LINEARE DARSTELLUNG ENDLICHER GRUPPEN: DEFINITIONEN

Erinnerung: Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und (e_i) eine Basis von V. Dann kann jede umkehrbare, lineare Abbildung a: $V \to V$ durch eine invertierbare Matrix (a_{ij}) der Größe nxn dargestellt werden. Die Matrixeinträge a_{ij} in K sind bestimmt durch:

$$a(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \, .$$

Somit besteht ein Isomorphismus zwischen den Räumen GL(V) und GL(n, K).

Def. 1 *lineare Darstellung, Darstellungsraum, Grad der Darstellung*

Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension n und G eine endliche Gruppe. Eine *lineare Darstellung* der Gruppe G auf V ist ein Homomorphismus ρ: $G \to GL(V)$. V wird als *Darstellungsraum* (oder kurz: *Darstellung*) von G bezeichnet und n als *Grad der Darstellung*.

Bem. 2 (i) Es gilt also $\rho(st) = \rho(s) \circ \rho(t)$. Daraus folgt direkt, dass $\rho(1_G) = 1_{GL(V)}$ und $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$.
(ii) Notation: Schreibe ρ_s statt $\rho(s)$ und bezeichne die zu ρ_s korrespondierende Matrix R_s.

Im Folgenden sei V immer ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension n und (e_i) eine Basis von V.
G sei eine endliche Gruppe.

Beispiel: **(a)** Sei $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{C}$. Folgendes definiert eine 1-dim. Darstellung von V auf G:

$$\rho(0) = 1, \ \rho(1) = \exp(2\pi i/ 3) \text{ und } \rho(2) = \exp(4\pi i/ 3).$$

Def. 3 *Isomorphe Darstellungen*

Seien ρ und ρ' Darstellungen der Gruppe G auf V bzw. V´. Die Darstellungen sind *isomorph*, wenn es einen linearen Isomorphismus τ: $V \to V`$ gibt, so dass gilt:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho`(s) \circ \tau \quad \text{für alle } s \in G.$$

Bem. 4 (i) Analog bedeutet das für ρ und ρ' gegeben in Matrixform R_s und R'_s die Existenz einer invertierbaren Matrix T, so dass gilt: $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. R_s und R'_s stellen also die gleiche lineare Abbildung dar, zu unterschiedlichen Basen.

Beispiel: **(b)** Die sogenannte *triviale Darstellung* einer Gruppe ist definiert als:

$$\rho: G \to GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, \quad \rho(s) = 1.$$

(c) Sei g die Anzahl der Elemente von G, zudem die Dimension von V. Sei $(e_t)_{t\,\epsilon\,G}$ eine Basis von V. Dann definiert ρ: G → GL(V) mit $\rho_s(e_t) = e_{st}$ die *reguläre Darstellung* von G.

[D.h. für G = ℤ/3ℤ und V = $\mathbb{C}^3$ definiert folgendes die reguläre Darstellung:

$R_0 = I_3$, $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.]

Wegen $\rho_s(e_1) = e_s$ für alle s ϵ G formen die Bilder von e_1 eine Basis von V. Sei W eine weitere Darstellung von G welche ebenfalls einen Vektor w enthalte, sodass $\rho_s`(w)$ eine Basis von W bildet. Dann ist W isomorph zur regulären Darstellung. (Setze $\tau(e_s) = \rho_s`(w)$)

(d) Sei G = ℤ/2ℤ x ℤ/2ℤ = {1, a, b, ab} (die sog. *Kleinsche Vierergruppe*) mit folgender Verknüpfung:

+	**1**	**a**	**b**	**ab**
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Sei V = $\mathbb{R}^3$ und (e_i) die Standardbasis. Eine Darstellung ist gegeben durch:

$R_1 = I_3$, $R_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Man veranschauliche sich diese Darstellung, indem man die Gruppe auf ein Buch wirken lässt.

Def. 4 *Unterdarstellung*

Sei ρ: G → GL(V) eine lineare Darstellung und W ein Untervektorraum von V. Ist W invariant gegenüber G, d.h. es gilt: x ϵ W ⇒ $\rho_s(x)$ ϵ W für alle s ϵ G, stellt W eine *Unterdarstellung* von V dar. Man erhält die Darstellung ρ^W: G → GL(W).

