Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 13**

1) Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} z^n \; , \;\; a > 1 \text{ fest} \; , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^5 5^n + (-1)^n n^5 5^n \right) z^n \; ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} z^n \; , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n \; , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} z^n \; , \;\; a > 1 \text{ fest} \; .$$

2) Man finde eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = -1$, die in der Umgebung dieses Punktes die Funktion $\dfrac{1}{1 - z}$ darstellt, und berechne ihren Konvergenzradius.

3) Man bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \; , \;\; n, m \in \mathbb{N}^* \; , \quad \lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right) \; ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0} \; , \;\; a_n b_m \neq 0 \; , \quad \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \; .$$

4) Es sei $\mathbb{Q} = \{ r_n : n \in \mathbb{N} \}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Man definiere

$$f(x) := \sum_{r_n < x} 2^{-n} \; , \quad x \in \mathbb{R} \; ,$$

und zeige: f ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte, streng monoton wachsende Funktion, die in jedem Punkt von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in jedem Punkt von $\mathbb{Q}$ unstetig ist.

Abgabetermin: Voraussichtlich (zumindest teilweise) als Blatt 1 im kommenden Semester.

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 12**

(Zum freiwilligen Üben oder Erwerben fehlender Punkte)

1) Es sei $a_{j,k} := 2^{-k}$, falls $j \leq k$, und 0 sonst. Man berechne

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \Big) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} \Big)$$

und begründe, warum die beiden Ausdrücke gleich sein müssen. Man leite die daraus resultierende Identität auch aus der „doppelten geometrischen Reihe“ ab.

2) Wie in Aufgabe 1 berechne man die beiden Ausdrücke für die Doppelreihe $(a_{j,k})$ mit $a_{j,j} := -1/2j$, $a_{j,2j} := 1/2j$ für $j \geq 1$ und Null sonst. Stimmen die Ergebnisse auch diesmal überein?

3) Man bestimme sämtliche Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3}{2}\,n - \left[\frac{3}{2}\,n\right] + \frac{1}{2^n}\,, \quad (1+i)^n \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

wobei für $x \in \mathbb{R}$ das Symbol $[x]$ die größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist, bezeichnet (die sogenannte „Gauß–Klammer“).

4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ *folgenstetig*, d. h. es gelte

$$\lim_{n\to\infty} f\,(x_n) \;=\; f\,(a) \quad \text{f"ur alle reellen Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n \;=\; a\,.$$

Eine reelle Zahl $P \neq 0$ heißt eine *Periode* von f, falls $f\,(x+P) = f\,(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man sagt dann auch, f sei *periodisch* (mit Periode P). Man zeige:

a) f besitzt genau dann beliebig kleine positive Perioden, wenn f konstant ist.

b) Ist f periodisch, aber nicht konstant, so gibt es eine Periode P_0, so daß die Menge aller Perioden genau aus den Vielfachen $n\,P_0$, $n \in \mathbb{Z}^*$, besteht.

Abgabetermin: 3. 2. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 11**

1) (Einzelabgabe nur erforderlich, wenn noch Punkte fehlen). Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci–Zahlen $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \ldots$.
a) Man bestimme den Grenzwert $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n}$ und damit

$$s \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n\, a_{n+2}}\ .$$

b) Man berechne s bis auf einen Fehler $< 10^{-3}$.

2) Die Reihe $s = \sum_n a_n$ sei konvergent.
a) Man zeige, daß dann auch die umgeordnete Reihe

$$a_0 + a_1 + \underbrace{a_3 + a_2} + \underbrace{a_7 + a_6 + a_5 + a_4} + \underbrace{a_{15} + \cdots + a_8} + \underbrace{a_{31} + \cdots + a_{16}} + \cdots$$

gegen s konvergiert.
b) Man belege durch ein Beispiel, daß die umgeordnete Reihe

$$a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3} + \underbrace{a_4 + a_6 + a_5 + a_7} + \underbrace{a_8 + a_{10} + \cdots + a_{14} + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{15}} + \underbrace{a_{16} + \cdots}$$

divergieren kann.

3) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: s$ eine absolut konvergente Reihe. Für $k \in \mathbb{N}$ werde

$$b_k \ := \ \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^k a_k}{2^{k+1}}$$

gesetzt. Man bestimme die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, sofern vorhanden.
Hinweis: Man betrachte die Doppelreihe mit den Gliedern

$$a_{nk} \ := \ \begin{cases} 0\,, & \text{falls } \ n > k\,; \\ 2^{n-k-1}\, a_n\,, & \text{falls } \ n \leq k\,. \end{cases}$$

4) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$$

konvergiert? (Hinweis: Man betrachte $A(N) := \sum_{n=1}^{N} f(n)$ und verwende Abelsche Summation).

Abgabetermin: 27. 1. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 10**

1) (Einzelabgabe) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert: $a_0 := a > 1$, und für $n \geq 0$ gelte $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Man zeige:

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert monoton gegen ∞.

b) Man berechne $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

Hinweis: Man studiere die Folge $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{N+1} - 1}$.

2) Man untersuche die folgenden Reihen auf ihr Konvergenzverhalten:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x > 0;$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ mit $a_n = \dfrac{1}{n}$, falls n gerade, bzw. $= \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, falls n ungerade ist.

3) Man zeige: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|\, a_n \,|}}{n} \quad .$$

4) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und $s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Man zeige:

Die Reihe $\sum_n a_n b_n$ ist konvergent, falls $\sum_n |\, b_n - b_{n+1} \,|$ konvergiert und

a) $\sum_n a_n$ konvergiert

oder

b) die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $b_n \to 0$.

Man wende dieses Resultat an auf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \text{ mit } |\, z \,| = 1 .$$

Abgabetermin: 20. 1. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 9**

1) (Einzelabgabe) Man zeige, dass sowohl das Quotienten– als auch das Wurzel–Kriterium bei der Untersuchung der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

versagt. Dennoch kann man sehr einfach beweisen, daß diese Reihe konvergiert. Man finde z. B. eine konvergente Teleskopreihe als Majorante.

2) Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die folgenden Grenzwerte?

$$\lim_{j \to \infty} z^j \,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \,, \quad \lim_{\ell \to \infty} \ell! \, z^\ell \,.$$

Ist die Folge (z_j) komplexer Zahlen konvergent, so auch die Folgen $(\overline{z_j})$ und $(|z_j|)$. Wie hängen die jeweiligen Grenzwerte mit $\lim_{j \to \infty} z_j$ zusammen?

3) Man zeige: Konvergiert die Folge (a_n) nichtnegativer reeller Zahlen gegen a, so konvergiert die Folge $(\sqrt{a_n})$ gegen $\sqrt{a}$. Mit dieser Erkenntnis bestimme man die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} n \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n}\right)} \right) \,,$$

sofern diese existieren. (Hierbei sind a, b fest vorgegebene positive reelle Zahlen).

4) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum (Metrik mit Werten in $\mathbb{R}$), und $f : X \to X$ sei eine Abbildung, zu der es eine reelle Konstante ϑ mit $0 \le \vartheta < 1$ gibt, so daß $d(f(x), f(y)) \le \vartheta \, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Man zeige: f besitzt genau einen Fixpunkt, also eine Stelle $a \in X$ mit $f(a) = a$. Ist $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv erklärt durch $x_{n+1} := f(x_n)$, so konvergiert diese *Iterationsfolge* gegen a.

Abgabetermin: 13. 1. 2003

$$\Diamond$$
$$\star$$
$$\pm$$
$$\| \quad \star \quad \|$$
$$\star \quad \circ \quad \star$$
$$\Box \quad \star \quad \Box$$
$$\| \quad \lhd \quad \odot \quad \rhd \quad \|$$
$$\bigtriangleup \quad \star \quad \sqcap \quad \star \quad \bigtriangleup$$
$$\ll \quad \bigcirc \quad \star \quad \bigcirc \quad \gg$$
$$\| \quad \times \quad \unlhd \quad \otimes \quad \unrhd \quad \times \quad \|$$
$$\preceq \quad \star \quad \bigtriangledown \quad \wedge \quad \bigtriangledown \quad \star \quad \succeq$$
$$\in \quad \frown \quad \smile \quad \ddagger \quad \vee \quad \ddagger \quad \smile \quad \frown \quad \ni$$
$$\| \quad \perp \quad \dashv \quad \bullet \quad \uplus \quad \vee \quad \uplus \quad \bullet \quad \vdash \quad \perp \quad \|$$
$$\Box$$
$$\Box$$

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 8**

Das Analysis I–Team wünscht
Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Neues Jahr.

