

Funktionentheorie I

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

Hamburg 1993, 1999 und 2004/05

Korrigierte, leicht veränderte und ergänzte, um einige Kapitel erweiterte und mit Skizzen versehene

**Neufassung vom 16. März 2005
mit weiteren Korrekturen und Ergänzungen vom Februar 2006**

Vorwort

Das vorliegende Manuskript basiert auf meiner dreistündigen Vorlesung *Funktionentheorie I* aus dem Sommersemester 1993, die wiederum auf meiner Vorlesung *Grundzüge der Funktionentheorie* aufbaute und ursprünglich auf ein weiteres Semester geplant war. In den vorliegenden Noten wird der Inhalt dieser Vorlesung im Wesentlichen nach der Neufassung vom Sommersemester 1999 repetiert, die teilweise - bzgl. der zeitlichen Reihenfolge und auch im Umfang - nicht völlig mit der ursprünglichen identisch war. Insbesondere habe ich einen Beweis des *Primzahlsatzes* als Supplement angefügt. Wegen der Umstellung des Vorlesungszyklus zurück zu der klassischen Konstellation zweier vierstündiger Vorlesungen *Funktionentheorie I* und *Funktionentheorie II* ab dem Sommersemester 2004 ist ein nicht unbeträchtlicher Teil dieser Noten schon in die erste Vorlesung eingeflossen. Die dadurch gewonnene Möglichkeit der Präsentation eines erweiterten Stoffumfangs im Wintersemester 2004/05 findet ihren Niederschlag in der Aufnahme einiger Kapitel aus meiner Vorlesung *Funktionentheorie II* aus dem Wintersemester 1999/2000, vor allem die (allgemeine) Theorie der Überlagerungen und die Theorie der Riemannschen Flächen im Umkreis des *Uniformisierungssatzes* betreffend.

Die Stoffauswahl für die Vorlesung orientiert sich teilweise wieder an dem Buch von WOLFGANG FISCHER und INGO LIEB¹⁰ und dem ergänzenden Band dieser Autoren, und, was die Theorie der Riemannschen Flächen anbelangt, auch an dem schönen Bändchen von OTTO FORSTER. Es bestehen weiterhin Pläne, diesem Manuskript später ein weiteres über *Funktionentheorie in mehreren Veränderlichen* folgen zu lassen.

Die Numerierungen der Kapitel und der Seiten des vorliegenden Manuskripts setzen diejenigen meines Textes *Grundzüge der Funktionentheorie* fort. Verweise, die scheinbar ins Leere führen, beziehen sich somit auf dort vorhandenes Material.

An allgemeinen Voraussetzungen sollte der Leser wie bisher gute Grundkenntnissen der reellen Analysis (und einige wenige aus der Linearen Algebra, Topologie und Algebra) und funktionentheoretisches Wissen im Umfang meiner Vorlesung *Grundzüge der Funktionentheorie* mitbringen.

Hamburg, 16. März 2005
Oswald Riemenschneider

Auch in der vorigen überarbeiteten Fassung gab es Ungereimtheiten und Druckfehler. Die schlimmsten wurden in der vorliegenden Version der Kapitel 13 bis 17 eliminiert; es blieben, so hoffe ich, nicht allzu viele unentdeckt.

Hamburg, im Februar/März 2006
Oswald Riemenschneider

¹⁰Siehe die Bibliographie zu meiner Vorlesung *Grundzüge der Funktionentheorie*. Literaturverweise beziehen sich stets auf diese Liste.

Jenseits des Weihrauchs, dort wo es klar wird und heiter und durchsichtig, beginnen die Offenbarungen, dort gibt es keine Launen, Roderigo, wie in der menschlichen Liebe; was heute gilt, das gilt auch morgen, und wenn ich nicht mehr atme, es gilt ohne mich, ohne euch. Nur der Nüchterne ahnt das Heilige, alles andere ist Geflunker, glaubt mir, nicht wert, daß wir uns aufhalten darin.

(Max Frisch: *Don Juan oder die Liebe zur Geometrie*).

Inhalt (voraussichtlich)

Vorwort	xv
Inhalt	xvii
13 Cauchyscher Integralsatz (Homologie-Version)	111
14 Umlaufzahlen und Logarithmen	123
15 Cauchyscher Integralsatz (Homotopie-Version)	131
16 Der Satz von Mittag-Leffler und der Weierstraßsche Produktsatz	141
Anhang: Die Γ -Funktion	153
17 Elliptische Funktionen	159
18 Abstrakte Riemannsche Flächen	177
Anhang: Der Modulraum der komplexen Tori	192
19 Konforme Abbildungen	197
20 Gebrochen lineare Transformationen	201
Anhang: Die endlichen Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$	213
21 Die Automorphismen des Einheitskreises	219
22 Der Riemannsche Abbildungssatz	225
23 Die Klassifikation von Überlagerungen	237
Anhang: Gruppenoperationen	253
24 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip und die Modulfigur	261
25 Der große Satz von Picard	275
26 Garben und Cohomologie-Theorie	277
27 Cohomologie-Theorie Riemannscher Flächen	293
28 Der Satz von Riemann-Roch und Einbettung Riemannscher Flächen	307
Anhang: Der Serresche Dualitätssatz	315
29 Holomorphe Geradenbündel auf kompakten Riemannschen Flächen	???
Anhang: Das Abelsche Theorem - Beendigung des Beweises [fehlt]	???
Supplement: Der Primzahlsatz	[??? 345]
Aufgaben	[??? 355]

13 Cauchyscher Integralsatz (Homologie - Version)

Es sei im folgenden γ ein geschlossener Weg in einem beliebigen (nicht notwendig sternförmigen oder sogar konvexen) Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wir stellen uns in diesem Kapitel hauptsächlich die Frage: *Wann gilt der Cauchysche Integralsatz für γ in G , d. h. wann verschwindet das Integral*

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

für jede holomorphe Funktion f auf G ?

Es wird sich herausstellen, daß dafür eine a priori biholomorph invariante Bedingung an das Paar (G, γ) notwendig und hinreichend ist, die sich mit Hilfe der *Umlaufzahl* von γ ausdrücken läßt. In der Tat aber ist, was wir der vermutlich fehlenden Kenntnisse des Lesers wegen nicht zeigen können, diese Bedingung rein *topologischer* Art; sie involviert die erste *Homologie-Gruppe* des Gebietes G mit Werten in \mathbb{Z} , eine topologische Invariante, die wir aber nach EMIL ARTIN *analytisch* einführen können.

Aus diesen Überlegungen entspringt dann eine weitreichende neue Fassung des Residuensatzes, der alle bisher abgeleiteten Integralsätze als Spezialfall enthält. Wir beenden das Kapitel mit einigen Anwendungen. Dazu gehört neben einer umfassenderen Formulierung des Prinzips des Null- und Polstellen zählenden Integrals vor allem der *Satz über die Gebietstreue*, im Englischen „the open mapping theorem“ genannt.

Aus der Theorie der isolierten Singularitäten ist uns schon bekannt, daß wir neben geschlossenen Wegen sinnvollerweise auch formale \mathbb{Z} -Linearkombinationen solcher geschlossenen Wege betrachten sollten wie z. B. $\partial K_2 - \partial K_1$ mit konzentrischen Kreisen K_1 und K_2 . Dies führt zu dem Begriff der *Zyklen*, genauer: zu dem der *1-Zyklen*, den wir zuerst formal einführen.

Definition. Eine *1-Kette* in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung Γ der Menge aller parametrisierten Integrationswege (siehe *Grundzüge*, Kapitel 5) in G nach \mathbb{Z} , die auf fast allen Wegen den Wert Null annimmt. Ist γ ein Integrationsweg und $\Gamma(\gamma) = n_{\gamma} \in \mathbb{Z}$, so kann man offensichtlich Γ auch formal beschreiben durch die (endliche) Summe

$$\Gamma = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma.$$

In dieser Schreibweise entspricht jedem Weg γ eine Kette $[\gamma] = 1\gamma$, die auf γ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat.

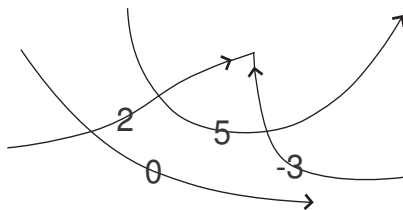
Man *addiert* Ketten koeffizientenweise. So ist zum Beispiel für

$$\Gamma_1 = \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_4$$

die Summe

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4.$$

Mit anderen Worten: Die 1-Ketten sind die Elemente der *freien abelschen Gruppe*, die von den parametrisierten Wegen in G erzeugt wird.



Figur 13.1

Als *Spur* von Γ bezeichnet man schließlich die Vereinigung der Spuren der γ mit $n_\gamma \neq 0$ in $\Gamma = \sum n_\gamma \gamma$; in Zeichen $\text{spur } \Gamma$.

Entsprechend zu der obigen Begriffsbildung definiert man *0-Ketten* als Abbildungen von G nach \mathbb{Z} , die nur endlich vielen Punkten einen Wert $\neq 0$ zuordnen. Die 0-Ketten sind also die Elemente der freien abelschen Gruppe, die von den Punkten in G erzeugt wird. Entsprechend kann man 0-Ketten wieder formal schreiben als Summe

$$\sum_{z \in G} n_z \cdot z, \quad \text{fast alle } n_z = 0.$$

Figur 13.2

Wir ordnen nun jedem Integrationsweg γ (mit Parametrisierung (φ, I) , $I = [a, b]$) eine 0-Kette zu, die wir den *Rand* $\partial\gamma$ von γ nennen:

$$\partial\gamma := \varphi(b) - \varphi(a),$$

also genauer und suggestiver:

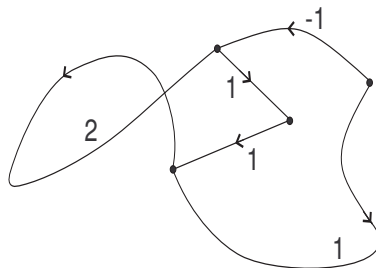
$$\partial\gamma = 1 \cdot \text{Endpunkt} - 1 \cdot \text{Anfangspunkt}.$$

Diese Definition ist nur von der *Orientierung* des Weges, nicht aber von der speziellen Parametrisierung abhängig. Ist $\Gamma = \sum_k n_k \gamma_k$ eine beliebige Kette, so erhält man den *Rand* $\partial\Gamma$ von Γ durch lineare Fortsetzung der eben gegebenen Definition:

$$\partial\Gamma := \sum n_k \partial\gamma_k.$$

In Figur 13.2 ist gerade der Rand der 1-Kette in Figur 13.1 abgebildet.

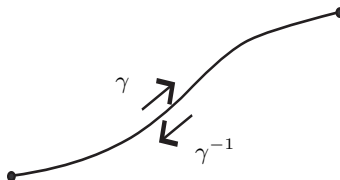
Definition. Die 1-Kette Γ heißt *geschlossen* oder auch ein *1-Zyklus*, falls $\partial\Gamma = 0$, d. h. wenn jeder Anfangs- und jeder Endpunkt eines Integrationsweges γ , der in Γ vorkommt, gleich oft (mit Vielfachheit) als Anfangs- und Endpunkt in der Kette auftritt. - Die folgende Figur zeigt einen solchen Zyklus:



Figur 13.3

Hingegen ist die Kette in Figur 13.1 nicht geschlossen.

Beispiel. Ist γ ein Integrationsweg, so ist stets $\gamma + \gamma^{-1}$ ein 1-Zyklus. Man beachte aber, daß i. a. $-\gamma$ und γ^{-1} als 1-Ketten verschieden sind!



Figur 13.4

Die 1-Zyklen bilden als Kern des Randoperators ∂ eine Untergruppe der abelschen Gruppe der 1-Ketten. Man kann als Übungsaufgabe zeigen, daß diese bezüglich der Integration „gleich“ der *freien abelschen Gruppe über der Menge aller geschlossenen (parametrisierten) Wege* ist. (Siehe das Beispiel vor und die Bemerkungen im Anschluß an Satz 4).

Wir übertragen nun die Integration von (stetigen) Funktionen längs Wegen auf Ketten: Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\Gamma = \sum n_k \gamma_k$ eine Kette in U . Dann setze man

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_k n_k \int_{\gamma_k} f(z) dz .$$

Offensichtlich ist das Integral nicht nur in Bezug auf den Integranden, sondern auch bezüglich der Integrationsketten additiv:

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz .$$

Man hat außerdem die *Standardabschätzung* in der modifizierten Form

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \text{spur} \Gamma} |f(z)| \sum_k |n_k| L(\gamma_k) .$$

Die Bedeutung der Begriffsbildung der Zyklen wird weiter erhellt durch die folgende Bemerkung.

Satz 13.1 Die Funktion f sei stetig auf dem Gebiet G . f besitzt genau dann eine Stammfunktion auf G , wenn für alle Zyklen Γ in G gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 .$$

Beweis. a) Unter der obigen Bedingung gilt insbesondere $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für alle geschlossenen Wege γ in G , so daß die Behauptung mit Satz 6. 3 aus den *Grundzügen* folgt.

b) Sei F eine Stammfunktion und $\Gamma = \sum n_k \gamma_k$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \sum_k n_k \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_k n_k (F(z_k^E) - F(z_k^A)) \\ &= \sum_{z \in U} \left(\sum_{\kappa: z_{\kappa}^E = z} n_{\kappa} - \sum_{\lambda: z_{\lambda}^A = z} n_{\lambda} \right) F(z) . \end{aligned}$$

Da Γ ein Zyklus ist, sind die Klammern unter der Summe auf der rechten Seite gleich 0 für alle $z \in G$. Also ist das Integral gleich Null. \square

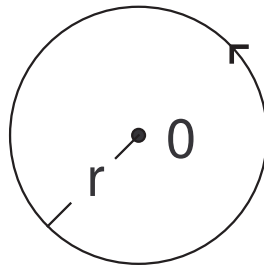
Wir wollen nun die *Umlaufzahl* von Γ bezüglich eines Punktes $z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma$ erklären.

Definition. Es sei Γ ein Zyklus, und z sei ein Punkt in $\mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufzahl* von Γ bzgl. z .

Beispiel. 1. Es sei $\Gamma = \gamma = \partial D_r$ der (positiv orientierte) Rand des Kreises ∂D_r mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r .



Figur 13.5

Hier ist, wie schon früher gezeigt,

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{d\zeta}{\zeta} = 1.$$

Ist dagegen $z_0 \notin \overline{D_r}$, so ist $(\zeta - z_0)^{-1}$ holomorph auf $D_{r+\varepsilon}$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, s. d.

$$n(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0.$$

2. Für den $|\ell|$ -fach positiv bzw. negativ durchlaufenen Kreisrand Γ_ℓ hat man die Parametrisierung

$$\gamma_\ell : t \mapsto r e^{2\pi i \ell t}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Die Umlaufzahl um den Nullpunkt ergibt sich hier, wie nicht anders zu erwarten, zu

$$n(\Gamma_\ell, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i \ell r e^{2\pi i \ell t}}{r e^{2\pi i \ell t}} dt = \ell.$$

Offensichtlich gelten für die Umlaufzahl die folgenden allgemeinen Regeln:

$$\begin{aligned} n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) &= n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z), & z \notin \text{spur } \Gamma_1 \cup \text{spur } \Gamma_2, \\ n(-\Gamma, z) &= -n(\Gamma, z) & , \quad z \notin \text{spur } \Gamma. \end{aligned}$$

Die obige Definition scheint also hinreichend vernünftig zu sein. Weitere „Begründungen“ folgen im nächsten Kapitel (zum Beispiel werden wir zeigen, was a priori nicht selbstverständlich ist, daß die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ stets eine ganze Zahl ist!).

Bei festem Γ ist die Abbildung

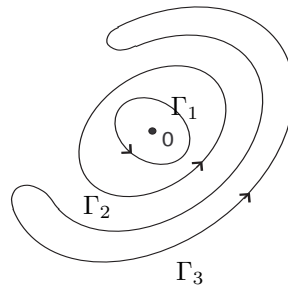
$$\mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma \ni z \mapsto n(\Gamma, z)$$

nach Satz 5.6 in den *Grundzügen* stetig. Da aber nach der obigen Behauptung $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ ist, muß die Funktion $n(\Gamma, z)$ auf den *Zusammenhangskomponenten* von $\mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma$ *konstant* sein! Ferner existiert, da $\text{spur } \Gamma$ kompakt ist, eine Kreisscheibe $D = D_R(0)$ mit $\text{spur } \Gamma \subset \overline{D}$. Nun ist $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ offen und zusammenhängend und hat einen leeren Durchschnitt mit $\text{spur } \Gamma$. Es gibt somit genau eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma$, die $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ enthält; dies ist *die einzige unbeschränkte Komponente* des Komplementes von $\text{spur } \Gamma$. In dieser gibt es eine unendliche Folge (z_j) mit $|z_j| \rightarrow \infty$ und damit $\text{dist}(z_j, \text{spur } \Gamma) \rightarrow \infty$. Somit ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n(\Gamma, z_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_k \frac{n_k}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z_j} = 0.$$

Also ist auch $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z in der unbeschränkten Komponente.

Als *Beispiel* zu dem Cauchyschen Integralsatz betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf \mathbb{C}^* und die Zykeln Γ_1, Γ_2 und Γ_3 wie in der folgenden Zeichnung:



Figur 13.6

Es gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 2\pi i,$$

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_3} f(z) dz = 0.$$

Anschaulich ist in diesem Beispiel klar, daß der Nullpunkt nicht im „Inneren“ von Γ_3 , aber auch nicht im Inneren von $\Gamma_1 - \Gamma_2$ liegt. Oder mit anderen Worten: Die Zykeln $\Gamma_1 - \Gamma_2$ und Γ_3 „beranden“ Bereiche, auf denen die Funktion $1/z$ holomorph ist. Dies ist dagegen falsch für die Zykeln Γ_1 und Γ_2 . Wesentlich ist also das topologische Verhältnis von Γ zu G , welches nur in der *Homologietheorie* präzise gefaßt werden kann.

Definition. Γ sei ein Zyklus in G . Dann heißt Γ *nullhomolog in G* (auch: *homolog Null in G* , oder in Zeichen $\Gamma \sim_G 0$), falls

$$n(\Gamma, z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Wir nennen die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma : n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

das Innere des Zyklus Γ und bezeichnen sie im folgenden oft mit $I(\Gamma)$. Somit gilt: Γ ist genau dann nullhomolog in G , falls das Innere von Γ in G liegt.

Bemerkungen. 1. G sei ein konvexes Gebiet. Nach der lokalen Form des Cauchyschen Integralsatzes ist $n(\Gamma, z) = 0$ für alle Γ in G und alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Ergo: In einem konvexen Gebiet ist jeder Zyklus nullhomolog. Entsprechendes gilt für *sternförmige* Gebiete.

2. Es sei Γ ein Zyklus mit $\text{spur } \Gamma \subset G' \subset G$. Dann impliziert $\Gamma \sim_{G'} 0$ sofort auch $\Gamma \sim_G 0$. Die Umkehrung ist jedoch nicht richtig: So ist z. B. $\partial D_r(0) \sim 0$ in \mathbb{C} , nicht aber in \mathbb{C}^* .

3. γ sei ein Weg in G und $\tilde{\gamma}$ irgendeine Umparametrisierung. Dann ist $\tilde{\gamma} + \gamma^{-1} \sim_G 0$. Sind außerdem γ_1 und γ_2 zwei zusammensetzbare Wege, so ist $\gamma_2 \gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) \sim_G 0$.

4. In G existiere ein Zyklus Γ mit $\Gamma \not\sim_G 0$. Dann gilt in G nicht der *Cauchysche Integralsatz* (in seiner Verallgemeinerung auf Zyklen). Es gibt dann nämlich einen Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $n(\Gamma, a) \neq 0$, und die Funktion $\frac{1}{z-a}$ ist holomorph auf G . Dennoch gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i n(\Gamma, a) \neq 0.$$

Die „Nullhomologie“ von Γ ist also wegen Beispiel 4 notwendig für die Richtigkeit des Cauchyschen Integralsatzes. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Bedingung auch hinreicht.

Satz 13.2 (Globaler Cauchyscher Integralsatz - Homologische Fassung) *Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und Γ sei ein nullhomologer Zyklus in G . Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(G)$:*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Hieraus ergeben sich auch wieder die *Integralformeln* in verbesserter Fassung.

Satz 13.3 (Globale Cauchysche Integralformeln - Homologische Fassung) *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

für alle $z \in G \setminus \text{spur } \Gamma$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen beide Sätze simultan.

a) Seien zuerst die Cauchyschen Formeln für $k = 0$ als richtig erkannt. Dann gelten diese für alle $k \in \mathbb{N}$, denn man braucht nur unter dem Integralzeichen zu differenzieren.

b) Die Cauchysche Integralformel für $k = 0$ impliziert den Integralsatz: Wähle $a \in G \setminus \text{spur } \Gamma$ fest, und zu $f \in \mathcal{O}(G)$ betrachte die Funktion $F(z) := f(z)(z-a)$. Die Formel angewandt auf F liefert wegen $F(a) = 0$:

$$0 = n(\Gamma, a) F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

c) Es bleibt also die Integralformel zu zeigen für $k = 0$. Das Einsetzen der Definition für die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ liefert die Einsicht, daß hierzu zu zeigen genügt:

$$h(z) := \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in G \setminus \text{spur } \Gamma.$$

Die *Idee* ist denkbar einfach: Man zeigt, daß h nach ganz \mathbb{C} holomorph fortgesetzt werden kann mit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h(z)| = 0$. Daraus folgt natürlich die Behauptung; denn aus dem Satz von Liouville schließt

man, daß h konstant sein muß, und die letzte Bedingung sorgt für $h \equiv 0$.

d) Setze mit der Diagonalen $\Delta := \{(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2 : \zeta = z\}$:

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad (\zeta, z) \in G \times G \setminus \Delta, \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \in G. \end{cases}$$

Die Funktion $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ ist in der Variablen z bei festem ζ (und umgekehrt) natürlich stetig und (nach dem RIEMANNschen *Hebbarkeitssatz*) sogar holomorph. Wir brauchen aber mehr, wenn wir Grenzprozesse vertauschen wollen.

Behauptung. g ist stetig als Funktion der beiden Veränderlichen ζ und z .¹¹

Sei also $(\zeta_0, z_0) \in G \times G$. Ist $\zeta_0 \neq z_0$, so ist nichts zu beweisen. Ist dagegen $\zeta_0 = z_0$, so gilt für alle (ζ, z) nahe bei (ζ_0, z_0) :

$$g(\zeta, z) - g(\zeta_0, z_0) = \begin{cases} f'(z) - f'(z_0) & , \quad \zeta = z, \\ \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) & , \quad \zeta \neq z, \end{cases}$$

wobei der zweite Ausdruck auch in der Form

$$\frac{1}{\zeta - z} \int_{[z, \zeta]} (f'(w) - f'(z_0)) dw$$

geschrieben werden kann.

Nun ist nach früheren Sätzen (wobei man die lokalen Cauchyformeln braucht) f' stetig. Also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } w \in U_\delta(z_0).$$

Wähle $(\zeta, z) \in U_\delta(\zeta_0) \times U_\delta(z_0)$. Dann ist für $\zeta \neq z$:

$$\begin{aligned} |g(\zeta, z) - g(\zeta_0, z_0)| &\leq \frac{1}{|\zeta - z|} \int_{[z, \zeta]} |f'(w) - f'(z_0)| |dw| \\ &\leq \frac{|\zeta - z|}{|\zeta - z|} \max |f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\zeta = z$ ist dies auch nach der ersten Zeile richtig.

e) Setze $h_0(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z) d\zeta$, $z \in G$. Nach allgemeinen Sätzen ist h_0 stetig auf G . Wir wenden nun den Satz von MORERA auf ein beliebiges kompaktes Dreieck $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$ an: Es ist

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(\zeta, z) d\zeta \right) dz.$$

Da g stetig ist in (z, ζ) , ist eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite erlaubt, also das in Rede stehende Integral gleich

$$\int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz \right) d\zeta.$$

Nun ist aber nach der obigen Bemerkung wegen des Satzes von GOURSAT

$$\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz = 0$$

¹¹Hieraus folgt nach dem (einfachen) Satz von OSGOOD, daß g sogar simultan *holomorph* ist, also lokal in Potenzreihen nach den beiden Variablen z und ζ entwickelt werden kann. Dies kann man - und damit auch die Stetigkeit - sogar schon allein aus der Tatsache der *partiellen* Holomorphie schließen mit Hilfe des tiefliegenden Satzes von HARTOGS.

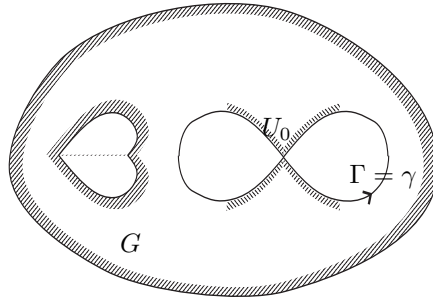
und folglich $\int_{\partial\Delta} h_0(z) dz = 0$ und damit schließlich nach Morera $h_0 \in \mathcal{O}(G)$.

f) Bisher wurde noch nicht die Voraussetzung $\Gamma \sim_G 0$ ausgenutzt. Betrachte nun die in \mathbb{C} offene Menge

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) = 0\}.$$

U_0 enthält das Äußere eines Kreises. Außerdem ist auf $G \cap U_0$ notwendigerweise

$$h_0(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



Figur 13.7

Definiere

$$h_1(z) := \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \in \mathcal{O}(U_0).$$

Dann wird durch

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z), & z \in G \\ h_1(z), & z \in U_0 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion in $\mathcal{O}(G \cup U_0)$ definiert. Ist aber $z_0 \notin G$, so ist $n(\Gamma, z_0) = 0$ wegen $\Gamma \sim_G 0$, d. h. $z_0 \in U_0$. Also impliziert die Homologievoraussetzung: $G \cup U_0 = \mathbb{C}$ und damit

$$h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Endlich gilt für hinreichend große $|z|$, wenn $\Gamma = \sum n_k \gamma_k$:

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq \frac{\max_{\text{spur}\Gamma} |f|}{\text{dist}(z, \text{spur}\Gamma)} \sum n_k L(\gamma_k) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Definition und Bemerkung. Γ_1, Γ_2 seien 1-Ketten in G . Dann heißt Γ_1 homolog zu Γ_2 in G , in Zeichen $\Gamma_1 \sim_G \Gamma_2$, falls die Differenz $\Gamma_1 - \Gamma_2$ (ein Zyklus und) homolog Null in G ist: $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim_G 0$. Man sieht unmittelbar ein, daß durch diese Definition eine Äquivalenzrelation auf der Menge der 1-Ketten gegeben wird.

Beispiel. Als Übungsaufgabe überlassen wir der Leserin und dem Leser den Nachweis der schon auf Seite 113 angedeuteten Aussage, daß jeder Zyklus Γ homolog zu einer endlichen Linearkombination $\sum n_j \gamma_j$ von geschlossenen Wegen γ_j ist.

Satz 13.4 $G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, und Γ_1 und Γ_2 seien zwei Zyklen in G mit $\Gamma_1 \sim_G \Gamma_2$. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Beweis. Aus $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim_G 0$ folgt unmittelbar

$$0 = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz . \quad \square$$

Eine Analyse der bisherigen Untersuchungen fordert geradezu zwangsläufig die Einführung der mit einer offensichtlichen abelschen Gruppenstruktur versehenen Menge

$$H_1(G, \mathbb{Z}) := \{1\text{-Zyklen in } G\} / \sim_G .$$

Aufgrund der Definition ist diese Gruppe a priori nur eine *biholomorphe* Invariante des Gebietes G . Man kann jedoch mit Mitteln der *algebraischen Topologie* einsehen, daß sie mit der *1. Homologiegruppe von G mit Werten in \mathbb{Z}* übereinstimmt, also tatsächlich eine *topologische* Invariante des Gebietes G darstellt. Auf Einzelheiten gehen wir hier nicht ein. Wir bemerken nur noch, daß man aufgrund des vorhergehenden Beispiels die Homologiegruppe auch einführen kann durch den Quotienten

$$H_1(G, \mathbb{Z}) := L(G) / \sim_G ,$$

wobei $L(G)$ die *freie abelsche Gruppe* bezeichnet, die erzeugt wird von den Äquivalenzklassen *geschlossener Wege* („loops“) in G (bezüglich Umparametrisierung), und daß wegen Satz 4 für $f \in \mathcal{O}(G)$ und jede Restklasse $[\Gamma] \in H_1(G, \mathbb{Z})$ das Integral

$$\int_{[\Gamma]} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

wohldefiniert ist. Überdies ist die *Paarung*

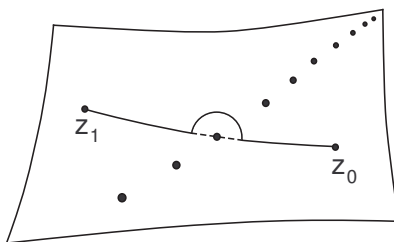
$$\begin{aligned} \int : \mathcal{O}(G) \times H_1(G, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, \Gamma) &\longmapsto \int_{\Gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

\mathbb{C} -linear im ersten und \mathbb{Z} -linear im zweiten Argument.

Wir wollen jetzt noch den *Residuensatz* in seiner schärfsten (homologischen) Version formulieren und beweisen. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen. G sei ein Gebiet, und $A \subset G$ sei eine diskrete Teilmenge (d. h. für alle $z_0 \in G$ existiere eine Kreisscheibe $D_r(z_0) \subset G$ mit *endlichem* Durchschnitt $D_r(z_0) \cap A$). Dies ist gleichbedeutend damit, daß A in G keine Häufungspunkte besitzt. Insbesondere ist dann $G \setminus A$ offen.

Hilfssatz 1 $G \setminus A$ ist ein Gebiet.

Beweis. Es sei $G' := G \setminus A$, und $z_0, z_1 \in G'$ seien beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Weg γ von z_0 nach z_1 in G . Da die Spur von γ kompakt ist, kann sie nur endlich viele Punkte von A enthalten, die man aber leicht in G' umgehen kann. (Siehe die nachfolgende Zeichnung). \square



Figur 13.8

Hilfssatz 2 $A \subset G$ sei diskret, und γ sei ein geschlossener Weg in G mit $\text{spur}\gamma \cap A = \emptyset$ und $\gamma \sim_G 0$ in G . Es sei ferner $A_1 := \{z \in A : n(\gamma, z) \neq 0\}$. Dann ist A_1 endlich, und es gilt $\gamma \sim_{G'} 0$ in dem Gebiet $G' = G \setminus A_0$, wobei $A_0 := A \setminus A_1$.

Beweis. Angenommen, A_1 wäre nicht endlich. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

a) A_1 ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $z_j \in A_1$ mit $\lim |z_j| = \infty$, also $n(\gamma, z_j) = 0$ für alle $j \geq j_0$. Widerspruch!

b) A_1 ist beschränkt. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $z_j \in A_1$ mit $\lim z_j = z_0 \in \mathbb{C}$. Da $A_1 \subset A$ diskret ist, folgt $z_0 \notin G$. Wegen $\gamma \sim_G 0$ ist $n(\gamma, z_0) = 0$; andererseits ist $n(\gamma, z_j) \neq 0$ für alle j . Widerspruch!

Die letzte Bemerkung ist trivial nachvollziehbar mit der Definition der Nullhomologie. \square

Satz 13.5 (Residuensatz) Es sei G ein Gebiet, und f sei in G holomorph mit Ausnahme von isolierten Singularitäten. γ sei ein nullhomologer geschlossener Weg (oder Kette) in G , auf dessen (deren) Spur keine Singularitäten von f liegen. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in G} n(\gamma, z_0) \text{res}_{z_0} f.$$

Beweis. Es sei $A := \{z_0 \in G : f \text{ hat in } z_0 \text{ eine isolierte Singularität}\}$. Nach Voraussetzung ist A diskret in G . Wir setzen wieder wie in den obigen Vorbereitungen

$$A_1 := \{z_0 \in A : n(\gamma, z_0) \neq 0\}$$

und wissen also, daß diese Menge endlich und γ nullhomolog in dem Gebiet $G \setminus A_0$, $A_0 := A \setminus A_1$ ist.

Die rechte Seite der behaupteten Formel ist dann gleich

$$\sum_{z_0 \in A_1} n(\gamma, z_0) \text{res}_{z_0} f,$$

und wir können (durch Übergang von G zu dem Gebiet $G \setminus A_0$) wieder annehmen, daß $A = A_1$ endlich ist. Setze $A = \{z_1, \dots, z_m\}$, und wähle

$$h_k = \text{Hauptteil von } f \text{ an der Stelle } z_k.$$

h_k ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$, und $f - \sum_{k=1}^m h_k$ hat in allen Punkten z_k hebbare Singularitäten. Es folgt nach der homologischen Fassung des Integralsatzes:

$$0 = \int_{\gamma} (f - \sum_k h_k) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_k \int_{\gamma} h_k(z) dz.$$

Mit

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(k)} \frac{1}{(z - z_k)^n}, \quad a_{-1}^{(k)} = \text{res}_{z_k} f$$

ergibt sich aber

$$\int_{\gamma} h_k(z) dz = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} dz = a_{-1}^{(k)} 2\pi i n(\gamma, z_k). \quad \square$$

Wir wollen zum Abschluß dieses Kapitels noch einmal eine genauere Formel für die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ im Inneren eines geschlossenen Weges $\gamma \subset G$ angeben (siehe auch *Grundzüge*, Kapitel 11).

