Das arabische Problem der Vererbung von Kamelen

Ziemlich unnütze elementar-mathematische Überlegungen

Oswald Riemenschneider

Nach einer bekannten Erzählung vermacht ein Araber seine 11 Kamele an seine drei Söhne mit der Maßgabe, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite ein Drittel und der dritte ein Zwölftel der Kamele erhalten soll. Nach seinem Tode stellen die Söhne unschwer fest, dass dies nicht ohne Blutvergießen möglich ist (z.B. müsste der erste Sohn 5 1/2 Kamele erhalten). Sie fragen daher einen weisen Mann, was sie tun sollen. Dieser fügt ohne viel Aufhebens den 11 Kamelen ein eigenes, zwölftes hinzu, verteilt dann gemäß des Testaments die Hälfte, also sechs an den ersten Sohn, ein Drittel, also vier an den zweiten und eins, also ein Zwölftel, an den dritten Sohn. Damit bleibt ein Kamel übrig, das er wieder an sich nehmen kann, und somit sind alle zufrieden, da offensichtlich das Testament erfüllt wurde, ohne dass ein Kamel Schaden nehmen musste, und auch der weise Mann hat keinen Verlust erlitten.

Ist damit tatsächlich dem Vermächtnis Genüge getan, und hätte nicht auch ein wenig Elementarmathematik genügt, ohne hilfsweiser Hinzuziehung eines weiteren Kamels zu der von dem „weisen“ Mann gefundenen „Lösung“ zu gelangen?

Die Antworten auf diese Fragen sind denkbar einfach. Sie ergeben sich aus der trivialen Tatsache, dass die Summe der Anteile für die drei Söhne nicht 1 ergibt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12} < 1 .$$

Wollte man dem Testament also wortwörtlich folgen, so müsste nach Verteilung der Anteile noch ein Rest bleiben, was der Vater offensichtlich[1] nicht intendiert hat. Der eigentliche Sinn des Testaments kann also nur darin bestehen, die Kamele im Verhältnis

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{12} , \quad \text{also im Verhältnis} \quad \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{1}{12} , \quad \text{d.h.} \quad 6 : 4 : 1$$

aufzuteilen. Das führt, da $6 + 4 + 1 = 11$ ist, unmittelbar zu dem gleichen Ergebnis wie oben.

Wir wollen an einem weiteren Beispiel zeigen, dass unsere einfachen Überlegungen wahrscheinlich den Fähigkeiten des weisen Mannes überlegen sind. Wir nehmen an, dass jetzt 13 Kamele unter wiederum 3 Personen im Verhältnis

$$\frac{1}{2} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{3} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{4}$$

zu verteilen sind. Diesmal ist die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12} > 1 .$$

Nach unseren elementaren Überlegungen ist (wohl auch den Erben) unmittelbar klar, dass wir die 13 in der Form $6 + 4 + 3$ aufzuteilen haben. Was aber kann der weise Mann tun? Er kann tatsächlich die Methode des „Auffüllens“ (auf die Anzahl 12) dadurch erfüllen, dass er ein „negatives“ Kamel einbringt, also ein Kamel an sich nimmt. Von den zwölf verbleibenden gibt er dem ersten Sohn sechs, und dem zweiten vier. Bleiben also noch zwei für den dritten Sohn, der aber drei erwartet. Dieser berechtigte Wunsch kann durch Hinzufügung des zurückbehaltenen Kamels erfüllt werden.

Hier noch eine zweite Lösung, die vielleicht für den „Normalmenschen“ überzeugender ist. Der weise Mann fügt (wohl nach Rücksprache mit einem reinen Mathematiker) den 13 noch eigene (positive) Kamele hinzu, nämlich (überraschenderweise?) 11. Das macht insgesamt 24, die unter dem vorgegebenen Schlüssel in $12 + 8 + 6$ aufzuteilen wären, was aber (natürlich) nicht möglich ist, da die Summe größer als 24 ausfällt, nämlich $= 26$ ist. Er überzeugt die Erben davon, dass es daher sinnvoll ist, jedem zunächst jeweils die Hälfte zuzuteilen, also $6 + 4 + 3$. Damit sind aber die 13 Kamele des Vaters schon verteilt, und der weise Mann kann seine 11 Kamele wieder nach Hause führen. Frage: Gehört zu dieser Lösung Weisheit, oder doch eher Arithmetik?