1) (Silvesteraufgabe; statt Einzelabgabe maximale Gruppengröße von 11 erlaubt!)
Auf einer Tafel sind die 2003 Stammbrüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2003}$ mit Kreide angeschrieben. Man darf nun irgendzwei dieser Zahlen a, b auslöschen und durch die Zahl $a+b+ab$ ersetzen. Dieses Verfahren setze man solange fort, bis nur noch eine einzige Zahl Z übrigbleibt. Welche Werte kann Z annehmen?
Hinweis: Man konstruiere sich ein geeignetes (endliches) „*Teleskop–Produkt*“, das gerade in das neue Jahr hineinreicht.

2) Man untersuche die beiden folgenden Reihen nach Konvergenz bzw. Divergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \binom{2+m}{m}^{-1/m} .$$

3) Es sei (X, d) ein metrischer Raum (mit Werten in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}_0$) und $\delta := \min(d, 1)$ die in Blatt 6, Aufgabe 3 eingeführte neue Metrik. Man zeige, daß eine Folge in X genau dann eine Cauchy–Folge bzw. konvergent bzgl. d ist, wenn sie die entsprechende Eigenschaft bzgl. δ besitzt. Man konstruiere ferner einen metrischen Raum, der Cauchy–vollständig ist, in dem aber der Satz von Bolzano und Weierstraß <u>nicht</u> gilt.

4) Es sei $\ell^2_{\mathbb{C}}$ die Menge der komplexen Folgen $a := (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, für die die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |\, a_j\,|^2$ beschränkt ist. Man zeige, daß $\ell^2_{\mathbb{C}}$ mit der üblichen Addition von Folgen und Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{C}$ einen $\mathbb{C}$–Vektorraum bildet und daß mit $b := (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}$ durch

$$\langle\, a,\, b\,\rangle \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j}\, b_j$$

ein positiv definites *hermitesches Skalarprodukt* auf diesem Vektorraum erklärt wird. Insbesondere wird durch

$$\|\, a\,\| := \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\, a_j\,|^2 \Big)^{1/2}$$

eine Norm auf $\ell^2_{\mathbb{C}}$ definiert, und es gilt ein Analogon zu der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. Der normierte Vektorraum $\ell^2_{\mathbb{C}}$ ist zudem (Cauchy–) vollständig. (Hinweis: Es darf erneut die „klassische" CAUCHY - SCHWARZsche Ungleichung verwendet werden).

Abgabetermin: 6. 1. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 7**

1) (Einzelabgabe) Zu jeder der unten angegebenen Folgen (a_n) finde man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$, s. d. für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$ besteht.

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 2} \quad \text{bzw.} \quad a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} .$$

2) Es seien a und b reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 = a , \quad a_1 = b , \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für} \quad n \geq 2 .$$

Man beweise, daß die Folge konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.
(Hinweis: Wähle evtl. zunächst $a = 0$ und $b = 1$).

3) Die Folge (a_n) sei induktiv erklärt durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} .$$

a) Man zeige durch Induktion die Ungleichungen $1 \leq a_n \leq 2$, $|a_n^2 - 2| \leq 2^{-2n}$ für
$n \geq 0$.
b) Man schließe hieraus, daß die Folge dem CAUCHY–*Kriterium* genügt.
c) Man bestimme ihren Grenzwert in $\mathbb{R}$ und begründe, warum der Körper der *rationalen* Zahlen nicht Cauchy–vollständig ist.

4) Es sei ℓ^2 die Menge der reellen Folgen $a := (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, für die die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$ beschränkt ist. Man schreibt für diese Bedingung auch kurz und suggestiv

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty .$$

(Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt dann, daß die Reihe tatsächlich konvergent ist). Man zeige, daß mit $b := (b_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ durch

$$d(a, b) := \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - b_j)^2 \Big)^{1/2}$$

eine *Metrik* auf ℓ^2 erklärt wird.
(Hinweis: Es darf die CAUCHY - SCHWARZsche Ungleichung verwendet werden).

Abgabetermin: 16. 12. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 6**

1) (Einzelabgabe) Es gilt in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n} - 1)) = 0 .$$

Hinweis: Man studiere das Beispiel 3 auf p.42 in KÖNIGSBERGER.

