Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 12**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man bestimme den Konfigurationsraum aller Dreiecke in $\mathbb{R}^3$ mit unterscheidbaren Ecken als Untermannigfaltigkeit eines geeigneten $\mathbb{R}^N$.

2) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen $\mathbb{R}^n$ und x_0 ein Punkt außerhalb von M. Weiter sei $a \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von x_0. Man zeige: Die Gerade durch x_0 und a steht senkrecht auf dem affinen Tangentialraum von M im Punkte a.

3) In $\mathbb{R}^6$ betrachte man die Teilmenge M, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

und das Verschwinden der folgenden 6 quadratischen Polynome:

$$\begin{array}{ccc} x_4^2 - x_1 x_2 \, , & x_5^2 - x_2 x_3 \, , & x_6^2 - x_1 x_3 \, , \\ x_4 x_5 - x_2 x_6 \, , & x_4 x_6 - x_1 x_5 \, , & x_5 x_6 - x_3 x_4 \, . \end{array}$$

Man benutze den Rangsatz, um die folgende Frage zu beantworten: Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$, und wenn ja, welche Dimension besitzt sie?

Abgabetermin: 30. Januar 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 11**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) **a)** Sei V ein endlich–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einem (nicht notwendig dem euklidischen) Skalarprodukt $V \times V \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Man zeige, daß die durch

$$f : B = \{x \in V : \langle x, x \rangle < 1\} \longrightarrow V \,, \quad f(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - \langle x, x \rangle}} \,,$$

gegebene Abbildung von der Einheitskugel $B \subset V$ nach V ein Diffeomorphismus ist, und berechne ihr Differential.

b) Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt konstruiere man einen Diffeomorphismus der Kugel B auf den Würfel $W = (-1, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$.

2) Man zeige auf mindestens zwei verschiedene Weisen: Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ und N eine solche von $\mathbb{R}^n$, so ist $M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$ mit $\dim_{(a,b)} M \times N = \dim_a M + \dim_b N$, $(a, b) \in M \times N$.

3) Es sei $M = f^{-1}(0)$ eine 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, wobei f eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ bezeichnet (mit 0 als regulärem Wert). Man zeige: Die „Rotationsfläche“

$$R := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \}$$

ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

Abgabetermin: 23. Januar 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 10**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man diskutiere die Höhenlinien der Funktion

$$F := \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) \longmapsto x\,y\,e^{-x-y} \end{cases}$$

und untersuche insbesondere, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sich die Mengen $\{(x,\, y) \in I \times J : F\,(x,\, y) = c\}$ in der Form

$$\{(x,\, y) \in I \times J : y = \varphi\,(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,\, y) \in I \times J : x = \psi\,(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \to J$ bzw. $\psi : J \to I$ darstellen lassen.

2) Die Gleichung $z^3 + z + x\,y = 1$ hat für jedes $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $g\,(x,\, y)$. Man zeige, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne $Dg\,(1,\, 1)$. Man untersuche g auf Extrema.

3) Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f\,(x,\, y) := 4\,x^2 - 3\,x\,y$$

auf der Kreisscheibe $D := \{\,(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\,\}$.

Hinweis: Man berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von D und dann auf dem Rand von D, d. h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Abgabetermin: 16. Januar 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 9a**

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Neues Jahr

$$\diamond$$
$$\star$$
$$\pm$$
$$\parallel \quad \star \quad \parallel$$
$$\star \quad \circ \quad \star$$
$$\Box \quad \star \quad \Box$$
$$\parallel \quad \odot \quad \parallel$$
$$\bigtriangleup \quad \star \quad \sqcap \quad \star \quad \bigtriangleup$$
$$\ll \quad \bigcirc \quad \star \quad \bigcirc \quad \gg$$
$$\parallel \quad \times \quad \otimes \quad \times \quad \parallel$$
$$\preceq \quad \star \quad \bigtriangledown \quad \wedge \quad \bigtriangledown \quad \star \quad \succeq$$
$$\in \quad \frown \quad \smile \quad \ddagger \quad \vee \quad \ddagger \quad \smile \quad \frown \quad \ni$$
$$\parallel \quad \perp \quad \dashv \quad \bullet \quad \uplus \quad \vee \quad \uplus \quad \bullet \quad \vdash \quad \perp \quad \parallel$$
$$\Box$$
$$\Box$$

Besuchen Sie auch den *„singulären“ Adventskalender* unter

http://www2.uibk.ac.at/mathematik/kalender05.html

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 9**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Die Lagrange–Funktion für den freien Fall eines Massenpunktes lautet

$$L(t, y, v) = \frac{m}{2} v^2 + m g y, \quad m > 0, \, g > 0.$$

Man ermittle hierzu die Eulersche Differentialgleichung und löse sie.

