Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 12**

1) Liouvillesche Flächen sind per definitionem solche, deren erste Fundamentalform sich in der Form

$$E = G = U + V \, , \quad F = 0 \, ,$$

schreiben lassen, wobei $U = U(u)$ bzw. $V = V(v)$ in lokalen Koordinaten u, v gilt. (Liouvillesche Flächen sind damit Verallgemeinerungen von Rotationsflächen). Man zeige:

a) Die Geodätischen solcher Flächen erhält man durch Integration in der Form

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V + c}} + c_1 \, ,$$

wobei die Konstanten c, c_1 von den Anfangsbedingungen abhängen.

b) Ist ϑ der Winkel zwischen einer Geodätischen und den Kurven $v = \text{const.}$, so ist

$$U \sin^2 \vartheta - V \cos^2 \vartheta = \text{const.}$$

2) Man berechne das Transformationsverhalten der Christoffel–*Symbole* (erster Art) bei regulären Parameterwechseln von Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raumes.

3) (Fortsetzung von Aufgabe 3 und 4 in Blatt 11). Man stelle analog zu den Gleichungen von Gauss, Mainardi und Codazzi notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß $\varphi_{,ijk} = \varphi_{,ikj}$ für alle i, j, k. Man gebe weitere Bedingungen an, die (unter der vorigen Voraussetzung) zu $N_{\sigma,ij} = N_{\sigma,ji}$ für alle i, j äquivalent sind, und zeige, daß diese im Hyperflächenfall $s = 1$ stets erfüllt sind.

4) (Fortsetzung von Aufgabe 3). Man formuliere und beweise im vorigen Kontext das Analogon zu dem *Hauptsatz der Hyperflächentheorie*.

Abgabetermin: 04. 07. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 11**

1) Man zeige, daß die parametrisierten Flächenstücke

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u) , \quad \overline{\varphi}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

dieselbe Gaußsche Krümmung an entsprechenden Stellen (u, v) besitzen, die Abbildung

$$\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$$

aber keine Isometrie ist. Man begründe damit, daß die „Umkehrung“ des *theorema egregium* nicht richtig ist.

2) Man zeige, daß die Isometrien der zweidimensionalen Sphäre $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ die Einschränkungen der (linearen) orthogonalen Transformationen des euklidischen Raumes $\mathbb{E}^3$ auf S^2 sind.

3) Man betrachte eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^{n+s}$ mit regulärer Parametrisierung $\varphi : V \to \mathbb{E}^{n+s}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man beweise: Es gibt (lokal) paarweise orthogonale normierte differenzierbare Vektorfelder $N_\sigma : V \to \mathbb{R}^{n+s}$, $\sigma = 1, \ldots, s$, die an jeder Stelle $u \in V$ das Komplement des Tangentialraums von M an der Stelle $\varphi(u)$ erzeugen.

4) (Fortsetzung von 3.) Schreibt man entsprechend zum Fall der Hyperflächen ($s = 1$)

$$\varphi_{,ij} = \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} \, \varphi_{,\ell} + \sum_{\sigma=1}^{s} L_{ij}^{\sigma} \, N_\sigma ,$$

so gelten für die Christoffel–Symbole Γ_{ij}^{ℓ} die bekannten Darstellungen durch den (von der euklidischen Struktur auf $\mathbb{E}^{n+s}$ induzierten) Fundamentaltensor I (mit den Koeffizienten g_{ij}) auf M. Setzt man ferner

$$N_{\sigma,j} = \sum_{\ell=1}^{n} C_{\sigma j}^{\ell} \, \varphi_{,\ell} + \sum_{\rho=1}^{s} D_{\sigma j}^{\rho} \, N_\rho ,$$

so hat man die Weingarten–Gleichungen $C_{\sigma j}^{\ell} = -\sum_{i=1}^{n} L_{ij}^{\sigma} \, g^{i\ell}$, und die Matrix der $D_{\sigma j}^{\rho}$ ist schiefsymmetrisch bei festem j: $D_{\sigma j}^{\rho} = -D_{\rho j}^{\sigma}$.