2) Man zeige für festes $p \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $|b| < 1$, daß

$$\lim_{n\to\infty} n^p b^n = 0 .$$

Hinweis: man schreibe $|\,b\,|$ in der Form $1/(1+h)$ und verwende die binomische Formel.

3) Es sei X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \to \mathbb{K}$ eine Metrik mit Werten in dem angeordneten Körper $\mathbb{K}$. Man zeige, daß mit d auch

i) $\delta(x,y) := \min(d(x,y), 1)$

und

ii) $\Delta(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$

Metriken auf X sind.

4) Man zeige, daß jede unendliche Folge in $\mathbb{R}$ eine unendliche Teilfolge besitzt, die *monoton aufsteigend* oder *monoton absteigend* ist. (Diese Aussage benötigt nur, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist).
Hinweis: Man betrachte die Menge der *Gipfelstellen* der Folge (a_n), d.h. der Stellen $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le a_m$ für alle $n \ge m$.

Abgabetermin: 9. 12. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 5**

1) (Einzelabgabe) Man zeige, daß für alle reellen Zahlen x, y, z die folgenden Ungleichungen bestehen:

$$4xy \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2), \quad xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2 .$$

2) Man beweise, daß die folgenden Ungleichungen für reelle Zahlen gelten:

$$|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|} .$$

3) a) Man bestimme alle komplexen Zahlen $c = a+bi \neq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung

$$\frac{1}{|c-2|} > \frac{1}{1+|c-1|}$$

genügen, und fertige eine Skizze der Menge dieser c an.

b) Man berechne Real– und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3, \quad \frac{1}{(3-i)^2}, \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} .$$

c) Man bestimme alle komplexen Zahlen ζ mit $\zeta^4 = -1$.

4) Es sei f_n bzw. F_n die Fläche des dem Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen regelmäßigen n–Ecks. Man zeige durch elementar–geometrische Überlegungen, daß

$$f_{2n} = G(f_n, F_n), \quad F_{2n} = H(f_{2n}, F_n),$$

wobei G das *geometrische* und H das *harmonische* Mittel zweier reeller Zahlen bezeichnet.

Abgabetermin: 2. 12. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 4**

1) (Einzelabgabe) Man zeige, daß für positive Elemente $x_1, \dots, x_n$ in dem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ die folgenden Aussagen richtig sind:
Aus $\prod_{j=1}^{n} x_j = 1$ folgt $\sum_{j=1}^{n} x_j \geq n$ und $\prod_{j=1}^{n} (1 + x_j) \geq 2^n$.
Umgekehrt folgt aus $\sum_{j=1}^{n} x_j = n$ die Ungleichung $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$.
In den drei Ungleichungen gilt jeweils das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

2) Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für welche die Ungleichung $2^n < n^3$ besteht. Entsprechend untersuche man den Gültigkeitsbereich der Ungleichung $3^n < n^4$.

3) Man zeige: jede reguläre Halbgruppe von *endlicher* Ordnung, die eine Rechtseins e besitzt, ist eine Gruppe.

4) Man betrachte die Menge aller reellen 2×2–Matrizen vom Typ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

und zeige, daß diese zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen *Körper* bildet, der einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper besitzt. Man gebe ein Element J an mit $J^2 = -E$.

Abgabetermin: 25. 11. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 3**

1) (Einzelabgabe) Man zeige, daß im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen die Menge

$$P \;=\; \{\, x = \frac{a}{b} \,:\, a \in \mathbb{Z}\,,\; b \in \mathbb{Z}^*\,,\; a \cdot b \in \mathbb{N}^* \,\}$$

einen *Positivitätsbereich* bildet. Mit anderen Worten: Es ist $\mathbb{Q} = P \cup \{0\} \cup (-P)$, die Mengen P, $-P$ und $\{0\}$ sind paarweise disjunkt, und es gilt $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$.

2) Die Zahl 4 läßt sich auf fünf verschiedene Weisen als Summe von Einsen und Zweien darstellen:

$$1 + 1 + 1 + 1 \,=\, 1 + 1 + 2 \,=\, 1 + 2 + 1 \,=\, 2 + 1 + 1 \,=\, 2 + 2\,.$$

Man gebe eine Rekursionsformel für die Anzahl solcher Darstellungen durch Einsen und Zweien für eine beliebige positive natürliche Zahl n an und berechne sie im Fall $n = 12$. Welche Anzahl ergibt sich für $n = 12$, wenn man zusätzlich auch Dreien zur Darstellung zuläßt ?