Satz 13.6 $G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, und der geschlossene Weg (die Kette) γ sei homolog 0 in G . Ferner sei $f \neq 0$ eine holomorphe Funktion in G ohne Nullstellen auf der Spur von γ . Sei ferner $\text{ord}_{z_0} f$ die Nullstellenordnung von f in z_0 . Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in G} n(\gamma, z) \text{ord}_z f.$$

Bemerkung. Die Summe auf der rechten Seite ist endlich.

Beweis. $A := \{z \in G : \text{ord}_z f \neq 0\}$ ist die Menge der Nullstellen von f , die wegen des Identitätssatzes diskret in G liegt. Nach Voraussetzung gilt außerdem $A \cap \text{spur } \gamma = \emptyset$. Wir zerlegen wie in Hilfssatz 2 die Menge A in $A_0 \cup A_1$, so daß $\gamma \sim 0$ in $G' = G \setminus A_0$ ist. Dann ist die rechte Seite in Wahrheit gleich

$$\sum_{z \in A_1} n(\gamma, z) \text{ord}_z f.$$

Sei konkret $A_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$, $N_k = \text{ord}_{z_k} f$. Dann existiert eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit

$$f(z) = (z - a_1)^{N_1} \cdots (z - a_m)^{N_m} g(z),$$

und g hat keine Nullstellen in G' . Damit ist wegen des homologischen Integralsatzes

$$\int_{\gamma} \frac{g'}{g} dz = 0,$$

und die leicht zu beweisende Relation

$$\frac{f'}{f} = \frac{N_1}{z - a_1} + \cdots + \frac{N_m}{z - a_m} + \frac{g'}{g}$$

liefert die gewünschte Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n(\gamma, a_k) N_k. \quad \square$$

Ist c eine beliebige komplexe Zahl, so betrachte man $g(z) = f(z) - c$ anstelle von f , so daß die c -Stellen a_1, a_2, \dots von f mit den Nullstellen von g übereinstimmen. Dann bekommt man wie oben, wenn N_k die Ordnung der c -Stelle a_k bezeichnet:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = \sum_k^{\infty} n(\gamma, a_k) N_k.$$

Wir wollen am Ende dieses Kapitels den Satz über die Gebietstreue (open mapping theorem) beweisen.

Satz 13.7 Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, aber nicht konstant. Dann ist f eine offene Abbildung.

Wir folgern dies aus dem

Satz 13.8 Es sei $f \in \mathcal{O}(D_r(z_0))$, und f habe eine c -Stelle der Ordnung k in z_0 . Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für $|w - c| < \varepsilon$ die Gleichung $f(z) = w$ genau k einfache Lösungen in $D_{\delta}(z_0)$ besitzt.

Beweis (von Satz 7). Es sei $U \subset G$ offen, $z_0 \in U$, $c = f(z_0)$. Nach dem Identitätssatz hat f notwendig eine endliche c -Ordnung in z_0 . Wegen des oben stehenden Satzes ist dann in der entsprechenden Formulierung $D_\varepsilon(c) \subset f(D_\delta(z_0))$. Also ist $f(U)$ offen. \square

Beweis von Satz 8. Ohne Einschränkung sei $c = 0$ (gehe sonst über zu $g(z) = f(z) - c$). Mit dem Identitätssatz existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f(z) \neq 0, \quad f'(z) \neq 0, \quad 0 < |z - z_0| < 2\delta.$$

Setze nun

$$I(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\delta} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Die rechte Seite hängt stetig von w ab und ist lokal konstant, da ganzzahlig. Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $|w| < \varepsilon$ die Gleichung $I(w) = I(0) = k$ impliziert. Damit wird jeder Wert $0 < |w| < \varepsilon$ in $D_\delta(z_0)$ genau k -mal (mit Vielfachheit) angenommen. Da f' an diesen Stellen aber von Null verschieden ist, wird jeder Wert k -mal mit der Vielfachheit 1 angenommen. \square

Als *Folgerung* erhält man aus diesem Satz sofort noch einmal das *Maximumprinzip*. Ferner hat man z. B. das folgende

Beispiel. Gilt für eine holomorphe Funktion f die Beziehung $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv 0$ mit einem nichttrivialen reellen Polynom $P(x, y)$, so ist $f = \text{const}$.

Mit derselben Methode kann man auch einen weiteren Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion erhalten.

Satz 13.9 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei injektiv und holomorph. Dann ist das Bild $f(G) =: \Omega$ offen (und zusammenhängend) und $f^{-1} : \Omega \rightarrow G \subset \mathbb{C}$ ist holomorph mit $(f^{-1})'(w) = [f'(z)]^{-1}$, $w = f(z)$.

Beweis. Ω ist nach dem open mapping theorem offen, und f ist eine offene Abbildung, d. h. $g := f^{-1} : \Omega \rightarrow G$ ist stetig. Wegen der Injektivität von f und dem obigen Satz 8 muß jeder Wert an jeder Stelle mit der Vielfachheit $k = 1$ angenommen werden. Somit ist $f'(z_0) \neq 0$ für alle $z_0 \in G$ und

$$f(z) - f(z_0) = \Delta(z)(z - z_0), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \Delta(z) = f'(z_0) \neq 0.$$

Schreibe nun $z = g(w)$, so daß $f(z) = f(g(w)) = w$ und

$$w - w_0 = \Delta(g(w))(g(w) - g(w_0)).$$

Es folgt

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\Delta(g(w))} \xrightarrow{w \rightarrow w_0} \frac{1}{f'(z_0)}. \quad \square$$

14 Logarithmus und Umlaufzahl

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist holomorph und surjektiv. Also gibt es zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ mindestens einen Wert $w \in \mathbb{C}$ mit $\exp w = z$. w heißt dann (entsprechend zum Reellen) ein *Logarithmus* von z . Nun ist aber mit jedem w auch $w + 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$, ein Logarithmus von z , so daß im Komplexen die Exponentialfunktion \exp keine auf \mathbb{C}^* global definierte eindeutige Umkehrfunktion \log besitzt.

Frage: Kann man (zumindest auf Teilgebieten $G \subset \mathbb{C}^*$) die Exponentialfunktion eindeutig umkehren?

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine *stetige* Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp f(z) = z$ für alle $z \in G$ heißt ein *Zweig des Logarithmus* auf G .

Ein solcher Zweig f des Logarithmus ist notwendig holomorph, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 14.1 *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}^*$, ein Zweig des Logarithmus, so ist $f \in \mathcal{O}(G)$, und es gilt*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in G.$$

Je zwei Zweige unterscheiden sich additiv um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

Beweis. a) Das Bild $f(G)$ ist offen: Sei nämlich $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ und U eine Umgebung von w_0 . Da f und \exp stetige Funktionen sind, existiert eine Umgebung $V = V(z_0) \subset G$ mit $f(V) \subset U$ und eine Umgebung $W = W(w_0)$ mit $\exp(W) \subset V$. Wählen wir U von vornherein so klein, daß $\exp|_U$ injektiv ist, so gilt für alle $w \in W$: $\exp(f(e^w)) = e^w = \exp w$, d. h. $w = f(e^w) \in f(G)$, also $W \subset f(G)$.

b) $f : G \rightarrow f(G)$ ist somit eine Umkehrfunktion zu $\exp : f(G) \rightarrow G$. Nach Sätzen der reellen Analysis ist f notwendig stetig differenzierbar, und es gilt

$$0 = \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial e^{f(z)}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial e^w}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial e^w}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = e^{f(z)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Wegen $e^w \neq 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$ ergibt sich $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, also die Holomorphie von f . Ebenso folgt mit $1 = \partial z / \partial z = e^w f'(z)$ die gewünschte Beziehung

$$f'(z) = \frac{1}{e^{f(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Die letzte Behauptung ist trivialerweise richtig. □

Wir wollen als nächstes zeigen, daß die *Existenz* von Zweigen des Logarithmus nur davon abhängt, wie das Gebiet G *topologisch* beschaffen ist.

Satz 14.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) *Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.*
- ii) *Auf G existiert ein Zweig des Argumentes.*
- iii) *Die Funktion $1/z$ besitzt eine Stammfunktion auf G .*
- iv) *Für jeden Zyklus Γ in G ist $n(\Gamma, 0) = 0$ (d. h. kein Zyklus in G „enthält 0 im Inneren“).*

Beweis. i) \implies ii): $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei ein Zweig des Logarithmus. Dann gilt $f = g + ih$ mit stetigen Funktionen $g, h : G \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen $z = e^{f(z)} = e^{g(z)} e^{ih(z)}$ ist $\arg z =: h(z)$ eine *stetige* Argumentfunktion auf G .

ii) \implies i): Sei $\arg : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Argumentfunktion. Definiere dann

$$f(z) := \log |z| + i \arg z.$$

f ist offensichtlich eine stetige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

i) \iff iii): Eine Richtung wurde in Satz 1 schon bewiesen. Sei umgekehrt g eine Stammfunktion von $1/z$. Dann folgt

$$(z e^{-g(z)})' = (1 - z g'(z)) e^{-g(z)} = 0,$$

so daß $z e^{-g(z)} = \text{const} (\neq 0)$. Setzt man die Konstante gleich e^c , so wird durch $f(z) = g(z) + c$ wegen $e^{f(z)} = z$ ein Zweig des Logarithmus definiert.

iii) \iff iv): $n(\Gamma, 0) = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{z} = 0$$

für alle Zyklen Γ in G , und dies wiederum ist äquivalent dazu, daß die Funktion $1/z$ eine Stammfunktion auf G besitzt. \square

Bemerkungen. 1. Wenn wir im folgenden ein Symbol $\log z$ benutzen, so meinen wir stets einen *fest gewählten Zweig* des Logarithmus auf einem vorgegebenen Gebiet G mit den obigen Eigenschaften.

2. Ist G wie in Satz 2 vorgegeben, so wird jeder Zweig der Logarithmusfunktion auf G gegeben durch

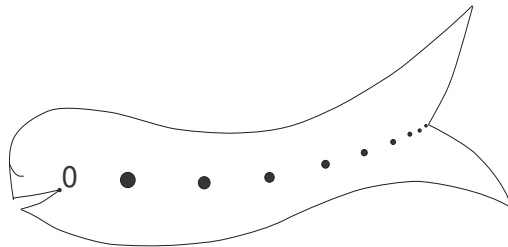
$$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \log a,$$

wobei $a \in G$ fest ist, γ_z einen beliebigen Weg in G von a nach z und $\log a$ einen der möglichen Logarithmuswerte von a bezeichnet.

3. Auf \mathbb{C}^* existiert kein Zweig des Logarithmus, da $n(\partial D_r, 0) = 1$ für jeden Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r gilt.

4. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt (*homologisch*) *einfach zusammenhängend*, falls die 1. Homologiegruppe $H_1(G, \mathbb{Z})$ verschwindet. Diese Bedingung ist wegen des Cauchyschen Integralsatzes in seiner homologischen Fassung gleichbedeutend damit, daß jeder Zyklus Γ in G nullhomolog ist. Anschaulich bedeutet dies, daß das Gebiet G keine „Löcher“ besitzt (siehe auch die Bemerkungen am Ende dieses Kapitels). Für einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{C}^*$ ist aufgrund unserer Definition der Homologiegruppe die obige Bedingung iv) erfüllt, und damit existieren für solche Gebiete immer Zweige $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ der Logarithmusfunktion.

5. Existenzgebiete $G \subset \mathbb{C}^*$ von Zweigen des Logarithmus brauchen jedoch nicht einfach zusammenhängend zu sein, die Löcher von G dürfen nur nicht 0 enthalten.



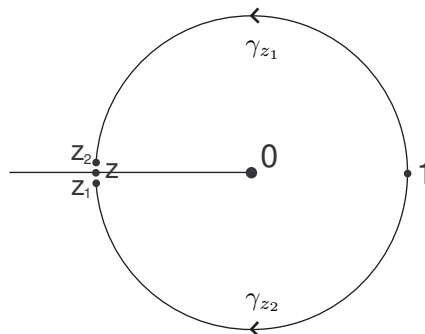
Figur 14.1

Ein größtmögliches Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ mit den obigen Eigenschaften ist die „längs der negativen reellen Achse geschnittene Ebene“:



Figur 14.2

Wählt man speziell dort den Zweig \log des Logarithmus mit $\log 1 = 0$, so bezeichnet man diesen häufig auch als den *Hauptzweig* und schreibt Log . Es gilt offensichtlich $\text{Log } x = \log x$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Der Hauptzweig setzt also den reellen Logarithmus ins Komplexe fort. Dies Gebiet läßt sich nicht vergrößern (denn sonst würden Zyklen mit 0 im Innern entstehen). Was passiert für diesen Zweig bei Annäherung der negativen reellen Achse von oben und unten?

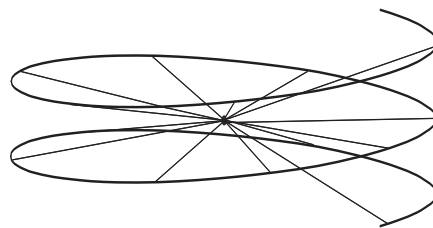


Figur 14.3

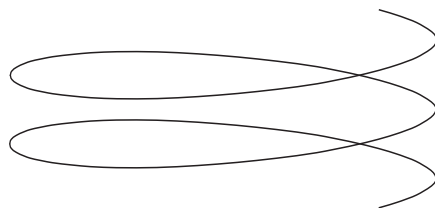
Es ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow z} \log z_1 - \lim_{z_2 \rightarrow z} \log z_2 &= \lim_{z_1 \rightarrow z} \int_{\gamma_{z_1}} \frac{d\zeta}{\zeta} - \lim_{z_2 \rightarrow z} \int_{\gamma_{z_2}} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \int_{-\gamma_{z_2} + \gamma_{z_1}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\partial D_{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i. \end{aligned}$$

D. h.: Jeder Zweig des Logarithmus springt bei Überqueren der „Grenze“ um den Wert $2\pi i$ (Nicht-eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung). Um den Logarithmus zu einer eindeutigen Funktion zu machen, muß man die Beschränkung auf Gebiete in \mathbb{C}^* aufgeben und ein neues abstraktes Gebilde konstruieren, das *über* \mathbb{C}^* ausgebreitet ist: Die sogenannte *Riemannsche Fläche* des Logarithmus, auf der der Logarithmus eindeutig und holomorph ist. Sie bildet eine „unendliche Wendeltreppe“, die man durch geeignete sukzessive Verklebung von abzählbar unendlich vielen Exemplaren des Existenzgebietes des Hauptzweiges erhält.



Figur 14.4



Figur 14.5

Wir beantworten schließlich folgende Frage: Existiert zu einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ ein Zweig des Logarithmus $\log f$, d. h. eine (stetige) Funktion g mit $\exp g = f$? Notwendig hierzu ist offensichtlich $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dies ist auch hinreichend für einfach zusammenhängende Gebiete.

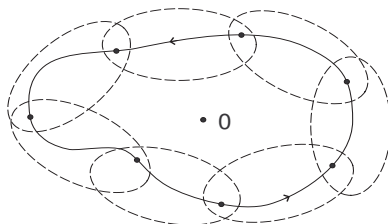
Satz 14.3 *Es sei G einfach zusammenhängend in \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(G)$ habe keine Nullstellen. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$.*

Beweis. Hat $f \in \mathcal{O}(G)$ keine Nullstellen, so ist f'/f auf G wohldefiniert und holomorph. Da G nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, besitzt f'/f eine (holomorphe) Stammfunktion h . Wie im Beweis von Satz 2 schließt man

$$(f e^{-h})' = e^{-h} (f' - f h') = e^{-h} \left(f' - f \frac{f'}{f} \right) = 0$$

und damit $0 \neq f e^{-h} = \text{const} = e^c$. Folglich ist $g := h + c$ eine Lösung. \square

Als Anwendung der bisherigen Überlegungen zeigen wir, daß für geschlossene Wege γ die Definition der *Umlaufzahl* mit der Anschauung übereinstimmt. Sei dazu ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ eine Parametrisierung. Wir können dann eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und einfach zusammenhängende Gebiete $G_j \subset \mathbb{C}^*$ finden, so daß mit $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ die Spuren $\text{spur } \gamma_j$ in G_j enthalten sind.



Figur 14.6

Wir wählen nun induktiv Zweige des Logarithmus auf G_j :

$$f_j(z) = \log |z| + i \varphi_j(z),$$

wobei der Zweig φ_1 des Arguments auf G_1 beliebig sein darf. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ schon bestimmt, so wähle man φ_{j+1} so, daß $\varphi_{j+1}(z_j) = \varphi_j(z_j)$, wobei $z_j = \gamma(t_j)$. Dann ist die Funktion

$$\varphi: \begin{cases} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \varphi_j(\gamma(t)), \quad t \in I_j = [t_{j-1}, t_j] \end{cases}$$

stetig auf $[a, b]$ und ordnet jedem $t \in [a, b]$ ein Argument von $\gamma(t)$ zu. Es folgt

$$\begin{aligned} 2\pi i n(\gamma, 0) &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z} \\ &= \sum_j ((\log |z_j| - \log |z_{j-1}|) + i(\varphi_j(z_j) - \varphi_j(z_{j-1}))) \\ &= i(\varphi_n(z_n) - \varphi_1(z_0)) = i(\varphi(b) - \varphi(a)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

d. h. die Umlaufzahl ist gleich

$$n(\gamma, 0) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$$

und damit insbesondere ganzzahlig! □

Da Zyklen ganzzahlige Linearkombinationen geschlossener Wege sind, bleibt die letzte Aussage auch für diese richtig. Wir fügen trotzdem noch einen weiteren Beweis an.

Satz 14.4 Für alle Zyklen Γ und alle $z \notin \text{spur } \Gamma$ gilt $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir können annehmen, daß in der Darstellung $\Gamma = \sum n_k \gamma_k$ alle geschlossenen Wege γ_k über dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ parametrisiert sind (ansonsten parametrisiere man geeignet um). Definiere dann

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k n_k \int_0^t \frac{\gamma'_k(s)}{\gamma_k(s) - z} ds,$$

so daß $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\Gamma, z)$. Da h stückweise stetig differenzierbar ist, so ist auch

$$g(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_k (\gamma_k(t) - z)^{n_k}$$

stückweise differenzierbar, und es gilt

$$g'(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_k (\gamma_k(t) - z)^{n_k} \left[-2\pi i h'(t) + \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda} \gamma'_{\lambda}(t)}{\gamma_{\lambda}(t) - z} \right] = 0.$$

Also ist, da g stetig ist, g konstant auf I . Es folgt

$$(*) \quad \prod_k (\gamma_k(t) - z)^{n_k} = c e^{-2\pi i h(t)},$$

wobei $c \neq 0$ ist, da die linke Seite nicht verschwindet.

Ist nun w ein Punkt, der als Anfangs- oder Endpunkt eines Weges γ_k auftritt, so gilt wegen $\partial\Gamma = 0$ die Relation

$$\sum_{w=\gamma_{\kappa}(0)} n_{\kappa} = \sum_{w=\gamma_{\lambda}(1)} n_{\lambda}.$$

Also kommt der Faktor $w - z$ in den beiden Produkten

$$\prod_k (\gamma_k(0) - z)^{n_k} \quad \text{und} \quad \prod_k (\gamma_k(1) - z)^{n_k}$$

gleich oft vor, so daß schließlich wegen $(*)$ und $c \neq 0$

$$e^{-2\pi i h(1)} = e^{-2\pi i h(0)} = e^0 = 1 \quad \text{und damit} \quad h(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{folgt.} \quad \square$$

Wir machen noch einige Bemerkungen zu den *Potenzfunktionen*. Ist $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, so setzt man

$$a^b := e^{b \log a}$$

mit irgendeinem der Werte $\log a$. Man beachte jedoch, daß i. a. der Ausdruck a^b abzählbar unendlich viele Zahlen repräsentiert! Ist aber speziell $b \in \mathbb{Z}$, so folgt aus $e^{b(\log a + 2\pi i j)} = e^{b \log a} e^{2\pi i b j}$, daß a^b nur einen Wert, nämlich die übliche Potenz, annimmt. Ist dagegen z. B. $b = 1/n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\log a$ fixiert, so gibt es genau n Werte für $a^{1/n}$, nämlich:

$$e^{(1/n) \log a}, e^{(1/n)(\log a + 2\pi i)}, \dots, e^{(1/n)(\log a + 2\pi(n-1)i)},$$

oder

$$\zeta_j e^{(1/n) \log a}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

mit den n -ten *Einheitswurzeln*

$$\zeta_j = e^{2j\pi i/n}.$$

Offensichtlich sind dies die n -ten Wurzeln von a .

Besitzt der Logarithmus auf G einen Zweig, so ist die Funktion

$$z^b := e^{b \log z}$$

wohldefiniert und heißt ein Zweig der b -ten Potenz auf G . I. a. existieren abzählbar unendlich viele Zweige. Es gilt

$$(z^b)' = b \frac{1}{z} e^{b \log z} = b e^{b \log z} e^{-\log z} = b e^{(b-1) \log z}$$

und damit

$$(z^b)' = b z^{b-1}$$

(wobei aber zur Definition der Potenzfunktionen auf beiden Seiten derselbe Zweig des Logarithmus zu verwenden ist!)

Umgekehrt wird für $a \neq 0$ durch

$$a^z := e^{z \log a}$$

bei Auswahl eines Wertes $\log a$ eine holomorphe Funktion erklärt. I. a. gibt es wieder derer abzählbar unendlich viele. Für die Ableitung gilt

$$(a^z)' = (\log a) \cdot e^{z \log a} = (\log a) a^z,$$

wobei auf der rechten Seite derselbe Wert des Logarithmus zu wählen ist, mit dem die Funktion a^z definiert wurde. Ist speziell $a = e$ und $\log e = 1$, so ist e^z tatsächlich die übliche Exponentialfunktion. Allerdings sollte man nicht vergessen, daß das Symbol e^z im Prinzip nach der obigen Definition unendlich viele andere Bedeutungen hat!

Zum *Hauptzweig* der b -ten Potenz erklären wir den Zweig auf der üblichen „Schlitzung“ der Ebene wie beim Hauptzweig des Logarithmus; dieser liefert bei Einschränkung auf die positive reelle Achse bei reellem b die gewöhnliche Potenzfunktion. Für die Taylorreihe erhalten wir in diesem Fall (um $z_0 = 0$):

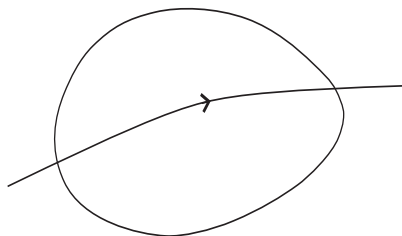
$$(1+z)^b = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{b}{j} z^j$$

mit den verallgemeinerten *Binomial-Koeffizienten*

$$\binom{b}{j} := \frac{b(b-1) \cdot \dots \cdot (b-j+1)}{j!}.$$

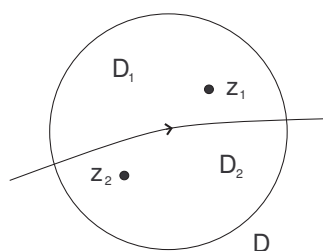
Zu den Umkehrfunktionen der *trigonometrischen Funktionen (Arcus-Funktionen)* siehe die Standardliteratur (z. B. FISCHER - LIEB).

Zum Abschluß dieses Paragraphen fügen wir noch einige *topologische* Bemerkungen zu Umlaufzahlen und einfachem Zusammenhang an. Beweise der Aussagen findet man bei FISCHER–LIEB IV, Paragraph 3. Anschaulich ist klar, wann ein Weg γ in einem Gebiet G (ohne Überschneidung) von Rand zu Rand läuft:



Figur 14.7

Bei einer Kreisscheibe zerlegt ein solcher Weg diese in zwei Teilgebiete D_1 und D_2 , wobei D_1 links von dem (orientierten) Weg liegen möge.



Figur 14.8

Man beweist dann leicht den folgenden

Satz 14.5 *Es sei γ ein geschlossener Weg in \mathbb{C} , von dem ein Teilstück in einem Kreis von Rand zu Rand verläuft. Dann gilt für $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$:*

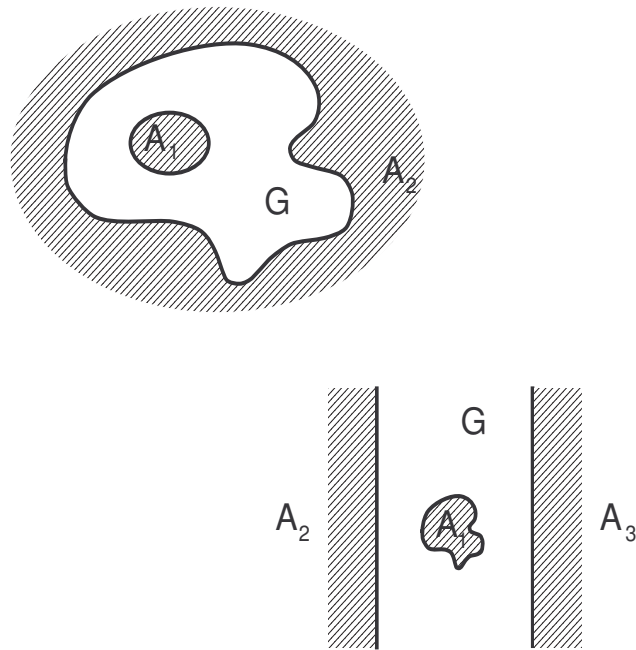
$$n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1.$$

Dieser Satz eröffnet in vielen Fällen die Möglichkeit, beginnend bei der unbeschränkten Komponente (mit der Umlaufzahl 0) die Umlaufzahlen aus dem Bild abzulesen.

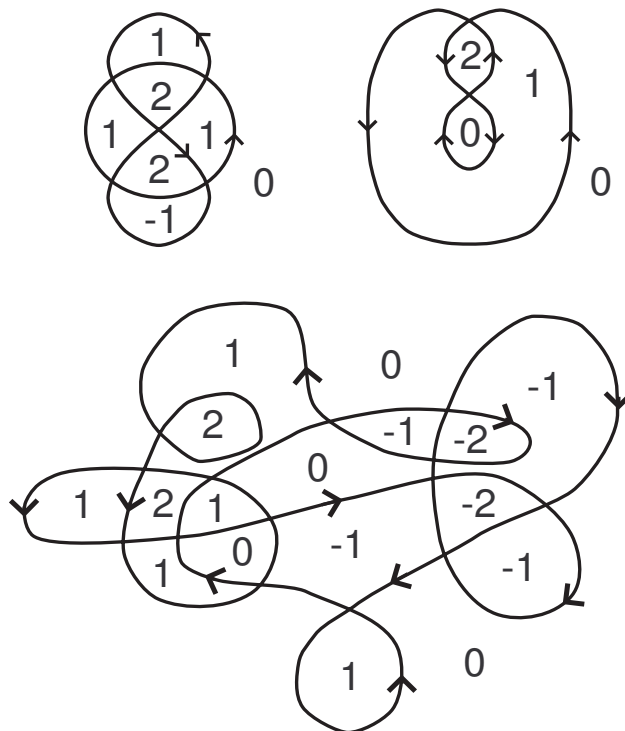
Konvexe und allgemeiner sternförmige Gebiete sind (homologisch) einfach zusammenhängend. Der folgende Satz (FISCHER–LIEB) präzisiert die Vorstellung, daß in solchen Gebieten keine Löcher enthalten sind.

Satz 14.6 *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn keine der (abgeschlossenen) Zusammenhangskomponenten des Komplementes $\mathbb{C} \setminus G$ kompakt ist.*

(Siehe hierzu auch Kapitel 15, insbesondere Folgerung 15.11). Die folgenden Figuren illustrieren den obigen Satz und zeigen an Beispielen, wie man mit Satz 5 (ausgehend von der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{spur } \Gamma$) iterativ die Umlaufzahlen berechnen kann.



Figur 14.9



Figur 14.10

15 Cauchyscher Integralsatz - Homotopieversion

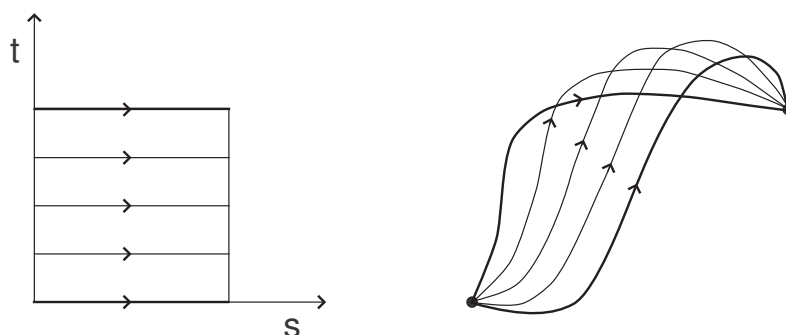
Eine weitere intuitive Vorstellung davon, daß ein Gebiet G keine Löcher enthält, wird bildhaft dadurch beschrieben, daß sich jeder geschlossene Weg γ in G innerhalb dieses Gebietes stetig zu einem Punkt zusammenziehen läßt. Die strenge Formulierung führt zu dem Begriff der *Homotopie*.

Definition. Es sei G ein Gebiet, und γ_0, γ_1 seien zwei Wege in G mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, beide parametrisiert durch dasselbe Intervall $I = [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\gamma_0(0) &= \gamma_1(0) \\ \gamma_0(1) &= \gamma_1(1).\end{aligned}$$

γ_0 heißt *homotop* zu γ_1 in G (i. Z. $\gamma_0 \simeq_G \gamma_1$), falls eine stetige Abbildung $H : I \times I \rightarrow G$ existiert mit

$$\begin{array}{l|l} H(s, 0) = \gamma_0(s) & H(0, t) = H(0, 0) = H(0, 1) \\ H(s, 1) = \gamma_1(s) & H(1, t) = H(1, 0) = H(1, 1). \end{array}$$



Figur 15.1

Wir fassen eine solche *Homotopie* H auf als eine *stetige Schar* oder *Familie von Wegen* zwischen γ_0 und γ_1 . Es sei bemerkt, daß $\gamma_t(s) := H(s, t)$ bei festem t einen *stetigen* Weg beschreibt. Wir setzen aber nicht voraus, daß diese Wege (außer für $t = 0, 1$) „gut“ (im Sinne von *stückweise stetig differenzierbar* oder ähnlichem) sind.

Satz 15.1 *Homotopie (bei festen Endpunkten) ist eine Äquivalenzrelation von Wegen (insbesondere unabhängig von Parametrisierungen).*

Der *Beweis* bietet keine besonderen Schwierigkeiten. □

Der entscheidende funktionentheoretische Satz in diesem Zusammenhang ist

Satz 15.2 *Gilt $\gamma_0 \simeq_G \gamma_1$ und ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so ist*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz .$$

Der Beweis ist technisch etwas aufwendig, im Grunde aber leicht einsehbar. Er wird am Ende dieses Abschnitts bewiesen. (Ich gebe gleich in einer spezielleren Situation einen Beweis mit Hilfe des Satzes von Stokes).

Die Homotopie-Definition macht natürlich auch Sinn für geschlossene Wege (mit gleichen Anfangs- und Endpunkten z_0):

Satz 15.3 (Cauchyscher Integralsatz - Homotopie-Version) γ sei ein geschlossener Weg in G mit Anfangspunkt z_0 , der zu dem konstanten Weg $[z_0]$ in G homotop sei. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ der Cauchysche Integralsatz :

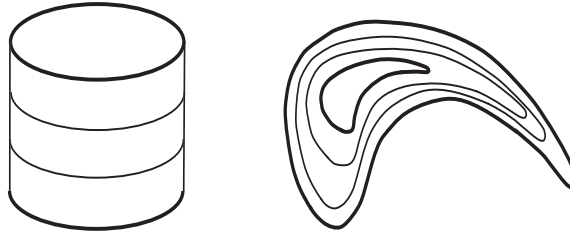
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Denn nach Satz 2 ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[z_0]} f(z) dz = 0 . \quad \square$$

An Satz 3 ist noch unschön, daß z_0 als Anfangs- und Endpunkt fest gewählt werden muß. Dies ist natürlich ein Relikt der Parametrisierung; i. a. hat jedoch ein geschlossener Weg keinen ausgezeichneten Anfangspunkt. Man sollte daher, wie früher schon betont, geschlossene Wege besser durch die 1-Sphäre S^1 parametrisieren:

Definition. Die geschlossenen Wege γ_0 und γ_1 heißen *frei homotop* in G , falls es eine stetige Abbildung $H : S^1 \times I \rightarrow G$, $I = [0, 1]$, gibt mit $H(s, 0) = \gamma_0(s)$, $H(s, 1) = \gamma_1(s)$. Hierdurch wird selbstverständlich wieder eine Äquivalenzrelation erklärt.