Abgabetermin: 27. 06. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 10**

1) Es sei eine glatte Kurve $\alpha : I \to M$ in einer Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$ vorgegeben. Man zeige, daß deren geodätische Krümmung κ_g in einem Punkt $x_0 \in M$ übereinstimmt mit der Krümmung κ derjenigen ebenen Kurve, die man durch orthogonale Projektion von α in die affine Tangentialebene von M in x_0 erhält.

2) Gibt es eine parametrisierte Fläche (mit Parametern u, v) in $\mathbb{E}^3$ mit der folgenden ersten und zweiten Fundamentalform?

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} .$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} .$$

3) Es sei M eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{E}^m$, und $\sigma : M \to M$ sei eine Isometrie. Man zeige, daß σ vollständig bestimmt ist durch den Wert $y_0 := \sigma(x_0)$ eines festen Punktes $x_0 \in M$ und das Differential $A := (D\sigma)_{x_0} : T_{M,x_0} \to T_{M,y_0}$.

4) Für eine Rotationsfläche gilt

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H = \frac{\left(r\sqrt{1 - r'^2}\,\right)'}{(r^2)'} ,$$

wenn man die *Meridiankurve* nach der Bogenlänge parametrisiert. Der Ausdruck für die mittlere Krümmung H hängt also nur von r und damit von der ersten Fundamentalform ab. Warum begründet diese Formel nicht, daß für Rotationsflächen die mittlere Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist? Man gebe ein Gegenbeispiel an.

Abgabetermin: 20. 06. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 9**

1) Es sei M eine reguläre Fläche ohne Nabelpunkte. Man beweise, daß M genau dann eine Minimalfläche ist, wenn die GAUSS–Abbildung $N : M \to S^2$ für alle $x \in M$ und $w_1,\, w_2 \in T_{M,x}$ die Gleichung

$$\langle\, (DN)_x(w_1),\, (DN)_x(w_2)\,\rangle_{N(x)} \;=\; \lambda\,(x)\,\langle\, w_1,\, w_2\,\rangle_x$$

erfüllt, wobei $\lambda\,(x) \neq 0$ nur von x abhängt.

2) Man beweise, daß es keine kompakten Minimalflächen in $\mathbb{E}^3$ gibt.

3) Es sei φ eine regulär parametrisierte Fläche. Eine *Parallelfläche* zu φ ist eine parametrisierte Fläche der Form

$$\psi \;=\; \varphi_a \;:=\; \varphi \,+\, a\,N\ .$$

a) Man zeige

$$\psi_u \times \psi_v \;=\; (1 \,-\, 2Ha \,+\, Ka^2)\,\varphi_u \times \varphi_v\ ,$$

wobei H und K die mittlere bzw. die GAUSSsche Krümmung von φ bezeichnen, und schließe hieraus für die entsprechenden Krümmungen H_a und K_a in regulären Punkten von ψ:

$$H_a \;=\; \frac{H \,-\, Ka}{1 \,-\, 2\,Ha \,+\, Ka^2}\ ,\quad K_a \;=\; \frac{K}{1 \,-\, 2\,Ha \,+\, Ka^2}\ .$$

b) Hat φ konstante mittlere Krümmung $c \neq 0$, so besitzt die Parallelfläche φ_a mit $a = (1/2)c$ konstante GAUSSsche Krümmung $4c^2$.

4) **a)** Man zeige: Ein zugleich *flächenerhaltender* und *konformer* Diffeomorphismus zwischen Flächen in $\mathbb{E}^3$ ist eine Isometrie.

b) Man gebe einen flächenerhaltenden Diffeomorphismus der Ebene $\mathbb{E}^2$ an, der nicht konform ist, und einen konformen, der nicht flächenerhaltend ist.