3) Es bezeichne $\mathfrak{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Menge der Teilmengen $M \subset \{\, x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le n \,\}$ und $\mathfrak{G}_n$ die Menge der $M \in \mathfrak{P}_n$, deren Anzahl $\#M$ *gerade* ist. Entsprechend definiere man die Menge $\mathfrak{U}_n$ der Teilmengen mit *ungerader* Anzahl. Man gebe Formeln für die Kardinalität der endlichen Mengen $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ an.

4) Es seien M und N Mengen. Man zeige: es gibt Mengen M' und N' mit $M' \simeq M$, $N' \simeq N$ und $M' \cap N' = \emptyset$. Bezeichne mit $\operatorname{card} M$ die Äquivalenzklasse von M bzgl. der Relation $\simeq$ (Gleichmächtigkeit) etc. und definiere

$$\operatorname{card} M + \operatorname{card} N \;:=\; \operatorname{card}\,(M' \cup N').$$

Man zeige:
a) Die Definition ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten M, N, M' und N'.
b) Es gelten für diese Addition das Kommutativ- und das Assoziativgesetz, und es gibt ein neutrales Element.
c) Es gilt stets

$$\operatorname{card} M \;+\; \operatorname{card} N \;=\; \operatorname{card}\,(M \cup N) \;+\; \operatorname{card}\,(M \cap N)\;.$$

Abgabetermin: 18. 11. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 2**

1) (Einzelabgabe) Man zeige: Ist x eine von 1 verschiedene rationale Zahl, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel:

$$(1 + x)\,(1 + x^2) \cdot \ldots \cdot (1 + x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} .$$

Hierbei bedeutet x^{2^n} die 2^n–te Potenz von x (und nicht etwa die n–te Potenz von x^2).
Ist diese Aussage auch für ein Element $x \neq 1$ in einem beliebigen Körper richtig ?

2) Man berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

ohne Verwendung von vollständiger Induktion.
Hinweis: Man zerlege die Summanden geschickt in eine Differenz von zwei Brüchen.

3) Man beweise, daß es für jede natürliche Zahl p *rationale* Zahlen $r_0^{(p)}, \ldots, r_p^{(p)}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Formel

$$S_n^{(p)} := \sum_{j=1}^{n} j^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=0}^{p} r_k^{(p)} n^{p-k}$$

besteht.
Hinweis: Man darf die Aussage der Aufgabe 2 in Abschnitt 1. 3 von Königsberger und das Prinzip der ordnungstheoretischen Induktion (Skript, Satz 2.12) verwenden.

4) Man begründe, warum die folgende Aussage unabhängig vom Wahrheitswert der Aussagen A, B und C stets richtig ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) .$$

Gruppenarbeit: Königsberger, pp. 1–6.

Abgabetermin: 11. 11. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 1**

1) (Einzelabgabe !) Man interpretiere die Formel

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) \;=\; n^2$$

geometrisch und beweise sie
a) durch vollständige Induktion,
b) durch direkte Herleitung aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

2) Man verifiziere die Gültigkeit der Formeln

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} j^3 \;=\; \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \;.$$

3) Die Folge der FIBONACCI–*Zahlen* wird induktiv definiert durch $a_0 = a_1 := 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$. Die ersten zehn Glieder lauten also $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. Man zeige für alle $n,\, k \in \mathbb{N}$, daß

$$a_n\, a_{n+k+2} - a_{n+1}\, a_{n+k+1} \;=\; (-1)^n\, a_k \;.$$

4) Es gilt „offensichtlich" der folgende Satz: *Je n Dinge sind gleich*. Denn für $n = 1$ ist nichts zu beweisen, und ist die Aussage für ein n richtig, so gelten für $n+1$ Dinge $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ die Gleichungen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ und $a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$ und folglich auch $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$.

Abgabetermin: 4. 11. 2002

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

O. Riemenschneider

Wintersemester 2002/03 **Blatt 0**

Beginn der Übungen: <u>28. 10. 2002</u>

Eintrag in die Listen für die einzelnen Übungsgruppen: ab <u>21. 10. 2002</u>

(Die Listen liegen neben meinem Dienstzimmer 221 aus)

Ich wünsche Ihnen einen erfolgreichen Start in das Mathematik - Studium,

Ihr Oswald Riemenschneider