Figur 15.2

Satz 15.4 Die geschlossenen Wege γ_0 und γ_1 seien in G frei homotop zueinander. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz , \quad f \in \mathcal{O}(G) .$$

Ich gebe hierfür einen *Beweis* an dieser Stelle unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Homotopie H Einschränkung einer *differenzierbaren* Abbildung auf einer Umgebung des glatt berandeten Kompaktums $A := S^1 \times I$ in der Untermannigfaltigkeit $M := S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ist. Betrachte in diesem Fall die 1-Form $\alpha = f(z) dz$ auf G . Es gilt

$$d\alpha = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$$

und damit auch $dH^*\alpha = H^*d\alpha = 0$. Der Satz von Stokes auf M liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A H^*d\alpha = \int_A dH^*\alpha = \int_{\partial A} H^*\alpha = \int_{S^1 \times \{1\}} H^*\alpha - \int_{S^1 \times \{0\}} H^*\alpha \\ &= \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz , \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Satz 4 kann man allgemein wie Satz 2 beweisen (und dann Satz 2 ableiten; siehe z. B. CONWAY), man kann aber auch Satz 4 aus Satz 2 ableiten: Wähle $s_0 \in S^1$ (künstlich) fest. Dies versieht die Wege $\gamma_t(s) = H(s, t)$ mit (stetig) variierenden Anfangspunkten $\gamma_t(s_0) =: \alpha(t)$. Man kann nun mit $z_0 = \gamma_0(s_0)$ leicht zeigen (falls α „gut“ ist): $[z_0]^{-1} \circ \gamma_0 \circ [z_0]$ ist homotop zu $\alpha^{-1} \circ \gamma_1 \circ \alpha$ bei festem Anfangspunkt z_0 . Also ist nach Satz 2

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{[z_0]^{-1} \circ \gamma_0 \circ [z_0]} f(z) dz = \int_{\alpha^{-1} \circ \gamma_1 \circ \alpha} f(z) dz \\ &= \int_{\alpha^{-1}} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz, \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. \square

Wir lassen ein paar Bemerkungen zum Begriff der *Fundamentalgruppe* eines Gebietes G folgen: Es sei $z_0 \in G$ ein fest gewählter Punkt, und $L(G, z_0)$ bezeichne die Menge aller geschlossenen Wege in G mit Anfangs- und Endpunkt z_0 (das Symbol L steht hier für „loop“). Diese Menge bildet bzgl. der Hintereinanderausführung von Wegen eine algebraische Struktur, die fast wie eine Gruppe mit neutralem Element $[z_0]$ und Orientierungsumkehr als Inversenbildung anmutet. In der Tat wird diese Vermutung korrekt, wenn man *bis auf Homotopie* argumentiert. Wir schreiben \simeq_{G, z_0} für Homotopie von loops in $L(G, z_0)$ bei festem Anfangs- und Endpunkt z_0 . Dies ist eine weitere Äquivalenzrelation, die mit der Verknüpfung von loops verträglich ist. Man setzt dann

$$\pi(G, z_0) := L(G, z_0) / \simeq_{G, z_0}$$

und beweist leicht, daß es sich hierbei um eine (i. a. nicht abelsche) Gruppe handelt. Die Klasse des konstanten Weges $[z_0]$ ist hierin tatsächlich das neutrale Element, und die Klasse von α hat die Klasse von α^{-1} zum Inversen.

Definition. Die Gruppe $\pi(G, z_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* oder die *erste Homotopiegruppe* von G bzgl. des Aufpunktes z_0 .

In Wahrheit hängt diese Gruppe nur unwesentlich von dem ausgezeichneten Punkt z_0 ab. Ist nämlich z_1 ein anderer Punkt und α ein z_0 mit z_1 in G verbindender Weg, so liefert

$$\begin{cases} L(G, z_0) & \longrightarrow & L(G, z_1) \\ \gamma & \longmapsto & \alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1} \end{cases}$$

einen Isomorphismus

$$\pi(G, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi(G, z_1).$$

Man spricht deshalb auch einfach von „der“ Fundamentalgruppe von G , i. Z. $\pi(G)$.¹²

Wegen $\gamma_0 \simeq_{G, z_0} \gamma_1 \iff \gamma_0 \gamma_1^{-1} \simeq_{G, z_0} [z_0]$ impliziert Satz 3 unmittelbar, daß das Integral auch als Abbildung

$$\int : \pi(G) \times \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

aufgefaßt werden kann.

Um den Zusammenhang zwischen *Homotopie* und *Homologie* etwas genauer erläutern zu können, machen wir uns zuerst klar, daß wir bei jedem 1-Zyklus $\Gamma = \sum n_k \gamma_k$ in G mit geschlossenen Wegen γ_k ohne Einschränkung jedes γ_k an einem festen Punkt z_0 beginnen lassen können (denn γ und $\alpha \gamma \alpha^{-1}$ sind stets *homolog* in G). Also hat man eine surjektive Abbildung (siehe die Bemerkung im Anschluß an Satz 13.4)

$$L(G, z_0) \longrightarrow \{1\text{-Zyklen in } G\} / \sim_G = H_1(G, \mathbb{Z}),$$

¹²Man kann viel allgemeiner für *topologische Räume* X , die wegweise zusammenhängend sind, die Fundamentalgruppe erklären.

die mit den Verknüpfungen verträglich ist. - Man hat nun mit Satz 2:

Satz 15.5 Aus $\gamma \simeq_{G, z_0} [z_0]$ folgt $\gamma \sim_G 0$.

Beweis. Wegen Satz 2 gilt für alle $z \notin G$:

$$2\pi i n(\gamma, z) = \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{[z_0]} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad \square$$

Folgerung 15.6 Es gibt einen natürlichen Gruppenepimorphismus

$$\pi(G, z_0) \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}).$$

Man beweist in der *Algebraischen Topologie* sogar die folgende Aussage:

Satz 15.7 Die erste Homologie-Gruppe $H_1(G, \mathbb{Z})$ ist die abelsch gemachte Fundamentalgruppe, d. h.

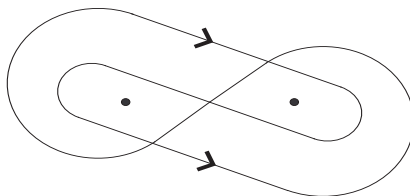
$$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong \pi(G) / \text{Kommutator - Untergruppe}.$$

Beispiele. 1. Für $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ berechnet man sehr einfach die Fundamentalgruppe zu

$$\pi(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}.$$

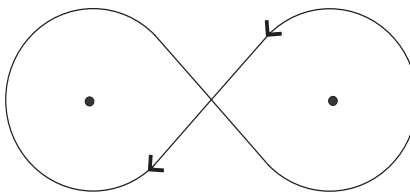
Die Isomorphie wird hergestellt durch Zuordnung der Umlaufzahl um 0 zu gegebenem Repräsentanten einer Homotopieklasse. Insbesondere ist der Epimorphismus $\pi(G) \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z})$ in diesem Beispiel ein Isomorphismus.

2. Für $\mathbb{C}^{**} := \mathbb{C} \setminus \{ \text{zwei Punkte} \}$ ist die Fundamentalgruppe nicht kommutativ! Man betrachte dazu den folgenden Weg γ , der „offensichtlich“ in \mathbb{C}^{**} nicht homotop zum konstanten Weg ist:



Figur 15.3

Dieser ist aber homotop zu $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}$, wobei die beiden Wege γ_1 und γ_2 in der folgenden Zeichnung eingezeichnet sind.



Figur 15.4

Somit ist $\gamma_1 \gamma_2$ nicht homotop zu $\gamma_2 \gamma_1$!

Bemerkung. Die Homotopiegruppe von \mathbb{C}^{**} ist die gleiche wie die der „Acht“ oder des Zeichens „Unendlich“, also des topologischen Raumes, der aus der Vereinigung zweier Kreisränder S^1 mit einpunktigem Durchschnitt besteht. Sie ist isomorph zu dem *freien Produkt* von $\pi(S^1)$, also von \mathbb{Z} , mit sich selbst, in Zeichen: $\pi(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Noch wesentlich allgemeiner zeigt man:

Ist der topologische Raum X ein CW-Komplex und als solcher Vereinigung zweier wegweise zusammenhängender Räume X_1 und X_2 und ist schließlich $X_1 \cap X_2$ einfach zusammenhängend (zur Definition dieses Begriffes siehe weiter unten), so ist

$$\pi(X_1 \cup X_2) = \pi(X_1) * \pi(X_2).$$

Hierbei bezeichnet $G * H$ das *freie Produkt* zweier Gruppen G und H , das formal aus allen endlichen Produkten der Form $g_1, h_1, g_1 h_1, h_1 g_1, g_2 h_1 g_1, h_2 g_1 h_1, \dots$ mit $g_j \in G, h_j \in H$ besteht.

Definition. Wir sagen kurz: Der geschlossene Weg γ in G ist *homotop Null* oder *nullhomotop* in G , in Zeichen $\gamma \simeq_G 0$, falls seine Homotopie-Klasse $[\gamma]$ trivial in $\pi(G)$ ist, d. h. wenn γ frei homotop zu dem konstanten Weg $[z_0]$ ist (z_0 beliebig).

Satz 15.8 (Cauchyscher Integralsatz; Homotopie - Version) *Es sei f eine holomorphe Funktion auf G und $\gamma \simeq_G 0$. Dann gilt*

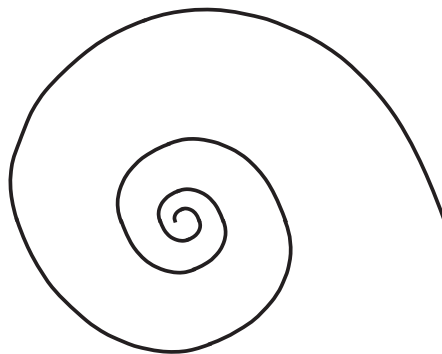
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Definition. Das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene Weg γ in G nullhomotop ist.

Beispiel. Jedes konvexe und allgemeiner jedes sternförmige Gebiet ist in diesem Sinne einfach zusammenhängend. Man braucht nur einen beliebigen geschlossenen Weg längs der *Sternstrahlen* auf den *Sternmittelpunkt* zusammenzuziehen. Aber auch das Komplement

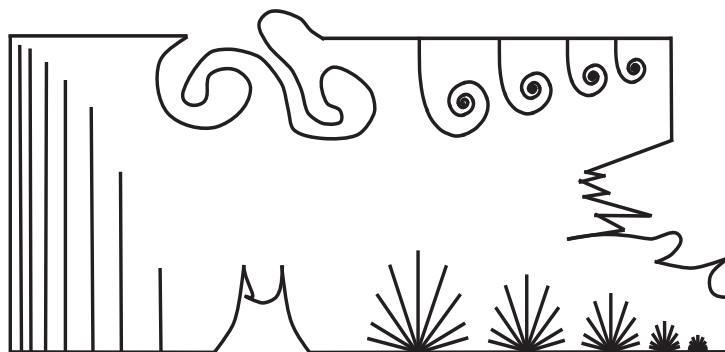
$$G = \mathbb{C} \setminus \{\theta e^{i\theta} : 0 \leq \theta < \infty\}$$

einer Spirale hat diese Eigenschaft!



Figur 15.5

Noch abenteuerlicher mutet wahrscheinlich das folgende Beispiel an:



Figur 15.6

Eine direkte Folgerung aus Satz 4 ist der

Satz 15.9 *Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$, G ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für alle geschlossenen Wege γ in G .

Um diese Fassung des Cauchyschen Integralsatzes leicht anwenden zu können, benötigt man handliche, geometrisch einsichtige Kriterien dafür, wann ein Gebiet im Komplexen einfach zusammenhängend ist. Man kann folgendes zeigen (siehe FISCHER-LIEB):

Satz 15.10 *Das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn sein Komplement in der erweiterten Ebene $\overline{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist.*

(Zum Begriff der erweiterten Ebene siehe Kapitel 18).

Mit diesem Satz erschlägt man offensichtlich das obige Beispiel des Spiralenkomplementes. - Eine unmittelbare Konsequenz dieser Aussage ist die

Folgerung 15.11 *Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus G$ zusammenhängend ist.*

Beispiel. Für $G = \mathbb{C}^*$ ist $\mathbb{C} \setminus G = \{0\}$ zusammenhängend, aber $\overline{\mathbb{C}} \setminus G = \{0, \infty\}$ nicht. Also ist G nicht einfach zusammenhängend. Man kann dies übrigens auch durch Ausrechnen der Fundamentalgruppe erhalten, die sich zu

$$\pi(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$$

ergibt. Die Isomorphie wird hergestellt durch Zuordnung der Umlaufzahl um 0 zu gegebenem Repräsentanten einer Homotopieklasse.

Wegen Satz 2 ist jeder nullhomotope Weg auch homolog 0. Folglich ist jedes einfach zusammenhängende Gebiet in \mathbb{C} auch homologisch einfach zusammenhängend. In der Tat sind aber beide Begriffe gleich. Dies folgt aus einem tiefliegenden Resultat der Funktionentheorie, nämlich aus dem *Riemannschen Abbildungssatz*, den wir in Kapitel 22 formulieren und beweisen werden. - Wir stellen hier schon das finale Ergebnis zusammen und beweisen, was uns im gegenwärtigen Augenblick möglich ist.

Satz 15.12 *Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

1. G ist einfach zusammenhängend.
2. G ist homologisch einfach zusammenhängend.
3. Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.
4. Jede harmonische Funktion auf G ist Realteil einer holomorphen Funktion.
5. Jede nirgends verschwindende holomorphe Funktion auf G besitzt einen Zweig des Logarithmus.
6. Jede nirgends verschwindende holomorphe Funktion auf G besitzt einen Zweig der Quadratwurzel.
7. G ist ganz \mathbb{C} oder biholomorph äquivalent zu dem Einheitskreis.

Beweis. Es ist klar, daß 7. die Aussage 1. impliziert. Ferner wissen wir schon $1. \implies 2. \implies 3.$

Zu $3. \implies 4.$: Ist die Funktion g harmonisch auf G , so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Holomorphie von $f := g_x - i g_y$. Es sei $F = u + i v$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt erneut mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$u_x + i v_x = v_y - i u_y = F' = f = g_x - i g_y,$$

also $g_x = u_x$, $g_y = u_y$ und damit bei geeigneter reeller Konstante c :

$$g = u + c = \operatorname{Re}(F + c).$$

Zu $4. \implies 2.$: Es sei $z_0 \notin G$, ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Dann ist $g(z) = \log |z|$ eine harmonische Funktion auf G . Man rechnet sofort nach, daß jede holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = g$ eine Stammfunktion von $1/z$ sein muß. Dann ist aber für jeden geschlossenen Weg γ in G :

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0;$$

mit anderen Worten: $z_0 = 0 \notin I(\gamma)$.

Zu $5. \implies 6.$: Ist h ein Logarithmus zu f , d. h. $f = \exp h$, so ist $g := \exp \frac{1}{2} h$ holomorph auf G mit $g^2 = f$.

Zu $6. \implies 7.$: Dies wird erst im Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes gezeigt. \square

Es fehlt noch der *Beweis* von Satz 2. Eine Schwierigkeit besteht darin, daß die *Zwischenkurven*

$$H(s, t_0), \quad t_0 \text{ fest}, \quad s \in I$$

(und auch $H(s_0, t)$, s_0 fest, $t \in I$) für die gegebene Homotopie H nur stetig sind, nicht aber unbedingt stückweise stetig differenzierbar, so daß die Integrale über f längs dieser Wege (zumindest nach unserer Definition) nicht notwendig existieren.

Nehmen wir daher zunächst an, daß dies dennoch der Fall sei, und nehmen wir zusätzlich an, daß es eine Unterteilung von $I = [a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so daß mit

$$Q_{jk} = \{(s, t) \in I \times I : t_{j-1} \leq s \leq t_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$$

gilt:

$$(*) \quad H(Q_{jk}) \subset D_{jk} \subset G,$$

wobei D_{jk} eine geeignete Kreisscheibe ist (auf der dann eine Stammfunktion von f existiert). Insbesondere ist unter dieser Voraussetzung $H(\partial Q_{jk})$ ein geschlossener Weg in D_{jk} , so daß also

$$\int_{H(\partial Q_{jk})} f(z) dz = 0.$$

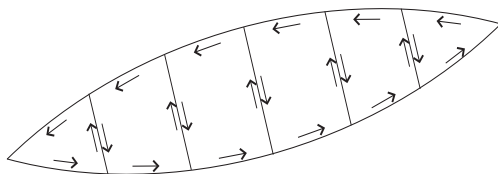
Es sei nun $\tilde{\gamma}_k$ parametrisiert durch $H(s, t_k)$. Dann ist

$$\text{spur } \tilde{\gamma}_k = \bigcup H(\partial Q_{jk}^{(u)}),$$

wobei $\partial Q_{jk}^{(u)}$ die *untere* Seite von Q_{jk} (mit der richtigen Orientierung) bezeichnet. Es folgt (bei geeigneten entsprechenden Bezeichnungen für die oberen Seiten):

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}_{k+1}} f(z) dz &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{H(\partial Q_{jk}^{(u)})} f(z) dz - \int_{H(\partial Q_{jk}^{(o)})} f(z) dz \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{H(\partial Q_{jk})} f(z) dz = 0, \end{aligned}$$

da sich die Integrale über die *mittleren* vertikalen Randstücke wegheben und am linken und am rechten Ende die fehlenden Integrale über den konstanten Weg erstreckt werden, also Null sind.



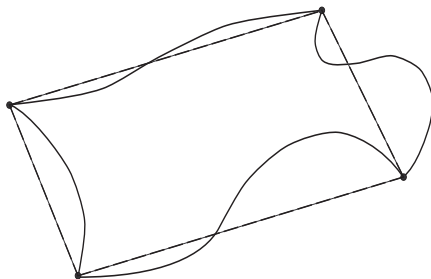
Figur 15.7

Also ist

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

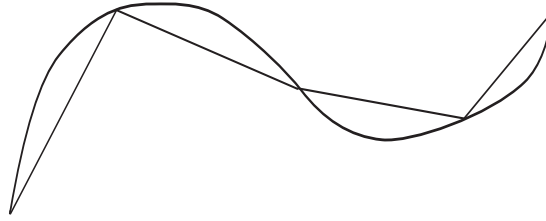
Die Voraussetzung (*) läßt sich stets erreichen: $H(I \times I)$ ist eine kompakte Teilmenge von G , die sich durch endlich viele Kreisscheiben $D_\ell \subset G$ überdecken läßt. Dann wird aber $I \times I$ durch die Urbilder $f^{-1}(U_\ell)$ überdeckt, und nach dem *Lebesgueschen Lemma* gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß jede Teilmenge $A \subset I \times I$ mit Durchmesser $\text{diam } A \leq \varepsilon$ in einer der offenen Mengen $f^{-1}(U_\ell)$ liegt. Somit gibt es, wie gewünscht, eine Unterteilung von I , so daß $f(Q_{jk}) \subset D_{jk} \subset G$.

Nun ist aber D_{jk} konvex für alle j, k , und die Bildpunkte der vier Ecken von Q_{jk} sind in D_{jk} enthalten. Wir können daher die (stetigen) Wege $H(\partial Q_{jk})$ durch den Streckenzug ersetzen, der (in der richtigen Reihenfolge) die Bildpunkte verbindet:



Figur 15.8

Man sieht dann wie oben sofort, daß die Integrale über die („approximierenden“) Streckenzüge $\tilde{\gamma}'_k$ alle gleich sind.



Figur 15.9

Nun ist aber (siehe Zeichnung)

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}'_0} f(z) dz, \quad \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}'_n} f(z) dz,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

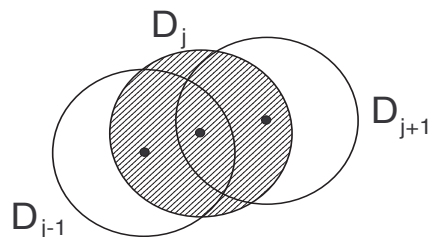
Als *Anhang* zu diesem Kapitel wollen wir noch einige Bemerkungen zu dem *Monodromiesatz* bei analytischer Fortsetzung machen. Wir müssen dazu zunächst den Begriff der *Kreisketten* und *Kreisketten längs Wegen erläutern*.

Definition. Unter einer *Kreiskette* (in dem Gebiet G) verstehen wir ein endliches System D_j , $j = 0, \dots, n$, von Kreisscheiben D_j ($\subset G$), so daß $D_{j-1} \cap D_j \neq \emptyset$. Für die meisten Anwendungen in der Funktionentheorie ist es sinnvoll, zusätzlich zu der obigen Bedingung zu fordern, daß für die Mittelpunkte z_j der D_j gilt:

$$z_j \in D_{j+1}, \quad z_{j+1} \in D_j.$$

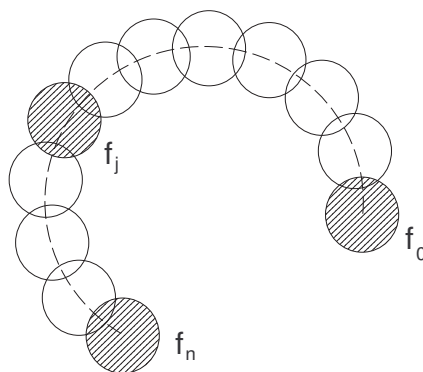
Eine *Kreiskette längs eines (stetigen) Weges* $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ ist eine Kreiskette in G , die den folgenden Bedingungen genügt:

- $z_j = \gamma(t_j)$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$,
- spur $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \subset D_{j-1} \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$.



Figur 15.10

Definition. Es sei f ein *holomorpher Funktionskeim* an der Stelle z_0 , d. h. eine holomorphe Funktion, die in einer Umgebung von z_0 erklärt sei. Man sagt dann, daß sich f längs eines stetigen Weges γ mit Anfangspunkt z_0 *analytisch fortsetzen* läßt, falls es eine Kreiskette D_j längs γ und holomorphe Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(D_j)$ gibt, so daß $f = f_0$ auf D_0 und $f_j = f_{j+1}$ auf $D_j \cap D_{j+1}$.



Figur 15.11

Man kann sich das *Entstehen* einer solchen analytischen Fortsetzung im j -ten Schritt so vorstellen, daß f_j an der Stelle z_{j+1} in eine Potenzreihe entwickelt wird, die eventuell in dem über D_j herausragenden Kreis D_{j+1} noch konvergiert.

Mit den gleichen Mitteln wie im Beweis von Satz 2 deduziert man dann den *Monodromiesatz*.

Satz 15.13 (Monodromiesatz) *Es seien γ_0 und γ_1 homotope Wege (mit gleichen Endpunkten). Es sei eine Homotopie $H(s, t)$ fest vorgegeben mit den Zwischenkurven γ_t . Der holomorphe Funktionskeim f_0 nahe des gemeinsamen Anfangspunktes z_0 von γ_0 und γ_1 lasse sich längs jeden Weges γ_t analytisch fortsetzen. Dann stimmen die Fortsetzungen längs γ_0 und γ_1 in der Nähe des Endpunktes z_1 überein.*

Man mache sich klar, daß dieser Satz als Spezialfall Satz 2 enthält, wenn man zu vorgegebener holomorpher Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ einen Keim einer Stammfunktion F von f in der Nähe eines festen Punktes $z_0 \in G$ entlang von in z_0 beginnenden (stetigen!) Wegen¹³ analytisch fortsetzt. Außerdem veranschauliche man sich die Bedeutung dieses Satzes, indem man die analytischen Fortsetzungen irgendeines Keims des Logarithmus nahe eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}^*$, also einer lokalen Stammfunktion der Funktion $1/z$, längs aller in z_0 beginnenden Wege in \mathbb{C}^* studiert.

Zur Erbauung des Lesers empfehlen wir einige Zeichnungen in dem Buch von M. KUGA: *Galois' Dream. Group Theory and Differential Equations*, erschienen bei Birkhäuser 1993, die vielleicht noch deutlicher als im Text dort erwähnte Homotopie-Sachverhalte veranschaulichen.

¹³Dieses Argument zeigt dann übrigens auch, daß man sogar für *stetige* Wege $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ ein Integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

für *holomorphe* Funktionen $f \in \mathcal{O}(G)$ erklären kann, das bei *stetig differenzierbarem* γ mit unserer alten Definition übereinstimmt.

Im Übrigen ist jeder stetige Weg mit Spur in G im Sinne der *algebraischen Topologie* homotop in G zu einem stückweise stetig differenzierbaren Weg, genauer sogar zu einem *Streckenzug*. Daraus folgt, daß die übliche Definition der Fundamentalgruppe mit der von uns gegebenen übereinstimmt. Nach Satz 7 ist die *algebraisch* definierte Homologiegruppe $H_1^{\text{alg}}(G, \mathbb{Z})$ die abelsch gemachte Fundamentalgruppe; somit existiert ein natürlicher Gruppen-Epimorphismus von dieser Homologiegruppe auf die von uns (nach EML ARTIN) definierte:

$$H_1^{\text{alg}}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}).$$

Wir können hier nicht in einen Beweis dafür eintreten, daß dies sogar ein Gruppen-Isomorphismus ist.

16 Der Satz von Mittag - Leffler und der Weierstraßsche Produktsatz

Der *Weierstraßsche Produktsatz* löst das naheliegende Problem, in Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen zu konstruieren, die genau an vorgegebenen Stellen von vorgeschriebener Ordnung verschwinden. Heutzutage führt man dieses Problem auf das sogenannte *Mittag-Leffler Problem* (MITTAG - LEFFLER 1877) zurück, obwohl historisch gesehen die tatsächliche Entwicklung in umgekehrter Reihenfolge verlief (WEIERSTRASS bewies den Produktsatz 1876). Und obwohl der Münchner Professor der Mathematik und anerkannte Funktionentheoretiker Geheimrat PRINGSHEIM¹⁴ gegen solche Tendenzen vehement gewettert hat, folgen wir diesem ökonomischen Vorgehen.

Bei dem *Problem von Mittag-Leffler* handelt es sich um eine Verallgemeinerung der *Partialbruch-Entwicklung für rationale Funktionen*: Ist

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

eine rationale Funktion auf \mathbb{C} , wobei $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ ohne Einschränkung ohne gemeinsame Nullstellen seien, so liefert die *Partialbruch-Entwicklung* eine Zerlegung

$$R(z) = \sum_{j=1}^r H_j(z) + S(z),$$

wobei die

$$H_j(z) = \frac{a_{j1}}{z - z_j} + \frac{a_{j2}}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{j\ell_j}}{(z - z_j)^{\ell_j}}$$

die *Hauptteile* von R an den paarweise verschiedenen Nullstellen $z_j \neq z_k$ von $Q(z)$ sind und der Rest S notwendigerweise eine holomorphe rationale Funktion, also ein *Polynom*

$$S(z) \in \mathbb{C}[z]$$

sein muß.

Ähnliche Entwicklungen waren auch schon früher für *transzendente* Funktionen (im Reellen) bekannt. Hierbei ist die Menge der Pole selbstverständlich nicht endlich. So stammt z. B. von EULER (1734) die Entwicklung des Cotangens:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right].$$

¹⁴Es sollte auch jedem Studierenden der Mathematik bekannt sein, daß Thomas Manns hervorragende Kenntnis der Lebensverhältnisse Münchner Großbürgerkreise, wie er sie z. B. in seinem *Doktor Faustus* meisterhaft schildert, vor allem dem Umstand zu verdanken ist, daß er diese bei seinem Schwiegervater Pringsheim bestens studieren konnte. Und Katja Pringsheim-Manns Studium der Mathematik findet ihren Niederschlag in der Figur von Imma Spoelmann aus dem Roman *Königliche Hoheit*: ... Und nebenbei hatte sie zweimal dem zahlentheoretischen Kollegium des Geheimrats Klinghammer in der Universität beigewohnt, - [...] denn bekanntlich war sie ein gelehrtes Mädchen und oblag dem Studium der Algebra. [...] «Nein», rief er, «heute dürfen Sie keine Algebra treiben, Fräulein Imma, oder im luftleeren Raum spielen, wie Sie es nennen! Sehen Sie doch die Sonne! ... Darf ich? ...» Und er trat zum Tischchen und nahm das Kollegheft zur Hand. Was er sah, war sinnverwirrend. In einer krausen, kindlich dick aufgetragenen Schrift, die Imma Spoelmanns besondere Federhaltung erkennen ließ, bedeckte ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrecht Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zusammengefaßt, durch eckige Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfaßten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häupten und Füßen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen geschriebene Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn gleichwohl so hoch über allen menschlichen Dingen war, daß man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen, als von einem Zaubergemurmel. Klaus Heinrich sah auf zu der kleinen Gestalt, [...] in deren fremdartigem Köpfchen dies alles Sinn und hohes, spielerisches Leben hatte. Er sagte: «Und über diesen gottlosen Künsten wollen Sie den schönen Vormittag versäumen?»

Man nennt diese Reihe oft die „Partialbruch-Zerlegung des Cotangens“. Wir wollen darunter aber eine präzisere Entwicklung verstehen, die wir weiter unten mit funktionentheoretischen Mitteln herleiten werden. Einen einfachen Beweis der Eulerschen Zerlegung erhält man beispielsweise dadurch, daß man die Fourier-Reihe für $f(x) = \cos zx$ bildet und dann $x = \pi$ setzt. Durch „Hochintegrieren“ folgt aus dieser Identität eine *Produkt-Darstellung* der Sinus-Funktion, genauer:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

und wenn man in diesen Ausdruck $z = 1/2$ einsetzt, so erhält man das berühmte WALLISSche Produkt

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right).$$

Etwas präziser stellt das Mittag-Leffler-Problem die Frage: *Kann man meromorphe Funktionen auf \mathbb{C} (allgemeiner auf Gebieten $G \subset \mathbb{C}$) mit vorgeschriebenen Polstellen und Polstellenordnungen konstruieren?* In dieser Form ist es umgekehrt eine direkte Konsequenz aus dem Weierstraßschen Produktsatz: Besitzt $f \in \mathcal{O}(G)$ die Nullstellen $a \in N \neq G$ mit den Nullstellenordnungen $n_a \in \mathbb{N}^*$, $a \in N$, so ist die Funktion $1/f$ meromorph auf G und besitzt die Polstellenmenge $P = N$ und die Polstellenordnungen n_a , $a \in P$.

Das Mittag-Leffler-Problem kann man aber noch wesentlich genauer formulieren und dann sogar auf holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten in G verallgemeinern: *Man finde eine meromorphe Funktion auf $G \subset \mathbb{C}$ mit vorgeschriebenen (endlichen) Hauptteilen an allen Polstellen!*

Läßt man also statt Polen auch *wesentliche Singularitäten* zu, so wird man automatisch zu der folgenden verallgemeinerten Fragestellung geführt.

Definition. Eine MITTAG - LEFFLER- oder *Hauptteil-Verteilung* auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine Menge

$$H = \{h_a : a \in S\}$$

von (nicht notwendig endlichen) Hauptteilen

$$h_a = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\}),$$

wobei $S \subset G$ eine diskrete Teilmenge bildet.

Eine Mittag-Leffler-Verteilung H auf G heißt *lösbar*, wenn es eine holomorphe Funktion f auf $G \setminus S$ gibt, so daß $f - h_a$ holomorph (ergänzbar) ist in einer Umgebung von a für alle $a \in S$.

Bemerkungen. 1. Jede holomorphe Funktion f auf $G \setminus S$ liefert bei diskreter Teilmenge $S \subset G$ eine Mittag-Leffler-Verteilung $H(f) = \{h_a : a \in S\}$, wobei h_a den Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um die singuläre Stelle $a \in S$ bezeichnet. Eine Mittag-Leffler-Verteilung H ist also genau dann lösbar, wenn es eine Funktion f gibt mit $H(f) = H$.

2. Tatsächlich ist jede Mittag-Leffler-Verteilung (auf beliebigen Teilgebieten $G \subset \mathbb{C}$) lösbar (siehe z. B. [11], Kap. VIII, und [3], Kap. III, § 7). Man kann an jeder Stelle $a \in S$ sogar noch einen endlichen Abschnitt des Nebenteiles vorschreiben (Mittag-Lefflerscher *Anschmiegunssatz*). Wir werden uns im folgenden aber auf die Betrachtung des Spezialfalls $G = \mathbb{C}$ beschränken.

Bevor wir uns aber der Frage nach der *Existenz* von Lösungen widmen, wollen wir schnell klären, wieviele Lösungen ein Mittag-Leffler-Problem überhaupt besitzen kann. Nun: Wenn f eine Lösung ist, so ist auch $f + g$ eine Lösung für alle $g \in \mathcal{O}(G)$. Sind umgekehrt f, \tilde{f} Lösungen, so ist ihre Differenz $\tilde{f} - f$ holomorph auf $G \setminus P$ und $(\tilde{f} - f)|_{U(a)} = h_a - h_a +$ eine holomorphe Funktion, also $\tilde{f} - f = g \in \mathcal{O}(G)$. - Wir haben damit bewiesen (man beachte die nicht nur zufällige Korrespondenz mit der Lösungstheorie nichthomogener linearer Gleichungssysteme):

Satz 16.1 Ist f Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung H auf G , so durchläuft $f + g$ alle Lösungen von H , wenn g alle holomorphen Funktionen auf G durchläuft.