Abgabetermin: 13. 06. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 8**

1) Man betrachte die Fläche, die man durch Rotation der Kurve $y = x^3$, $-1 < x < 1$, um die Gerade $x = 1$ erhält. Man zeige, daß alle Punkte, die man durch Rotation des Ursprungs $(0, 0)$ erhält, *Flachpunkte* der Rotationsfläche sind.

2) **a)** Man beweise, daß jede *kompakte* Fläche in $\mathbb{E}^3$ *mindestens* einen *elliptischen* Punkt besitzt.

b) Man bestimme die *Nabelpunkte* des *Ellipsoids* in $\mathbb{E}^3$ mit paarweise verschiedenen Halbachsen a, b, c.

3) Die Gaussche Krümmung des Ellipsoids ist gegeben durch

$$K = \frac{1}{a^2\, b^2\, c^2}\, \frac{1}{f^4}\ , \quad \text{wobei} \quad f = f\,(x,\, y,\, z) := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\ .$$

4) *Isotherme Parametrisierungen* von zwei *Minimalflächen* heißen *konjugiert*, wenn ihre Komponentenfunktionen *konjugiert harmonisch* sind. Man zeige:

a) Das *Helikoid* und das *Katenoid* sind konjugierte Minimalflächen.

b) Sind zwei *konjugierte* Minimalflächen φ und ψ gegeben, so ist auch für alle $t \in \mathbb{R}$ die (parametrisierte) Fläche

$$(\cos t)\, \varphi + (\sin t)\, \psi$$

eine Minimalfläche, und alle Flächen in dieser Familie haben die gleiche erste Fundamentalform.

Abgabetermin: 06. 06. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 7**

1) Man beschreibe den Teil der Einheitssphäre, der durch das Bild der GAUSS–*Abbildung* der folgenden Flächen überdeckt wird:

a) *Rotationsparaboloid* ($z = x^2 + y^2$),
b) *Rotationshyperboloid* ($x^2 + y^2 - z^2 = 1$),
c) *Katenoid* ($x^2 + y^2 = \cosh^2 z$) .

2) Man zeige in Verallgemeinerung der Vorlesung, daß die *elementarsymmetrischen Funktionen* in den *Hauptkrümmungen* einer (differenzierbaren) Hyperfläche in $\mathbb{E}^n$ *differenzierbare* Funktionen sind.

3) Man betrachte die (parametrisierte) *Rotationsfläche*

$$\varphi(u, v) := (h(u) \cos v, h(u) \sin v, k(u))$$

mit $h'^2 + k'^2 = 1$ und zeige, daß dann $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = h^2$ und $h_{11} = -k'h'' + h'k''$, $h_{12} = 0$, $h_{22} = hk'$ und für die GAUSS*sche Krümmung* $K = -h''/h$ gilt. Man diskutiere die Fälle $K = 0, 1, -1$.

4) Die ENNEPER–*Fläche* wird parametrisiert durch

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + u v^2 , \; v - \frac{v^3}{3} + v u^2 , \; u^2 - v^2 \right) .$$

Man zeige:

a) Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2 , \quad F = 0 .$$

b) Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind

$$e = -g = 2 , \quad f = 0 .$$

c) Die Hauptkrümmungen sind

$$k_1 = -k_2 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} .$$

d) Die Krümmungslinien sind die Koordinatenkurven.
e) Die Asymptotenlinien sind die Kurven $u \pm v =$ konst.

Abgabetermin: 30. 05. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 6**

1) Es sei C_0 die Spur einer parametrisierten glatten Kurve $\alpha : (a, b) \to \mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$ und C der von C_0 erzeugte *Kegel*. Man finde eine Parametrisierung von C und untersuche diese darauf, wo diese eine *Immersion* und auf welcher Teilmenge sie eine *reguläre Parametrisierung* von C liefert.

