Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 13**

1) Man verschiebe die Parabel $y = x^2$ in $\mathbb{R}^2$ so, daß sie weiterhin den Nullpunkt enthält. Zu der hierdurch entstehenden Kurvenschar bestimme man die orthogonalen Kurven.

2) Man bestimme alle Funktionen $y = f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, deren Graph bei gegebenem $\alpha \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ die Schar der Hyperbeln $y^2 - x^2 = \text{const.}$ unter dem Winkel α schneidet.

Lösungen zu 1 und 2 nur (zum angegebenen Stichtag) abgeben, wenn noch dringend Punkte für das laufende Semester gebraucht werden. Die Aufgaben 3 und 4 sind für die Beschäftigung in der vorlesungsfreien Zeit gedacht und werden voraussichtlich im Blatt 1 von Analysis III wieder aufgenommen.

3) Man bestimme die *allgemeine* Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d. h. die (eindeutig bestimmte) Lösung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

$$y' = e^y \cos x\,, \qquad\qquad y' = \sqrt{1 - y^2}\,, \quad |\,y\,| < 1$$

$$y' = \frac{1}{y}\sqrt{1 - y^2}\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad y' = \frac{x + y}{x + 2y}\,, \quad (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\,.$$

4) Man bestimme die sogenannte *Hundekurve*: Ein Fluß fließt in einem von parallelen Geraden begrenzten Kanalbecken der Breite a mit der konstanten Geschwindigkeit c in Richtung der Uferbefestigung. Ein (selbstverständlich punktförmiger) Hund befindet sich an einem Ufer, sein (ebenfalls punktförmiges) Herrchen steht senkrecht gegenüber am anderen Ufer und pfeift. Daraufhin springt der Hund ins Wasser und schwimmt, relativ zum Wasser, mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag $\|\,v\,\|$, die „Schnauze" (macht irgendwie keinen Sinn bei einem punktförmigen Hund, oder doch?) stets auf das Herrchen gerichtet, zu ihm zurück. Welche Kurve legt der Hund zurück? Unter welcher Voraussetzung kann der Hund - nach ausgiebigem Ausschütteln des Felles - sein Herrchen schwanzwedelnd wieder begrüßen?

Abgabetermin: 14. 7. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 12**

1) Man beweise für positive natürliche Zahlen $q < p$ die Formel

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=kq}^{kp-1} \frac{1}{n} = \ln \frac{p}{q}$$

durch Betrachtung Riemannscher Summen einer geeigneten Funktion.

2) Es sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, und die Funktionen $g, h : [a, b] \to [c, d]$ seien differenzierbar. Man zeige, daß die durch

$$\Phi(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

definierte Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimme ihre Ableitung.

3) Man führe den in der Vorlesung skizzierten Beweis des folgenden Satzes aus: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, so auch Darboux–integrierbar. Dazu zeige man im ersten Schritt, daß f *beschränkt* sein muß.

4) Man beweise die Substitutionsregel für Riemann–integrierbare Funktionen in der folgenden Form: Ist $\alpha : J \to I$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen reellen Intervallen mit $\alpha' \geq 0$, so ist mit $f : I \to \mathbb{R}$ auch auch $(f \circ \alpha) \cdot \alpha' : J \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, und es gilt für alle $a, b \in J$:

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x)\, dx .$$

Man schließe hieraus: Ist $\alpha : J \to I$ zusätzlich bijektiv mit einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung, so ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann–integrierbar, wenn $f \circ \alpha : J \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar ist.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 7. 7. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 11**

1) Man berechne das Integral
$$\int_1^a \frac{dx}{x}\,, \quad a > 1\,,$$
mit Hilfe von Riemannschen Summen zu geeigneten Zerlegungen des Intervalls $[\,1,\,a\,]$.

2) Man beweise für alle komplexen $z \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, die Formeln
$$\sum_{k=0}^{n} \cos kz \;=\; \cos\frac{nz}{2}\,\frac{\sin\dfrac{(n+1)\,z}{2}}{\sin\dfrac{z}{2}}\,, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin kz \;=\; \sin\frac{nz}{2}\,\frac{\sin\dfrac{(n+1)\,z}{2}}{\sin\dfrac{z}{2}}\,,$$
und beweise mit ihrer Hilfe vermittels Riemannscher Summen, daß für $a > 0$ die Identitäten
$$\int_0^a \cos x\,dx \;=\; \sin a\,, \quad \int_0^a \sin x\,dx \;=\; 1 - \cos a$$
bestehen.