Beispiel **(e)** Sei V die reguläre Darstellung von G und W = $\{\lambda \sum_{s\,\epsilon\,G} e_s \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ ein 1-dim. Untervektorraum von V. Da $\rho_s(\sum_{s\,\epsilon\,G} e_s) = \sum_{s\,\epsilon\,G} e_s$ für alle s ϵ G gilt, ist W eine Unterdarstellung von V. Sie ist zudem isomorph zur trivialen Darstellung.

Erinnerung: Seien W und W` Untervektorräume von V. V = W ⊕ W` bezeichnet die *direkte Summe* aus W und W` und sagt aus, dass W∩W` = {0} und dim(V) = dim(W) + dim(W`). Jedes v ϵ V kann also dargestellt werden als v = w + w` mit w ϵ W und w` ϵ W`. Jedes W` mit diesen Eigenschaften bildet ein *Komplement* von W in V. Eine *Projektion* p: V → W bildet jedes v ϵ V auf die zugehörige Komponente w in W ab. D.h. es gilt ker(p) = W` und für x ϵ W gilt p(x) = x.

Satz 5 Sei ρ: $G \rightarrow GL(V)$ eine lineare Darstellung von G auf V und W sei Unterdarstellung von V. Dann existiert ein Komplement W^0 von W in V, welches invariant unter G ist.

Beweis

Sei W` ein beliebiges Komplement von W in V und p sei die zugehörige Projektion von V nach W. Bilde den Durchschnitt der Konjugierten von p; sei dafür $|G| = g$:

$p^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \,\epsilon\, G} \rho_t \circ p \circ \rho_t^{-1}$.

Offenbar bildet p^0 von V nach W ab, denn ρ_t erhält W nach Voraussetzung. Aus $\rho_t^{-1}(x) \in W$ für $x \in W$ folgt:

$p \circ \rho_t^{-1}(x) = \rho_t^{-1}(x)$, $\rho_t \circ p \circ \rho_t^{-1}(x) = x$ und letztendlich $p^0(x) = x$.

Somit stellt p^0 eine Projektion von V nach W zu dem zugehörigem Komplement $W^0 = \ker(p^0)$ von W dar. Zeige nun, dass W^0 invariant unter G ist; Betrachte dafür $\rho_t \circ p^0 \circ \rho_t^{-1}$:

$\rho_t \circ p^0 \circ \rho_t^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \,\epsilon\, G} \rho_s \circ \rho_t \circ p \circ \rho_t^{-1} \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \,\epsilon\, G} \rho_{st} \circ p \circ \rho_{st}^{-1} = p^0$.

Also gilt $\rho_s \circ p^0 = p^0 \circ \rho_s$ für alle $s \in G$.
Ist nun $x \in W^0$ und $s \in G$, so folgt $p^0 \circ \rho_s(x) = \rho_s \circ p^0(x) = 0$, also $\rho_s(x) \in \ker(p^0) = W^0$.

□

Beispiel **(f)** Sei W wie in Beispiel (e). Dann ist $W^0 = \{\sum_{s \,\epsilon\, t} \lambda_s e_s | \sum_{s \,\epsilon\, G} \lambda_s = 0\}$ ein Komplement von W in V, welches zudem invariant unter G ist.

Übung: Konstruiere W^0 mithilfe des Beweises als Anleitung.

Bem. 6: Sei $V = W \oplus W^0$, zudem W und W^0 invariant unter G. Dann existiert für $x \in V$ ein $w \in W$ und $w^0 \in W^0$, sodass gilt $x = w + w^0$. Dann gilt ebenfalls $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$ und nach Voraussetzung $\rho_s w \in W$ und $\rho_s w^0 \in W^0$. Offenbar bestimmen ρ^W und ρ^{W^o} dadurch die Darstellung ρ^V. Sind die Darstellungen W und W^0 in Matrixform R_s und R_s^0 gegeben, so ergibt sich die Darstellung V durch:

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$