2) Gehen alle Normalen an eine *zusammenhängende* Fläche in $\mathbb{E}^3$ durch einen festen Punkt, so zeige man, daß diese offener Teil einer Sphäre ist. Bleibt diese Aussage richtig ohne die Voraussetzung des Zusammenhangs ?

3) Es sei M eine *Rotationsfläche* in $\mathbb{E}^3$ mit der *erzeugenden Kurve* C. Es bezeichne ferner s die *Bogenlänge* von C und $\rho = \rho(s)$ den Abstand der Rotationsachse zu dem zu s gehörenden Punkt von C.

a) Man beweise den *Satz von* Pappus: Der Flächeninhalt von M ist gleich

$$2\pi \int_0^\ell \rho(s)\, ds \,,$$

wobei ℓ die *Länge* von C ist.

b) Man benutze Teil a), um den Flächeninhalt eines *Rotationstorus* zu bestimmen.

4) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, die M invariant läßt, d. h.: $A(M) \subset M$. Man zeige, daß die Einschränkung $A_{|M} : M \to M$ eine differenzierbare Abbildung ist, und daß für $a \in M$, $v \in T_{M,a}$ gilt:

$$(DA)_a(v) = A(v)\,.$$

Abgabetermin: 23. 05. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 5**

1) Man lasse eine Halbgerade $\ell \cong [\,a,\,\infty\,)$ mit ihrem Anfangspunkt a senkrecht entlang einer Geraden $E \subset \mathbb{E}^3$ wandern. Die Bewegung sei so beschaffen, daß der Anfangspunkt a einen Abstand $d = f\,(\theta)$ von der Anfangsposition hat, wenn sich die Halbgerade um den Winkel θ aus der Ausgangslage gedreht hat. Man zeige:

a) Ist $f\,(\theta) = \sin^2(\theta/2)$, so erhält man auf diese Weise eine reguläre Fläche, wenn man die Gerade E aus dem Bild der rotierenden Halbgeraden herausnimmt.

b) Was muß man zusätzlich herausnehmen, um im Fall $f\,(\theta) = \sin\,(\theta/2)$ eine reguläre Fläche zu bekommen ?

2) Zwei Punkte bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit in $\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{R}^3$, und zwar der erste entlang der x_3–Achse, startend im Ursprung, und der zweite parallel zur x_2–Achse, beginnend in einem Punkt $(a,\,0,\,0)$, $a \neq 0$. Bei ihrer Bewegung durchläuft ihre Verbindungsgerade ein zweidimensionales Gebilde X in $\mathbb{E}^3$. Man bestimme eine Gleichung für X und untersuche, ob X eine *reguläre Fläche* darstellt.

3) **a)** Man bestimme die *Tangentialebenen* an die Fläche $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ in den Punkten $(x,\,y,\,0)$ und zeige, daß diese alle parallel zur z–Achse liegen.

b) Man betrachte eine reguläre Fläche in $\mathbb{E}^3$, die lokal in der Form

$$\varphi\,(u,\,v) = \alpha_1(u) + \alpha_2(v)$$

parametrisiert werden kann, wobei α_1 und α_2 parametrisierte glatte Kurven bezeichnen. Man zeige, daß die Tangentialebenen längs einer festen Koordinatenkurve alle parallel zu einer Geraden sind.

4) Man betrachte die (parametrisierte) *Drehfläche*

$$\varphi\,(u,\,v) := (f\,(u)\,\cos\,v,\ f\,(u)\,\sin\,v,\ g\,(u))$$

mit $f\,(u) \neq 0$, $g'(u) \neq 0$, und zeige, daß die *Normalen* an diese Fläche alle durch die z–Achse gehen.

Abgabetermin: 09. 05. 2005

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 4**

1) Man berechne Krümmung und Torsion der *elliptischen* Schraubenlinie

$$\alpha(t) = (a \cos t,\, b \sin t,\, ct)\,, \quad ab \neq 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

2) Man zeige, daß die Kenntnis der Vektorfunktion $e_3 = e_3(s)$ (*Binormalenvektor*) einer Raum–Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ mit nirgends verschwindender Torsion die Krümmung $\kappa(s)$ und den Absolutbetrag der Torsion $\tau(s)$ von α bestimmt.