2) Man zeige, daß das Funktional

$$J(y) := \int_0^1 (y')^2 \, dx$$

auf der Menge der $\mathcal{C}^2$–Funktionen $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1$ ein Minimum annimmt.

3) Es sei $L(x, y, p) := (p^2 - 1)^2$. Man zeige:

a) Das Infimum der Integrale $\int_0^1 L(x, y, y') \, dx$ unter den $\mathcal{C}^2$–Funktionen $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$ ist 0; aber keine dieser Funktionen nimmt das Infimum an.

b) Es gibt stückweise stetig differenzierbare Funktionen $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$ und $\int_0^1 L(x, y, y') \, dx = 0$.

Abgabetermin: 9. Januar 2006

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 8**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man löse die beiden homogenen Differentialgleichungen

$$y^{(\mathrm{iv})} + 2\,y'' + y = 0 \quad \text{und} \quad y''' - 2\,y' + 4\,y = 0\,.$$

2) Man löse die inhomogene Differentialgleichung

$$(D + 1)^3 y = e^{-x} + x^2\,.$$

3) Besitzen die n Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ auf dem Intervall I stetige Ableitungen n–ter Ordnung und ist die Wronski–Determinante $W\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ überall auf I von Null verschieden, so gibt es genau eine homogene lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung mit höchstem Koeffizienten 1, für die diese Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden. Man schreibe diese Differentialgleichung mit Hilfe der „formalen“ Wronski–Determinante

$$W\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_n,\, y)\,.$$

Abgabetermin: 19. Dezember 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 7**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man bestimme für die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungssysteme jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen:

(∗) $$y_1' = y_2 - y_3 \,, \quad y_2' = y_3 - y_1 \,, \quad y_3' = y_1 - y_2 \,.$$

(∗∗) $$y_1' = 2y_1 - 2y_2 + y_3 \,, \quad y_2' = y_1 + 5y_2 - y_3 \,, \quad y_3' = 2y_1 + 4y_2 + y_3 \,.$$

2) Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung mit stetigen Koeffizienten auf dem Intervall I vorgegeben und eine Lösung φ bekannt, die nirgends verschwindet. Mit dem Ansatz $y = \varphi\, u$ bestimme man eine homogene lineare Differentialgleichung $(n - 1)$–ter Ordnung für die Funktion $v := u'$ und bestimme eine Lösungsfundamentalsystem der ursprünglichen Differentialgleichung vermittels φ und Integration eines Fundamentalsystems der so gewonnenen *reduzierten* Differentialgleichung niedriger Ordnung.

3) Man löse mit der Methode von Aufgabe 2 und Blatt 6, Aufgabe 3 die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$x^2(1 - x)\, y'' + 2\, x\,(2 - x)\, y' + 2\,(1 + x)\, y = x^2$$

auf den drei Teilintervallen von $\mathbb{R} \setminus \{\, 0,\, 1 \,\}$.

Hinweis: Die Funktion $x \mapsto x^{-2}$ löst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \setminus \{\, 0,\, 1 \,\}$.

Abgabetermin: 12. Dezember 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 6**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man bestimme ein Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x}\, y' + \frac{b}{x^2}\, y = 0\,, \quad x > 0\,,$$

für feste $a, b \in \mathbb{R}$. Hinweis: Man ordne einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ die für alle $\xi \in \mathbb{R}$ erklärte Funktion $\psi(\xi) := \varphi(e^{\xi})$ zu.

2) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitzbedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genüge. Weiter seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Man zeige, daß für alle $x, a \in I$ gilt:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(a) - \psi(a)|\, e^{L|x-a|}\,.$$

3) Es sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = f(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_1, \ldots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ vorgegeben, und es sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Lösungs–Fundamentalsystem der zugeordneten *homogenen* Differentialgleichung. Bezeichnet man dann mit W_j die Determinante, die man erhält, wenn man in der Wronski–Determinante W dieses Fundamentalsystems die j–te Spalte durch den Spaltenvektor ${}^t(0, \ldots, 0, f(x))$ ersetzt, so läßt sich bei festem $a \in I$ die eindeutig bestimmte Lösung der ursprünglichen inhomogenen Differentialgleichung zu der Anfangsbedingung

$$\psi(a) = \psi'(a) = \cdots = \psi^{(n-1)}(a) = 0$$

explizit aufschreiben in der Form

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \int_a^x \frac{W_j(t)}{W(t)}\, dt\,.$$