3) Man zeige: Ist die Funktion $f\,:\,[\,a,\,b\,] \to \mathbb{R}$ beschränkt und auf $[\,a,\,b\,)$, d. h. auf jedem Intervall $[\,a,\,\beta\,] \subset [\,a,\,b\,]$, $\beta < b$, Riemann–integrierbar, so ist sie auch auf $[\,a,\,b\,]$ Riemann–integrierbar, und es gilt
$$\int_a^b f\,(x)\,dx \;=\; \lim_{\beta\to b-} \int_a^\beta f\,(x)\,dx\,.$$

4) **a)** Die Folge der Funktionen $f_j\,:\,[\,a,\,b\,) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, sei gleichmäßig konvergent. Existieren dann die uneigentlichen Riemann–Integrale der f_j über $[\,a,\,b\,)$, so konvergiert auch das uneigentliche Riemann–Integral für die Grenzfunktion $f = \mathrm{Lim} f_j$, und es gilt
$$\int_a^{b-} f\,(x)\,dx \;=\; \int_a^{b-} \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,dx \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_a^{b-} f_j(x)\,dx\,.$$

b) Man belege durch ein Beispiel von *stetigen* (oder sogar beliebig oft differenzierbaren) Funktionen f_j, daß diese Aussage <u>nicht</u> richtig bleibt für *unbeschränkte* Intervalle $[\,a,\,\infty\,)$.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 30. 6. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 10**

1) Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad , \quad \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \quad , \quad \int \frac{x^7\,dx}{x^4 + 2} \quad , \quad \int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,dx \; .$$

2) Die Funktion $f : [\,a,\, b\,] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, und $g : [\,f(a),\, f(b)\,] \to \mathbb{R}$ sei ihre Umkehrfunktion. Man zeige, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy \;=\; b\,f(b) - a\,f(a)\;,$$

und bestimme hiermit auf elementare Weise die Integrale

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx\;, \quad 0 < a < b\;, \quad \int_0^1 \arcsin x\,dx\;.$$

3) Man zeige, daß das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergent ist, aber nicht absolut konvergiert.

4) Man beweise das Dirichlet–*Kriterium* für uneigentliche Integrale: Ist f stetig und g stetig differenzierbar auf dem Intervall $[\,a,\, b\,)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ist

$$F(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

in $[\,a,\, b\,)$ beschränkt, und strebt g monoton gegen 0 für $t \to b-$, so existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\;.$$

Man verwende dieses Resultat zum Nachweis der folgenden Aussage: Ist $f : [\,a,\, \infty\,) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit monoton wachsender Ableitung f' und $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, so konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty \sin f(x)\,dx\;.$$

Insbesondere existieren $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ und $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx$.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 23. 6. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 9**

1) Man verifiziere die folgenden Identitäten:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x\,, \qquad \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3}\,, \qquad \int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,,$$

$$\int \frac{e^x\,dx}{5+2e^x} = \frac{1}{2}\ln(5+2e^x)\,, \qquad \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\sqrt{\sin x}\,,$$

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x^2} = -\frac{1+\ln x}{x}\,, \qquad \int \cosh^3 x\,dx = \sinh x + \frac{1}{3}\sinh^3 x\,.$$

2) Man zeige, daß die durch $f(x) := x + e^x$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion eine zweimal differenzierbare Umkehrfunktion g auf $\mathbb{R}$ besitzt, und bestimme deren 2. Taylorpolynom $T^2_{g,b}(x)$ an der Stelle $b = 1$. Ferner schätze man mit der Darstellung nach Lagrange das Restglied $g(x) - T^1_{g,1}(x)$ in dem Intervall $(1, 11/10)$ ab.