3) Für eine glatte, auf Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bezeichne $e_1 : I \to S^2 \subset \mathbb{E}^3$ das sogenannte *sphärische Tangentenbild*. Es sei $\widetilde{s}$ die Bogenlänge dieses Tangentenbildes. Man zeige:

a) $\kappa(s) = \dfrac{d\widetilde{s}}{ds}$,

b) das Tangentenbild ist ein Kreis genau dann, wenn α eine Helix ist.

4) Man zeige, daß weder der *Doppelkegel*

$$\{\,(x,\, y,\, z)) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\,\}$$

noch der *Kegel*

$$\{\,(x,\, y,\, z)) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\,, \quad z \geq 0\,\}$$

eine reguläre Fläche, also eine *Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^3$ ist.

Abgabetermin: 02. 05. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 3**

1) Man zeige, daß die *Torsion* τ einer glatt parametrisierten *Raumkurve* $\alpha = \alpha(t)$ gegeben wird durch die Gleichung

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \ \alpha'''(t) \rangle}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|^2} .$$

2) Man zeige, daß die Krümmung $\kappa(t) \neq 0$ einer Frenet–Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ gleich der Krümmung der ebenen Kurve $\pi \circ \alpha$ an der Stelle t ist, wobei π die *orthogonale Projektion* von α auf ihre *Schmiegebene* bei t bezeichnet.

3) Es sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung $\kappa(s) \neq 0$, $s \in I$. Man zeige:

a) Die Schmiegebene bei s ist die Grenzlage der Ebene durch die drei Punkte

$$\alpha(s), \quad \alpha(s + h_1), \quad \alpha(s + h_2)$$

bei $h_1, h_2 \to 0$.

b) Die Grenzlage des Kreises durch $\alpha(s)$, $\alpha(s + h_1)$, $\alpha(s + h_2)$ bei $h_1, h_2 \to 0$ ist ein Kreis in der Schmiegebene bei s, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, die $e_2(s)$ enthält, und dessen Radius gleich dem Krümmungsradius $1/\kappa(s)$ ist.

4) Eine Raum–Kurve α heißt eine *Helix*, wenn die Tangenten an α einen konstanten Winkel mit einer festen Richtung bilden. Im folgenden sei $\tau(s) \neq 0$ für $s \in I$ angenommen. Man zeige:

a) α ist genau dann eine Helix, wenn $\kappa/\tau = \text{konst.}$

b) α ist genau dann eine Helix, wenn die Geraden, die den „Normalenvektor" $e_2(s)$ enthalten und durch $\alpha(s)$ gehen, parallel sind zu einer festen Ebene.

c) α ist genau dann eine Helix, wenn die Geraden, die den „Binormalenvektor" $e_3(s)$ enthalten und durch $\alpha(s)$ gehen, einen konstanten Winkel mit einer festen Richtung bilden.

d) Die Kurve

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin\theta(s)\, ds, \ \frac{a}{c} \int \cos\theta(s)\, ds, \ \frac{b}{c}\, s \right)$$

mit $c^2 = a^2 + b^2$ ist eine Helix, und es gilt $\kappa/\tau = a/b$.

Abgabetermin: 25. 04. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 2**

1) Man berechne die Krümmung der *Ellipse*

$$x = a \cos t \,, \quad y = b \sin t \,, \quad t \in [\,0,\, 2\pi\,] \,, \quad a \neq b \,,$$

und zeige, daß sie genau vier *Scheitel* besitzt, nämlich an den Stellen $(a,\, 0)$, $(-a,\, 0)$, $(0,\, b)$, $(0,\, -b)$.