Abgabetermin: 5. Dezember 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 5**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Der durch einen Transportmechanismus bedingte Austausch zwischen zwei Behältern mit Salzen in homogener Lösung läßt sich durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -k_1\, m_1 + k_2\, m_2 \;, \\ \dot{m}_2 &= k_1\, m_1 - k_2\, m_2 \;, \end{aligned}$$

beschreiben. Dabei bezeichnen m_1, m_2 die zur Zeit t in den beiden Behältern befindlichen Salzmengen, und die positiven Zahlen k_1, k_2 sind konstante Übergangsraten. Man berechne die Lösungen dieses Systems unter den Anfangsbedingungen $m_1(0) = M_1$, $m_2(0) = M_2$ und untersuche ihr Langzeitverhalten.

2) Es sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in M\,(n \times n, \mathbb{R})$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Man zeige: Für das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$Y' = A\,Y + e^{\omega x} v$$

erhält man eine spezielle (komplexwertige) Lösung durch den Ansatz

$$Y = \beta\, e^{\omega x} v \;, \quad \omega \neq \lambda \;, \quad \text{bzw.} \quad Y = \beta\, x\, e^{\omega x} v \;, \quad \omega = \lambda \;.$$

Man bestimme jeweils die Konstante β und ermittle mit diesem Resultat die allgemeine Lösung des Systems

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} Y + e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3) Man zeige: Jedes Anfangswert–Problem der Differentialgleichung

$$y' = x\,|\,\sin xy\,|$$

besitzt genau eine (auf ganz $\mathbb{R}$ definierte) Lösung. Die Lösungen $y = \varphi\,(x)$ mit $\varphi\,(0) \neq 0$ verschwinden nirgends.

Abgabetermin: 28. November 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 4**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man bestimme eine Lösung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix} ,$$

mit $\Phi(0) = 0$ und zeige, daß sie eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Man löse zuerst vollständig das *homogene* System $Y' = AY$ durch Diagonalisieren der Matrix A und benutze anschließend das Prinzip der „Variation der Konstanten".

2) Es sei $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein (nichtleeres) offenes Intervall, und die stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$ seien ungerade bzw. gerade, d. h. $a(-x) = -a(x)$, $b(-x) = b(x)$ für alle $x \in I$. Man zeige: Die Gesamtheit der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = a(x)\, y' + b(x)\, y$ bildet einen zweidimensionalen Vektorraum, der eine Basis besitzt, die aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.

Hinweis: Existenz– und Eindeutigkeitssatz für Lösungen der gegebenen Differentialgleichung.

3) Es sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) A ist *schiefsymmetrisch*, d. h. ${}^tA = -A$.

ii) Für je zwei Lösungen $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $Y' = AY$ ist das euklidische Skalarprodukt $\langle \Phi_1(x), \Phi_2(x) \rangle$, $x \in \mathbb{R}$, konstant.

iii) Für jede Lösung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $Y' = AY$ ist die euklidische Norm $\| \Phi(x) \|$, $x \in \mathbb{R}$, konstant.

Hinweis: Existenz– und Eindeutigkeitssatz für Lösungen des Systems $Y' = AY$ und ein wenig *Lineare Algebra*.

Abgabetermin: 21. November 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 3**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man bestimme die *allgemeine* Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

$$y' = e^y \cos x \,, \qquad y' = \sqrt{1 - y^2} \,, \quad |\, y \,| < 1$$

$$y' = \frac{1}{y} \sqrt{1 - y^2} \,, \quad 0 < y < 1 \,, \quad y' = \frac{x + y}{x + 2y} \,, \quad (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \,.$$

2) Man löse das Anfangswert–Problem

$$y' = 1 + x + x^2 + y \,, \quad y(0) = \eta \,,$$

vermittels eines Potenzreihenansatzes.

3) Man zeige die folgende Verschärfung des Existenzsatzes von Picard und Lindelöf: Die Funktion $f = f(x, y)$ sei in dem Rechteck $Q := \{ (x, y) : |\, x - a \,| \le \varepsilon \,, |\, y - c \,| \le r \}$ stetig und dem Betrage nach durch die Konstante $M \ge 0$ beschränkt. Ferner gelte

$$|\, x - a \,|\, |\, f(x, y_1) - f(x, y_2) \,| \le \vartheta \,|\, y_1 - y_2 \,|$$

mit einer festen positiven Konstanten $\vartheta < 1$ für alle $(x, y_1)\,, (x, y_2) \in Q$. Dann gibt es auf dem Intervall

$$|\, x - a \,| \le \min(\varepsilon, r/M)$$

eine Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = c$.

