Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 10**

Diese zwei Aufgaben können zur Erlangung von noch fehlenden Punkten (bezogen auf 9 Blätter) genutzt werden.

1) Man schreibe das Vektorfeld ω aus Aufgabe 2, Blatt 5, in der Form $\langle v, dF \rangle$ und begründe ohne weitere Rechnung das Verschwinden der Integrale

$$\int_A \omega$$

für alle kompakten Teilmengen A der 3–Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

2) Man zeige, daß der *Satz vom stetig gekämmten Igel* für Sphären <u>ungerader</u> Dimension <u>nicht</u> richtig ist, d. h.: Auf jeder Sphäre $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ gibt es ein stetig differenzierbares Tangential–Vektorfeld v ohne Nullstellen.

Hinweis: Aufgabe 1.

Abgabetermin: 03. Juli 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 9**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Es sei A in $\mathbb{R}^3$ der *Rotationskörper*, der mittels der stetigen Funktionen $0 \le r_1 \le r_2$ durch Rotation um die z–Achse entsteht:

$$A := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2(z) \le x^2 + y^2 \le r_2^2(z) \, , \, z \in [a, b] \} \, ;$$

ferner sei F die Fläche $F := A \cap \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \}$. Man beweise in Abhängigkeit von dem Schwerpunkt $(\xi, 0, \zeta)$ von F die GULDINsche *Regel*: $\mathrm{Vol}_3(A) = 2\pi\,\xi\,\mathrm{Vol}_2(F)$.

Hinweis: Als *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V bezeichnet man den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $V s_j := \displaystyle\int_K x_j \, d^n x$.

2) Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und $w_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge 1. Wir bezeichnen mit M die Ebene senkrecht zu w_0 durch a, d. h. $M := \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - a, w_0 \rangle = 0 \}$, und orientieren M so, daß w_0 ein positiv orientierter Normalenvektor wird. Für $\varepsilon > 0$ sei $A_\varepsilon := \{ x \in M : \| x - a \|_2 \le \varepsilon \}$, und $v : U \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von a. Man zeige:

$$\langle \operatorname{rot} v\,(a), w_0 \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} \langle v, ds \rangle \, .$$

3) Wir bezeichnen "by abuse of language" mit r, ϑ, φ die Komponenten der Umkehrabbildung Ψ des durch die Polarkoordinaten

$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

gegebenen Diffeomorphismus $\Phi : V := \mathbb{R}_+^* \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0 \, , \, y = 0 \}$. Man begründe, warum sich die Funktion ϑ und die Differentialform $d\varphi$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ stetig differenzierbar fortsetzen lassen.

Es sei ferner $A \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ein glatt berandetes Kompaktum, dessen Rand ∂A weder den Nord– noch den Südpol von S^2 enthält. Man zeige

$$\mathrm{Vol}_2(A) = 2\,k\,\pi - \int_{\partial A} \cos\vartheta \, d\varphi \, ,$$

wobei die Zahl $k \in \{0, 1, 2\}$ angibt, wieviele der beiden Pole in A liegen.

Abgabetermin: 26. Juni 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 8**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man beweise für zwei differenzierbare Funktionen f, g in der Umgebung eines Kompaktums $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand die folgende Formel:

$$\int_{\partial A} f \, \langle \operatorname{grad} g, \, dF \rangle \; = \; \int_A (f \, \Delta \, g) \, dV \; + \; \int_A \langle \operatorname{grad} f, \, \operatorname{grad} g \rangle \, dV$$

mit dem LAPLACE–Operator Δ.

Hinweis: Man berechne $\operatorname{div} (f \operatorname{grad} g)$.

2) Man zeige den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*: Ist f eine stetige Funktion in der Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ und $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Kompakta mit $a \in A_j$, $\operatorname{Vol}_n(A_j) > 0$ und $\lim A_j = a$, so gilt

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}_n(A_j)} \int_{A_j} f(x) \, d^n x \; = \; f(a) \, .$$

Hierbei bedeutet $\lim A_j = a$: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $A_j \subset B_\delta(a)$ für alle $j \geq N$.

3) Für zwei zeitabhängige Vektorfelder E, B auf $\mathbb{R}^3$ zeige man mit Hilfe von Aufgabe 2 die Äquivalenz der „differentiellen“ Beziehung

$$\operatorname{rot} E \; = \; \frac{\partial B}{\partial t}$$

mit der „Integralbedingung“

$$\int_{\partial A} \langle E, \, ds \rangle \; = \; \frac{d}{dt} \int_A \langle B, \, dF \rangle$$

für alle Kompakta A mit glattem Rand in beliebigen zwei–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^3$.