3) Man berechne durch geeignete Substitutionen die Integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}\,, \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}\,.$$

4) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Man zeige, daß dann

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^b f(t)\sin Rt\,dt = 0\,.$$

gilt.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 16. 6. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 8**

1) Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1 - x}} \ , \quad \lim_{x\to 1-} \sin(\pi x) \cdot \ln(1 - x) \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} \ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x \sin x}{\ln(\sinh x^3)} \ .$$

2) **a)** f und g seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), ferner gelte $f(a) = g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Man zeige, daß dann auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$ gilt.

b) Es gelte $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$ mit festen Konstanten $K > 0$ und $\alpha > 1$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$. Man zeige, daß die Funktion f konstant ist.

3) Man beweise für $y = f(x) = \arctan x$ die von Euler 1755 stammenden Formeln

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos^n y \ , \quad n \geq 1 \ .$$

Man bestimme damit die Taylor–Reihe von f um den Nullpunkt und zeige (ohne Integration und den Abelschen Grenzwertsatz), daß diese für $|x| \leq 1$ gegen $\arctan x$ konvergiert.

4) Man zeige, daß die Funktion $f(x) := e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) := 0$ beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, und bestimme ihre Ableitungen im Nullpunkt.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 2. 6. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 7**

1) Man beweise die folgende Formel

$$\sin 3x \;=\; 3\,\sin\,x \,-\, 4\,\sin^3 x$$

und bestimme damit die exakten Werte von $\sin \pi/3$, $\sin \pi/6$, $\sin \pi/12$ und die entsprechenden Werte des Cosinus.

2) Man finde alle differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^*_+$ mit

$$f\,(xy) \;=\; f\,(x) \,+\, f\,(y)\;, \quad x,\, y > 0\;.$$

Hinweis: Man zeige zuerst $f(1/x) = -f(x)$ und bestimme damit f'.

3) Die Funktion f genüge den üblichen Voraussetzungen des Satzes von Taylor auf dem Intervall $I = [\,a,\, b\,]$. Dann gibt es zu jedem $p \in \mathbb{N}^*$ und jedem $x \in I$ ein $\vartheta \in (0,\, 1)$, so daß

$$f\,(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x \,-\, a)^j \,+\, \frac{f^{(n+1)}(a \,+\, \vartheta(x \,-\, a))}{n!\,p}\,(1 \,-\, \vartheta)^{n+1-p}\,(x \,-\, a)^{n+1}$$

ist. Der letzte Term dieser Gleichung heißt das SCHLÖMILCH*sche Restglied*. Für $p = n+1$ geht es in das LAGRANGEsche, im Falle $p = 1$ in das sogenannte CAUCHYsche Restglied über. (Hinweis: Man setze

$$G\,(t) \;:=\; f\,(x) \,-\, \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}\,(x \,-\, t)^j\;, \quad g\,(t) \;:=\; (x \,-\, t)^p$$

und wende auf $\dfrac{G\,(x) \,-\, G\,(a)}{g\,(x) \,-\, g\,(a)}$ den zweiten Mittelwertsatz an).

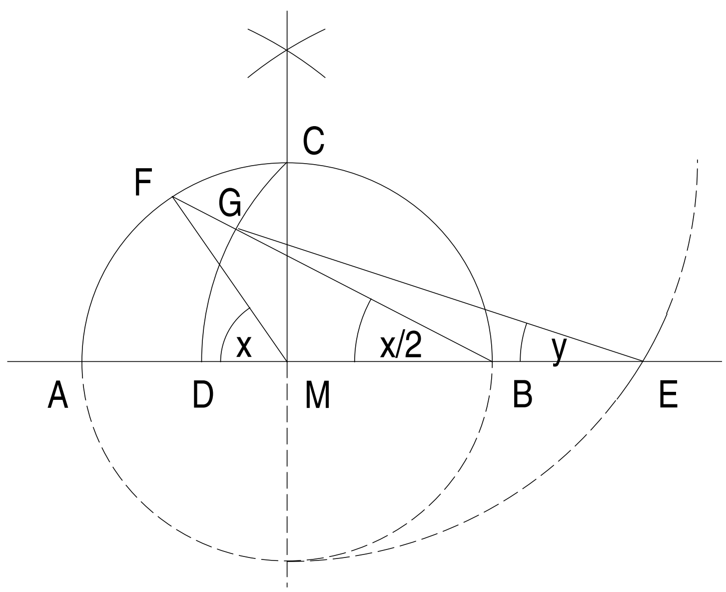
4) Der Schneidermeister Kopf aus Ludwigshafen hat einen Vorschlag gemacht, wie man mit Hilfe von Zirkel und Lineal jeden spitzen Winkel dreiteilen kann (was bekanntlich nicht möglich ist). Man leite anhand der auf der Rückseite abgedruckten Zeichnung (diese ist samt Text einem Artikel von Oskar Perron entnommen) durch Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck GBE eine Beziehung zwischen den Winkeln x und y her. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{3} - y$ an genau einer Stelle ihr Maximum annimmt. Man bestimme diese und gebe eine obere Abschätzung für den maximalen Fehler an, den man bei dieser einfachen Konstruktion begeht.
Bemerkung: Herr Kopf hat weitere, natürlich nicht so einfache Konstruktionen gefunden, bei denen der maximale Fehler kleiner als $20''$ (Bogensekunden) ist.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 26. 5. 2003