Wir beweisen jetzt die Existenz von Lösungen für $G = \mathbb{C}$. Es sei also $S \subset \mathbb{C}$ die diskrete Menge der *singulären Stellen*. Ist S nicht endlich, so ist S *abzählbar unendlich* und ohne Häufungspunkte in \mathbb{C} , so daß ohne Einschränkung stets vorausgesetzt werden kann, daß

$$S = \{a_j \in \mathbb{C} : j \in \mathbb{N}\},$$

wobei $a_0 = 0$, sofern 0 in S enthalten ist, und

$$0 = |a_0| < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots, \quad \lim |a_j| = \infty.$$

Ist die Ausnahmemenge S endlich, so ist die Antwort einfach: Man bildet

$$f = \sum_{a \in S} h_a$$

und hat damit offensichtlich eine Lösung konstruiert. Im allgemeinen Fall ist jedoch die unendliche Reihe

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} h_{a_j}$$

nicht konvergent. Unser Ziel wird es daher sein, die Reihe h_{a_j} durch Subtraktion geeigneter holomorpher Funktionen so abzuändern, daß Konvergenz erzwungen wird. - Um dies konkret durchführen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition. Eine unendliche Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ von Funktionen f_j , die auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit Ausnahme von isolierten Singularitäten holomorph sind, *konvergiert kompakt* nach Definition, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset U$ einen Index j_0 gibt, so daß $f_j|_K$ holomorph auf (einer Umgebung von) K ist für alle $j \geq j_0$ und die Reihe

$$\sum_{j \geq j_0} f_j|_K$$

auf K gleichmäßig konvergiert. Diese Bedingungen sind genau dann auf jedem Kompaktum in G erfüllt, wenn sie in einer Umgebung eines jeden Punktes $z_0 \in G$ nachweisbar sind, also *lokal gleichmäßige Konvergenz* auf G vorliegt.

Satz 16.2 (Mittag - Leffler) Sei $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$, eine unendliche Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ und $\lim |a_j| = \infty$. Die Funktionen h_j seien Hauptteile mit Entwicklungspunkt a_j , wobei $h_0 \equiv 0$ zugelassen ist. Setzt man

$$r_j := \frac{1}{2} |a_j|, \quad D_j := \{|z| \leq r_j\},$$

wählt man eine Folge positiver reeller Zahlen ε_j mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$$

und die Folge der $k_j \in \mathbb{N}$ so groß, daß für das Taylorpolynom k_j -ter Ordnung von h_j um 0 , welches wir mit P_j bezeichnen wollen, gilt:

$$|h_j(z) - P_j(z)| < \varepsilon_j, \quad z \in D_j,$$

so konvergiert die Reihe

$$(*) \quad f = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j - P_j)$$

kompakt gegen eine Lösung der gegebenen Verteilung.

Sind $P_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ irgendwelche ganze Funktionen, so daß $(*)$ kompakt konvergiert, so ist f automatisch eine Lösung.

Beweis. i) Wir zeigen zuerst die letzte Behauptung: Wenn $P_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe Funktionen sind, so daß die Reihe $f = h_0 + \sum (h_j - P_j)$ kompakt konvergiert, so ist f eine Lösung des Mittag-Leffler-Problems. Denn sei $R > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein j_0 , so daß $(h_j - P_j)|_{\overline{D}_R(0)}$ holomorph ist für alle $j \geq j_0$ und die Reihe ab j_0 dort gleichmäßig konvergiert. Zerlegt man also f in die Bestandteile

$$f = h_0 + \sum_{j=1}^{j_0-1} (h_j - P_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} (h_j - P_j),$$

so enthält der zweite genau alle Hauptteile mit Mittelpunkt $a_j \in D_R(0)$ und der dritte ist holomorph auf $D_R(0)$. Also löst f auf $D_R(0)$ für alle $R > 0$ und damit auf ganz \mathbb{C} .

ii) Die Reihe $(*)$ ist unter den angegebenen Voraussetzungen kompakt konvergent. Denn setzt man $K = \overline{D}_R(0)$, so existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß $h_j|_{\overline{D}_R(0)}$ holomorph ist für alle $j \geq j_0$ und die Menge $\overline{D}_R(0) \subset D_j$. Also ist insbesondere $|h_j - P_j| < \varepsilon_j$ auf $\overline{D}_R(0)$ und damit

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} (h_j - P_j)$$

gleichmäßig konvergent auf $\overline{D}_R(0)$. □

Bemerkung und Definition. Aufgrund des Satzes von Mittag-Leffler kann man jede meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} mit der (endlichen) Hauptteil-Verteilung $h_j, j \in \mathbb{N}$, auf die folgende Weise zerlegen:

$$f(z) = h(z) + g(z), \quad h(z) = h_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - P_j(z)), \quad g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}),$$

wobei die P_j geeignete Taylorpolynome der Hauptteile h_j um 0 sind. Jede solche Zerlegung heißt (eine) *Partialbruch-Entwicklung* von f .

Wir wollen als erste Anwendung eine Funktion mit vorgegebenen einfachen Polen in den Punkten a_j mit Residuum $c_j \neq 0$ konstruieren. Der Beweis des Satzes von Mittag-Leffler legt uns die Taylorentwicklung der entsprechenden einfachen Hauptteile um den Nullpunkt nahe:

$$\frac{1}{z - a_j} = -\frac{1}{a_j} \frac{1}{1 - \frac{z}{a_j}} = -\frac{1}{a_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_j}\right)^k, \quad |z| < |a_j|.$$

Danach haben wir eine beliebige konvergente Folge $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$ herzunehmen und die Zahlen k_j so groß zu wählen, daß

$$\left| \frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z}{a_j}\right)^k \right| < \frac{\varepsilon_j}{|c_j|}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

für alle z mit $2|z| \leq |a_j|$. - Unter diesen Vorgaben erhalten wir:

Satz 16.3 Die Reihe

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left[\frac{1}{z - a_j} + \sum_{k=0}^{k_j} \frac{z^k}{a_j^{k+1}} \right]$$

ist meromorph in \mathbb{C} mit einfachen Polen vom Residuum c_j in den Punkten a_j und holomorph außerhalb.

Beispiele. 1. Wir setzen $c_j = 1$, $a_j = j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Nun ist für $|z| \leq R$, $|j| > 2R$ offenbar $|z - j| \geq j/2$ und damit

$$\left| \frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right| = \frac{|z|}{j|z - j|} \leq \frac{2R}{j^2}.$$

Da außerdem die Reihe $\sum \frac{1}{j^2}$ konvergiert, ist

$$(+) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right)$$

kompakt konvergent auf \mathbb{C} und löst folglich das obige Mittag-Leffler-Problem. Mit anderen Worten: f ist eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit einfachen Polen in \mathbb{Z} vom Residuum 1. Faßt man in der unendlichen Summe ganz rechts die Glieder zu j und $-j$ zusammen, so gewinnt man die Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{z + j} \right),$$

von der wir nach EULER schon wissen, daß sie die Funktion $\pi \cot(\pi z)$ darstellen muß. Im Gegensatz zu (+) ist dies allerdings im strengen Sinne unserer obigen Definition keine Partialbruch-Entwicklung der Funktion $\pi \cot(\pi z)$, da die Reihen

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{z - j} \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{z + j}$$

einzelnen für sich nicht kompakt konvergieren.

2. Nicht immer sind konvergenzerzeugende Summanden notwendig. Man sieht unmittelbar ein, daß die Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z - j^2}$$

kompakt konvergiert und damit meromorph ist mit einfachen Polen vom Residuum 1 an den Stellen $a_j = j^2$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Wir wollen jetzt funktionentheoretisch nachweisen, daß das erste Beispiel die Partialbruch-Entwicklung von $\pi \cot(\pi z)$ ist. Diese Funktion hat Polstellen erster Ordnung in den Nullstellen von $\sin(\pi z)$, also in \mathbb{Z} . Der Faktor π ist so gewählt, daß außerdem die Residuen auf 1 normiert sind. Also gilt nach Beispiel 1

$$\pi \cot(\pi z) = g(z) + \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right)$$

mit einer ganzen Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (\sum' bezeichnet die Summation über alle Indizes in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Durch Differenzieren (was auf der rechten Seite wegen der kompakten Konvergenz ohne weiteres erlaubt ist), erhält man die Beziehung

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 = -g'(z) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - j)^2}.$$

Offensichtlich hat die unendliche Reihe ganz rechts ebenso wie die Funktion $1/\sin z$ die Periode 1. Zudem kann man zeigen (siehe z. B. FISCHER-LIEB, p. 200), daß diese beiden Funktionen auf dem Streifen

$$\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$$

bei $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 gehen. Damit ist auch

$$g' \Big|_{\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}} \xrightarrow{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} 0.$$

Also muß nach dem Satz von Liouville $g' = \text{const.} = 0$ und damit $g = \text{const.}$ sein. Beide Seiten sind aber ungerade, so daß auch g ungerade und damit gleich 0 ist.

Wir fassen noch einmal zusammen:

Satz 16.4 Für den Cotangens gilt die Partialbruch-Entwicklung

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right).$$

Wir wollen hierfür noch einen *weiteren Beweis* angeben, der im Wesentlichen nur den Residuensatz als Hilfsmittel heranzieht. Man betrachtet hierzu für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$F(w) := \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w),$$

die Singularitäten an den Stellen $w = z$ und $w = j \in \mathbb{Z}$ besitzt, und zwar Pole erster Ordnung außer im Fall $w = 0$. Der Nullpunkt ist ein Pol zweiter Ordnung. Die Residuen an den Polstellen erster Ordnung sind offenbar

$$-\pi \cot(\pi z) \quad \text{und} \quad \frac{z}{j(z-j)} = \frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \quad \text{für } j \in \mathbb{Z}^*,$$

und mit einer leichten Rechnung bestimmt man auch das Residuum im Nullpunkt zu $1/z$. Es sei nun Q_n ein achsenparalleles Quadrat der Kantenlänge $2n+1$ mit Mittelpunkt 0 und $|z| < n$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_n} F(w) dw = -\pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{0 < |j| \leq n} \frac{z}{j(z-j)},$$

und es bleibt nur zu zeigen, daß das links stehende Integral für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Dazu genügt zu zeigen, daß die Funktion $w \mapsto \pi \cot(\pi w)$ unabhängig von den Zahlen $n \in \mathbb{N}$ auf den Integrationswegen ∂Q_n beschränkt bleibt. Denn dann ist

$$\left| \int_{\partial Q_n} F(w) dw \right| \leq C 4(2n+1) \frac{|z|}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2} - |z|\right)},$$

was offensichtlich ausreichend ist. Nun ist im Bereich $|y| = |\operatorname{Im} w| \geq 1$ aber stets

$$|\cot(\pi w)| \leq \frac{1 + e^{-2\pi|y|}}{1 - e^{-2\pi|y|}} \leq \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}},$$

und die Beschränktheit auf den Stücken $w = n + 1/2 + iy$, $|y| \leq 1$ ist eine einfache Folgerung aus der Periodizität der Cotangens-Funktion. \square

Bemerkung. Man kann aus dieser Partialbruch-Entwicklung noch auf eine andere Weise die EULERSchen Relationen ableiten (siehe Satz 11.9 im Anhang zu Kapitel 11). Wir hatten dort für die Funktion

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{mit} \quad g(0) = 1$$

um den Ursprung eine Potenzreihen-Entwicklung der Gestalt

$$g(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

gefunden, wobei die B_{2n} die BERNOULLI-Zahlen bezeichnen. Wie wir aber schon aus der Analysis wissen, hängt die Funktion g eng mit der Funktion $z \cot z$ zusammen: Eine leichte Rechnung unter Zuhilfenahme der Eulerschen Formeln für den Sinus und den Cosinus liefert

$$z \cot z = g(2iz) + iz = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$$

und damit

$$(\times) \quad \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Auf der anderen Seite ist dieselbe Funktion wegen der oben hergeleiteten Partialbruch-Entwicklung gleich

$$1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2},$$

und vermöge der geometrischen Reihe deduzieren wir hieraus

$$(\times \times) \quad \pi z \cot(\pi z) = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2} \right)^n \right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{2n}} \right) \right) z^{2n}.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (\times) findet man erneut die Eulerschen Relationen.

Durch Differentiation folgt aus dem letzten Satz sofort (siehe auch oben):

Satz 16.5
$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - j} \right)^2.$$

Schließlich kann man mit den obigen Überlegungen auch die Partialbruch-Entwicklung von $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ selbst gewinnen. Aus

$$\cos(\pi z) = \sin \pi \left(z + \frac{1}{2} \right)$$

ergibt sich mit $a_j = j + 1/2$ unmittelbar

$$\left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right)^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_j} \right)^2$$

und durch Integration

$$\pi \tan(\pi z) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} \right).$$

Nun ist bekanntlich

$$\cot \pi \frac{z}{2} + \tan \pi \frac{z}{2} = \frac{2}{\sin(\pi z)},$$

so daß sich endlich die Partialbruch-Entwicklung von $\pi/\sin(\pi z)$ ohne Mühe hinschreiben läßt. Faßt man in dieser je zwei Terme zusammen, so kommt die Darstellung

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2z}{z^2 - j^2},$$

aus der sich für $z = 1/2$ die Reihenentwicklung

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{\frac{1}{4} - j^2} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{1 - (2j)^2}$$

von selbst ergibt.

Wir wenden uns jetzt dem Nachweis des WEIERSTRASSSchen *Produktsatzes* zu und geben uns zu diesem Zwecke eine diskrete Menge $N \subset \mathbb{C}$ und Nullstellenordnungen n_j in $a_j \in N$, $j \in \mathbb{N}$ vor. Ein solches System nennen wir kurz eine *Weierstraßverteilung*. Unser Problem ist nun, eine *holomorphe* Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ zu finden mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus N$ und $\text{ord}_{a_j} f = n_j$. Ist N endlich, so löst selbstverständlich

$$\prod_{a_j \in N} (z - a_j)^{n_j}$$

dieses Problem. Im allgemeinen Fall müssen wir unendliche Produkte betrachten und entsprechend zu dem Mittag-Leffler-Problem konvergenzerzeugende *Faktoren* einführen.

Wir machen uns zuerst wieder kurz Gedanken über die *Gesamtheit aller Lösungen*. Sind f und g Lösungen einer Weierstraßverteilung, so ist g/f holomorph und nirgends Null; da \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, ist $g/f = e^{h(z)}$, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Das Umgekehrte gilt auch:

Satz 16.6 *Löst f die Weierstraßverteilung $\{(a_j, n_j) : a_j \in N\}$, so durchläuft*

$$f \cdot e^h, \quad h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

alle Lösungen der Weierstraßverteilung.

Offenbar müssen wir uns bei diesem Problem sinnvollerweise mit *unendlichen Produkten* herumschlagen. Dazu benötigen wir einige Definitionen und Hilfssätze (deren einfache Beweise man in FISCHER-LIEB, pp. 193 ff. findet).

Definition. i) Es seien alle $a_j \in \mathbb{C}^*$. Dann nennt man das Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent gegen a , in Zeichen

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = a,$$

wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n a_j = a$ und $a \neq 0$.

ii) Es seien die a_j nicht notwendig alle ungleich Null. Dann heißt das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent, falls *fast alle* $a_j \neq 0$ sind und das Produkt $\prod_{a_j \neq 0} a_j$ im Sinne von i) konvergiert. Ist tatsächlich mindestens ein $a_j = 0$, so setzt man dann $\prod_1^{\infty} a_j = 0$. Im anderen Fall verwendet man die Definition in i).

Bemerkung. Ist das Produkt $\prod a_j = a$ konvergent, so muß aufgrund der obigen Definition notwendig $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 1$ gelten. Daher schreibt man unendliche Produkte meist in der Form

$$\prod (1 + u_j), \quad \lim u_j = 0,$$

wobei fast alle u_j von -1 verschieden vorausgesetzt werden.

Hilfssatz 1 *Ist die unendliche Reihe*

$$\sum \log(1 + u_j), \quad u_j \neq -1,$$

konvergent (für irgendeinen Zweig des Logarithmus in Abhängigkeit von j), so ist das unendliche Produkt

$$\prod (1 + u_j)$$

ebenfalls konvergent, und zwar gegen

$$\exp\left(\sum \log(1 + u_j)\right).$$

Dies ist natürlich schlicht und einfach eine Konsequenz der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Hilfssatz 2 *Ist $1 + u_j$ nicht aus \mathbb{R}_- für alle j und bezeichnet Log den Hauptzweig des Logarithmus, dann gilt :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\text{Log}(1 + u_j)| < \infty \iff \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| < \infty.$$

Der *Beweis* von Hilfssatz 2 folgt unmittelbar aus der für $|u| \leq 1/4$ gültigen Abschätzung

$$\frac{2}{3} |u| \leq |\text{Log}(1 + u)| \leq \frac{4}{3} |u|. \quad \square$$

Definition. Das Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_j)$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ absolut konvergiert. Nach den obigen Bemerkungen ist diese Bedingung gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe der Absolutbeträge

$$\sum |u_j|$$

und genauso mit der Konvergenz der Reihe

$$\sum |\log(1 + u_j)|.$$

Wir benötigen als nächstes eine Übertragung der obigen Konzepte auf Folgen von Funktionen.

Definition. f_j sei eine Folge stetiger Funktionen auf $G \subset \mathbb{C}$. Wir sagen:

i) $\prod (1 + f_j)$ *konvergiert (punktweise) gegen f , falls*

$$\prod (1 + f_j(z)) = f(z)$$

für alle $z \in G$;

ii) $\prod (1 + f_j)$ *konvergiert absolut lokal gleichmäßig auf G , falls die Reihe*

$$\sum |f_j|$$

lokal gleichmäßig auf G konvergiert.

Folgerung 16.7 Die Partialprodukte eines absolut lokal gleichmäßig konvergierenden Produktes $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z) = f(z)$ bilden eine lokal gleichmäßig konvergente Folge. Insbesondere ist die Grenzfunktion f von stetigen Funktionen f_j wieder stetig. Sind alle f_j sogar holomorph, so auch f .

Wir haben nunmehr alle Hilfsmittel beieinander, um den Weierstraßschen Produktsatz auf das Mittag-Leffler-Problem zurückzuführen. Nehmen wir zunächst an, f sei eine Lösung der Weierstraß-Verteilung (a_j, n_j) mit $|a_0| = 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$, $\lim |a_j| = \infty$. Lokal um a_j gilt dann $f(z) = g(z) \cdot (z - a_j)^{n_j}$ mit $g(a_j) \neq 0$ und folglich, wie wir früher schon einmal benutzt haben,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Wir können damit schließen: Löst f die gegebene Weierstraßverteilung, so löst f'/f die Mittag-Leffler-Verteilung

$$(*) \quad \left\{ \frac{n_j}{z - a_j} : j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir versuchen deshalb umgekehrt, (*) gemäß Satz 3 zu lösen (wobei wir erst einmal den Punkt $a_0 = 0$ fortlassen, wenn er vorkommen sollte): Es gibt eine (lokal gleichmäßig konvergente) Lösung der Form

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(z), \quad h_j(z) = n_j \left[\frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z}{a_j} \right)^k \right].$$

Wir brauchen eine Funktion, die diese als logarithmische Ableitung besitzt. Dies ist für jeden einzelnen Summanden leicht zu bewerkstelligen: Setze

$$u_j(z) := \left[\left(1 - \frac{z}{a_j} \right) \exp \left(\sum_{k=0}^{k_j} \frac{1}{k+1} \left(\frac{z}{a_j} \right)^{k+1} \right) \right]^{n_j}, \quad j \geq 1.$$

Dann ist in der Tat u_j eine holomorphe Funktion mit genau einer Nullstelle (der Ordnung n_j) an der Stelle a_j , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{u_j'}{u_j} &= \frac{n_j \left(1 - \frac{z}{a_j} \right)^{n_j-1} e^{n_j-1+1} \left[\left(1 - \frac{z}{a_j} \right) \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z^k}{a_j} \right) - \frac{1}{a_j} \right]}{\left(1 - \frac{z}{a_j} \right)^{n_j} e^{n_j}} \\ &= n_j \left[\frac{-\frac{a}{a_j}}{1 - \frac{z}{a_j}} + \frac{1}{a_j} \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z}{a_j} \right)^k \right] = h_j. \end{aligned}$$

Wir setzen schließlich

$$u(z) := z^{n_0} \prod_{j=1}^{\infty} u_j(z).$$

Falls wir zeigen können, daß das unendliche Produkt auf der rechten Seite absolut lokal gleichmäßig konvergiert, so sind wir fertig; denn dann ist u holomorph, bei $z \neq a_j$ sind alle Faktoren $\neq 0$, und nach Definition des Produktes ist $u(z) \neq 0$. In $z = a_j$ dagegen sind alle u_k , $k \neq j$, von Null verschieden. Somit ist in diesem Falle das Produkt $\prod_{k \neq j} u_k(z) \neq 0$. Daraus folgt, daß $u(z)$ in der Nähe von a_j von der Gestalt $(z - a_j)^{n_j} g_j(z)$ ist, wobei die holomorphe Funktion g_j nahe a_j nirgends verschwindet. Damit löst u die vorgegebene Weierstraß-Verteilung.

Zur lokal absolut gleichmäßigen Konvergenz beachten wir zunächst, daß es zu jedem $R > 0$ ein j_0 gibt, so daß für alle $j \geq j_0$ die Absolutbeträge $|a_j| > R$ sind. Folglich haben die u_j keine Nullstellen auf $D_R(0)$ und $u'_j/u_j = h_j$ ist holomorph auf $D_R(0)$ für $j \geq j_0$. Damit sind für diese j die Funktionen

$$v_j(z) = \int_0^z \frac{u'_j(\zeta)}{u_j(\zeta)} d\zeta = \int_0^z h_j(\zeta) d\zeta$$

holomorph auf $D_R(0)$, und aus

$$(\log u_j)' = \frac{u'_j}{u_j} = v'_j$$

folgt $v_j = \log u_j + C_1$ und damit $e^{v_j} = C_0 u_j$. Nun ist aber $v_j(0) = 0$, $u_j(0) = 1$, so daß $C_0 = 1$ sein muß; also ist schließlich:

$$e^{v_j(z)} = u_j(z)$$

für alle $z \in D_R(0)$, $j \geq j_0$. Weiter ist nach Konstruktion die Reihe $\sum_{j \geq j_0} h_j$ absolut gleichmäßig konvergent auf $D_R(0)$, so daß dann auch

$$\sum_{j \geq j_0} v_j = \sum_{j \geq j_0} \log u_j$$

absolut gleichmäßig konvergent auf $D_R(0)$ ist. Dies impliziert die gewünschte gleichmäßige und absolute Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod_{j \geq j_0} u_j$ auf $D_R(0)$. - Wir haben damit auf effektive Weise das Weierstraß-Problem gelöst.

Satz 16.8 (Weierstraß 1876) *Jede Weierstraß-Verteilung auf \mathbb{C} ist lösbar.*

Beispiel. Die Funktion $\sin(\pi z)$ hat nur einfache Nullstellen an allen ganzzahligen Werten $j \in \mathbb{Z}$. Aus der uns schon bekannten Darstellung der logarithmischen Ableitung

$$f'/f = \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right)$$

schließen wir unmittelbar

$$\sin(\pi z) = e^g z \prod_{j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{j} \right) e^{z/j}.$$

Durch erneutes Bilden der logarithmischen Ableitung folgt sofort $g' = 0$ und damit $g = \text{const.}$ Nun ist aber

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \pi,$$

also $e^g = \pi$, und damit haben wir gezeigt:

Satz 16.9
$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j} \right) e^{z/j} = \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2} \right).$$

Entsprechend erhält man

$$\cos(\pi z) = \prod_{j \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{a_j} \right) e^{z/a_j}, \quad a_j = j + 1/2.$$

Beachtet man $\sin \pi/2 = 1$, so ergibt sich aus Satz 9 für $z = 1/2$ die berühmte Produktdarstellung für $\pi/2$ von Wallis aus dem Jahre 1655:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4j^2} \right)^{-1} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4j^2 - 1}{4j^2} \right)^{-1} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \dots \end{aligned}$$

Die Konvergenz dieses Produktes ist allerdings nicht sehr gut: Man braucht z. B. 50 Produkte, um hiermit für π den Näherungswert 3,1260 zu erhalten.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch zwei wichtige theoretische Konsequenzen aus den Hauptsätzen erörtern. Die erste ist sehr einfach: Ist h eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} , so kann man das Weierstraß-Problem zu der Nullstellenverteilung $(P, n_a \in \mathbb{N}^*)$ betrachten, in dem P die Polstellenmenge von h und n_a die Polstellenordnung von h in a bezeichnet. Ist g eine Lösung des Problems, so ist $f := gh$ offensichtlich eine ganze Funktion. - Wir haben somit gezeigt:

Satz 16.10 *Jede meromorphe Funktion auf \mathbb{C} ist Quotient zweier ganzer holomorpher Funktionen*

Eine Verallgemeinerung des Mittag-Lefflerschen Satzes ist der sogenannte *Anschmiegunssatz*, der ebenfalls auf Mittag-Leffler zurückgeht.

Satz 16.11 *Es sei eine diskrete Teilmenge $S \subset \mathbb{C}$ gegeben und zu jedem $a \in S$ ein Hauptteil $h_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ und ein Polynom $P_a \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n_a \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus S)$, die an den Stellen $a \in S$ genau die Hauptteile h_a besitzt, und deren Nebenteile an den Stellen a bis zur Ordnung n_a jeweils - in einer Umgebung von a - mit P_a übereinstimmt. Mit anderen Worten: Die Funktion $h - h_a - P_a$ ist in den Punkt a hinein holomorph fortsetzbar zu einer Funktion, die dort von einer Ordnung $> n_a$ verschwindet.*

Beweis. Wir lösen zuerst das Weierstraß-Problem zu der Verteilung $(a \in S, m_a \in \mathbb{N})$, wobei $m_a > n_a$ sei, also z. B. $m_a = n_a + 1$. Wir haben somit eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, die außerhalb S nicht verschwindet und sich um jeden Punkt $a \in S$ in der Form $g(z) = (z - a)^{m_a} g_a(z)$ schreiben läßt, wobei g_a auch in a holomorph ist und dort nicht verschwindet. Wir schreiben weiter

$$H_a := h_a + P_a$$

und zerlegen die Funktion H_a/g lokal um a in ihren Hauptteil \tilde{H}_a und den Nebenteil R_a :

$$\frac{H_a(z)}{g(z)} = \tilde{H}_a(z) + R_a(z).$$

Insbesondere ist R_a holomorph in einer Umgebung von a . Die Mittag-Leffler-Verteilung $(\tilde{H}_a, a \in S)$ besitzt nun weiter eine Lösung \tilde{h} , also eine Funktion, die in $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph ist und sich in einer geeigneten (punkttierten) Umgebung eines beliebig vorgegebenen Punktes $a \in S$ schreibt als $\tilde{h} = \tilde{H}_a + \tilde{h}_a$, wobei \tilde{h}_a nach a hinein holomorph fortsetzbar ist. Man braucht jetzt nur noch $h := g\tilde{h}$ zu setzen. Denn die Funktion h ist nach Konstruktion holomorph auf $\mathbb{C} \setminus S$, und nahe eines jeden Punktes $a \in S$ ist

$$h = g(\tilde{H}_a + R_a + (\tilde{h}_a - R_a))$$

und damit, wenn man r_a für die nahe a holomorphe Funktion $g_a(\tilde{h}_a - R_a)$ setzt:

$$h(z) = H_a(z) + (z - a)^{m_a} r_a(z). \quad \square$$

Bemerkung. Alle wesentlichen Sätze dieses Kapitels (Satz von Mittag-Leffler, Produktsatz von Weierstraß, Darstellbarkeit von meromorphen Funktionen als Quotienten holomorpher Funktionen, der Anschmiegunssatz) sind auch für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ anstelle von \mathbb{C} richtig. Die Beweise werden aber komplizierter und erst dann durchsichtig, wenn man tieferliegende Konzepte heranzieht.

Anhang: Die Γ - Funktion

Das Problem der Konstruktion der Γ -Funktion besteht darin, eine „möglichst einfache“ Funktion f zu bestimmen, die an den natürlichen Stellen $n \in \mathbb{N}$ die Werte $n!$ annimmt. Aus historischen Gründen verschiebt man den Definitionsbereich und verlangt

$$f(n) = (n - 1)!, \quad n = 1, 2, \dots$$

Damit gleichwertig ist die induktive Definition

$$(*) \quad f(1) = 1, \quad f(n + 1) = n f(n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In der komplexen Analysis kann man als natürliche Frage ansehen, ob es eine *holomorphe* Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(**) \quad f(1) = 1, \quad f(z + 1) = z f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dies ist allerdings zuviel verlangt! Aus der Funktionalgleichung folgt nämlich durch vollständige Induktion sofort

$$f(z + m + 1) = z(z + 1) \cdot \dots \cdot (z + m) f(z) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

und dies impliziert

$$\begin{aligned} (-1)^m m! \lim_{z \rightarrow -m} (z + m) f(z) &= \lim_{z \rightarrow -m} [z(z + 1) \cdot \dots \cdot (z + m - 1)] [(z + m) f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow -m} f(z + m + 1) = f(1) = 1. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die Funktion f muß notwendigerweise *Polstellen* (erster Ordnung) an allen negativen ganzzahligen Argumenten besitzen.

Mir modifizieren daher unsere Frage und versuchen, eine *meromorphe* Funktion f auf \mathbb{C} zu finden, die $(**)$ erfüllt und nur Polstellen (von erster Ordnung) in $-\mathbb{N}$ besitzt.

Dann muß aber, wenn wir weiter annehmen, daß f keine Nullstellen besitzt, die Funktion $g := 1/f$ überall holomorph und daher nach dem Weierstraßschen Produktsatz von der Gestalt

$$g(z) = e^{h(z)} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}$$

mit einer *ganzen* Funktion h sein. Es ist also, wenn möglich, eine Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ so zu bestimmen, daß $g(1) = 1$ und

$$(+)$$

$$g(z + 1) = \frac{1}{f(z + 1)} = \frac{1}{z f(z)} = \frac{1}{z} g(z), \quad \text{d. h. } g(z) = z g(z + 1).$$

Nun ist aber $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$ für

$$g_n(z) = e^{h(z)} z \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} = e^{h(z) - z \sum_{m=1}^n 1/m} \frac{1}{n!} \prod_{m=0}^n (z + m)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{z g(z + 1)}{g(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z g_n(z + 1)}{g_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{h(z+1) - h(z) - \sum_{m=1}^n 1/m} (z + n + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{h(z + 1) - h(z) - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \log n\} \left(\frac{z + n + 1}{n}\right) \\ &= \exp\{h(z + 1) - h(z) - \gamma\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n \right)$$

die EULERSche *Konstante* ist. (Da die Funktion $x \mapsto 1/x$ für positive x streng monoton fallend ist und

$$\log n = \int_1^n \frac{dx}{x}$$

gilt, ist einfach zu sehen, daß die Folge

$$c_n := \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n$$

positiv ist und monoton fällt).

Somit sind die Bedingungen in (+) erfüllt, wenn wir $h(z) := \gamma z$ setzen. - Wir fassen zusammen:

Satz 16.12 *Die Funktion*

$$\Gamma(z) := e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} e^{z/m}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1.$$

Γ besitzt in $-m$, $m \in \mathbb{N}$, einen Pol erster Ordnung mit Residuum $(-1)^m/m!$.

Aus der Produktdarstellung der Sinusfunktion (Satz 9) gewinnt man für $g := 1/\Gamma$ die Relation

$$g(z)g(-z) = -z^2 \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2} \right) = -z \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

also auch

$$g(z+1)g(-z) = \frac{g(z)}{z} g(-z) = \frac{\sin(-\pi z)}{\pi}$$

und damit, wenn man z durch $-z$ ersetzt, die folgende Funktionalgleichung.

Satz 16.13

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Da Γ offensichtlich (siehe auch den folgenden Satz) für positive reelle x positiv sein muß, folgt hieraus und dann allgemeiner vermittelt der Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \sqrt{\pi}.$$

Durch geschicktes Umformen kann man eine weitere Darstellung der Γ -Funktion herleiten, die auf GAUSS zurückgeht. Aus dieser kann man schließlich die EULERSche *Integraldarstellung* gewinnen, mit der wir die Γ -Funktion für positive reelle Werte in der *Analysis* eingeführt hatten. Aufgrund des Identitätssatzes kann man dann noch konstatieren, daß die oben in diesem Anhang eingeführte Funktion die eindeutig bestimmte meromorphe Fortsetzung des Eulerschen Integrals darstellt.

Für den ersten Schritt schreiben wir $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z)$ mit

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= e^{z \sum_{m=1}^n 1/m - \gamma} \frac{n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} \\ &= \exp \left\{ z \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n - \gamma \right) \right\} \cdot \frac{n! n^z}{\prod_{m=0}^n (z+m)}. \end{aligned}$$

Da der erste Ausdruck auf der zweiten Zeile mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1 geht, erhält man sofort die folgende Darstellung der Γ -Funktion.

Satz 16.14 (Gauß)
$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Bemerkung. Man kann zeigen, daß die Γ -Funktion durch die Holomorphie auf $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, die Funktionalgleichung und die Normierung und eine zusätzliche Wachstumsbedingung charakterisiert werden kann.