Abgabetermin: 19. Juni 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 7**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Es seien $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$, reelle Zahlen, I_j seien die entsprechenden kompakten Intervalle $[\, a_j,\, b_j \,]$, und Q sei der kompakte n–dimensionale Quader

$$Q := I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \, .$$

Man schreibe den (kompakten, aber für $n \geq 2$ nicht glatten) Rand $\partial\, Q$ als Vereinigung von $2n$ kompakten Quadern der Dimension $n - 1$, die sich gegenseitig gar nicht oder nur in $(n - 2)$–dimensionalen Quadern schneiden, bestimme auf diesen „Randkomponenten“ die Orientierung bezüglich der äußeren Normalen und beweise unter diesen Voraussetzungen für jede $(n - 1)$–Form ω in einer offenen Umgebung von Q die Gültigkeit des Satzes von Stokes:

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega \, .$$

2) Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der durch Rotation der Kreislinie

$$\{(x,\, 0,\, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2 \} \, , \quad 0 < r < R$$

um die z-Achse entsteht. Man berechne direkt und mit Hilfe des Satzes von Stokes (Gauß) für das Vektorfeld $v\,(x,\, y,\, z) = (x,\, y,\, z)$ das Oberflächenintegral

$$\int_T \langle\, v,\, dF \,\rangle \, .$$

3) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Zwei $\mathcal{C}^\infty$–Abbildungen $h_0,\, h_1 : U \longrightarrow V$ heißen *homotop* (zueinander), falls es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $[\, 0,\, 1\,] \times U \subset W$ und eine $\mathcal{C}^\infty$–Abbildung

$$H : W \longrightarrow V \, , \quad (t,\, x) \longmapsto H\,(t,\, x) \, ,$$

gibt, so daß für alle $x \in U$ gilt: $H\,(0,\, x) = h_0(x)$ und $H\,(1,\, x) = h_1(x)$.

Man zeige: Sind $h_0,\, h_1 : U \to V$ homotop, so gilt für jede *geschlossene* differenzierbare k–Form ω in V und jede *kompakte* k–dimensionale *orientierte* Untermannigfaltigkeit $M \subset U$, daß

$$\int_M h_0^*\, \omega = \int_M h_1^*\, \omega \, .$$

Hinweis: Man betrachte die Menge $A := [\, 0,\, 1\,] \times M \subset \mathbb{R} \times M$.

Abgabetermin: 12. Juni 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 6**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Für ein Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit Komponenten v_1, v_2, v_3 definiert man eine 1– und eine 2–Form durch

$$\langle v, ds \rangle := v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \,, \; \langle v, dF \rangle := v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2 .$$

Man zeige: $d\langle v, ds \rangle = \langle \operatorname{rot} v, dF \rangle$, $d\langle v, dF \rangle = (\operatorname{div} v)\, dV$ mit $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Sind drei Vektorfelder $a, b, c : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben, so zeige man:

$$\langle a, ds \rangle \wedge \langle b, ds \rangle = \langle a \times b, dF \rangle \,,$$

$$\langle a, ds \rangle \wedge \langle b, dF \rangle = \langle a, b \rangle \, dV \,,$$

$$\langle a, ds \rangle \wedge \langle b, ds \rangle \wedge \langle c, ds \rangle = \det (a, b, c)\, dV \,.$$

2) In $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ seien die Koordinaten mit x_1, x_2, x_3, t bezeichnet. Gemäß Aufgabe 1 lassen sich die Differentialformen ω_k vom Grad k auf offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^4$ in der folgenden Form mit „zeitabhängigen" Vektorfeldern $a, b : U \to \mathbb{R}^3$ bzw. Skalarfeldern $f : U \to \mathbb{R}$ schreiben:

$$\omega_0 = f \,, \; \omega_1 = \langle a, ds \rangle + f\, dt \,, \; \omega_2 = \langle a, ds \rangle \wedge dt + \langle b, dF \rangle \,,$$

$$\omega_3 = \langle a, dF \rangle \wedge dt + f\, dV \,, \; \omega_4 = f\, dV \wedge dt \,.$$

Man berechne die äußeren Ableitungen der ω_k, stelle sie entsprechend dar, und ziehe Folgerungen aus $d^2 = 0$ und dem Poincaréschen Lemma.

