (\chi_1|\chi) + \cdots (\chi_k|\chi)$. Wir wenden Theorem 2.1. an, wonach $(\chi_i|\chi)$ gleich 1 ist, falls W_i isomorph zu W ist bzw. gleich 0 ist, falls W_i nicht isomorph zu W ist. Daraus folgt die Behauptung direkt. $\square$

3.4 Korollar:

Die Anzahl der W_i isomorph zu W hängt nicht von der gewählten Zerlegung als direkte Summe ab.

Beweis: Offensichtlich hängt $(\Phi|\chi)$ nicht von der Wahl der Zerlegung ab. $\square$

Man kann also sagen, dass die Zerlegung einer Darstellung in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen in gewisser Form **eindeutig** ist.

3.5 Korollar:

Zwei Darstellungen mit dem gleichen Charakter sind isomorph zueinander.

Beweis: Gegeben seien zwei Darstellungen V und V' mit Charakter ϕ bzw. ϕ', wobei $\phi = \phi'$. Für jede beliebge irreduzible Darstellung W mit Charakter χ gilt nun, dass sowohl V als auch V' diese gleich oft (nämlich $(\Phi|\chi) = (\Phi'|\chi)$-mal) enthält. $\square$

Die hier gezeigten Resultate erlauben uns nun, die Untersuchung von Darstellungen auf die Untersuchung von Charakteren (welche wesentlich leichter zu handhaben sind) runterzubrechen.
Seien also $\chi_1, \cdots \chi_h$ die paarweise verschiedenen irreduziblen Charaktere von G. Und seien $W_1 \cdots W_k$ die zugehörigen Darstellungen. Jede Darstellung V ist isomorph zu einer direkten Summe

$$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_k W_k, \quad \text{wobei } m_i \in \mathbb{Z}$$

Der Charakter Φ von V ist gleich $m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$, und es gilt $m_i = (\Phi|\chi_i)$. Durch die orthogonalen Relationen der χ_i folgt:

$$(\Phi|\Phi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2,$$

woraus folgt:

3.6 Korollar:

Sei Φ der Charakter einer Darstellung V und $(\Phi|\Phi)$ sei eine ganze Zahl. Es gilt $(\Phi|\Phi) = 1$ genau dann, wenn V ist irreduzibel.

Beweis: $\sum_{i=1}^{h} m_i^2$ ist tatschlich nur dann gleich 1, falls genau eines der m_i gleich 1 ist und die anderen gleich 0. Das ist genau dann der Fall, wenn V isomorph zu einem der W_i ist. $\square$