Wir betrachten nun im folgenden nur reelle Argumente $z = x \geq 1$ und berechnen durch partielle Integration

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x} \Big|_{t=0}^{t=n} + \frac{n}{nx} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x dt.$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite verschwindet, und somit bekommt man durch vollständige Induktion die Identität

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt &= \frac{n!}{n^n x(x+1) \cdots (x+n-1)} \int_0^n t^{x+n-1} dt \\ &= \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \end{aligned}$$

Setze nun

$$\chi_n(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq n \\ 0, & t \geq n \end{cases}.$$

Dann gilt

$$0 \leq \chi_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1}$$

bei festem $x > 0$. Also ist nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, da das Integral über die rechte Seite existiert:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \chi_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \\ &= \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Wir sehen damit, daß die Γ -Funktion auf der positiven reellen Achse mit dem Eulerschen Integral übereinstimmt. Aber noch mehr: Wegen

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} t^{x-1} (\cos(y \log t) + i \sin(y \log t))$$

konvergiert auch das Integral

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

für komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re} z > 0$. Überdies kann man in dieser Beziehung die Integration mit der Differentiation nach der Variablen \bar{z} vertauschen; somit stellt F eine in der rechten Halbebene holomorphe Funktion dar. Erneut mit dem Identitätssatz schließen wir:

Satz 16.15 Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Bemerkung. An dieser Integraldarstellung kann man erneut einsehen, daß die Γ -Funktion von der rechten Halbebene auf eindeutige Weise zu einer meromorphen Funktion auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden kann, die notwendigerweise der Funktionalgleichung (***) genügt. Man erhält nämlich wie im Reellen (vermöge partieller Integration nach der Variablen t) die Beziehung

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \Gamma(z+1),$$

womit die Funktion eindeutig in den Halbraum $\{\operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden kann. So fortfahrend, findet man eine holomorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Man kann auch die Ableitungen der Γ -Funktion durch Integralformeln darstellen. Wir gehen dazu zunächst formal vor und entwickeln den Integranden des Euler-Integrals um einen beliebigen Punkt z_0 in der rechten Halbebene in eine Potenzreihe:

$$t^{z-1} = t^{z_0-1} t^{z-z_0} = t^{z_0-1} e^{(z-z_0)\log t} = t^{z_0-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\log t)^n \frac{(z-z_0)^n}{n!}.$$

Könnten wir jetzt einfach in dem Euler-Integral die Integration mit der Potenzreihen-Entwicklung vertauschen, so hätten wir

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z_0-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\log t)^n \frac{(z-z_0)^n}{n!} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z_0-1} (\log t)^n dt \right) \frac{(z-z_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

und damit müßte, wenn wir wieder z_0 durch z ersetzen, für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

gelten.

Man kann dieses Vorgehen tatsächlich vollständig rechtfertigen. In den folgenden Ausführungen soll es uns zumindest darum gehen, die Richtigkeit der vorstehenden Ableitungsformeln zu begründen. Dies gelingt am eindrucksvollsten durch die Anwendung eines überraschend einfachen Kriteriums zur Vertauschung von Integration und Differentiation von partiell holomorphen Funktionen.

Satz 16.16 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und die komplexwertige Funktion $f = f(z, t)$, $(z, t) \in G \times \mathbb{R}^m$, sei holomorph bei festgehaltenem $t \in \mathbb{R}^m$ und integrierbar über \mathbb{R}^m bei festgehaltenem $z \in G$. Ferner existiere eine Funktion Φ auf \mathbb{R}^m mit endlicher L_1 -Norm, so daß $|f(z, t)| \leq \Phi(t)$ für alle $z \in G$. Dann ist die Funktion

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f(z, t) d^m t$$

holomorph auf G , und es gilt

$$F'(z) := \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d^m t$$

an jeder Stelle $z \in G$.

Beweis. Wir werden mit dem entsprechenden Vertauschungssatz für partielle Ableitungen zeigen, daß die Funktion F auf dem Gebiet G stetig differenzierbar ist und den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen genügt. Es sei dazu $z_0 \in G$ fest gewählt und $D = D_r(z_0)$ ein Kreis mit $\overline{D}_{2r} \subset G$. Nach den Cauchyschen Ungleichungen ist dann für alle $(z, t) \in D \times \mathbb{R}^n$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(z, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq \frac{2}{r} \max_{z \in \partial D_{2r}} |f(z, t)| \leq \frac{2}{r} \Phi(t).$$

Also sind auf $D \times \mathbb{R}^m$ die Standard–Voraussetzungen für die Vertauschungsregeln der reellen Analysis erfüllt, und damit ist F auf D stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x}(z, t) d^m t \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial y}(z, t) d^m t.$$

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen $F_x + i F_y = 0$ sind erfüllt, da

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) + i \frac{\partial F}{\partial y}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z, t) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z, t) \right) d^m t = 0.$$

Die behauptete Gleichung ergibt sich schließlich mit

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x}(z, t) d^m t = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d^m t. \quad \square$$

Bemerkung. Mit den Cauchyschen Ungleichungen sieht man unmittelbar, daß auch für jede komplexe Ableitung von f wieder Abschätzungen des geforderten Typs bestehen. Somit ist die entsprechende Vertauschungs–Formel für alle Ableitungen von F gültig:

$$F^{(n)}(z) := \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) d^m t.$$

Für die gewünschte Anwendung auf die Ableitungen der Γ -Funktion müssen wir nur die Abschätzung des Integranden $f(z, t) = e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1) \log t}$ des Euler–Integrals im Sinne des gerade bewiesenen Satzes angeben. Da Differenzierbarkeit nach z eine lokale Eigenschaft ist, können wir uns auf die Betrachtung der Streifen $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b < \infty$ mit $a \leq 1 \leq b$ beschränken. Dort ist aber

$$|f(z, t)| \leq \Phi(t) := (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t},$$

und die Majorante Φ ist über \mathbb{R}_+ integrierbar.

Bemerkung. Man beachte, wieviel mühsamer die Beweisskizze ausfällt, wenn man nur den reellen Satz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ins Spiel bringt. (Siehe mein Manuskript *Analysis III*, Ende von Kapitel 35).

17 Elliptische Funktionen

Wir wollen als erstes die *Periodizitätseigenschaften* holomorpher und meromorpher Funktionen genauer untersuchen. Wir betrachten zunächst eine noch etwas allgemeinere Situation.

Definition und Bemerkung. Es sei $S \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge, die Funktion f sei auf $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph, und alle Punkte $a \in S$ seien singulär für f . Ein Wert $\omega \in \mathbb{C}$ heißt eine *Periode* der Funktion f , wenn

$$f(z + \omega) = f(z)$$

für alle Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus S$.

Da $\mathbb{C} \setminus S$ und $(\mathbb{C} \setminus S) + \omega$ offene Menge sind, ist aufgrund der Definition die Funktion f auch holomorph auf $(\mathbb{C} \setminus S) + \omega$ und damit $(\mathbb{C} \setminus S) + \omega \subset \mathbb{C} \setminus S$. Ferner besitzt die Funktion f in einer Umgebung eines Punkt $z \in S$ das gleiche Verhalten wie im Punkte $z + \omega$. Infolgedessen ist auch $S + \omega \subset S$ und schließlich $S + \omega = S$.

Offensichtlich gilt: Sind ω_1, ω_2 Perioden von f , so auch $\omega_1 + \omega_2$. Ferner ist mit einer Periode ω auch $S = (S - \omega) + \omega = S - \omega$. Ist also f holomorph in z , so auch in $z - \omega$, und es gilt $f(z) = f(z - \omega + \omega) = f(z - \omega)$. Folglich ist $-\omega$ ebenfalls eine Periode von f . - Mit anderen Worten:

Die Menge der Perioden $\Omega = \Omega_f := \{\omega : \omega \text{ ist Periode von } f\}$ bildet eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$. Insbesondere ist 0 Periode jeder Funktion f , und es gilt $\Omega_f = \mathbb{C}$ genau dann, wenn $f = \text{const}$.

Wir kommen zu dem ersten wichtigen

Satz 17.1 *f sei eine nicht konstante holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus S$, $S \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge. Dann ist $\Omega = \Omega_f$ eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$.*

Beweis. Wir nehmen an, $\Omega \subset \mathbb{C}$ sei nicht diskret. Es gibt somit eine in \mathbb{C} konvergente Folge $\omega_j \in \Omega$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j =: a \neq \omega_j$ für alle j . Sei f in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$f(z + \omega_j) = f(z) \quad \text{für alle } z \in U(z_0)$$

und alle j , so daß

$$f(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(z + \omega_j) = f(z + a).$$

Also ist f holomorph in $z_0 + a$, und da f konstant auf der Menge $\{z_0 + \omega_j\}$ ist, ist f wegen des Identitätssatzes auf ganz $\mathbb{C} \setminus S$ konstant. Widerspruch! \square

Die diskreten Untergruppen von $(\mathbb{C}, +)$ lassen sich nun leicht bestimmen.

Satz 17.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe. Dann hat Ω die Gestalt i), ii) oder iii):*

- i) $\Omega = \{0\}$;
- ii) es existiert ein Element $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$, so daß $\Omega = \{n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$;
- iii) es existieren über \mathbb{R} linear unabhängige Elemente $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, so daß

$$\Omega = \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. Ist $\Omega = \{0\}$, so sind wir fertig. Sei also $\Omega \neq \{0\}$ und $\tilde{\omega}$ ein von Null verschiedenes Element in Ω . Wegen der Diskretheit von Ω gibt es dann ein dem Betrage nach kleinstes Element $\omega_0 \neq 0$ in der Untergruppe der Elemente von Ω , die auf der reellen Geraden durch den Ursprung und $\tilde{\omega}$ liegen:

$$\omega_0 \in \mathbb{Z}\omega_0 \subset \Omega \cap \mathbb{R}\tilde{\omega} = \Omega \cap \mathbb{R}\omega_0.$$

Hier muß in der Mitte sogar Gleichheit gelten: Denn angenommen, es sei $\lambda \omega_0 \in \Omega$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < \lambda < n + 1$. Folglich ist auch $(\lambda - n)\omega_0 \in \Omega \setminus \{0\}$, aber $0 \neq |(\lambda - n)\omega_0| < |\omega_0|$. Widerspruch!

Wir wählen nun ein *absolut kleinstes* Element $\omega_1 \in \Omega \setminus \{0\}$, also ein Element ω_1 mit $|\omega_1| = \inf \{|\omega| : \omega \in \Omega \setminus \{0\}\}$. Nach dem soeben Bewiesenen ist $\Omega_1 := \mathbb{Z}\omega_1 = \Omega \cap \mathbb{R}\omega_1 \subset \Omega$.

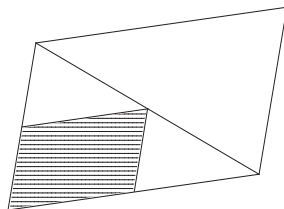
Ist $\Omega_1 = \Omega$, so ist nichts weiter zu zeigen. Im anderen Fall gibt es ein Element $\omega_2 \in \Omega$, das von ω_1 über \mathbb{R} linear unabhängig ist. Wähle wieder ein solches ω_2 mit minimaler Norm, so daß also auch $\Omega_2 := \mathbb{Z}\omega_2 = \Omega \cap \mathbb{R}\omega_2 \subset \Omega$ und $|\omega_2| \geq |\omega_1|$ gilt. Ist dann $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ beliebig, so gibt es, da ω_1, ω_2 den \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} erzeugen, Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2.$$

Da man ganzzahlige Vielfache von ω_1 und ω_2 addieren und subtrahieren kann, ergibt sich die Existenz von ganzen Zahlen n_1, n_2 , so daß

$$\omega' = \omega - n_1 \omega_1 - n_2 \omega_2 = \tau_1 \omega_1 + \tau_2 \omega_2$$

eine Periode ist, wobei $|\tau_1| \leq 1/2$, $|\tau_2| \leq 1/2$.



Figur 17.1

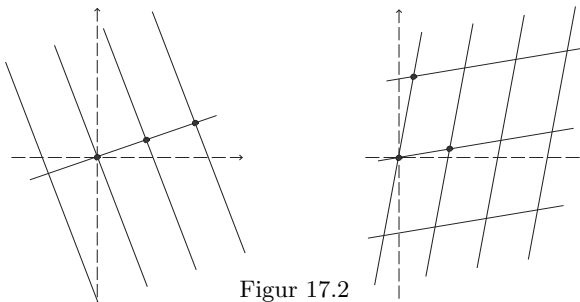
Ist hier $\tau_2 = 0$, so folgt $\omega' = \tau_1 \omega_1 \in \Omega_1 = \{n\omega_1\}$ und damit $\tau_1 = 0$, also $\omega = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$. Entsprechendes folgt aus $\tau_1 = 0$. Sind aber $\tau_1, \tau_2 \neq 0$, so ergibt sich, daß $\omega' \in \Omega$ linear unabhängig von ω_1 und von ω_2 ist, und daß

$$|\omega'| < \frac{1}{2} |\omega_1| + \frac{1}{2} |\omega_2| \leq |\omega_2|$$

im Widerspruch zur Wahl von ω_2 gilt! Also ist $\{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2\} \subset \Omega \subset \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2\}$ gezeigt. Da in allen drei Fällen Ω tatsächlich eine diskrete Gruppe definiert, ist der Beweis vollständig. \square

Definition. Sei f eine nicht konstante meromorphe Funktion. Dann heißt f

- i) *nicht periodisch*, falls $\Omega_f = \{0\}$;
- ii) *(einfach) periodisch*, falls $\Omega_f = \{n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$, $\omega \neq 0$;
- iii) *doppelt periodisch*, falls Ω_f ein Gitter $\{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2\}$ vom (maximalen) Rang 2 ist.

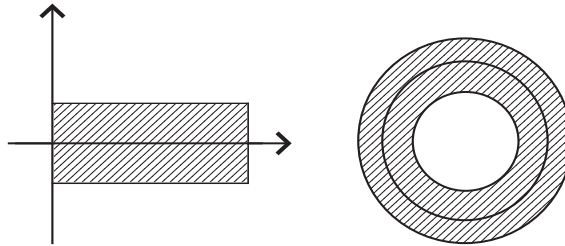


Figur 17.2

Wir betrachten zunächst noch einmal kurz den Fall einer ganzen holomorphen Funktion f mit Periode ω (siehe auch die *Grundzüge*). Ohne Einschränkung können wir $\omega = 2\pi$ annehmen. Funktionen mit einer solchen Periode sind z. B.

$$e^{\pm iz}, \quad e^{\pm 2iz}, \quad e^{\pm 3iz}, \dots$$

(Wir setzen nicht voraus, daß $\omega = 2\pi$ eine *primitive* Periode ist, d. h. daß $\Omega_f = \{n\omega\}$ gilt). Man kann dann f bekanntlich in eine Reihe bzgl. der $e^{\pm inz}$ entwickeln. Man setzt dazu $w = e^{iz}$ mit der Umkehrabbildung $z = \frac{1}{i} \log w$ (die natürlich nicht eindeutig ist).



Figur 17.3

Bilde jetzt

$$g(w) := f\left(\frac{1}{i} \log w\right).$$

g ist sicher in der aufgeschlitzten w -Ebene holomorph. g ist aber sogar auf \mathbb{C}^* holomorph, denn umläuft man $0 \in \mathbb{C}$ einmal positiv, so wächst $\log w$ um $2\pi i$, $\frac{1}{i} \log w$ also um 2π , und wegen der Periodizität von f ändert sich an g nichts, d. h. $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Nach dem Satz von Laurent besteht dann eine Entwicklung

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n, \quad w \in \mathbb{C}^*.$$

Dies gilt auch für jedes $w = e^{iz}$, $z \in \mathbb{C}$. Wegen $g(e^{iz}) = f(z)$ folgt dann

Satz 17.3 (Fourierentwicklung) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit Periode 2π . Dann existiert eine überall konvergente Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz},$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-inz} dz.$$

Beweis. Nur die letzte Behauptung ist zu begründen. Sie folgt aus dem Satz von der Laurententwicklung und der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{e^{(n+1)iz}} de^{iz} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-inz} dz, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf *reelle* periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Periode 2π) anwenden, sofern diese reell-analytisch sind. Dann gibt es nämlich (siehe *Grundzüge*) eine holomorphe Fortsetzung $F : \{ | \operatorname{Im} z | < \varepsilon \} \rightarrow \mathbb{C}$ von f , die ebenfalls periodisch mit Periode 2π ist. Die Funktion $w = e^{iz}$ bildet den obigen Streifen auf einen Kreisring um $|w| = 1$ ab. Das gleiche Argument wie oben liefert dann:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Nun ist für reellwertiges f

$$\alpha_n := 2 \operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \alpha_{-n},$$

$$\beta_n := 2 \operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = -\beta_{-n}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx). \end{aligned}$$

Man gewinnt also auf diese Weise die *reelle Fourierentwicklung*.

Im zweiten Teil dieses Kapitels betrachten wir die *elliptischen Funktionen* genauer: Sei dazu $\Omega = \{ n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \}$ ein Gitter vom Rang 2 in \mathbb{C} , d. h. $\mathbb{R} \omega_1 + \mathbb{R} \omega_2 = \mathbb{C}$. $K(\Omega)$ bezeichne dann die Menge der *meromorphen* Funktionen f auf \mathbb{C} mit $\Omega \subset \Omega_f$. (Dann ist notwendigerweise, außer im Fall $f = \text{const.}$, die Gruppe Ω_f ein Gitter vom Rang 2, wobei aber $\Omega \neq \Omega_f$ sein kann!).

Definition. Jede Funktion $f \in K(\Omega)$ heißt eine *elliptische Funktion* zum *Periodengitter* Ω .

Klar ist: Sind $f_1, f_2 \in K(\Omega)$, so auch $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$, f_1/f_2 ($f_2 \neq 0$). Alle Konstanten sind in $K(\Omega)$. Also ist $K(\Omega)$ ein Körper über \mathbb{C} (ein spezieller *Funktionenkörper*). Außerdem ist mit $f \in K(\Omega)$ auch $f' \in K(\Omega)$!

Im Gegensatz zu einfach periodischen holomorphen Funktionen gibt es aber keine nichttrivialen *holomorphen* elliptischen Funktionen.

Satz 17.4 *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $\bar{P} = \{ \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1 \}$ ein abgeschlossenes Periodenparallelogramm. Dann ist

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z \in \bar{P}} |f(z)| < \infty.$$

Nach dem Maximumprinzip ist f konstant. □

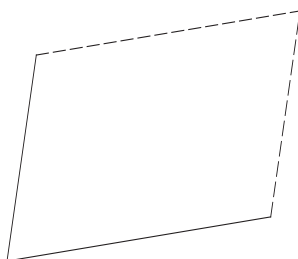
Aber auch *meromorphe* elliptische Funktionen sind starken Einschränkungen unterworfen. Dazu definieren wir zu dem Gitter $\Omega = \{ n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \}$ das (halboffene) Periodenparallelogramm

$$P = \{ \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 : 0 \leq \lambda_1 < 1, 0 \leq \lambda_2 < 1 \},$$

so daß also

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\gamma \in \Omega} \gamma(P) \quad \text{und} \quad P \cap \gamma(P) \neq \emptyset \iff \gamma = \text{id}.$$

(Wie hier die Gruppe Ω auf \mathbb{C} operiert, ist klar: nämlich durch Addition).

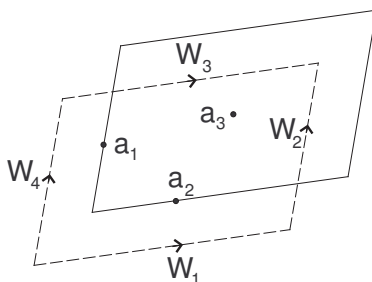


Figur 17.4

Satz 17.5 Seien a_1, \dots, a_k die Polstellen von $f \in K(\Omega)$ in dem Fundamentalparallelogramm P . Dann gilt :

$$\sum_{\kappa=1}^k \operatorname{res}_{a_\kappa} f = 0.$$

Beweis. Man verschiebe das Parallelogramm P parallel, so daß keiner der Punkte a_1, \dots, a_k auf dem Rand des verschobenen Parallelogramms $\partial P'$ liegt. Man zerlege dann dessen Rand wie in der Zeichnung in $\partial P' = W_1 + W_2 - W_3 - W_4$.



Figur 17.5

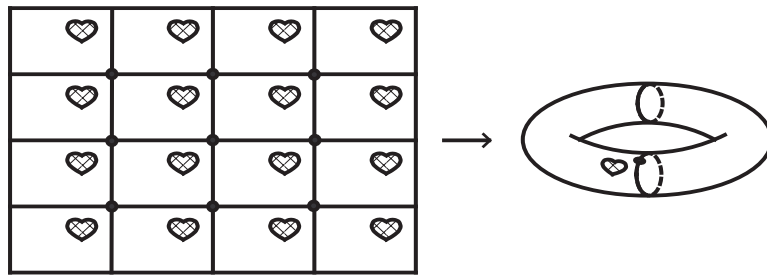
Es folgt wegen der Periodizität

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_\kappa} f &= \int_{\partial P} f dz \\ &= \int_{W_1} f dz - \int_{W_3} f dz + \int_{W_2} f dz - \int_{W_4} f dz = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Folgerung 17.6 Besitzt $f \in K(\Omega)$ im halboffenen Periodenparallelogramm P höchstens einen Pol erster Ordnung, so ist f konstant.

Bemerkung. \mathbb{C}/Ω ist topologisch ein Torus; d. h. der mit der üblichen Quotiententopologie versehene Raum \mathbb{C}/Ω ist homöomorph zu dem Produktraum $S^1 \times S^1$.



Figur 17.6

\mathbb{C}/Ω trägt aber auch eine „holomorphe“ Struktur; genauer: \mathbb{C}/Ω ist eine (kompakte) RIEMANNSCHE Fläche (vom Geschlecht 1) (siehe hierzu das nächste Kapitel). Jeder elliptischen Funktion $f \in K(\Omega)$ ist in offensichtlich eindeutiger Weise eine meromorphe Funktion auf dieser Riemannschen Fläche \mathbb{C}/Ω zugeordnet. Satz 5 gilt unter diesem Aspekt tatsächlich in viel größerer Allgemeinheit:

Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche verschwindet für jede meromorphe Funktion die Residuensumme.

Wir beweisen noch einen weiteren allgemeinen Satz für elliptische Funktionen.

Satz 17.7 *Eine nichtkonstante elliptische Funktion nimmt in ihrem Periodenparallelogramm P jeden Wert in \mathbb{C} (sogar aus $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) gleich oft (mit Vielfachheit gezählt) an. Insbesondere ist die totale Nullstellenordnung in P gleich der totalen Polstellenordnung.*

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist mit f auch $\frac{f'}{f-c} \in K(\Omega)$ und damit nach dem vorstehenden Satz

$$\sum \operatorname{res} \frac{f'}{f-c} = 0.$$

Die linke Seite ist aber nach dem Satz von Rouché gleich der Anzahl der c -Stellen minus der Anzahl der Polstellen von f . \square

Bemerkung. Auch dieses Ergebnis ist übrigens ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes über meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen.

Wegen Satz 5 kann eine elliptische Funktion nicht nur einen Pol erster Ordnung in P haben. Bei der Suche nach einer möglichst „einfachen“ elliptischen Funktion versucht man daher, eine solche mit genau einem Pol zweiter Ordnung zu finden. Eine solche Funktion existiert tatsächlich, und sie hat überaus bemerkenswerte Eigenschaften. Man gewinnt sie selbstverständlich aus der naheliegenden Mittag-Leffler-Verteilung

$$\left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} : \omega \in \Omega \right\}.$$

Hier ist jedoch die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega} (z-\omega)^{-2}$ nicht konvergent, so daß wir noch konvergenzerzeugende Summanden hinzufügen müssen (was bei ungeschickter Wahl die Periodizitätseigenschaften zerstören könnte). - In der Tat erhält man ohne große Schwierigkeiten:

Satz 17.8 *Die Funktion*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

besitzt das Periodengitter $\Omega_\wp = \Omega$, ist also elliptisch zum Gitter Ω . \wp ist eine gerade Funktion: $\wp(-z) = \wp(z)$.

Definition. Die Funktion \wp heißt die *Weierstraßsche \wp -Funktion* (zum Gitter Ω).

Beweis (von Satz 8). 1. Die Reihe ist lokal gleichmäßig konvergent: Sei nämlich $|z| \leq R$. Dann ist mit der Diskretheit des Gitters Ω für fast alle ω der Betrag $|\omega| \geq 2R$, und für diese ω ist (unabhängig von R):

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z| |2\omega - z|}{|\omega|^2 |z - \omega|^2} \leq \frac{R \cdot 3|\omega| \cdot 4}{|\omega|^2 \cdot |\omega|^2} \leq C \cdot \frac{1}{|\omega|^3}.$$

Es muß daher zum Abschluß des Nachweises von 1. gezeigt werden:

2. Die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} =: \sum' \frac{1}{|\omega|^3}$ ist konvergent.

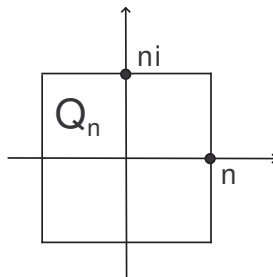
Seien dazu konkrete Erzeuger gegeben: $\Omega = \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2\}$. Durch einen \mathbb{R} -linearen Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ geht das Gitter Ω über in das Gitter $\tilde{\Omega}$ der Gaußschen Zahlen $\{n_1 + i n_2\}$. Infolgedessen existiert eine Konstante K , so daß

$$|n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2| \geq K |n_1 + i n_2| \quad \text{für alle } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{1}{K^3} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}}.$$

Wähle nun die Rechtecke Q_n wie in der nachfolgenden Zeichnung.



Figur 17.7

Dann hat $\partial Q_n \cap \tilde{\Omega}$ offensichtlich $8n$ Elemente, so daß

$$\sum' \frac{1}{|n_1 + i n_2|^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8n \frac{1}{n^3} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(Die Reihenfolge der Summation spielt keine Rolle, da alle Glieder positiv sind!)

3. Es bleibt zu zeigen: \wp ist periodisch zu dem Periodengitter Ω . Bilde dazu die Ableitung $\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-3}$. Diese hat offensichtlich das richtige Periodizitätsverhalten; denn mit $\omega_0 \in \Omega$ ist für alle $z \notin \Omega$

$$\wp'(z + \omega_0) = -2 \sum_{\omega} \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \wp'(z).$$

Für die Funktion \wp selbst bedeutet dies natürlich die Existenz von Konstanten c_j , $j = 1, 2$, mit

$$\wp(z + \omega_j) - \wp(z) = c_j$$

für alle $z \notin \Omega$. Wählt man hierin speziell $z = -\omega_j/2$ (\wp ist dort in der Tat holomorph) und beachtet man die aus der Reihendarstellung folgende Geradheit der \wp -Funktion: $\wp(-z) = \wp(z)$, so ergibt sich unmittelbar

$$c_j = \wp(\omega_j/2) - \wp(-\omega_j/2) = \wp(\omega_j/2) - \wp(\omega_j/2) = 0. \quad \square$$

Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir den Körper $K(\Omega)$ vollständig bestimmen. Wir werden zeigen, daß $K(\Omega)$ algebraisch aus \wp und \wp' aufgebaut ist. Dazu zeigen wir zunächst:

Satz 17.9 (Differentialgleichung der \wp -Funktion) *Es gilt :*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

wobei

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}.$$

Beweis. $f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$ ist eine elliptische Funktion, die höchstens Polstellen in den Gitterpunkten $\omega \in \Omega$ besitzen kann. Es genügt also zu zeigen: f hat eine hebbare Singularität in 0 mit $f(0) = 0$ (denn dann ist nach Satz 4 $f = \text{const.} = 0$).

Wir müssen also die Laurent-Entwicklung von \wp in 0 bestimmen. Für $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ und $|z| < |\omega|$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} &= \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} - 1 \right] = \frac{1}{\omega^2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{z}{\omega}\right)^{j-1} - 1 \right] \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} j \frac{z^{j-1}}{\omega^{j+1}}. \end{aligned}$$

(Hier erhält man die zweite Zeile durch Differentiation der geometrischen Reihe $1/(1-\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j$).

Daraus folgt weiter die Laurententwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega}' \sum_{j=2}^{\infty} j \frac{z^{j-1}}{\omega^{j+1}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=2}^{\infty} j \left(\sum_{\omega}' \frac{1}{\omega^{j+1}} \right) z^{j-1}$$

der Weierstraßschen \wp -Funktion um den Nullpunkt. Nun verschwinden hierin die Koeffizienten mit *geradem* Index j , da mit $\omega \in \Omega'$ auch $-\omega \in \Omega'$ enthalten ist. Also ergibt sich schließlich

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} z^{2j}, \quad c_{2j} = \sum' \frac{1}{\omega^{2j+2}} \cdot (2j+1).$$

Betrachten wir nur die relevanten ersten Glieder:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots \\ \wp'(z) &= \frac{-2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \dots, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 3 \frac{c_2}{z^2} + 3c_4 + \dots \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 8 \frac{c_2}{z^2} - 16c_4 + \dots \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 \\
 &= 4 \left(\frac{1}{z^6} - \frac{2c_2}{z^2} - 4c_4 + \dots \right) \\
 &\quad - 4 \left(\frac{1}{z^6} + 3\frac{c_2}{z^2} + 3c_4 + \dots \right) \\
 &\quad + 20c_2 \left(\frac{1}{z^2} + \dots \right) + 28c_4 \\
 &= z^2 \cdot \text{Potenzreihe} ,
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war. \square

Durch Differentiation dieser Relation und anschließende Division durch \wp' gewinnt man die folgende Differentialgleichung:

$$(+) \quad \wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2 = 6\wp^2(z) - 10c_2 ,$$

aus der man unmittelbar eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_{2j} in der Laurent-Entwicklung der \wp -Funktion herleiten kann.

Folgerung 17.10 *Es gelten die Rekursionsformeln*

$$(j-2)(2j+3)c_{2j} = 3 \sum_{\iota+\kappa=j-1} c_{2\iota} c_{2\kappa} .$$

Offensichtlich spielt das Polynom $4s^3 - g_2s - g_3$ eine wesentliche Rolle in der Theorie der elliptischen Funktionen zum Gitter Ω (man beachte, daß die Koeffizienten g_2, g_3 von dem Gitter abhängig sind). Man kann sogar die Nullstellen dieses Polynoms angeben: Aus $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 0$ folgt $\wp'(z) = 0$. Da \wp' exakt eine Polstelle 3. Ordnung im Periodenparallelogramm hat, muß \wp' drei Nullstellen in P besitzen. Nun ist aber $\wp'(-z) = -\wp'(z)$ und daher z. B.

$$\wp' \left(+\frac{\omega_1}{2} \right) = \wp' \left(+\frac{\omega_1}{2} - \omega_1 \right) = \wp' \left(-\frac{\omega_1}{2} \right) = -\wp' \left(+\frac{\omega_1}{2} \right) ,$$

so daß also

$$\wp' \left(\frac{\omega_1}{2} \right) = 0$$

kommt. Setzen wir

$$\rho_1 = \frac{\omega_1}{2} , \quad \rho_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} , \quad \rho_3 = \frac{\omega_2}{2} ,$$

so erhalten wir auf entsprechende Weise:

$$\wp'(\rho_j) = 0 ,$$

d. h. die ρ_j sind genau die Nullstellen von \wp' in P (notwendig alle von erster Ordnung).

Setzen wir nun noch $e_j = \wp(\rho_j)$, $j = 1, 2, 3$, so muß $4e_j^3 - g_2e_j - g_3 = 0$ gelten. Wir wollen zeigen, daß die e_j paarweise verschieden sind und deshalb genau die drei Nullstellen des in Frage stehenden Polynoms darstellen: Da $\wp'(\rho_j) = 0$ ist, ist ρ_j eine e_j -Stelle mindestens der Ordnung 2. Wäre dann $e_j = e_k$, $j \neq k$, so wäre die Anzahl der e_j -Stellen mindestens gleich 4, was einen Widerspruch zu Satz 7 darstellen würde (die Anzahl der Polstellen von \wp ist 2). Insbesondere sehen wir, daß die Diskriminante

Δ des obigen Polynoms stets von 0 verschieden sein muß. Dieses berechnet sich im übrigen wie folgt:
Mit

$$\begin{aligned} 4s^3 - g_2 s - g_3 &= 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) \\ &= 4(s^3 - (e_1 + e_2 + e_3)s^2 + (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)s - e_1 e_2 e_3) \end{aligned}$$

schließt man

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad 4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = -g_2, \quad 4e_1 e_2 e_3 = g_3.$$

Daher ist

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_1 - e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Wir können einen Teil der obigen Ergebnisse noch anders interpretieren. Für die elliptische Funktion

$$f(z) = \wp'(z)^2 - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

gilt: Sie hat

- i) höchstens einen Pol 4. Ordnung (die ersten Terme heben sich weg!),
- ii) in ρ_j , $j = 1, 2, 3$, Nullstellen der Ordnung ≥ 2 .

Dies geht nach Satz 7 wiederum nur, wenn $f \equiv \text{const.} = 0$ ist. - Wir fassen zusammen:

Satz 17.11 Für die \wp -Funktion gilt

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

mit den paarweise verschiedenen Werten

$$e_j = \wp(\rho_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Wir kommen jetzt zu dem schon angekündigten Struktursatz über den Körper der elliptischen Funktionen zum Gitter Ω .