2) Es sei $\alpha\,(s)$, $s \in [\,0,\, L\,]$, eine auf die Bogenlänge parametrisierte (notwendig einfach) geschlossene konvexe ebene Kurve, die positiv orientiert ist. Die Kurve

$$\beta\,(s) = \alpha\,(s) - r\,n\,(s) \,,$$

wobei r eine positive Konstante und n der (innere) Normalenvektor ist, heißt eine *Parallelkurve* zu α. Man zeige:

a) Die Länge $L\,(\beta)$ von β ist gleich $L\,(\alpha) + 2\pi r$.

b) Für die Krümmung gilt $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)/(1 + r\,\kappa_\alpha(s))$.

3) Die Spur der parametrisierten Kurve

$$\alpha\,(t) := (t,\, \cosh\, t) \,, \quad t \in \mathbb{R} \,,$$

heißt *Kettenlinie*.

a) Man zeige, daß ihre *(orientierte) Krümmung* gegeben wird durch $\kappa\,(t) = \cosh^{-2} t$.

b) Man zeige, daß die *Evolute* der Kettenlinie beschrieben wird durch

$$\beta\,(t) = (t - \sinh\, t \cosh\, t,\, 2 \cosh\, t) \,.$$

4) Man bestimme die Evolute der *Traktrix*.

Abgabetermin: 18. 04. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 1**

1) **a)** Es seien $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eine parametrisierte Kurve im euklidischen Raum, $0 \in I$ und $v \in \mathbb{E}^n$ ein fester Vektor. Man nehme an, daß $\alpha(0)$ und $\alpha'(t)$ zu v orthogonal sind für alle $t \in I$. Man beweise, daß dann auch $\alpha(t)$ orthogonal ist zu v für alle $t \in I$.

b) Es sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eine parametrisierte Kurve mit $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Man zeige: $\| \alpha(t) \|$ ist genau dann eine von Null verschiedene Konstante, wenn $\alpha(t)$ orthogonal ist zu $\alpha'(t)$ für alle $t \in I$.

2) Man zeige, daß die Tangenten an die regulär parametrisierte Kurve

$$\alpha(t) := (3t,\, 3t^2,\, 2t^3)\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

einen konstanten Winkel mit der Geraden $y = 0,\, z = x$ im $\mathbb{E}^3$ bilden.

3) Sei $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{E}^2$ gegeben durch

$$\alpha(t) := \left(\frac{3at}{1 + t^3}\ ,\ \frac{3at^2}{1 + t^3} \right)\ , \quad a > 0 \text{ fest}\ .$$

a) Man beweise:

- In $t = 0$ ist α tangential zur x–Achse;
- es gilt $\alpha(t) \to (0, 0)$ und $\alpha'(t) \to (0, 0)$ bei $t \to \infty$;
- betrachtet man die Kurve mit der umgekehrten Orientierung, so approximiert diese und ihre Tangente die Gerade $x + y + a = 0$ bei $t \to -1$.

b) Man fertige eine Skizze der Spur von α an.

(Hinweis: Vervollständigt man die Spur von α in der Weise, daß sie symmetrisch zur Geraden $y = x$ wird, so erhält man das *Folium cartesium*).

4) Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eine parametrisierte Kurve. Es sei $[\,a, b\,] \subset I$ und $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, $p \neq q$. Man zeige für jeden konstanten Vektor v mit $\| v \| = 1$:

$$\langle\, q - p,\, v \,\rangle = \int_a^b \langle\, \alpha'(t),\, v \,\rangle\, dt \le \int_a^b \| \alpha'(t) \|\, dt\ .$$

Man folgere hieraus durch spezielle Wahl eines normierten Vektors v, daß

$$\| q - p \| \le \int_a^b \| \alpha'(t) \|\, dt\ .$$

Was kann man hieraus schließen ?

Abgabetermin: 11. 04. 2005

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I

O. Riemenschneider

Sommersemester 2005 **Blatt 0**

Die Übungen beginnen

am Montag, 4. 4. 2005

direkt nach der ersten Vorlesung

gez. Oswald Riemenschneider