Aus dem Artikel von Oskar Perron:

„Herr Eugen *Kopf*, Schneidermeister in Ludwigshafen a. Rh., behauptet, daß eine von ihm ersonnene Konstruktion mit Lineal und Zirkel die genaue Dreiteilung des Winkels leiste. Die Behauptung ist natürlich falsch, und was Herr Kopf zu ihrer Begründung anführt, steht auf keinem höheren Niveau als man es sonst bei Winkelteilern und Kreisquadrierern gewöhnt ist. Um so überraschender ist es, daß mit der Konstruktion selbst ihr Entdecker doch eine wirklich glückliche Hand bewiesen hat; denn durch rechnerische Nachprüfung fand ich, daß sie im Verhältnis zu ihrer Einfachheit eine ganz erstaunlich gute Näherung liefert. Der Fehler ist für spitze Winkel im ungünstigsten Fall nur [...], liegt also unter der Genauigkeitsgrenze der besten handlichen Zeichnung.
Die Konstruktion findet sich nicht in den einschlägigen Büchern von Enriques und Vahlen; die dort mitgeteilten Konstruktionen sind zum Teil viel ungenauer und nicht einfacher, zum Teil nur wenig genauer und dann bedeutend komplizierter, so daß die Kopfsche Konstruktion entschieden hübscher ist. Man darf aus diesem Umstand wohl mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit schließen, daß die Konstruktion neu ist. Aber selbst, wenn sie irgendwo in einem vergessenen alten Schmöker stehen sollte, was man bei derlei Dingen nie wissen kann, ist sie immerhin wert, der Vergessenheit entrissen zu werden.
Die Konstruktion verläuft, wenn man sie von den unnötigen Linien befreit, folgendermaßen (in der Figur sind gar keine Hilfslinien unterdrückt, nicht einmal solche, die lediglich zur Konstruktion eines rechten Winkels dienen):
Man zeichne einen Halbkreis und den zu seinem Durchmesser AB senkrechten Radius MC. Durch C zeichne man den Kreisbogen CD mit dem Mittelpunkt B. Schließlich markiere man auf der Verlängerung von AB den Punkt E so, daß $CE = AB$ ist. Ist nun $\sphericalangle AMF = x$ der gegebene spitze Winkel, so bringe man die Gerade FB mit dem Kreisbogen CD zum Schnitt in G. Verbindet man dann G mit E, so ist $\sphericalangle AEG = y$ die Kopfsche Näherung für den dritten Teil von x."



Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

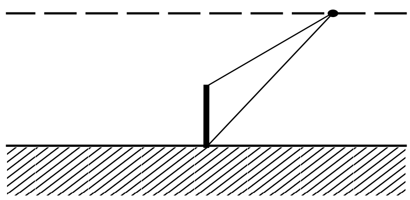
Sommersemester 2003 **Blatt 6**

1) **a)** Man bestimme die Definitionsbereiche der folgenden Funktionen und berechne ggfls. ihre Ableitungen:

$$\ln(\ln x)\,,\quad \left(1+x^2\right)^{\sin x}\,,\quad \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}\,,\quad \frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\ln x}\,,\quad \sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}}\,.$$

b) Man bestimme $f^{(n)}(x)$, $n = 1,\,2,\,1000$, für die Funktion $f(x) := x^2\,e^x$.