Satz 17.12 Jede elliptische Funktion ist eine rationale Funktion in \wp und \wp' . D. h. zu $f \in K(\Omega)$ gibt es Polynome $R, S \in \mathbb{C}[s, t]$ mit

$$f = \frac{R(\wp, \wp')}{S(\wp, \wp')}.$$

Genauer gilt: Der Körper $K(\Omega)$ der elliptischen Funktionen ist isomorph zum Körper

$$\mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3).$$

Beweis. A. Sei $f \in K(\Omega)$; schreibe dann

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(z) + f(-z))}_{\text{elliptisch, gerade}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))}_{\text{elliptisch, ungerade}}.$$

Es genügt daher, f als gerade oder ungerade anzunehmen. Ist aber f ungerade, so ist f/\wp' gerade. Wenn man dann f/\wp' in der behaupteten Weise darstellen kann, so auch f . Dies reduziert unser Problem auf den Fall einer *geraden* nichtkonstanten Funktion f .

f' hat nur endlich viele Nullstellen in \bar{P} ; also sind alle c -Stellen von f einfach (mit Ausnahme von endlich vielen Werten c). Es gibt also feste Zahlen $c \neq d$, so daß f den Wert c und den Wert d

genau an jeweils m Stellen in P einfach annimmt. Ist nun $f(a) = c$, so folgt auch $f(-a + \omega) = f(-a) = f(a) = c$ für alle $\omega \in \Omega$. Wäre aber $a = -a + \omega$ für ein ω , so ergäbe sich aus

$$f(a + z) = f(-a + \omega + z) = f(-a + z) = f(a - z)$$

unmittelbar

$$f'(a + z) = -f'(a - z) \quad \text{und damit} \quad f'(a) = 0$$

im Widerspruch zu der Einfachheit der c -Stelle a . Also ist stets $m = 2k$, und die c -Stellen in P lassen sich als Paare schreiben:

$$a_1, a'_1 = -a_1 + \omega'_1, \dots, a_k, a'_k = -a_k + \omega'_k,$$

$\omega'_1, \dots, \omega'_k \in \Omega$ geeignet. Der Wert d wird ebenfalls an Stellen

$$b_1, b'_1 = -b_1 + \omega''_1, \dots, b_k, b'_k = -b_k + \omega''_k$$

angenommen. Bilde nun die Funktion

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}.$$

F hat Nullstellen 1. Ordnung in den a_κ, a'_κ , Polstellen 1. Ordnung in den b_κ, b'_κ , und ist sonst holomorph (auch an den Polstellen von f !) und von 0 verschieden. Bilde andererseits

$$G(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(a_k))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(b_k))}.$$

G hat dieselben Eigenschaften wie F , so daß F/G elliptisch und holomorph ist. Dies impliziert $F = \alpha G$ mit einer Konstanten α . Auflösen dieser Relation nach f liefert die erwünschte Einsicht, daß die Funktion f rational in \wp dargestellt werden kann.

B. Betrachte den Homomorphismus

$$\varphi : \mathbb{C}(s)[t] \longrightarrow K(\Omega),$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} s &\longmapsto \wp, \\ t &\longmapsto \wp'. \end{aligned}$$

Nach Teil A ist dieser Homomorphismus surjektiv. Andererseits ist das Polynom $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$ wegen Satz 9 im Kern von φ enthalten. Es folgt, daß φ faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(s)[t] & \xrightarrow{\varphi} & K(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3) & \longrightarrow & \mathbb{C}(s)[t]/\ker \varphi \end{array}$$

Nun ist $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$ offensichtlich irreduzibel, also $\mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - \dots)$ ein Körper, und damit der untere Pfeil ein Isomorphismus. \square

Mit f ist auch jede Funktion f_w elliptisch zum gleichen Gitter Ω , wenn $f_w(z) := f(z + w)$. Also läßt sich nach dem vorstehenden Satz auch f_w schreiben in der Form

$$f_w = R_w(\wp) + S_w(\wp) \cdot \wp'.$$

Speziell für $f := \wp$ lassen sich die rationalen Funktionen R_w, S_w leicht bestimmen. Dies führt zu dem folgenden Satz, dessen Beweisdetails wir dem Leser überlassen.

Satz 17.13 (Additionstheorem der \wp -Funktion) Für komplexe Zahlen z, w , für die $z, w, z + w, z - w$ nicht in Ω liegen, besteht die Beziehung

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - (\wp(z) + \wp(w)).$$

Läßt man in der vorstehenden Formel w gegen z gehen, so erhält man sofort die *Verdoppelungsformel* der \wp -Funktion in der Form

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z).$$

Ersetzt man hierin die auftretenden Ableitungen durch die oben hergeleiteten Differentialgleichungen, so ergibt sich schließlich eine explizite Formel für $\wp(2z)$ als rationale Funktion von $\wp(z)$.

Folgerung 17.14 (Verdoppelungsformel der \wp -Funktion) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $2z \notin \Omega$ ist

$$\wp(2z) = \frac{(\wp^2(z) + g_2/4)^2 + 2g_3\wp(z)}{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}.$$

Es sollen an dieser Stelle ein paar Worte zum Begriff „elliptische“ Funktion eingefügt werden. Damit wir die Weierstraßsche \wp -Funktion für die Belange der *reellen* Analysis nutzbar machen können, sollte sie an reellen Stellen auch nur reelle Werte annehmen. Dies schränkt die möglichen Gitter Ω stark ein.

Satz 17.15 Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- i) Die Weierstraßsche \wp -Funktion nimmt auf \mathbb{R} nur Werte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ an.
- ii) Die Koeffizienten g_2, g_3 sind reell.
- iii) Alle Koeffizienten c_{2k} in der Laurent-Entwicklung sind reell.
- iv) Es gilt $\wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
- v) Das unterliegende Gitter Ω ist invariant unter Konjugation.
- vi) Das unterliegende Gitter Ω ist achsenparallel oder rhombisch, d. h. $\omega_2 = \bar{\omega}_1$.

Beweis. i) \implies ii). Aus der Differentialgleichung (+) folgt, daß g_2 reell ist, und $g_3 \in \mathbb{R}$ ergibt sich danach aus Satz 9.

ii) \implies iii). Mit g_2, g_3 sind auch c_2, c_4 reell. Die restlichen Koeffizienten sind reell wegen der Rekursionsformeln (Folgerung 10).

iii) \implies iv). Trivial.

iv) \implies v). Es sei $\omega \in \Omega$. Dann ist

$$\wp(z + \bar{\omega}) = \overline{\wp(\bar{z} + \omega)} = \overline{\wp(\bar{z})} = \wp(z).$$

Die Richtung v) \implies vi) benutzt nur elementare *Lineare Algebra* und wird daher übergangen. Klar ist auch vi) \implies v) und iv) \implies i). Setzen wir nun noch voraus, daß die Konjugation $\omega \mapsto \bar{\omega}$ ein Automorphismus des Gitters Ω ist, so folgt:

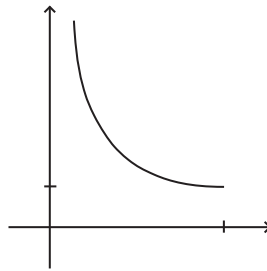
$$\wp(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}^2} + \sum' \left(\frac{1}{(\bar{z} - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{1}{\bar{z}^2} + \sum' \left(\frac{1}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) = \overline{\wp(z)}.$$

Dies beweist die noch verbliebene Richtung v) \implies iv). \square

Wir betrachten den Fall eines *achsenparallelen* Gitters $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit $\omega_1 > 0$ und $\omega_2 = i\omega'_2$, $\omega'_2 > 0$, und die dazu gehörige \wp -Funktion noch etwas genauer. Es ist also $\wp(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ und $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$. Sei wie oben $\rho_1 = \omega_1/2$, $e_1 = \wp(\rho_1)$ gesetzt. Dann gilt für $0 < x < \rho_1$:

$$\wp(x) = \wp(-x) = \wp(-x + \omega_1).$$

Da $-x + \omega_1 > \rho_1$ ist und \wp jeden Wert in P genau zweimal annimmt, wird also $\wp(x)$ in $(0, \rho_1)$ nur an der Stelle x angenommen. Ferner geht für $x \searrow 0$ der Funktionswert $\wp(x)$ nach $+\infty$. Also sieht der Graph von \wp im Intervall $(0, \rho_1]$ etwa wie folgt aus:



Figur 17.8

Somit hat $\wp(x)$ eine streng monoton fallende Umkehrfunktion

$$E = E(u) : [e_1, \infty) \longrightarrow (0, \rho_1],$$

und es gilt natürlich

$$\begin{aligned} E'(u) &= \frac{1}{\wp'(x)}, \quad u = \wp(x) \\ &= \frac{1}{-\sqrt{4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3}} = \frac{-1}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}. \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen: Die Umkehrfunktion $E(u)$ der Weierstraßschen \wp -Funktion zu $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist Stammfunktion für

$$\frac{-1}{\sqrt{P(u)}},$$

wobei $P(u) = 4u^3 - g_2u - g_3$ ein reelles Polynom 3. Grades mit 3 verschiedenen Nullstellen ist. - Man kann viel allgemeiner zeigen: Ist P ein (reelles) Polynom vom Grad 3 oder 4 mit lauter verschiedenen Nullstellen, so besitzt das unbestimmte Integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

eine Umkehrfunktion, die meromorph ins Komplexe zu einer doppelt-periodischen Funktion fortgesetzt werden kann (Abel, Gauß, Jacobi, Legendre, Weierstraß)¹⁵. Da solche Integrale mit Polynomen P der Ordnung 4 bei der Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen zum ersten Male auftraten, erhielt die gesamte Klasse den Namen „elliptische“ Integrale (oder genauer: Elliptische Integrale „erster Gattung“).

¹⁵Weitere historische Details findet man z. B. in [12], Beginn des Kapitels V.

Wir wollen des Weiteren die Frage klären, zu welchen vorgegebenen Null- und Polstellen in einem Periodengitter eine elliptische Funktion existiert. Genauer geben wir gleich viele Stellen a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n vor, wobei wir aber nicht voraussetzen, daß die a_k bzw. die b_k paarweise inkongruent modulo Ω sind. Wir sagen, die Funktion $f \in K(\Omega)$ besitze die Nullstellen a_k , wenn die Nullstellenordnung von f in einem Punkt a_j gleich der Anzahl der a_k ist, die kongruent zu a_j modulo Ω sind. Entsprechend formulieren wir das Polstellenverhalten einer elliptischen Funktion. Eine *notwendige* Bedingung ist verhältnismäßig schnell gefunden.

Satz 17.16 *Es gibt höchstens dann eine elliptische Funktion f zum Gitter Ω mit den Nullstellen a_1, \dots, a_n und den Polstellen b_1, \dots, b_n , wenn*

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{\Omega}.$$

Selbstverständlich darf auch kein a_j kongruent zu einem b_k sein.

Beweis. Es sei $P_a := a + P$ das um einen geeigneten Wert a verschobene Periodenparallelogramm, so daß $0 \notin P_a$ und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in P_a \setminus \partial P_a$. Die letzten Bedingungen können wir leicht erreichen, da die Kongruenz im Satz bestehen bleibt, wenn man einen der vorkommenden Orte modulo Ω abändert. Wir betrachten nun das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

dessen Integrand offensichtlich Pole erster Ordnung an den vorgegebenen Stellen besitzt mit der Residuensumme

$$I = a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - b_n.$$

Es ist also zu zeigen, daß $I \in \Omega$. Dazu genügt es, eine entsprechende Aussage nur für die Summe der Teilintegrale über zwei gegenüberliegende Seiten zu beweisen. Hierbei ist aber z. B. (für das andere Seitenpaar argumentiert man entsprechend)

$$\int_a^{a+\omega_1} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -\omega_2 \int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

Auf der Strecke von a nach $a + \omega_1$ besitzt f weder Null- noch Polstellen, so daß in einer Umgebung derselben ein Zweig des Logarithmus von f existiert. Folglich ist wegen $f(a) = f(a + \omega_1)$ das Integral

$$\int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log f(a + \omega_1) - \log f(a) \in 2\pi i \mathbb{Z}. \quad \square$$

Zur Umkehrung benötigen wir noch die sogenannte σ -Funktion. Man erhält sie sehr einfach als Lösung des Weierstraß-Problems zu den einfachen Nullstellen $\omega \in \Omega$. Man macht sich sehr schnell klar, daß das Weierstraß-Produkt

$$\sigma(z) := z \prod_{\omega \in \Omega'} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

diese Aufgabe löst. Per Konstruktion ist ihre logarithmische Ableitung gleich

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{-1/\omega}{1 - z/\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

und nach Differentiation erhalten wir

$$\wp(z) = - \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)'(z) = \frac{(\sigma')^2(z) - \sigma''(z)\sigma(z)}{\sigma^2(z)}.$$

Die Weierstraßsche \wp -Funktion kann also konkret als Quotient zweier ganzer holomorpher Funktionen geschrieben werden, die ihrerseits aber nicht elliptisch sein können. Dennoch sollten sie eine gewisse Periodizitäts-Eigenschaft bzgl. Ω besitzen.

Satz 17.17 Für jedes $\omega \in \Omega$ gibt es von ω abhängige Zahlen a, b , so daß

$$\sigma(z + \omega) = e^{az+b} \sigma(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die Funktionen $\sigma(z)$ und $\sigma(z + \omega)$ haben die gleichen Nullstellen, die alle einfach sind. Folglich ist $\sigma(z + \omega)/\sigma(z)$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, also von der Form $\exp(h(z))$ mit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dann ist aber

$$h'(z) = \frac{\sigma'(z + \omega)}{\sigma(z + \omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

und somit nach der vorstehenden Bemerkung $h'' = 0$. \square

Wir sind nunmehr in der Lage, auch die Umkehrung zu Satz 16 zu beweisen.

Satz 17.18 (ABEL 1826) Gilt $a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{\Omega}$, so existiert eine elliptische Funktion mit den Nullstellen a_1, \dots, a_n und den Polstellen b_1, \dots, b_n .

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß sogar $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, indem wir zum Beispiel a_1 durch einen kongruenten Punkt ersetzen. Wir bilden dann

$$f(z) := \frac{\prod_{j=1}^n \sigma(z - a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z - b_j)}.$$

Diese Funktion besitzt in der Tat das richtige Null- und Polstellenverhalten. Sie ist aber auch elliptisch zum Gitter Ω , denn aus

$$f(z + \omega) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{a(z-a_j)+b}}{\prod_{j=1}^n e^{a(z-b_j)+b}} f(z)$$

und der zuvor gemachten Annahme ergibt sich $f(z + \omega) = f(z)$ für beliebiges $\omega \in \Omega$. \square

Bemerkung. Die meromorphen Funktionen auf der erweiterten Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}}$ sind genau die eindeutig bestimmten Fortsetzungen der *rationalen* Funktionen auf \mathbb{C} . Besitzt eine rationale Funktion n Nullstellen und m Polstellen auf \mathbb{C} , so hat die Fortsetzung im Unendlichen eine Null- oder Polstelle derart, daß die totale Nullstellenordnung mit der totalen Polstellenordnung auf \mathbb{C} übereinstimmt. Umgekehrt kann man zu Punkten a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n in $\overline{\mathbb{C}}$ mit $a_j \neq b_k$ für alle j, k sofort eine rationale Funktion mit den gegebenen Null- und Polstellen konstruieren. Im Fall der RIEMANNschen Zahlenkugel ist die Situation also wesentlich einfacher als bei den Tori. Siehe hierzu auch das folgende Kapitel.

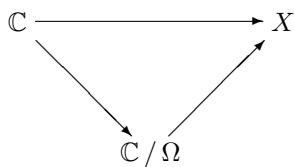
Zum Abschluß dieses Kapitels beleuchten wir den Zusammenhang von *elliptischen Funktionen* und *Tori* mittels einiger Bemerkungen zu der (nicht überall erklärten) Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \in X,$$

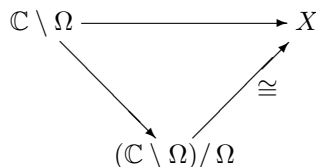
wobei

$$X := \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 : t^2 = P(s) := 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)\}.$$

Diese faktorisiert über



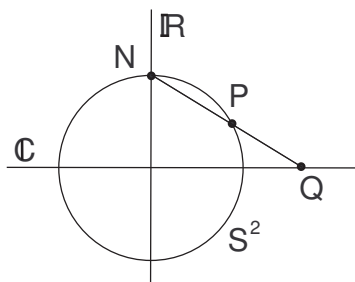
Genauer ist natürlich nur



wohldefiniert, und es ist $\mathbb{C}/\Omega \xrightarrow{\sim} \bar{X}$, wobei \bar{X} eine Einpunkt-Kompaktifizierung von X darstellt. Diese kann man topologisch folgendermaßen beschreiben: SchlieÙe \mathbb{C} zur *Riemannschen Zahlenkugel* ab, z. B. durch *stereographische Projektion*:

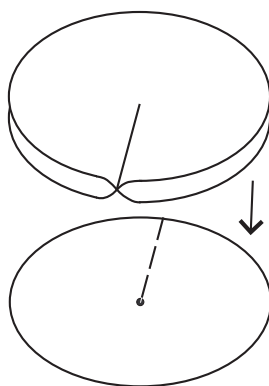
$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$$

(siehe auch das folgende Kapitel).



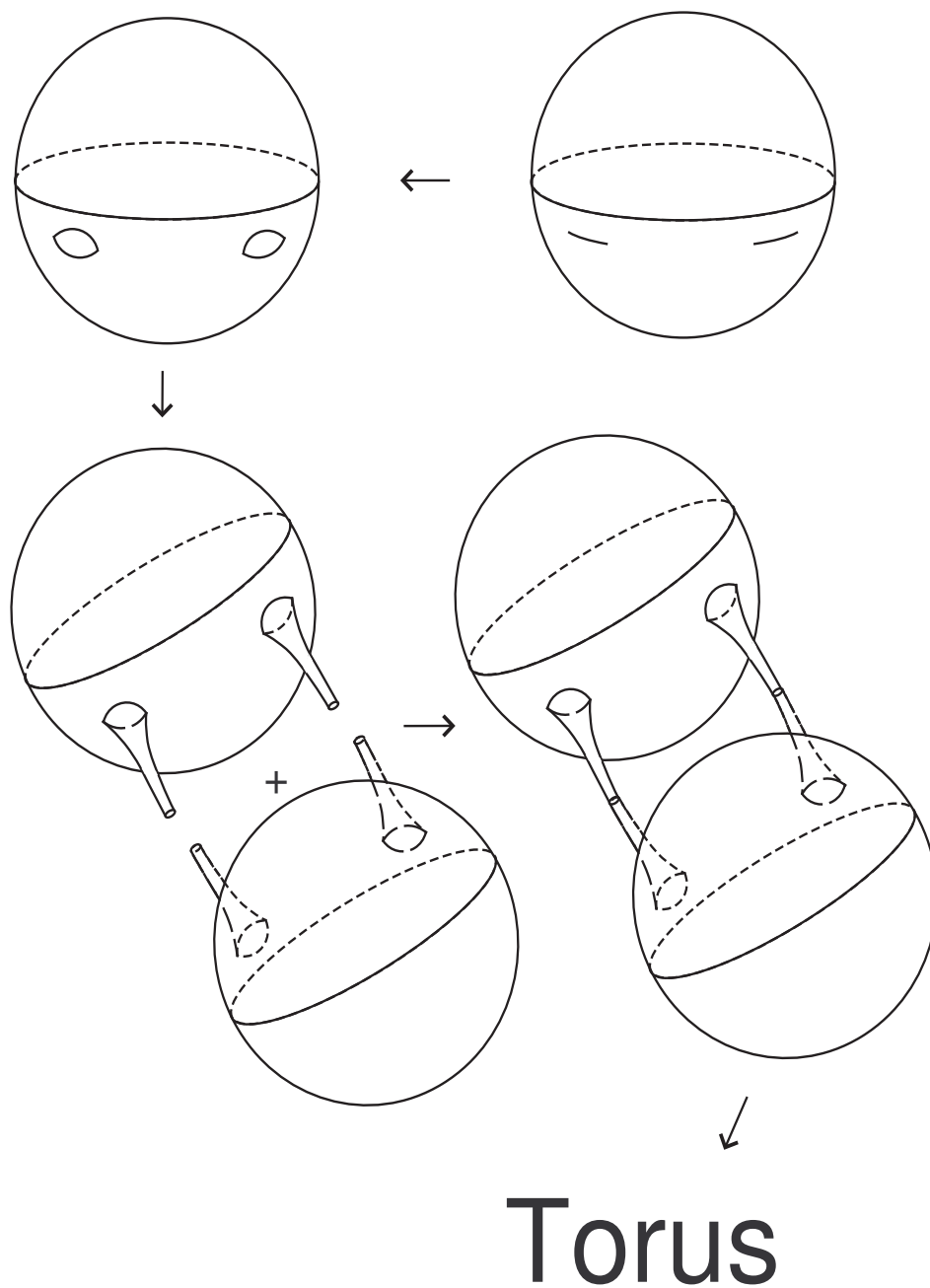
Figur 17.9

Die drei verschiedenen Punkte e_1, e_2, e_3 stelle man sich ebenso wie den unendlich fernen Punkt auf S^2 liegend vor. Lokal sieht die Überlagerung $\bar{X} \rightarrow S^2$ in diesen Punkten (auch im Unendlichen!) wie die Riemannsche Fläche von \sqrt{z} aus:



Figur 17.10

Die Entstehung des Torus \bar{X} kann man sich dann an der folgenden Sequenz von Bildern veranschaulichen.



Figur 17.11

18 Abstrakte Riemannsche Flächen

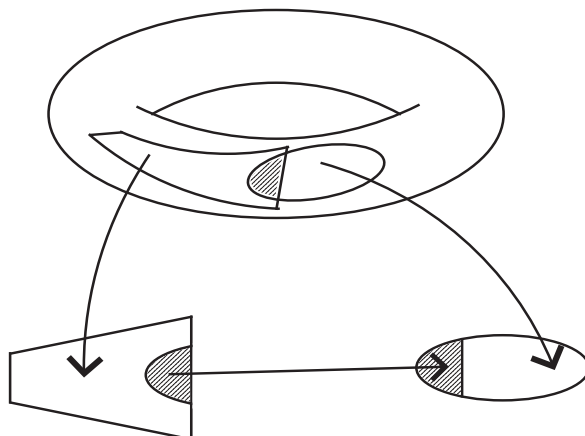
Da wir schon mehrfach über *Riemannsche Flächen* informell gesprochen haben und jedenfalls eine genaue Vorstellung von der *Riemannschen Zahlenkugel* (oder dem *komplex-projektiven Raum*) haben müssen, schieben wir dieses Kapitel ein. Die verwendete Literatur (auch für die Kapitel in dem späteren Vorlesungsmanuskript über Riemannsche Flächen) besteht im Wesentlichen aus den in der Literaturliste zu den *Grundzügen* aufgeführten Büchern [19] von O. Forster und [25] von R. C. Gunning¹⁶.

Riemannsche Flächen sind spezielle reell 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, also topologische Hausdorff-Räume X , die lokal homöomorph zu einem offenen Teil des \mathbb{R}^2 sind.

Definition. Sei X eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Eine *komplex-analytische* (oder kurz: *komplexe*) *Karte* auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$. Wir schreiben solche Karten auch als Tripel (U, φ, V) . Zwei komplexe Karten (U_i, φ_i, V_i) , $i = 1, 2$, heißen *holomorph verträglich*, falls die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

biholomorph ist.



Figur 18.1

Ein *komplexer Atlas* \mathfrak{A} auf X ist ein System von komplexen Karten (U_i, φ_i, V_i) , $i \in I$, I eine beliebige Indexmenge, so daß $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (so daß also $\mathfrak{A} = \{U_i : i \in I\}$ insbesondere eine offene

Überdeckung des topologischen Raumes X bildet) und alle Karten (U_i, φ_i, V_i) paarweise holomorph verträglich sind.

Zwei komplexe Atlanten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' heißen *holomorph verträglich*, wenn jede Karte von \mathfrak{A} mit jeder Karte von \mathfrak{A}' holomorph verträglich ist.

Bemerkungen. 1. Ist (U, φ, V) eine komplexe Karte, und ist $U_1 \subset U$ eine offene Teilmenge, so ist auch $(U_1, \varphi|_{U_1}, \varphi(U_1))$ eine komplexe Karte, die mit (U, φ, V) holomorph verträglich ist.

2. Holomorphe Verträglichkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Unter einer *komplex-analytischen* oder kurz *komplexen Struktur* auf der (zweidimensionalen) Mannigfaltigkeiten X versteht man eine Äquivalenzklasse holomorph verträglicher Atlanten.

¹⁶Ich empfehle auch nachdrücklich das gerade erschienene neue Buch von K. LAMOTKE, *Riemannsche Flächen*. Grundwissen Mathematik. Springer-Lehrbuch. Springer: Berlin Heidelberg New York 2005.

Eine komplexe Struktur auf X kann also durch Angabe eines (einzigen) komplexen Atlanten auf X definiert werden. Jede komplexe Struktur auf X enthält einen eindeutig bestimmten „maximalen“ Atlas \mathfrak{A}^* ; ist \mathfrak{A} ein beliebiger Atlas, der die Struktur bestimmt, so besteht \mathfrak{A}^* aus *allen* komplexen Karten auf X , die mit jeder Karte von \mathfrak{A} holomorph verträglich sind.

Beispiel. $(\mathbb{C}, \text{id}, \mathbb{C})$ ist eine komplexe Karte, die auf \mathbb{C} einen Atlas $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, \text{id}, \mathbb{C})\}$ und damit eine komplexe Struktur definiert. Der maximale Atlas \mathfrak{A}^* besteht hier aus allen Karten (U, φ, V) , $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ biholomorph.

Definition. Eine *Riemannsche Fläche* ist ein Paar (X, Σ) , bestehend aus einer zusammenhängenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur Σ auf X . Ist \mathfrak{A} ein Atlas, der Σ repräsentiert, so schreiben wir auch (X, \mathfrak{A}) . Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir kurz X .

Beispiele. 1. Wir schreiben \mathbb{C} für (\mathbb{C}, Σ) , wobei Σ durch den Atlas $\{(\mathbb{C}, \text{id}, \mathbb{C})\}$ repräsentiert wird.

2. Ist X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ ein Gebiet, also eine offene und zusammenhängende Teilmenge von X , so trägt Y eine „kanonische“ komplexe Struktur; insbesondere trifft dies für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ zu.

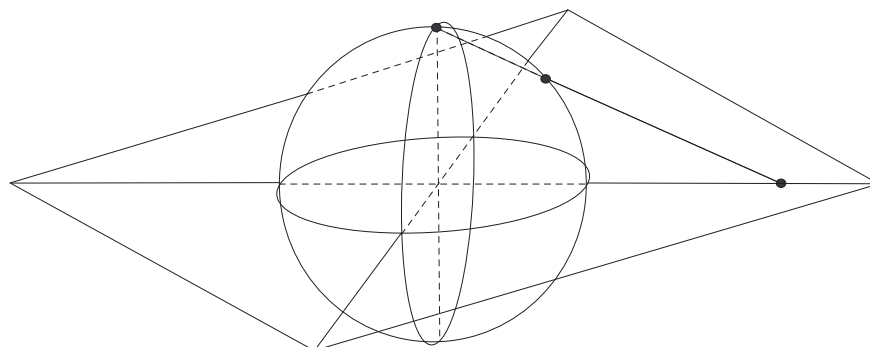
Bemerkung. Wir werden stets stillschweigend mit einem *maximalen* Atlas arbeiten; „Karte“ bedeutet in unserem Sprachgebrauch also immer eine „Karte des maximalen Atlas“.

Die Riemannsche Fläche \mathbb{C} ist nicht-kompakt. (In alter Terminologie heißen solche Riemannschen Flächen auch „offen“, obwohl Riemannsche Flächen als topologische Räume per definitionem immer offen sind).

Wir wollen nun eine *kompakte* Riemannsche Fläche $\overline{\mathbb{C}}$ durch Einpunkt-Kompaktifizierung von \mathbb{C} konstruieren. Es handelt sich dabei in anderer Interpretation um die *komplex-projektive Gerade* $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Setze dazu als Menge wie oben

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei ∞ ein Symbol ist, das nicht zu \mathbb{C} gehört. $U \subset \mathbb{P}_1$ heißt offen, falls $U \subset \mathbb{C}$ offen oder von der Form $U = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ mit einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ist. Dann ist $\overline{\mathbb{C}}$, wie man sich leicht mittels *stereographischer Projektion* überzeugt, ein Hausdorff-Raum, der homöomorph zur 2-Sphäre S^2 ist. Insbesondere ist also der topologische Raum $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt.



Figur 18.2

Wir versehen nun $\overline{\mathbb{C}}$ mit einem komplexen Atlas, bestehend aus den zwei Karten

$$U_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_0 = \text{id}} \mathbb{C} = V_0$$

und

$$U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \xrightarrow{\varphi_\infty} \mathbb{C} = V_\infty,$$

wobei

$$\varphi_\infty : \begin{cases} z \mapsto \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}, \\ \infty \mapsto 0. \end{cases}$$

Offensichtlich sind $\varphi_0, \varphi_\infty$ Homöomorphismen, und es gilt, daß

$$\varphi_\infty \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* = \varphi_\infty(U_0 \cap U_\infty)$$

durch

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

definiert, also biholomorph ist.

Wir versehen $\overline{\mathbb{C}}$ stets mit diesem komplexen Atlas und nennen die Riemannsche Fläche $\overline{\mathbb{C}}$ die *Riemannsche Zahlenkugel*. Wir werden später (in dem Manuskript *Funktionentheorie II*) zeigen, daß $\overline{\mathbb{C}}$ die einzig mögliche komplexe Struktur auf der topologischen Mannigfaltigkeit S^2 ist.

Bemerkung. Die Bezeichnung \mathbb{P}_1 für die erweiterte Zahlenebene bzw. Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ kommt daher, daß man $\overline{\mathbb{C}}$ leicht mit dem projektiven Raum

$$\mathbb{P}_1 \cong \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*,$$

d. h. der Menge der komplexen Geraden in \mathbb{C}^2 durch den Nullpunkt, identifizieren kann. (Hierbei operiert \mathbb{C}^* auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ vermöge $\lambda(z_1, z_2) := (\lambda z_1, \lambda z_2)$). Denn offensichtlich besteht \mathbb{P}_1 aus allen Geraden $\{z_2 = u z_1, u \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$, und den Geraden mit der Gleichung $z_1 = \beta z_2, v \in \mathbb{C}$, und zwei solche Geraden stimmen genau dann überein, wenn $uv = 1$. Dies ist aber gerade der Standardatlas von $\overline{\mathbb{C}}$. Oder in anderen Worten: Man hat eine bijektive (sogar biholomorphe) Abbildung $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_1$ gegeben durch

$$\begin{cases} \mathbb{C} \ni u \mapsto g_u : z_2 = u z_1, \\ \infty = u \mapsto g_\infty : z_1 = 0. \end{cases}$$

Wir wollen als nächstes die komplexe Struktur der Tori exakt definieren: $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ seien linear unabhängig über \mathbb{R} , und $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ sei das von diesen Vektoren aufgespannte Gitter vom Rang 2 in \mathbb{C} . $T_\Omega = \mathbb{C}/\Omega$ sei der zugehörige Torus der Äquivalenzklassen von \mathbb{C} modulo der Aktion der Translationsgruppe Ω ; $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T_\Omega$ sei die zugehörige surjektive Projektionsabbildung. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset T_\Omega$ *offen*, falls das Urbild $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen ist. Mit dieser Definition ist die Projektion π stetig, und T_Ω ist zusammenhängend, da die komplexe Ebene \mathbb{C} selbst zusammenhängend ist. Der Torus T_Ω ist sogar kompakt, da er das stetige Bild des kompakten Periodenparallelogrammes \overline{P} ist: $T_\Omega = \pi(\overline{P})$, und außerdem, wie man sich leicht überzeugt, auch hausdorffsch. Die Abbildung π ist sogar *offen*, d. h. wenn $V \subset \mathbb{C}$ offen ist, dann ist auch $\pi(V)$ offen. Dazu ist zu zeigen: Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen, dann ist $\pi^{-1}(\pi(V)) \subset \mathbb{C}$ offen. Nun ist aber offensichtlich

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (V + \omega),$$

und da alle Translate $V + \omega$ offen sind, folgt die Behauptung.

Eine komplexe Struktur kann man jetzt wie folgt auf T_Ω erklären: Sei $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit

$z_1, z_2 \in V \Rightarrow z_1 \not\equiv z_2 \pmod{\Omega}$. Dann ist $\pi : V \rightarrow \pi(V) =: U$ bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus. Setze weiter

$$\varphi := \pi^{-1} : U \longrightarrow V.$$

Die Tripel (U, φ, V) sind dann Karten einer topologischen Mannigfaltigkeitsstruktur auf T_Ω . Offensichtlich ist auch

$$T_\Omega = \bigcup_{V \subset \mathbb{C}} \pi(V),$$

sodaß die Menge dieser Tripel tatsächlich einen (topologischen) Atlas auf T_Ω definiert. Sind aber (U_i, φ_i, V_i) , $i = 1, 2$, zwei solche Karten, so ist die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

offensichtlich auf jeder Zusammenhangskomponente gleich der Translation um ein (festes) Element in Ω , insbesondere also biholomorph. Damit besitzt T_Ω eine kanonische komplexe Struktur.