Abgabetermin: 14. November 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 2**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) **a)** Man zeige, daß die lineare Differentialgleichung $y' = g(x)\,y + h(x)$ stets einen Eulerschen Multiplikator besitzt, und berechne damit die Lösung der Gleichung mit vorgegebenem Anfangswert.

b) Die Gesamtheit der Lösungen einer (inhomogenen) linearen Differentialgleichung

$$y' = g(x)\,y + h(x)\,,\ g,\,h : I := (a,\,b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig,}$$

läßt sich schreiben in der Form $c\,\varphi + \varphi_0$, $c \in \mathbb{R}$, mit differenzierbaren Funktionen φ, $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$. Man zeige umgekehrt: Sind φ, $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ vorgegebene stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(x) \neq 0$, $x \in I$, so bilden die Funktionen

$$c\,\varphi + \varphi_0\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$$

genau die Lösungen einer geeigneten (inhomogenen) linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

2) Man löse die sogenannte „allgemeine" Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

für den Fall, daß die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

3) An einen Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand $W > 0$ und dem Selbstinduktionskoeffizienten $L > 0$ sei eine mit der Zeit veränderliche Spannung

$$U(t) = U_0 \sin \omega\, t\,, \quad \omega > 0\,,$$

angelegt. Aus der Physik ist bekannt, daß die Stromstärke $I = I(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} + \frac{W}{L}\, I = \frac{U_0}{L} \sin \omega\, t$$

genügt. Man zeige

$$I(t) = C_0 \exp\left(-\frac{W}{L}\, t\right) + C_1 \sin(\omega t - \gamma)$$

und bestimme C_0, C_1 und γ in Abhängigkeit von $I_0 := I(0)$.

Abgabetermin: 7. November 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 1**

Nur zwei Aufgaben gehen in die Bewertung ein. Wenn Sie drei Aufgaben abgeben, vermerken Sie bitte, welche zwei auf jeden Fall korrigiert und bewertet werden sollen.

1) Man zeige: Jedes Anfangswertproblem der *allgemeinen logistischen Gleichung*

$$y' = a(t)\, y - b(t)\, y^2 \,, \quad y(0) = y_0 > 0 \,,$$

mit stetigen Funktionen $a, b : \mathbb{R}_+ := [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b > 0$, besitzt eine auf ganz $\mathbb{R}_+$ definierte positive Lösung y.

Hinweis: Bernoullische Differentialgleichung.

2) Die Schar der Kurven $x^2 + (y - a)^2 = r^2$, bei der r eine feste positive reelle Zahl bedeutet und der Parameter a alle reellen Zahlen durchläuft, überdeckt den Streifen $|\,x\,| \leq r$ „doppelt“. Doch erhält man eine diesen Streifen „schlicht“ überdeckende Kurvenschar, wenn man z. B. von jedem Kreise nur die <u>untere</u> Hälfte $y + \sqrt{r^2 - x^2} = a$ in Betracht zieht. Man bestimme die Differentialgleichung dieser Kurvenschar ebenso wie die der orthogonalen Trajektorien und löse die letztere. Welches sind die Lösungskurven?

3) (Modifizierte *Hundekurve*). Ein Fluß fließt in einem von parallelen Geraden begrenzten Kanalbecken der Breite a parallel zur Richtung des Ufers mit der Geschwindigkeit

$$c(x) = 4\, c_0\, \frac{x\,(a - x)}{a^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq a \ , \quad c_0 = \text{const.} \,,$$

wobei x den senkrechten Abstand zu einem der beiden Ufer bezeichnet. Ein (selbstverständlich punktförmiger) Hund befindet sich an einem Ufer, sein (ebenfalls punktförmiges) Herrchen steht senkrecht gegenüber am anderen Ufer und pfeift. Daraufhin springt der Hund ins Wasser und schwimmt, relativ zum Wasser, mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag $\|\, v\,\|$, die „Schnauze“ (macht irgendwie keinen Sinn bei einem punktförmigen Hund, oder doch?) stets auf das Herrchen gerichtet, zu ihm zurück. Welche Kurve legt der Hund zurück? Unter welcher Voraussetzung kann der Hund - nach ausgiebigem Ausschütteln des Felles - sein Herrchen schwanzwedelnd wieder begrüßen?

Abgabetermin: 31. Oktober 2005

Übungen zur Vorlesung
Analysis III a

O. Riemenschneider

Wintersemester 2005/06 **Blatt 0**

Die Übungen beginnen

am Montag, 24. Oktober 2005

nach der ersten Vorlesung

gez. Oswald Riemenschneider