2) Ein Schiff fährt parallel zur Küste im Abstand A. An welcher Stelle sieht man vom Schiff aus eine senkrecht ins Meer ragende Mole der Länge $L < A$ unter maximalem Winkel ? Was kann man in den Fällen $L \geq A$ aussagen ? Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man stattdessen in einem Flugzeug über dem Schiff in der Höhe H fliegt ?



3) Man beweise die folgenden Formeln vermittels der Ableitungen geeigneter Funktionen ($n \geq 2$):

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}\,,\quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0\,,\quad \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\binom{n}{k} = n\,(n-1)\,2^{n-2}\,.$$

4) Von welchen Punkten $(0,\,t) \in \mathbb{R}^2$ gibt es keine, eine, zwei bzw. drei Tangenten an den Graphen der durch $f(x) = xe^x$ definierten Funktion ?

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 19. 5. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 5**

1) Es sei $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ die Menge der n–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem nicht leeren Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Man zeige, daß diese Menge nicht nur ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, sondern sogar eine kommutative Algebra mit Einselement ist.
Hinweis: Beweise die Formel

$$(f \cdot g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} g^{[n-k]} .$$

2) Wo sind die Funktionen

$$f_1(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad f_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?
Hinweis: Es darf benutzt werden, daß der Sinus (stetig) differenzierbar ist mit $\sin' = \cos$.

3) Man konstruiere eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die (nicht überall differenzierbare) Funktion $f(x) := |x|$ konvergiert.
Hinweis: Man ändere f in dem Intervall $[-1/n, 1/n]$ durch eine geeignete Parabel ab.

4) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1/3 , \\ 1 & \text{für} \quad 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(t+2) = f(t) .$$

Setze

$$\gamma_1(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1} t) , \quad \gamma_2(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n} t) .$$

Man zeige: Die „Kurve" $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ist stetig und bildet das Intervall $I = [0, 1]$ surjektiv auf das Quadrat $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ ab.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 12. 5. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 4**

1) Man zeige, daß es auf jedem Großkreis auf der Erdoberfläche (ohne Einschränkung sei dies der Äquator) zu jeder Zeit zwei diametral gegenüberliegende Punkte gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht. (Selbstverständlich wird hierbei vorausgesetzt, daß die Erde eine euklidische Kugel und die Temperaturverteilung stetig ist).

2) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Man zeige, daß dann auch die durch

$$f^{+}(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) \le 0 \end{cases}$$

definierte Funktion f^{+} stetig ist. Man folgere hieraus:
a) Jede stetige Funktion wie oben ist Differenz zweier nichtnegativer stetiger Funktionen;
b) mit f ist auch $|f|$ stetig;
c) mit f und g sind auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig.

3) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Man zeige: f ist, als Abbildung, injektiv genau dann, wenn f streng monoton wächst bzw. fällt. Man gebe ferner ein Beispiel dafür an, daß eine Richtung in der obigen Aussage nicht richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung fortläßt, daß der Definitionsbereich der Funktion f ein Intervall ist.
(Hinweis. Man darf die in der Vorlesung aus dem Zwischenwertsatz deduzierte Aussage verwenden: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so folgt für je drei Punkte $x_0 < x_1 < x_2$ in I aus $f(x_0) < f(x_1)$ auch $f(x_1) < f(x_2)$).

4) Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Man zeige, daß die Menge der Unstetigkeitsstellen höchstens abzählbar ist.
(Hinweis: An Unstetigkeitsstellen kann die Funktion nur nach oben springen. Zu jeder solchen Stelle x gibt es somit ein nichttriviales „Sprungintervall" J_x. Wähle nun zu x eine rationale Zahl $r_x \in J_x$).
Bemerkung: Aus Aufgabe 4 in Blatt 1 folgt die Existenz von streng monoton wachsenden Funktionen, deren Menge der Unstetigkeitsstellen tatsächlich abzählbar unendlich ist und dicht in I liegt.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 5. 5. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 2/3**

1) Es seien $f_n : X \to Y$ Abbildungen der *endlichen* Menge $X \neq \emptyset$ in den metrischen Raum Y. Man zeige: Die Folge (f_n) ist genau dann punktweise konvergent, wenn sie gleichmäßig konvergent ist. Man belege durch ein Gegenbeispiel, daß diese Aussage nicht richtig bleibt, wenn die Menge X die Kardinalität von $\mathbb{N}$ besitzt.