Da wir Funktionentheorie allgemein auch auf Riemannschen Flächen betreiben wollen, müssen wir das Konzept holomorpher Funktionen auf solchen Flächen erklären.

Definition. Es sei X eine Riemannsche Fläche, $B \subset X$ sei eine offene Teilmenge, und $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine komplexwertige Funktion. f heißt dann *holomorph* in einem festen Punkt $x_0 \in B$, falls für jede Karte (U, φ, V) mit $x_0 \in U$ gilt:

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap B)}$$

ist holomorph in $\varphi(x_0)$. f heißt *holomorph*, falls f in jedem Punkt von B holomorph ist.

Wir schreiben $\mathcal{O}(B)$ für die Menge aller holomorphen Funktionen auf B , versehen mit der (kanonischen) \mathbb{C} -Algebra-Struktur.

Bemerkungen. 1. Die Definition des Begriffs der Riemannschen Fläche ist so getroffen, daß die Holomorphie von f nur für *eine* Karte getestet zu werden braucht: Sind nämlich (U_i, φ_i, V_i) zwei Karten mit $x_0 \in U_i$, $i = 1, 2$, so gilt:

$$f \circ \varphi_2^{-1} = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}),$$

und die Abbildung $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist biholomorph in einer Umgebung von $\varphi_2(x_0)$ mit $\varphi_2(x_0) \mapsto \varphi_1(x_0)$. Also impliziert die Holomorphie von $f \circ \varphi_1^{-1}$ in $\varphi_1(x_0)$ die von $f \circ \varphi_2^{-1}$ in $\varphi_2(x_0)$ und umgekehrt.

2. Ist $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ eine Karte, so ist φ nach der obigen Definition eine holomorphe Funktion auf $U \subset X$. Man nennt φ dann auch eine *lokale Koordinate* oder *Ortsuniformisierende* und (U, φ) eine Koordinatenumgebung jedes Punktes $x \in U$. Man schreibt in diesem Fall auch gern mit $z = \varphi(x)$ kürzer $z = z(x)$.

3. Ist \mathbb{C} versehen mit der kanonischen Struktur einer Riemannschen Fläche, so ist für eine beliebige offene Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ die Definition von $\mathcal{O}(B)$ im jetzigen Sinne in Übereinstimmung mit der alten Definition von $\mathcal{O}(B) = \{f : B \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ holomorph}\}$.

Beispiel. Wie testet man die Holomorphie einer Funktion auf $B \subset \mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$? Wenn $B \subset \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$ ist, so hat man nichts anderes als die alte Definition, da wir mit der komplexen Koordinate z als Ortsvariablen arbeiten können. Ist aber $\infty \in B$, so betrachtet man $f|_{B \setminus \{\infty\}}$ als Funktion von $z = 1/w$ und muß die Holomorphie von $g(w) := f(1/w)$ an der Stelle $w = 0$ studieren.

Folgerung. Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R)$ ist holomorph ergänzbar in $\infty \in \mathbb{P}_1$, falls

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

holomorph ergänzbar ist in $w = 0$.

Was bedeutet dies aber genau? $g(w)$ ist holomorph in $U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ und besitzt also eine Laurent-Entwicklung

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n w^n.$$

Damit ist

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_{-n}) z^n$$

die Laurent-Entwicklung von f in $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$, und wir erhalten

Satz 18.1 Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R)$ ist im unendlich fernen Punkt ∞ genau dann zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{P}_1 \setminus \overline{D}_R$ ergänzbar, wenn für die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

gilt: $a_n = 0$ für alle $n > 0$.

Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $B \subset X$ sei offen. Eine meromorphe Funktion auf B ist eine holomorphe Funktion h auf $B \setminus D$, D diskret in B , so daß $\lim_{x \rightarrow x_0} |h(x)| = \infty$ für alle $x_0 \in D$. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf B bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(B)$. $\mathcal{M}(X)$ ist ein Körper (wie wir später mit Hilfe des Zusammenhangs von X und dem daraus resultierenden Identitätssatzes folgern werden) und heißt der *Funktionskörper* von X .

Bemerkung. In lokalen Karten bedeutet Meromorphie natürlich nichts anderes, als daß h zurückgeholt auf jede beliebige Karte meromorph ist.

Definition. Ist h in $B \setminus \{x_0\}$ holomorph, aber in x_0 weder holomorph ergänzbar noch in einer Umgebung von x_0 meromorph, so hat h in x_0 nach Definition eine *wesentliche Singularität*.

Wir können nun das singuläre Verhalten von ganzen Funktionen im Unendlichen leicht klassifizieren.

Satz 18.2 Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion. Dann gilt:

- a) f ist holomorph ergänzbar in ∞ genau dann, wenn $f = \text{const.}$
- b) f ist meromorph in ∞ genau dann, wenn f ein Polynom ist.
- c) f hat in ∞ eine wesentliche Singularitäten genau dann, wenn f transzendent ist.

Bemerkungen. 1. Somit besitzen alle „interessanten“ Funktionen wie \sin , \cos etc. eine *wesentliche Singularität* im Unendlichen!

2. Eine andere Formulierung von Satz 2.a) ist natürlich die Feststellung

$$\mathcal{O}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{C}.$$

Die entsprechende Aussage gilt für alle kompakten Riemannschen Flächen, wie wir gleich beweisen werden. Wir wissen ja z. B. auch schon $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C}$, da $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Omega) \cong \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : f \text{ ist periodisch bzgl. } \Omega\}$ ist, also mit dem Körper der holomorphen elliptischen Funktionen bzgl. Ω übereinstimmt.

Satz 2.b) legt die Frage nahe: *Welches sind die meromorphen Funktionen auf \mathbb{P}_1 ?* Die Antwort ist sehr einfach.

Satz 18.3 *Der Körper der meromorphen Funktionen auf \mathbb{P}_1 besteht genau aus den rationalen Funktionen.*

Beweis. a) Jede rationale Funktion

$$Q(z) = \frac{R(z)}{S(z)}, \quad R, S \in \mathbb{C}[z]$$

ist meromorph auf \mathbb{C} . Um das Verhalten in ∞ zu testen, muß man die Funktion $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ im Nullpunkt untersuchen. Nun ist aber

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{R\left(\frac{1}{z}\right)}{S\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \dots + a_m \frac{1}{z^m}}{b_0 + b_1 \frac{1}{z} + \dots + b_n \frac{1}{z^n}}, \quad a_m \neq 0, b_n \neq 0 \\ &= \frac{z^n}{z^m} \frac{a_m + a_{m-1}z + \dots + a_0z^m}{b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0z^n}, \end{aligned}$$

und der letzte Bruch konvergiert gegen $c \neq 0$ für $z \rightarrow 0$. Also gilt: Q hat im unendlich fernen Punkt ∞

- i) eine hebbare Singularität, falls $m \leq n$ (also eine Nullstelle der Ordnung $-\text{grad } R + \text{grad } S$); bzw.
- ii) eine Polstelle (der Ordnung $m - n$), falls $m > n$.

Insbesondere ist jede rationale Funktion meromorph auf \mathbb{P}_1 .

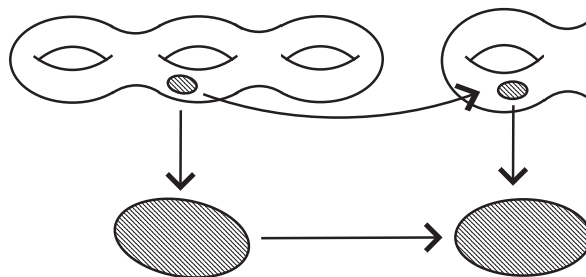
b) Sei umgekehrt h meromorph auf \mathbb{P}_1 , $D \subset \mathbb{P}_1$ die Polstellenmenge. Nach Definition ist $D \subset \mathbb{P}_1$ diskret, also, da \mathbb{P}_1 kompakt ist, auch endlich. (Dies gilt natürlich wieder für jede kompakte Riemannsche Fläche). Seien z_1, \dots, z_t die Polstellen von h im Endlichen (mit Vielfachheit n_1, \dots, n_t , resp.). Dann sind die Funktionen $(z - z_\tau)^{n_\tau}$ nach Teil a) meromorph auf \mathbb{P}_1 , und

$$g(z) = h(z) \cdot (z - z_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (z - z_t)^{n_t}$$

ist meromorph auf \mathbb{P}_1 , aber holomorph auf $\mathbb{C} = \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$. Nach Satz 2. b muß dann aber g ein Polynom und damit h rational sein. □

Bemerkung. Insbesondere sehen wir: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$ hat genauso viele Nullstellen wie Polstellen. Das gilt auch für die elliptischen Funktionen $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega)$ nach früheren Überlegungen und ist tatsächlich für alle kompakten Riemannschen Flächen richtig (*Residuensatz*).

Als nächstes führen wir den Begriff der *holomorphen Abbildung* zwischen zwei Riemannschen Flächen ein.



Figur 18.3

Definition. Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *holomorph*, falls für alle Karten (U_1, φ_1, V_1) in X und alle Karten (U_2, φ_2, V_2) in Y mit $f(U_1) \subset U_2$ gilt: $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ ist holomorph auf V_1 . Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Abbildungen mit $\mathcal{O}(X, Y)$. Selbstverständlich ist als Menge $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X, \mathbb{C})$. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *biholomorph*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind. Zwei Riemannsche Flächen heißen endlich *isomorph*, wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt.

Bemerkungen. 1. Sind $f \in \mathcal{O}(X, Y)$, $g \in \mathcal{O}(Y, Z)$, so ist die Komposition $g \circ f \in \mathcal{O}(X, Z)$.
 2. Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt: $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ genau dann, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ und alle $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ die Funktion $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$ liegt. Eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert deshalb einen Ringhomomorphismus

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(Y)), \quad V \subset Y \text{ offen.}$$

3. Insbesondere induziert eine biholomorphe Abbildung f einen Isomorphismus von \mathbb{C} -Algebren:

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$$

und einen Körper-Isomorphismus

$$f^* : \mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X).$$

Die Algebra $\mathcal{O}(X)$ kann aber i. A. verschiedene Riemannsche Flächen X nicht unterscheiden (für alle kompakten gilt z. B.: $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$, siehe unten). Dagegen kann dies der Körper $\mathcal{M}(X)$ sehr wohl. Z. B. folgt aus $\mathcal{M}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{C}(s)$, $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - s^3 + g_2 s + g_3)$, daß $\mathcal{M}(\mathbb{P}_1) \not\cong \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega)$ und damit auch $\mathbb{P}_1 \not\cong \mathbb{C}/\Omega$ (was natürlich auch aus topologischen Gründen nicht sein kann). Es folgt aber auch, daß es Gitter Ω_1, Ω_2 gibt mit $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega_1) \not\cong \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega_2)$, so daß also $\mathbb{C}/\Omega_1 \not\cong \mathbb{C}/\Omega_2$ gilt, was man topologisch nicht verstehen kann.

Als *Anwendung* zeigen wir nun, daß der Begriff der Riemannschen Fläche den richtigen Rahmen liefert, um den *maximalen Definitionsbereich* aller analytischer Fortsetzungen eines holomorphen *Funktionskeims* zu konstruieren. Wir verstehen unter einem solchen Funktionskeim ein Paar (D_0, f_0) , wobei D_0 eine (offene) Kreisscheibe in \mathbb{C} (ohne Einschränkung mit Mittelpunkt 0) und f_0 eine holomorphe Funktion auf D_0 ist. Es sei nun \mathfrak{K} die Menge aller *Kreisketten* (in \mathbb{C} oder \mathbb{P}_1)

$$K : D_0^K, D_1^K, \dots, D_{n_K}^K \quad \text{mit} \quad D_{j-1}^K \cap D_j^K \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, n_K, \quad \text{und} \quad D_0^K \subset D_0,$$

zu denen es holomorphe Funktionen $f_j^K \in \mathcal{O}(D_j^K)$ gibt, so daß

$$(f_0^K)|_{D_0^K} = (f_1^K)|_{D_0^K} \quad \text{und} \quad (f_j^K)|_{D_{j-1}^K \cap D_j^K} = (f_{j-1}^K)|_{D_{j-1}^K \cap D_j^K}.$$

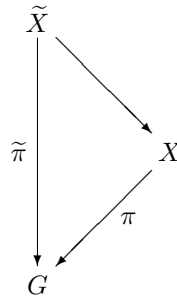
Natürlich ist $G^K := \bigcup_j D_j^K$ eine wegzusammenhängende Teilmenge von \mathbb{C} bzw. \mathbb{P}_1 und damit auch $G := \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} G^K$. Wir bilden ferner die *disjunkte* Vereinigung aller dieser Kreisscheiben, also

$$\tilde{X} := \bigsqcup_{j,K} D_j^K = \bigcup_{j,K} D_j^K \times \{j\} \times \{K\}.$$

\tilde{X} trägt offensichtlich die Struktur einer (nicht zusammenhängenden) Riemannschen Fläche zusammen mit einer lokal biholomorphen, surjektiven Abbildung $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow G$, wobei $(x, j, K) \mapsto x$ für $x \in D_j^K$. Wir erklären weiter auf \tilde{X} eine Äquivalenzrelation durch $(x, j, K) \sim (x', j', K')$, wenn $x = x'$ und

$$(f_j^K)|_{D_j^K \cap D_{j'}^{K'}} = (f_{j'}^{K'})|_{D_j^K \cap D_{j'}^{K'}}.$$

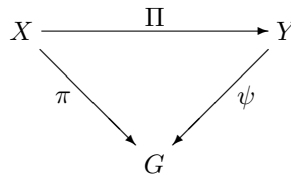
Es ist unschwer einzusehen, daß die Abbildung $\tilde{\pi}$ über den Quotientenraum $X := \tilde{X}/\sim$ faktorisiert:



X trägt zudem die Struktur einer (zusammenhängenden) Riemannschen Fläche, so daß auch die Abbildung $\pi : X \rightarrow G$ lokal biholomorph ist, und die lokal gegebenen Funktionen f_j^K verkleben sich auf X zu einer eindeutig definierten holomorphen Funktion f . - Die Eigenschaften des Quadrupels (X, π, G, f) kann man folgendermaßen zusammenfassen.

Satz 18.4 *Es gibt einen ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$ über $0 \in G$, so daß sich jeder Weg α in G mit Anfangspunkt 0 eindeutig zu einem Weg γ in X mit Anfangspunkt x_0 liftet, d. h. $\pi \circ \gamma = \alpha$. Läßt sich der gegebene Funktionskeim f_0 längs des Weges α in G analytisch fortsetzen, so gibt es eine Kreiskette entlang γ , deren einzelne Kreisscheiben unter π biholomorph auf Kreisscheiben in G abgebildet werden, die eine Kreiskette entlang α bilden, so daß die lokal definierten Funktionen $f \circ \pi^{-1}$ nahe der Spur von α die gegebene analytische Fortsetzung bilden. Zwei Wege α und β in G mit gleichem Endpunkt liften sich zu Wegen in X mit gleichem Endpunkt genau dann, wenn die analytischen Fortsetzungen von f_0 entlang der beiden Wege in einer Umgebung des Endpunktes übereinstimmen. Dies ist (wegen des Monodromiesatzes) insbesondere dann der Fall, wenn die beiden Wege in G homotop zueinander sind.*

Bemerkung und Definition. Es gilt sogar Eindeutigkeit: Ist (Y, ψ, G, g) ein weiteres solches Quadrupel, so gibt es eine eindeutig bestimmte biholomorphe Abbildung $\Pi : X \rightarrow Y$ mit $\psi \circ \Pi = \pi$



und $g \circ \Pi = f$. Man nennt daher X auch die Riemannsche Fläche des Funktionskeims f_0 .

In dem folgenden Abschnitt übertragen wir einige Aussagen über $\mathcal{O}(G)$ bei Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ auf die allgemeine Situation holomorpher Abbildungen $\mathcal{O}(X, Y)$.

Satz 18.5 (Identitätssatz) *Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ seien holomorphe Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ mit einem Häufungspunkt $a \in X$ übereinstimmen. Dann ist $f_1 = f_2$.*

Beweis. Sei $G = \{x_0 \in X : \text{es existiert } W = W(x_0)\}$, so daß $f_1|_W = f_2|_W$. Diese Menge ist offen in X . Wir zeigen, daß sie auch abgeschlossen ist; sei also $b \in \bar{G}$. Wegen der Stetigkeit folgt $f_1(b) = f_2(b)$. Wähle dann Karten (U, φ, V) in X und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{V})$ in Y mit $f_i(U) \subset \tilde{U}$, $i = 1, 2$, $b \in U$. (Daß dies möglich ist, folgt erneut aus der Stetigkeit). Es seien die $g_i : \varphi(U) \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ durch $g_i := \tilde{\varphi} \circ f_i \circ \varphi^{-1}$ definiert. Sie sind holomorph, und wegen $f_1|_{U \cap G} = f_2|_{U \cap G}$, $U \cap G \neq \emptyset$, ergibt sich $g_1 = g_2$ auf $\varphi(U \cap G) \subset \varphi(U)$. Nach dem üblichen Identitätssatz ist folglich $g_1 = g_2$ und damit $f_1|_U = f_2|_U$, also $b \in G$. Aus demselben Grund folgt auch $a \in G$, d. h. $G \neq \emptyset$. Also muß, da X als zusammenhängend vorausgesetzt ist, $G = X$ gelten. \square

Satz 18.6 (Maximumprinzip) Sei $f \in \mathcal{O}(X)$, und die Betragsfunktion $|f|$ nehme auf X ihr Maximum an. Dann ist f konstant. Insbesondere besitzt eine kompakte Riemannsche Fläche global nur konstante holomorphe Funktionen.

Beweis. Das Maximum werde in x_0 angenommen, und (U, φ, V) sei eine Karte mit $x_0 \in U$, U zusammenhängend. Dann nimmt $f \circ \varphi^{-1}$ das Maximum ihres Betrages in $\varphi(x_0)$ an, so daß $f \circ \varphi^{-1} = \text{const.}$ und $f|_U = \text{const.}$ ist. Mit dem Identitätssatz ergibt sich die Behauptung. \square

Schließlich können wir die meromorphen Funktionen als holomorphe Abbildungen nach \mathbb{P}_1 identifizieren.

Satz 18.7 Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$. Für eine Polstelle $x_0 \in X$ von f definiere man $f(x_0) = \infty$. Dann ist die durch f festgelegte Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_1$ holomorph.

Ist umgekehrt $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine holomorphe Abbildung, so ist entweder $f \equiv \infty$, oder $f^{-1}(\infty)$ besteht nur aus isolierten Punkten und $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit Polstellen in $f^{-1}(\infty)$.

Beweis. Elementare Übungsaufgabe. \square

Bemerkung. Aus dem Identitätssatz und Satz 7 folgt, daß der Identitätssatz auch für meromorphe Funktionen gültig ist. Ist insbesondere $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \neq 0$, so hat f nur isolierte Nullstellen und damit ist auch $1/f \in \mathcal{M}(X)$. Daraus folgt sofort, daß $\mathcal{M}(X)$ ein Körper ist, den man auch den *Funktionenkörper* von X nennt.

Wir haben früher gesehen, daß der Funktionenkörper von \mathbb{P}_1 isomorph ist zum Körper $\mathbb{C}(z)$ der rationalen Funktionen; für einen Torus \mathbb{C}/Ω ist der Funktionenkörper isomorph zum Körper der elliptischen Funktionen bzgl. des Gitters Ω . Man kann nun mit harter Analysis tatsächlich zeigen:

Satz 18.8 Jede Riemannsche Fläche X besitzt eine nicht triviale, also nicht konstante meromorphe Funktion und ist deshalb die verzweigte Überlagerung eines Teilgebietes von \mathbb{P}_1 . Jede kompakte Riemannsche Fläche ist eine verzweigte Überlagerung von \mathbb{P}_1 .

Bemerkungen. 1. Trotz der sehr allgemeinen Definition der Riemannschen Flächen kommt man also zu der ursprünglichen Begriffsbildung bei Riemann zurück.

2. Insbesondere besitzt eine Riemannsche Fläche automatisch eine abzählbare Topologie (Satz von RADÓ). Man beachte, daß diese Eigenschaft nicht Bestandteil unserer Axiome war, und erinnere sich, daß bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten diese oder eine andere topologische Bedingung gefordert werden muß, um Pathologien zu vermeiden, insbesondere die Einbettbarkeit der abstrakten Mannigfaltigkeit in einen Zahlenraum \mathbb{R}^N zu gewährleisten. Für (zusammenhängende) komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 2$ ist im übrigen die Abzählbarkeit der Topologie nicht notwendig gegeben.

Wir wollen des weiteren in diesem Kapitel die elementaren topologischen Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen herausarbeiten und dann die für alles Folgende grundlegende Theorie der (unbegrenzten, unverzweigten) Überlagerungen durch Bereitstellung der wichtigsten Begriffe vorbereiten.

Satz 18.9 Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, es sei $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}^*$ und Karten (U, φ, V) , (U', ψ, V') auf X bzw. Y mit $x_0 \in U$, $\varphi(x_0) = 0$, $y_0 \in U'$, $\psi(y_0) = 0$, $f(U) \subset U'$, so daß für $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ gilt:

$$(*) \quad F(z) = z^k, \quad z \in V.$$

Beweis. Da f stetig ist, gibt es sicher Karten, die alle Bedingungen außer evtl. (*) erfüllen. Für (*) brauchen wir nur noch U zu verkleinern und einen Automorphismus hinter φ zu schalten. Es sei nämlich $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, dann ist $g(0) = 0$ und g nicht konstant; also existiert eine holomorphe Funktion h in der Nähe von 0 mit $h(z) \neq 0$ und ein $k \in \mathbb{N}^*$, so daß $g(z) = z^k h(z)$. In einer evtl. noch kleineren Umgebung \tilde{V}_0 existiert ein Zweig der k -ten Wurzel von h , d. h. eine holomorphe Funktion ℓ mit $\ell^k = h$, insbesondere $\ell(0) \neq 0$, so daß zudem $\alpha(z) := z\ell(z)$ dort biholomorph ist.

Definiere nun: $U_0 = \varphi^{-1}(\tilde{V}_0)$, $\varphi_0 = \alpha \circ \varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0 = \alpha(\tilde{V}_0)$; dies ist eine neue Karte mit den alten Eigenschaften. Für $F = \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ gilt dann aber:

$$F(w) = (\psi \circ f \circ \varphi_0^{-1})(w) = g \circ \alpha^{-1}(w) = \alpha^k(\alpha^{-1}(w)) = w^k. \quad \square$$

Bemerkung. k ist nichts anderes als die *Vielfachheit*, mit der die Abbildung f den Wert y_0 im Punkte x_0 annimmt.

Beispiel. Das Polynom $P(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k \in \mathbb{C}[z]$ werde aufgefaßt als holomorphe Abbildung $P : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit $P(\infty) = \infty$. Dann wird der Wert ∞ in ∞ mit der Vielfachheit k angenommen.

Dieser einfache Sachverhalt hat einige topologische und analytische Konsequenzen.

Folgerung 18.10 *Jede holomorphe, nicht konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen ist offen.*

Denn nach dem vorstehenden Satz bildet f beliebig kleine Umgebungen eines Punktes x_0 auf Umgebungen des Bildpunktes y_0 ab. \square

Folgerung 18.11 *Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei injektiv und holomorph. Dann bildet f die Riemannsche Fläche X biholomorph auf die offene Teilmenge $f(X) \subset Y$ ab.*

Beweis. Nach der ersten Folgerung ist $f(X)$ offen in Y , und als Abbildung ist $f : X \rightarrow f(X)$ bijektiv. Da f injektiv ist, ist die Vielfachheit k gleich 1 an jeder Stelle $x \in X$, f also *lokal biholomorph*. \square

Folgerung 18.12 *Die holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sei nicht konstant. Dann nimmt die Betragsfunktion $|f|$ auf X nicht ihr Maximum an.*

Beweis. Denn angenommen, es existiere $x_0 \in X$ mit $R = |f(x_0)| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Dann ist $f(X) \subset \{|z| \leq R\}$. Da $f(X)$ offen ist, ist $f(X) \subset \{|z| < R\}$. Widerspruch zu $|f(x_0)| = R$. \square

Satz 18.13 *Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei holomorph und nicht konstant, die Riemannsche Fläche X sei kompakt. Dann ist auch Y kompakt, und f ist surjektiv.*

Beweis. $f(X)$ ist offen, aber auch kompakt in Y , insbesondere abgeschlossen, so daß $Y = f(X)$ sein muß, da Y nach Voraussetzung zusammenhängend ist. \square

Folgerung 18.14 *X sei kompakt, und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion. Dann ist f konstant.*

Folgerung 18.15 (Satz von Liouville) *Jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.*

Denn nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz kann man f im Unendlichen holomorph fortsetzen, also zu einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ „erweitern“. Dann ist $f = \text{const.}$ \square

Folgerung 18.16 (Fundamentalsatz der Algebra) *P sei ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. P kann aufgefaßt werden als holomorphe Abbildung $P : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit $P(\infty) = \infty$. Nach Satz 13 ist dann P surjektiv. \square

Wir fassen die wesentlichen Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen nun in einer topologischen Definition zusammen. Da in der Überlagerungstheorie der „überlagerte“ Raum als das Primäre angesehen wird, vertauschen wir die Rollen von X und Y .

Definition. X, Y seien topologische Räume. Ein Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt eine (evtl. verzweigte) Überlagerung von X , falls p stetig, offen und diskret ist (d. h. die Fasern $p^{-1}(x)$ liegen diskret in Y für jeden Punkt $x \in X$). Ist $x := p(y)$, so sagt man, y „liege über“ x , oder auch, x „sei ein Spurpunkt“ von y .

Ist $q : Z \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung von X , so heißt eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ spurtreu oder eine Abbildung „über“ X , falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

kommutiert (d. h. $f(y) \in q^{-1}(p(y))$ für alle $y \in Y$).

Satz 18.17 *Jede holomorphe, nicht konstante Abbildung $f : Y \rightarrow X$ zwischen Riemannschen Flächen ist eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. f ist selbstverständlich stetig und offen nach Folgerung 10. f ist aber auch diskret, da sonst eine Faser $f^{-1}(x_0)$ nicht diskret in Y liegen würde und damit nach dem Identitätssatz f entgegen der Voraussetzung konstant gleich x_0 wäre. \square

Bemerkung. Man nennt in dieser Situation $f : Y \rightarrow X$ manchmal auch Y ein Riemannsches Gebiet über X .

Definition. $p : Y \rightarrow X$ sei eine Überlagerung. Ein Punkt $y \in Y$ heißt ein Verzweigungspunkt von p , falls für keine Umgebung V von y die Einschränkung $p|_V$ injektiv ist. Besitzt p keine Verzweigungspunkte, so heißt p eine unverzweigte Überlagerung.

Beispiele. 1. Die Funktion $f(z) = z^k$, $k \geq 2$, ist aufgefaßt als Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine verzweigte Überlagerung mit einzigem Verzweigungspunkt 0.

2. $p : Y \rightarrow X$ sei eine holomorphe Überlagerung. Genau dann ist y ein Verzweigungspunkt von p , wenn die Vielfachheit k von p in y mindestens 2 ist.

3. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist eine unverzweigte Überlagerung (da lokal injektiv).

4. Für ein Gitter Ω vom Rang 2 ist die Quotientenabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung.

Satz 18.18 *Eine stetige Abbildung $p : Y \rightarrow X$ ist genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn p lokal topologisch ist. Im holomorphen Fall $f : Y \rightarrow X$ liegt genau dann eine unverzweigte Überlagerung vor, wenn f lokal biholomorph ist.*

Beweis. Eine Richtung ist klar, da eine stetige (holomorphe), offene und lokal injektive Abbildung lokal topologisch (holomorph) ist. Umgekehrt sind lokal topologische Abbildungen p stetig und offen. p ist aber auch diskret; denn liegt $y \in Y$, so existiert eine Umgebung $V = V(y)$, so daß $p|_V$ ein Homöomorphismus von V nach $U = p(V)$ ist. Dann ist $V \cap p^{-1}(p(y)) = \{y\}$, d. h. y liegt diskret in $p^{-1}(p(y))$. \square

Von ganz zentraler Bedeutung für die Anwendung der Überlagerungstheorie auf die Theorie von Mannigfaltigkeiten, speziell von Riemannschen Flächen, ist der folgende

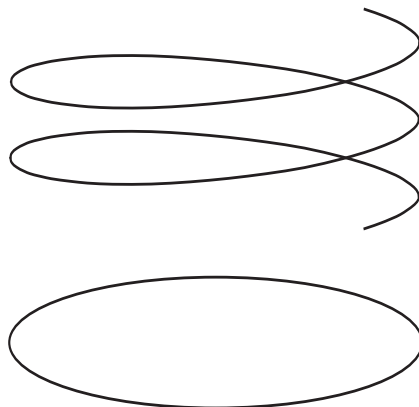
Satz 18.19 *Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung topologischer Räume, und X sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bzw. eine Riemannsche Fläche. Dann gibt es genau eine differenzierbare bzw. komplexe Struktur auf Y , so daß p differenzierbar bzw. holomorph (und damit lokal differenzierbar bzw. lokal biholomorph) wird.*

Beweis. Es sei \mathfrak{W} die Menge aller offenen Teilmengen $W \subset Y$, so daß $p_W : W \rightarrow p(W) = U$ ein Homöomorphismus ist, und es eine Karte (U, ψ, V) auf X gibt. Ist Y schon mit einer differenzierbaren (komplexen) Struktur mit der gewünschten Eigenschaft versehen, so sind notwendigerweise die Tripel $(W, \varphi \circ p, V) : W \in \mathfrak{W}$, Karten auf Y . Umgekehrt wird durch

$$\{(W, \varphi \circ p, V) : W \in \mathfrak{W}\}$$

ein differenzierbarer (komplexer) Atlas auf Y mit den verlangten Eigenschaften definiert. \square

In unserer Definition unverzweigter Überlagerungen sind auch Beispiele der folgenden Art enthalten:



Figur 18.4

Außerdem kann man aus jeder unverzweigten Überlagerung p von X eine neue machen, indem man p auf ein Gebiet $G \subset Y$ einschränkt. Dabei geht evtl. vorher schon vorhandene Surjektivität der Abbildung verloren. - Da wir eine solche Willkür nicht zulassen wollen, zeichnen wir eine spezielle Klasse von unverzweigten Überlagerungen aus, die bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen oder auch der sogenannten *Raumformen* in der Riemannschen Geometrie auftreten.

Definition und Bemerkung. Eine Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt eine *unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung*, falls es für alle $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ gibt, so daß $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ mit paarweise disjunkten offenen Mengen $V_j \subset Y$, $J \neq \emptyset$, und alle Einschränkungen $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ Homöomorphismen sind, $j \in J$.

Selbstverständlich ist eine solche Abbildung p wie oben lokal topologisch und damit eine unverzweigte

Überlagerung im alten Sinne (wegen Satz 18).

Bemerkung. Ist p eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung, so ist p notwendig surjektiv.

Definition. Ist U mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_j$ wie oben gewählt, so nennt man U eine *gleichmäßig überlagerte Umgebung*. Die V_j heißen die *Blätter* von Y über $U \subset X$.

Für je zwei Punkte x, x' in einer solchen Umgebung U haben die Fasern $p^{-1}(x)$ und $p^{-1}(x')$ die gleiche *Mächtigkeit*. Die Menge aller Punkte $x \in X$, für die $p^{-1}(x)$ die gleiche Mächtigkeit besitzen, ist also offen in X , und X wird in diese offenen paarweise disjunkten Mengen zerlegt. Es folgt:

Satz 18.20 *Ist $p : Y \rightarrow X$ eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung (und X zusammenhängend), so sind alle Fasern gleichmächtig.*

Definition. Diese Mächtigkeit heißt die *Blätterzahl* der Überlagerung $p : Y \rightarrow X$.

Wir fassen noch einige (schon bekannte oder einfach zu beweisende) Tatsachen zusammen.

Satz 18.21 *Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung. Dann gilt :*

- i) *Für alle $x \in X$ ist die Faser $p^{-1}(x)$ ein diskreter Teilraum von Y .*
- ii) *Ist $B \subset Y$ zusammenhängend und $p(B) \subset U$, wobei U eine gleichmäßig überlagerte offene Menge von X ist, $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_j$, so gibt es ein j mit $B \subset V_j$.*
- iii) *Die gleichmäßig überlagerten Umgebungen von X bilden eine Basis für die Topologie von X , und die darüber liegenden Blätter bilden eine Basis der Topologie von Y .*
- iv) *Der topologische Raum X trägt die Quotiententopologie bzgl. der Überlagerungsabbildung $p : Y \rightarrow X$. Man sagt dann auch, p sei eine „identifizierende“ Abbildung.*

Beispiele. Da wir i. f. ausschließlich unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungen betrachten werden, sprechen wir ab jetzt nur noch kurz von „Überlagerungen“.