3) Es sei die 1–Form

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

auf $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie in Aufgabe 1, Blatt 5, gegeben. Man zeige: Zu jeder geschlossenen 1–Form ψ auf G gibt es genau eine reelle Zahl a, s. d. $\psi - a\,\omega$ eine Stammfunktion auf G besitzt. M. a. W. : Der Vektorraum

$$H^1_{dRh}(G) := \{\,\text{geschlossene 1–Formen auf } G\,\}/\{\,\text{exakte 1–Formen auf } G\,\}$$

ist 1–dimensional und besitzt die Restklasse von ω als Basis.

Hinweis. Man zeige: Ist ψ geschlossen auf G und gilt $\int_{S^1} \psi = 0$, so besitzt ψ eine Stammfunktion. Man beachte, daß G nicht sternförmig, aber Vereinigung zweier sternförmiger Gebiete ist.

Abgabetermin: 29. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 5**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Es sei $D_r = \overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ die kompakte Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt 0. Man begründe mit Hilfe des (zweidimensionalen) Satzes von Stokes, daß für eine geschlossene 1–Form ω auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Integrale

$$\int_{\partial D_r} \omega$$

unabhängig von $r > 0$ sind. Man benutze dieses Ergebnis zur Berechung der Integrale $\int_{\partial D_r} \omega$ für die spezielle 1–Form

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \, .$$

2) Auf $\mathbb{R}^4$ sei die Differentialform

$$\omega = x_2\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

gegeben. Man zeige, daß

$$\int_A \omega = 0$$

für jede kompakte Teilmenge A der 3–Sphäre S^3.

3) Man berechne das Integral $\int_B x_2\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, wobei

$$B = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \} \, .$$

Abgabetermin: 22. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 4**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) **a)** Es seien die 1–Formen

$$\omega_1 = (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz\,, \quad \omega_2 = \omega_1 + 2xy\,dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man gebe ein *Potential* für ω_1 an, also eine Funktion F mit $dF = \omega_1$, und entscheide, ob die Form ω_2 *geschlossen* ist, d. h. ob $d\omega_2 = 0$ gilt.

b) ω sei die 2–Form $2\,x\,z\,dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^3$. Man zeige $d\omega = 0$ und bestimme eine 1–Form η mit $d\eta = \omega$.

2) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$(r,\,\vartheta,\,\varphi) \longmapsto (x,\,y,\,z) = (r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi,\, r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\, r\,\cos\vartheta)\,.$$

Man berechne für beliebige 1–, 2– und 3–Formen auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ (mit den Koordinaten $x,\,y,\,z$) die Liftungen nach $U := \Phi^{-1}(V)$.

3) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und v bzw. ω sei ein Vektorfeld bzw. eine 1–Form auf M. Man zeige: Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ gibt es eine Umgebung Ω von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und ein Vektorfeld $\widetilde{v}$ bzw. eine 1–Form $\widetilde{\omega}$ auf Ω, so daß

$$\widetilde{v}_{|M\cap\Omega} = v\,, \quad \widetilde{\omega}_{|M\cap\Omega} = \omega\,.$$

Abgabetermin: 15. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 3**

Alle vier Aufgaben gehen in die Bewertung ein.

1) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen $\mathbb{R}^n$ und a ein Punkt außerhalb von M. Weiter sei $x_0 \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von a. Man zeige: Die Gerade durch a und x_0 steht senkrecht auf dem affinen Tangentialraum von M im Punkte a. Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen an M gibt es zu jedem Punkt a einen solchen Punkt x_0?

2) Die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sei orientiert bzgl. der äußeren Normalen. Man untersuche, welche der folgenden Karten

$$\varphi_k^{\pm} : V := \{ t \in \mathbb{R}^{n-1} : \| t \|_2 < 1 \} \longrightarrow U_k^{\pm} := \{ x \in S^{n-1} : \pm x_k > 0 \} , \quad k = 1, \ldots, n ,$$

mit

$$\varphi_k^{\pm}(t_1, \ldots, t_{n-1}) := \Big(t_1, \ldots, t_{k-1}, \pm\sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{n-1}^2}, t_k, \ldots, t_{n-1} \Big)$$

positiv bzw. negativ orientiert sind.

3) Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der durch Rotation der Kreislinie

$$\{ (x, 0, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2 \} , \quad 0 < r < R ,$$

um die z-Achse entsteht. Man berechne das Einheitsnormalenfeld ν auf T mit

$$\nu (R + r, 0, 0) = (1, 0, 0) .$$

4) Man zeige: Die Zuordnung $x \longmapsto \omega_x$, $x \in \mathbb{R}^n$, mit

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \det (x, v_1, \ldots, v_{n-1}) , \quad v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n ,$$

definiert für jedes $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine alternierende $(n - 1)$–fache Multilinearform ω_x auf $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung

$$\omega_x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k \, e_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_k^*} \wedge \cdots \wedge e_n^* .$$

Abgabetermin: 8. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 2**

Alle <u>vier</u> Aufgaben gehen in die Bewertung ein.

1) Man zeige: Eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ besitzt genau dann einen glatten Rand, wenn es zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial A$ eine Karte (V, φ, U) von M und eine stetig differenzierbare Funktion h auf V gibt mit den folgenden Eigenschaften:

i) $0 \in V$, $\varphi(0) = x_0 \in U$.

ii) $h(0) = 0$ und $dh \neq 0$ auf V.

iii) $\varphi^{-1}(A \cap U) = \{ t \in V : h(t) \leq 0 \}$.

In dieser Situation ist notwendig $\varphi^{-1}(\partial A \cap U) = \{ t \in V : h(t) = 0 \}$.

2) Ist M eine glatte Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, und E eine (affine) Hyperebene, die M in genau einem Punkt a schneidet, so ist E die Tangentialhyperebene von M in a, d. h. $E = a + T_a M$. Ist diese Aussage auch für $n = 2$ richtig? Wie läßt sich die Aussage auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern?

3) Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des reellen Vektorraums V und $v_1^*, \ldots, v_n^*$ die zugehörige Basis des *dualen* Vektorraums V^*. Man zeige, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Elemente

$$v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^* , \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n ,$$

in dem Vektorraum $\mathrm{Alt}^k V$ der alternierenden k–Formen auf V liegen und dort eine Basis bilden. Insbesondere ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Alt}^k V = \binom{n}{k} .$$

Hierbei wird für k Linearformen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auf V und k Elemente $w_1, \ldots, w_k$ in V definiert:

$$(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_k)(w_1, \ldots, w_k) := \det \begin{pmatrix} \lambda_1(w_1) & \cdots & \lambda_1(w_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k(w_1) & \cdots & \lambda_k(w_k) \end{pmatrix} .$$

– Rückseite –

4) Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung der beiden Mengen

$$\{ (x, y) : x \leq 0 , y = 0 \} , \quad \{ (x, y) : x \geq 0 , y = x^2 \} .$$

Man zeige:

a) M ist eine $\mathcal{C}^1$–Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$;

b) jeder Punkt $(x, y) \in M$ mit $x \neq 0$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$–Mannigfaltigkeitspunkt von M ;

c) der Punkt $(0, 0) \in M$ ist kein $\mathcal{C}^\ell$–Mannigfaltigkeitspunkt, $\ell \geq 2$.

Abgabetermin: 24. April 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 1**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, versehen mit der Relativtopologie, und $f : M \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ gibt es eine Karte (V, φ, U) von M mit $x_0 \in U \subset M$, so daß $f \circ \varphi$ differenzierbar auf V ist.
2. Für jeden Punkt $x_0 \in M$ und jede Karte (V, φ, U) von M mit $x_0 \in U \subset M$ ist $f \circ \varphi$ differenzierbar auf V.
3. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ gibt es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \Omega$ und eine differenzierbare Funktion F auf Ω mit $F|M \cap \Omega = f$.

2) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f \circ f = f$. Man zeige, daß $M = f(\mathbb{R}^n)$ eine Untermannigfaltigkeit (der Klasse $\mathcal{C}^1$) von $\mathbb{R}^n$ ist. Man gebe Beispiele dafür an, daß M jede Dimension k zwischen 0 und n annehmen kann.

Hinweis: *Rangsatz*.

3) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *Hyperfläche*, also eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Man zeige, daß M genau dann orientierbar ist, wenn es ein *stetiges Normalenfeld* auf M ohne *Nullstellen* gibt, also eine stetige Abbildung $N : M \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $N(x) \perp T_{M,x}$ für alle $x \in M$.

Abgabetermin: 10. April 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III b

O. Riemenschneider

Sommersemester 2006 **Blatt 0**

Die Übungen beginnen

am Montag, 3. April 2006

nach der ersten Vorlesung

gez. Oswald Riemenschneider