2) Man gebe eine Folge von Polynomen P_n an, die auf dem Intervall $I := [0, 1]$ gleichmäßig gegen $f(x) = x$ konvergiert, für die aber die Folge der Ableitungen P'_n nicht einmal punktweise gegen die Ableitung $f'(x) = 1$ an jeder Stelle $x \in I$ konvergiert. Für die Behandlung der Aufgabe braucht man nur die *formale* Kenntnis der Ableitung eines Polynoms:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \quad \text{für} \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n .$$

(Hinweis: Standardbeispiel.)

3) Man zeige: Die Funktionenfolge $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ist auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall $I \subset \mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent. Ist die Grenzfunktion stetig auf I?

4) Man bestimme die Koeffizienten a_n, $n = 0, \ldots, 7$, der Potenzreihenentwicklung des Tangens $\tan z := \sin z / \cos z$ um den Nullpunkt. Hierbei dürfen die entsprechenden Entwicklungen für den Sinus und den Cosinus verwendet werden.

5) Es sei X eine beliebige nicht leere Menge und V ein reeller oder komplexer Banachraum mit der Norm $\| \cdot \|$. Man zeige, daß die Menge der *beschränkten* Abbildungen von X nach V zusammen mit den üblichen Verknüpfungen und der Supremumspseudonorm ein Banachraum ist.

6) Die Folge der Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ sei punktweise monoton fallend und gleichmäßig auf X konvergent gegen Null. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ gleichmäßig konvergent.

Für Aufgabe 1 besteht Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 bis 6 werden nur zwei in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur maximal zwei von diesen abgeben!

Abgabetermin: 28. 4. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 1**

1) Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}\, z^n \ , \quad a > 1 \ \text{fest} \ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^5 5^n + (-1)^n n^5 5^n \right) z^n \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} z^n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}\, z^n \ , \quad a > 1 \ \text{fest} \ .$$

2) Man bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \ , \quad n, \, m \in \mathbb{N}^* \ , \qquad \lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right) \ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \ , \quad a_n b_m \neq 0 \ , \qquad \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} \, \sin \frac{1}{x} \ .$$

3) a) Man finde eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = -1$, die in einer Umgebung dieses Punktes die Funktion $\dfrac{1}{1 - z}$ darstellt, und berechne ihren Konvergenzradius.

b) Man bestimme den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n$$

mit der Fibonacci–Folge $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$, und berechne ihren Wert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\, z \,| < R$.

4) Es sei $\mathbb{Q} = \{ \, r_n : n \in \mathbb{N} \, \}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Man definiere

$$f\,(x) := \sum_{r_n < x} 2^{-n} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

und zeige: f ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte, streng monoton wachsende Funktion, die in jedem Punkt von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in jedem Punkt von $\mathbb{Q}$ unstetig ist.

Für Aufgabe 1 besteht weiter Einzelabgabe - Pflicht. Von den Aufgaben 3 und 4 wird nur eine in die Bewertung einbezogen. Daher bitte auch nur eine von beiden abgeben!

Abgabetermin: 14. 4. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 0**

Beginn der Übungen: <u>07. 04. 2003</u>

Eintrag in die Listen für die einzelnen Übungsgruppen:

ab <u>20. 03. 2003</u>

(Die Listen hängen am schwarzen Brett neben meinem Dienstzimmer 221 aus)

Das erste Übungsblatt befindet sich auf der nächsten Seite

Die Scheinvergabe - Kriterien aus dem letzten Semester wurden etwas modifiziert. Die neuen Bedingungen sollten aus der zusätzlichen Formulierung auf Blatt 1 ersichtlich sein - sie werden zu Beginn des Semesters in Vorlesung und Übungen erläutert

Ich wünsche Ihnen weiterhin Spaß am und Erfolg im Mathematik - Studium,

Ihr Oswald Riemenschneider