[1] Siehe aber Fußnote 2.

Als Mathematiker ist man versucht, das Problem in völliger Allgemeinheit zu betrachten, also n Erben, n (rationale) Anteile q_1 bis q_n und K zu vererbende Kamele vorauszusetzen und zu fragen, unter welchen (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen an diese Zahlen das Problem eine (elementar mathematische) Lösung besitzt. Dies ist mit einfacher Schulmathematik und etwas Scharfsinn möglich und könnte daher dem Leser überlassen werden. Der Vollständigkeit halber fügen wir einige wenige Überlegungen an.

Unseren obigen Ausführungen gemäß müssen wir zunächst die Anteile $q_1, \ldots, q_n$ so normieren, dass ihre Summe 1 ergibt, was ganz einfach durch Division mit der Summe dieser Zahlen zu erreichen ist:

$$p_j := \frac{q_j}{q} \ , \quad q := \sum_{j=1}^{n} q_j \ , \quad j = 1, \ldots, n \, .$$

Bemerkung. Man beachte, daß im Falle $n = 1$ selbstverständlich $p_1 = 1$ ist; der eine Sohn bekommt alles! Man kann aber unsere Interpretation in dieser Situation mit einiger Berechtigung in Zweifel ziehen. Wenn $q_1 < 1$ ist, ist es durchaus denkbar, dass der Vater dem Sohn nicht alles vererben, sondern den restlichen Anteil z. B. karitativen Institutionen überlassen wollte. Also wäre es sinnvoller, jetzt von zwei Erben auszugehen mit den Anteilen q_1 und $q_2 = 1 - q_1$.[2] Ist dagegen $q_1 > 1$, so sollte man mit eher noch größerer Berechtigung an der Geschäftsfähigkeit des Vaters bei Unterzeichnung des Testaments zweifeln.

Wäre K eine kontinuierliche Größe, so wäre die korrekte (und einzig mögliche) Aufteilung natürlich

$$K = \sum_{j=1}^{n} K_j \ , \quad \text{wobei } K_j := p_j \, K \, .$$

Da aber K eine natürliche Zahl und die p_j rationale Zahlen sind und nur ganzzahlige Lösungen $K_1 \ldots, K_n$ sinnvoll sind, müssen wir a priori sicherstellen, dass die K_j ganzzahlig werden. Dazu schreibt man die p_j in der „gekürzten" Form

$$p_j = \frac{r_j}{s_j} \ ,$$

d. h. für jedes j besitzen die beiden natürlichen Zahlen r_j, s_j keinen echten gemeinsamen Teiler. Dann ist offensichtlich eine notwendige Bedingung, daß alle s_j die Zahl K teilen, und dann bilden tatsächlich die

$$K_j = \frac{r_j}{s_j} \, K = r_j \, \frac{K}{s_j} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ ,$$

die eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung unseres Problems.

Bemerkung. Die vorige Bedingung impliziert, dass auch das kleinste gemeinsame Vielfache s der Nenner $s_1, \ldots, s_n$ die Zahl K dividiert, und diese (einzige) Bedingung ist selbstverständlich für sich allein schon hinreichend.

Beispiele. 1. In dem ersten (originalen) Beispiel haben die q_j die Werte $1/2, 1/3, 1/12$, und es ist $q = 11/12$. Damit sind die p_j, wie nicht anders zu erwarten, in gekürzter Darstellung $6/11, 4/11$ und $1/11$. Folglich ist $s_1 = s_2 = s_3 = s = 11$, und das Problem besitzt genau dann eine Lösung, wenn K ein ganzzahliges Vielfaches von 11 ist.

2. In unserem zweiten Beispiel sieht man genauso schnell, dass die p_j die Zahlen $6/13, 4/13, 3/13$ durchlaufen. Somit muss K ein Vielfaches von 13 sein.

3. Man macht sich unmittelbar klar, dass man mit der obigen Methode nur eine hinreichende, i. A. aber keine notwendige Bedingung findet, wenn man die p_j nicht in gekürzter Darstellung benutzt.

[2] Entsprechendes sollte man generell in Erwägung ziehen, wenn bei beliebigem n die Summe q kleiner als 1 ist.