1. Einblättrige Überlagerungen sind Homöomorphismen und daher uninteressant.

2. Die *Schraubenlinie*

$$L = \{ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \} \subset \mathbb{R}^3$$

ist zusammen mit der Einschränkung der Projektion $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf die ersten beiden Koordinaten eine Überlagerung des Kreises

$$S^1 = \{ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \} \subset \mathbb{R}^2$$

mit abzählbar unendlich vielen Blättern.

3. Wickelt man die Schraubenlinie auf die reelle Gerade \mathbb{R} ab, so läßt sich die Überlagerung in Beispiel 2. auch realisieren in der Form

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad p(t) = e^{2\pi it} \in S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2.$$

4. \mathbb{R}^2 überlagert den Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ bzgl. $px \text{ id}$. Der Zylinder überlagert den Torus bzgl.

$$\text{id} \times p : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1.$$

5. Ist $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $A \subset X$ ein Teilraum und $B = p^{-1}(A) \subset Y$ versehen mit der Relativtopologie, so ist $p|_B : B \rightarrow A$ eine Überlagerung.

6. Ein Raum kann sich selbst nicht-trivial überlagern, wie das folgende *Beispiel* zeigt:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto z^n, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

oder die Einschränkung dieser Abbildung auf $S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$S^1 \longrightarrow S^1, \quad z \mapsto z^n.$$

7. Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{ \text{Geraden in } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch den Nullpunkt} \}$ ist mit geeigneter Topologie eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Einheitskugel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wird von jeder Geraden durch den Ursprung in zwei Punkten („*antipodalen*“ Punkten) geschnitten. Also ist

$$\mathbb{P}_n \cong S^n / \mathbb{Z}_2.$$

(Zu Quotienten nach Gruppenoperationen siehe den Anhang zu Kapitel 23). Auf jeden Fall hat man eine surjektive Abbildung

$$S^n \longrightarrow \mathbb{P}_n,$$

und diese ist eine zweiblättrige Überlagerung.

Ich beschließe den Hauptteil dieses Kapitels mit einigen Zitaten zur Geschichte der Entwicklung des Begriffs der Riemannschen Flächen aus dem Buch von LAMOTKE (loc. cit.). Die Einfügungen und Auslassungen in eckigen Klammern stammen von mir.

[pp. 1 - 2] Schon in den Herbstferien 1847 entwickelte er [= der damals gerade 21-jährige BERNHARD RIEMANN] Ideen für eine neue Grundlage der komplexen Funktionentheorie. [...] Riemann fiel es schwer, seine Gedanken zu formulieren. Erst im November 1851 reichte er in Göttingen seine Dissertation [...] über „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe“ ein. Gutachter war der bereits 74 Jahre alte GAUSS. [...] Seine höchste Anerkennung teilte er Riemann mündlich mit: Er bereite seit Jahren eine Schrift über denselben Gegenstand vor. [...] Der 5. Abschnitt beginnt: „Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Größen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der unanstößig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke, [...]“ Hier schließt eine längere Erörterung ein, in welcher Weise T über A ausgebreitet ist. Im weiteren Verlauf der Dissertation bemüht sich Riemann, die Neuartigkeit seiner Ideen herunterzuspielen und dem Leser klarzumachen, daß man auf der Fläche T genauso einfach wie in der Zahlenebene eine Funktionentheorie aufbauen kann. Gauß meinte: „... der größte Theil der Leser möchte wohl in einigen Theilen noch eine größere Durchsichtigkeit der Anordnung wünschen.“ [...] In der Tat wurden Riemanns Ideen von seinen Zeitgenossen zwar bewundert, aber kaum angenommen. Erst durch Felix Kleins beredtes Eintreten [siehe auch seine noch heute außerordentlich lesenswerten *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Springer: Berlin 1926/27. Nachdruck 1979] wurden die Riemannschen Flächen gegen Ende des 19. Jahrhunderts verbreitet anerkannt. Ein wichtiges Ereignis war Weyls Buch von 1913 [H. WEYL. *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Teubner: Stuttgart–Leipzig. Neuauflage herausgegeben von R. REMMERT 1997], in dem er die Riemannschen Flächen von der Ausbreitung über der Zahlenebene löste und sie als *Mutterboden* ansah, auf dem die analytischen Funktionen wachsen und gedeihen können [...]. Weyl vergißt [...], das Hausdorffsche Trennungsaxiom zu fordern. Die Karten nennt er *Ortsuniformisierende*.

[p. 4] Atlanten finden sich [schon] in Kleins Göttinger Vorlesungen des Wintersemesters 1891/92 über *Riemannsche Flächen* [...]. „Eine zweidimensionale, geschlossene, mit einem Bogenelement ds^2 ausgestattete Mannigfaltigkeit, welche keine Doppelmannigfaltigkeit [d. h. orientierbar] ist, ist jedenfalls dann als Riemannsche Fläche zu brauchen, wenn man sie mit einer endlichen [sic!] Zahl von Bereichen

dachziegelartig überdecken kann, deren jeder eindeutig und konform auf eine schlichte Kreisscheibe abgebildet werden kann.“ [...]

[p. 5] Riemann führt die Zahlenkugel im Wintersemester 1858/59 in seinen *Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe* ein. [...] In seinen Publikationen kommt sie nicht explizit vor. Die erste Veröffentlichung, die (unter Berufung auf Riemanns Vorlesungen) die Zahlenkugel enthält, stammt von C. NEUMANN [...] [*Vorlesung über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*. Teubner: Leipzig 1865, 1884.]

[p. 209] Im Jahre 1913 postulierte H. Weyl [loc. cit.] die Triangulierbarkeit Riemannscher Flächen. Er bemerkt dazu auf S. 21, daß diese Einschränkung erforderlich zu sein scheint, um die Anwendbarkeit der „Exhaustionsmethode“ zu gewährleisten. Triangulierbare Flächen haben a fortiori eine abzählbare Topologie. Die Umkehrung gilt ebenfalls, der Beweis ist allerdings mühsam. Radó [...] wußte [schon um 1923], daß die Existenz einer komplexen Struktur die Abzählbarkeit der Topologie zur Folge hat. Er hat seinen Beweis damals nur skizziert, da Prüfer ihm mitgeteilt hatte, daß vermutlich jede topologische Fläche triangulierbar sei. Nachdem Prüfer seine eigene Vermutung widerlegt hatte, veröffentlichte Radó seinen Satz und das Prüfersche Beispiel einer zusammenhängenden Fläche mit überabzählbarer Topologie [in 1925]. Es war damals unbekannt, daß Hausdorff schon 1915 solche Flächen gefunden, aber nicht publiziert hatte.

Anhang: Der Modulraum der komplexen Tori

Als *Anhang* zu dem vorstehenden Kapitel wollen wir den sogenannten *Modulraum* der *Tori* (oder der *elliptischen Kurven*) konstruieren. Wie wir früher schon behauptet haben und später erst beweisen können, gibt es auf der orientierbaren topologischen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 0, d. h. auf der 2-Sphäre S^2 , nur eine *einzig*e komplex-analytische Struktur. Hat man dagegen eine solche Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 1, so wissen wir aufgrund der Theorie der elliptischen Funktionen, daß wir diese komplex-analytisch auf verschiedene Weisen als komplexe Tori \mathbb{C}^2/Ω realisieren können. Tatsächlich werden wir auch erst in der folgenden Vorlesung beweisen können, daß *jede* komplexe Struktur auf einer solchen Fläche biholomorph äquivalent zu einem solchen Torus ist. Hier wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wann zwei komplexe Tori komplex-analytisch isomorph sind und durch welche Invarianten die biholomorphen Äquivalenzklassen bestimmt sind.

Es lautet damit unsere wesentliche Frage: *Wann sind die beiden Tori $T_1 = T_{\Omega_1}$ und $T_2 = T_{\Omega_2}$ biholomorph äquivalent?*

Es sei zunächst f überhaupt irgendeine holomorphe Abbildung von T_1 nach T_2 . Wir betrachten dann das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C}/\Omega_1 = T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 = \mathbb{C}/\Omega_2 \end{array}$$

in dem die *holomorphe Liftung* F erst noch gesucht wird. Nun sind jedoch die Projektionsabbildungen π_1, π_2 lokal biholomorph, so daß *lokale* Liftungen von f trivialerweise immer existieren. Da aber \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, läßt sich mit dem Monodromiesatz leicht zeigen, daß man diese lokalen Liftungen so wählen kann, daß sie sich zu einer *globalen* zusammenfügen.

Die bloße Existenz von F zieht, wenn f nicht konstant ist, unmittelbar Bedingungen zwischen den beiden Gittern nach sich. Es muß nämlich aufgrund des obigen Diagramms für alle $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$F(z + m\omega_1^{(1)} + n\omega_2^{(1)}) = F(z) + m'\omega_1^{(2)} + n'\omega_2^{(2)},$$

wobei sogar m', n' lokal von z unabhängig sind. Differenziert man beide Seiten, so kommt

$$F'(z + m\omega_1^{(1)} + n\omega_2^{(1)}) = F'(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Infolgedessen ist F' doppelt-periodisch bzgl. Ω_1 und deshalb nach dem Satz von Liouville konstant. Damit hat man

$$F = cz + d,$$

und ohne Einschränkung kann man zusätzlich $F(0) = 0$, also $F(z) = cz$ annehmen. Dies impliziert $c\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Nun wollten wir ja außerdem f als *biholomorph* voraussetzen, woraus dann unmittelbar $c^{-1}\Omega_2 \subset \Omega_1$ und damit

$$\Omega_2 = cc^{-1}\Omega_2 \subset c\Omega_1 \subset \Omega_2,$$

also

$$\Omega_2 = c\Omega_1, \quad c \neq 0$$

folgt.

Es ist eine leichte Übungsaufgabe zu zeigen, daß umgekehrt $\Omega_2 = c\Omega_1$ die biholomorphe Äquivalenz

$T_1 \cong T_2$ impliziert. Somit gibt es in jeder Isomorphieklasse von Tori mindestens einen Torus zu einem Gitter der speziellen Gestalt

$$\Omega_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau, \quad \text{Im } \tau > 0.$$

Also haben wir eine surjektive Abbildung

$$H = \{\tau : \text{Im } \tau > 0\} \longrightarrow \{\text{Isomorphieklassen von Tori}\}$$

$$\tau \longmapsto \text{Klasse von } T_\tau = T_{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$$

von der oberen Halbebene in die Menge der Isomorphieklassen von Tori. Aber ist die Abbildung

$$H \ni \tau \longmapsto \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$$

tatsächlich eine Bijektion zwischen H und der Menge der speziellen Gitter vom Typ $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$? Die Antwort ist nein, da man auf jeden Fall Basiswechsel der Gitter zulassen muß, die die Gitter als Punkt-mengen festlassen. Wir fragen uns also: Wann ist

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sigma = \gamma(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$$

für $\text{Im } \sigma, \text{Im } \tau > 0$ und $\gamma \neq 0$? Dazu ist notwendig, daß

$$\sigma = a\gamma\tau + b\gamma$$

$$1 = c\gamma\tau + d\gamma$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. In Matrixschreibweise bedeutet dies eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Ebenso hat man die umgekehrte Beziehung

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\sigma \\ \gamma^{-1} \end{pmatrix}.$$

Faßt man beide Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix},$$

woraus sich das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = A\sigma + B \\ 1 = C\sigma + D \end{array} \right\} \text{ und damit } \begin{cases} B = 0, A = 1 \\ D = 1, C = 0 \end{cases}$$

ergibt. Also ist notwendig die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

und ihre Determinante kann nur ± 1 sein. Nun ist aber

$$\sigma = \frac{\sigma}{1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2}$$

und folglich

$$\text{Im } \sigma = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \text{Im } \tau.$$

Also ist $ad - bc = 1$ und damit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Daß umgekehrt diese Transformationen den gewünschten Effekt haben, kann man wie folgt einsehen. Man macht sich zuerst klar, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ erzeugt wird von der Translation

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Spiegelung

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf der oberen Halbebene operieren diese Matrizen gemäß

$$T(\tau) = \tau + 1 \quad \text{bzw.} \quad S(\tau) = -\frac{1}{\tau}.$$

T führt offensichtlich das Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ in sich über. Dagegen macht S aus diesem Gitter das neue Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(-1/\tau)$. Dies ist aber (man multipliziere mit τ) konform äquivalent zu $-\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.

Wir fassen die obigen Ergebnisse wie folgt zusammen. Man lasse die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auf H operieren gemäß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese Operation ist noch nicht effektiv; man braucht aber nur den Normalteiler $\{\pm E_2\}$ herauszuteilen. Genauer betrachten wir also die Aktion der *projektiven* Gruppe

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm E_2\}.$$

Die *Modulgruppe*

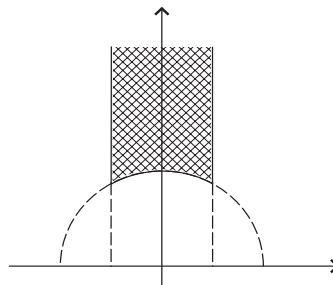
$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm E_2\} =: \Gamma$$

ist eine (diskrete) Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ und operiert ebenfalls auf H effektiv. Nach dem oben Bewiesenen ist aber

$$T_\tau \cong T_\sigma, \quad \sigma, \tau \in H$$

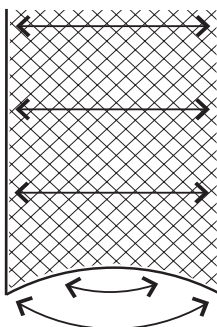
genau dann, wenn es ein Gruppenelement g in der Modulgruppe Γ gibt mit $\sigma = g(\tau)$. Der von uns gesuchte Modulraum der Tori ist somit gleich dem Quotientenraum H/Γ .

Um uns eine Vorstellung von diesem Raum machen zu können, benötigen wir die Kenntnis eines sogenannten *Fundamentalbereiches* der Gruppenaktion. Dieser sieht bekanntlich wie folgt aus:



Figur 18.5

Identifiziert man hierin korrespondierende Randpunkte, so sieht der entstehende Raum topologisch sehr einfach aus.



Figur 18.6

In der Tat ist die Riemannsche Fläche H/Γ isomorph zu \mathbb{C} . Wir wollen dies noch ein wenig erläutern, ohne in die Details zu gehen. Man ordnet jedem $\tau \in H$ wie bei der Weierstraßschen \wp -Funktion die Invarianten

$$g_2 = g_2(\tau) = 60 \sum' \frac{1}{(m + n\tau)^4}$$

$$g_3 = g_3(\tau) = 140 \sum' \frac{1}{(m + n\tau)^6}$$

zu. Als Gitterfunktionen sind diese abhängig von Dilatationen der Gitter. Jedoch ist der Quotient

$$J(\tau) := \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

offensichtlich eine holomorphe Funktion auf H , die unter der Modulgruppe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ invariant ist. Man nennt sie die *elliptische Modulfunktion*.

Satz 18.22 Die elliptische Modulfunktion J nimmt jeden Wert aus \mathbb{C} auf dem Fundamentalbereich genau einmal an.

Zum Beweis siehe z. B. HURWITZ - COURANT [15] (siehe auch Kapitel 24). □

Folgerung 18.23 Der Modulraum $H/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ der komplexen Tori ist unter der elliptischen Modulfunktion kanonisch isomorph zu \mathbb{C} .

In diesem Sinne klassifiziert also die komplexe Ebene \mathbb{C} die komplexen Strukturen auf dem Torus.

19 Konforme Abbildungen

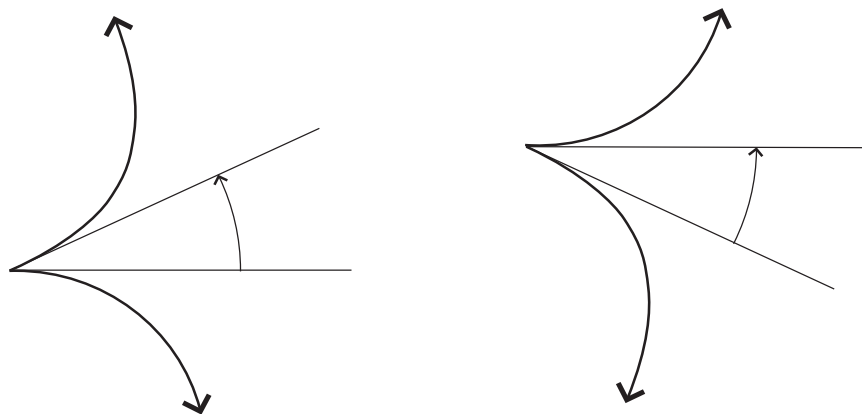
Wir wollen in diesem Paragraphen (lokal) biholomorphe Funktionen durch eine Abbildungseigenschaft charakterisieren, nämlich durch die *Erhaltung von orientierten Winkeln*. Dazu betrachten wir von $z_0 \in \mathbb{C}$ ausgehende Wege $\gamma : [0, a) \rightarrow \mathbb{C}$, γ stetig differenzierbar (d. h. genauer in 0 rechtsseitig stetig differenzierbar), mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, a)$. Seien γ_1, γ_2 zwei solche Wege; dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0)$$

der *orientierte Winkel* zwischen γ_1 und γ_2 . (Natürlich wird durch $s \mapsto z_0 + s\gamma_j'(0)$, $s \geq 0$, die *Halbtangente* an γ_j in z_0 parametrisiert). Der Winkel $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ ist nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt (und also eigentlich als Element der additiven Gruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aufzufassen). Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\gamma_2, \gamma_1) &= -\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2), \quad \sphericalangle(\gamma, \gamma) = 0, \\ \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_3) &= \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) + \sphericalangle(\gamma_2, \gamma_3). \end{aligned}$$

Seien nun $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, s. d. $f : U \rightarrow V$ umkehrbar stetig differenzierbar ist. Ist $\gamma : [0, a) \rightarrow U$ ein von $z_0 \in U$ ausgehender Weg, so ist $f \circ \gamma$ eine stetig differenzierbare Abbildung $f \circ \gamma : [0, a) \rightarrow V$.



Figur 19.1

Durch Differentiation erhält man

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\gamma'(0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\gamma'(0)}.$$

Aus der Umkehrbarkeit von f folgt natürlich $(f \circ \gamma)'(0) \neq 0$; d. h. auch der *Bildweg* $f \circ \gamma$ „definiert einen Winkel“.

Ist f überdies *holomorph* in z_0 , so ist dort $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ und $\partial f/\partial z(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. Damit ergibt sich für zwei beliebige in z_0 startende Wege:

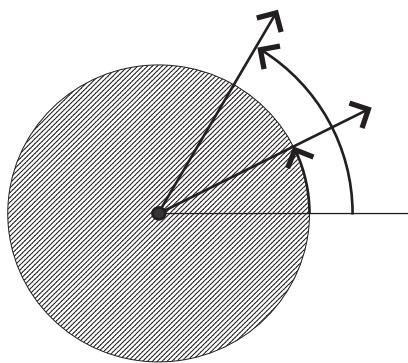
$$\sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{(f \circ \gamma_2)'(0)}{(f \circ \gamma_1)'(0)} = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_2'(0)}{f'(z_0)\gamma_1'(0)} = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2),$$

d. h. also: umkehrbar holomorphe Funktionen f erhalten Winkel (samt Orientierung).

Sei andererseits die Funktion f umkehrbar stetig differenzierbar, und f erhalte orientierte Winkel im Punkte z_0 . Man wähle dann die beiden Wege

$$\gamma_1(t) = z_0 + t e^{i\varphi_1},$$

$$\gamma_2(t) = z_0 + t e^{i\varphi_2}.$$



Figur 19.2

Es ist hierbei natürlich

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

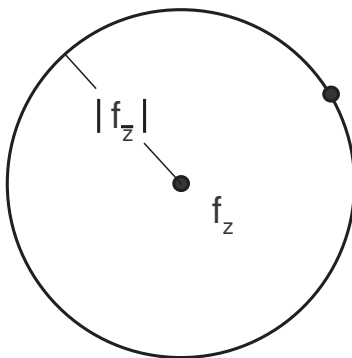
Also gilt nach Voraussetzung im Punkte z_0 die Identität

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{(f \circ \gamma_2)'}{(f \circ \gamma_1)'} = \arg \frac{f_z e^{i\varphi_2} + f_{\bar{z}} e^{-i\varphi_2}}{f_z e^{i\varphi_1} + f_{\bar{z}} e^{-i\varphi_1}},$$

aus der sich unmittelbar die Beziehung

$$\arg \frac{f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\varphi_2}}{f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\varphi_1}} = 0$$

für alle Winkel φ_1, φ_2 ergibt.



Figur 19.3

Dies ist offensichtlich nur dann möglich, wenn $f_{\bar{z}} = 0$ in z_0 gilt und somit f dort komplex differenzierbar ist.

Definition. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *lokal konform*, wenn sie glatte Wege in glatte Wege überführt (dann besitzt sie lokal stetig differenzierbare Umkehrungen und ist damit offen) und in jedem Punkt von G winkel- und orientierungstreu ist. f heißt *konform*, wenn f lokal konform ist und G bijektiv auf $f(G)$ abbildet.

Mit dieser Definition können wir den eben bewiesenen Sachverhalt wie folgt formulieren.

Satz 19.1 *Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$, ist genau dann (lokal) konform, wenn f (lokal) biholomorph ist.*

Eine biholomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen ist auch in lokalen Karten (lokal) biholomorph. Man nennt solche Abbildungen daher ebenfalls *konform*. Zwei Gebiete $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ heißen *konform äquivalent* oder auch *biholomorph äquivalent*, falls es eine biholomorphe Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ gibt. Klar ist nach unseren früheren Überlegungen zum einfachen Zusammenhang:

Sind die Gebiete G_1, G_2 konform äquivalent, und ist G_1 (homologisch) einfach zusammenhängend, so auch G_2 .

Bemerkung. Jedoch ist einfacher Zusammenhang beider Gebiete für konforme Äquivalenz nicht hinreichend. Ist $G_1 = \mathbb{C}$, $G_2 \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so ist jede holomorphe Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ nach dem Satz von Liouville konstant, also keinesfalls biholomorph. Wir werden aber später in Kapitel 22 beweisen (*Riemannscher Abbildungssatz*), daß je zwei einfach zusammenhängende Gebiete in \mathbb{P}_1 mit mindestens zweipunktigem Komplement konform äquivalent sind.

Definition. Konforme Selbstabbildungen eines Gebietes (oder einer Riemannschen Fläche) heißen (*holomorphe*) *Automorphismen*. Die Menge $\text{Aut}(G)$ aller solcher Automorphismen bildet bzgl. der Hintereinanderschaltung offensichtlich eine Gruppe. Sind G_1, G_2 konform äquivalent unter f , so ist offensichtlich

$$\begin{cases} \text{Aut}(G_1) & \longrightarrow & \text{Aut}(G_2) \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{cases}$$

ein Gruppenisomorphismus. Sind also die Automorphismengruppen von zwei Gebieten als abstrakte Gruppen nicht isomorph, so können die beiden Gebiete nicht konform äquivalent sein.

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir $\text{Aut}(\mathbb{P}_1)$, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ und $\text{Aut}(D)$, D der Einheitskreis, bestimmen. (Dies sind die einzig möglichen Automorphismengruppen der einfach zusammenhängenden Teilgebiete von \mathbb{P}_1 (siehe Kapitel 22) und sogar aller einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen).

Bemerkung. Die Standard-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ „erbt“ vermöge der euklidischen Struktur des \mathbb{R}^3 eine *konforme* Struktur, wobei noch eine Rolle spielt, daß die Sphäre orientierbar ist. Offensichtlich gehen unter der stereographischen Projektion zwei Großkreise durch den Nord- und Südpol in zwei Geraden durch den Nullpunkt über, und die jeweils eingeschlossenen Winkel auf der Sphäre bzw. in der Ebene stimmen überein. Wir werden im anschließenden Kapitel den folgenden Satz beweisen:

Satz *Ist $n : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ die stereographische Projektion vom Nordpol aus und ist $\varphi \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ eine orthogonale Abbildung, so gibt es einen Automorphismus $\psi \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ mit $n \circ \varphi = \psi \circ n$.*

Wählt man speziell zu festem $x_0 \in S^2$ eine Abbildung φ mit $\varphi(x_0) = (0, 0, -1)$, so ist notwendig $\psi(n(x_0)) = 0$. Dies hat dann mit der obigen Bemerkung zur Folge:

Satz 19.2 *Die stereographische Projektion $n : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine konforme Abbildung.*

20 Gebrochen lineare Transformationen

Wir betrachten im folgenden ausführlich die sogenannten (*gebrochen*) *linearen Transformationen*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Es ist a priori klar, daß diese Funktionen (auch ohne die obige Einschränkung an die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$) holomorphe Abbildungen $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ definieren, sofern nur $(c, d) \neq (0, 0)$. Eine solche Abbildung ist höchstens dann biholomorph, wenn an allen endlichen Stellen z mit $f(z) \neq \infty$ gilt: $f'(z) \neq 0$. Nun ist

$$f'(z) = \frac{(cz + d)a - (az + b)c}{(cz + d)^2} = (ad - bc) \frac{1}{(cz + d)^2},$$

und damit ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Determinante $ad - bc \neq 0$ ist. Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ ist also notwendig, damit f aufgefaßt als holomorphe Abbildung $f: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ bijektiv ist. Aus diesem Grunde ist es naheliegend, jeder Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

die Abbildung

$$f_A: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1, \quad f_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

zuzuordnen. Nun gilt für zwei solche Matrizen A_1 und A_2 :

$$\begin{aligned} f_{A_2} \circ f_{A_1}(z) &= \frac{a_2 f_{A_1}(z) + b_2}{c_2 f_{A_1}(z) + d_2} = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

besteht also die Beziehung

$$f_{A_2} \circ f_{A_1} = f_{A_2 \circ A_1}.$$

Insbesondere folgt $f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{E_2} = \text{id}$, d. h. alle gebrochen linearen Transformationen f_A sind Automorphismen: $f_A \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$, und die Abbildung

$$\text{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Wir fragen uns weiter, was der Kern dieser Abbildung ist. Es gilt

$$\frac{az + b}{cz + d} = \text{id}(z) = z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $az + b = cz^2 + dz$ für alle z gilt, was unmittelbar $c = 0 = b$, $a = d$ nach sich zieht. Die Umkehrung ist trivial nachzurechnen. D. h.: Die Gruppe der gebrochen linearen Transformationen ist isomorph zu

$$\text{PGL}(2, \mathbb{C}) := \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \{ a E_2 : a \in \mathbb{C}^* \} \cong \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{ E_2, -E_2 \} =: \text{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

also isomorph zu der *allgemeinen projektiven linearen Gruppe in zwei Veränderlichen*.

Wir wollen nun zeigen, daß der obige Homomorphismus sogar surjektiv ist, d. h. daß $\text{Aut}(\mathbb{P}_1) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. (Daher rührt natürlich die Bezeichnung als *projektive Gruppe*). - Dazu zeigen wir zunächst den auch für sich interessanten

Satz 20.1 Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ der komplexen Ebene besteht genau aus den ganzen linearen Transformationen

$$z \mapsto az + b, \quad a \neq 0$$

(also den gebrochen linearen Transformationen mit $c = 0, d = 1$).

Beweis. Offensichtlich ist $z \mapsto az + b, a \neq 0$, eine biholomorphe Abbildung von \mathbb{C} auf sich.

Sei umgekehrt f ein beliebiger Automorphismus von \mathbb{C} , so daß insbesondere $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wäre f transzendent, so hätte f im Unendlichen eine wesentliche Singularität, so daß nach dem Satz von Casorati–Weierstraß (siehe Kapitel 10) $f(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ dicht in \mathbb{C} liegen würde ($D = \{|z| < 1\}$). Da f bijektiv ist, würde aber $f(D) \cap f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) = \emptyset$ folgen. Da weiter f ein Homöomorphismus ist, ist $f(D)$ offen und nicht leer. Dies steht aber im Widerspruch zur Dichtheit von $f(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ in \mathbb{C} ! Somit kann f nur ein Polynom sein. Wäre dessen Grad aber ≥ 2 , so wäre f nicht bijektiv. Also ist f affin. \square

Als Folgerung ergibt sich hieraus fast zwangsläufig

Satz 20.2 $\text{Aut}(\mathbb{P}_1) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Beweis. Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$. Gilt dann $f(\infty) = \infty$, so ist $f|_{\mathbb{C}} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, also nach Satz 1 ganz linear und damit erst recht gebrochen linear. Gilt dagegen $f(\infty) = c \neq \infty$, so schalte man den Automorphismus g mit

$$g(z) = \frac{1}{z - c}$$

hinter f . Es folgt für $h = g \circ f$, daß $h(\infty) = \infty$. Dann ist h nach dem ersten Fall affin und $f = g^{-1} \circ h$ gebrochen linear. \square

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, daß die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ erzeugt wird von

- a) den Translationen $z \mapsto z + b$,
- b) den Drehstreckungen $z \mapsto az, a \neq 0$,
- c) der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Als nächstes untersuchen wir die Fixpunkte einer gebrochen linearen Transformation.

Satz 20.3 Jedes Element $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$, das von der Identität verschieden ist, besitzt mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte.

Beweis. Sind für $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ die Koeffizienten $c = 0, d = 1$, ist f also ganz linear, so hat die Gleichung $az + b = f(z) = z$ im Endlichen höchstens eine Lösung, wenn $a \neq 1$, und dann genau eine, nämlich $z_0 = b/(1 - a)$. Ist $a = 1$, so ist entweder f die Identität, was ausgeschlossen war, oder die obige Gleichung hat keine Lösung. Selbstverständlich ist in diesem Fall $f(\infty) = \infty$; also besitzt $f \neq \text{id}$ genau einen Fixpunkt. Ist $c \neq 0$, so ist $f(\infty) = a/c \neq \infty$; also ist ∞ kein Fixpunkt. Die Fixpunkte berechnen sich damit im Endlichen aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

die (mit Vielfachheit gezählt) zwei Lösungen besitzt. \square

Bemerkung. Hieraus erschließt man auch ohne jegliche topologische Grundkenntnisse, daß kein Torus $T_\Omega = \mathbb{C}/\Omega$ zu \mathbb{P}_1 biholomorph äquivalent sein kann. Ein solcher Torus besitzt nämlich Automorphismen, die keinen Punkt fest lassen, wie z. B. die von den Translationen $\mathbb{C} \ni z \mapsto z + a, a \notin \Omega$, induzierten biholomorphen Selbstabbildungen von T_Ω .

Folgerung 20.4 *Stimmen die Automorphismen $f_1, f_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ in mindestens drei verschiedenen Punkten von \mathbb{P}_1 überein, so sind sie identisch.*

Beweis. Seien z_1, z_2, z_3 drei Punkte, in denen f_1 und f_2 übereinstimmen. Dann gilt:

$$f_2^{-1} \circ f_1(z_j) = f_2^{-1} \circ f_2(z_j) = z_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Also besitzt $f_2^{-1} \circ f_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ mindestens die drei Fixpunkte z_j , und folglich ist $f_2^{-1} \circ f_1 = \text{id}$ und $f_1 = f_2$. \square

Umgekehrt wollen wir jetzt noch zeigen, daß man auch drei beliebige (natürlich paarweise verschiedene) Werte für einen Automorphismus von \mathbb{P}_1 vorschreiben darf: Seien z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden, und seien diese vorerst endlich. Man bilde dann

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Die Determinante der zu dieser (formal gebrochen linearen) Transformation gehörigen Matrix ist offensichtlich von Null verschieden; also ist tatsächlich $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$. Es ist üblich, den rechts stehenden Ausdruck das *Doppelverhältnis* der Punkte z, z_1, z_2, z_3 zu nennen und mit

$$\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

zu bezeichnen. Für $f(z) = \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ gilt offensichtlich:

$$\begin{cases} f(z_1) = 0, \\ f(z_2) = 1, \\ f(z_3) = \infty. \end{cases}$$

Ist einer der Punkte $z_j = \infty$, so lasse man in der obigen Definition den entsprechenden Wert z_j gegen ∞ gehen. Z. B. erhält man auf diese Weise

$$\begin{aligned} \text{DV}(z, \infty, z_2, z_3) &= \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{z - \frac{1}{w}}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - \frac{1}{w}} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{wz - 1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{wz_2 - 1} = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich

$$\text{DV}(z, z_1, \infty, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \text{DV}(z, z_1, z_2, \infty) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Es folgt:

Satz 20.5 *Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}_1$ paarweise verschieden, so ist $\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ der Automorphismus, der z_1, z_2, z_3 auf $0, 1, \infty$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Sind $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{P}_1$ ebenfalls paarweise verschieden, so bildet der Automorphismus*

$$\text{DV}^{-1}(z, w_1, w_2, w_3) \circ \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

das Tripel (z_1, z_2, z_3) auf das Tripel (w_1, w_2, w_3) ab und ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis ist (bei richtiger Interpretation) invariant unter gebrochen linearen Transformationen:

Satz 20.6 Seien z_0, z_1, z_2, z_3 Punkte in \mathbb{P}_1 (die letzten drei paarweise verschieden). Dann gilt für alle $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$:

$$\text{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \text{DV}(f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) .$$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\text{DV}(z, f(z_1), f(z_2), f(z_3)) \circ f =: g \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1) ,$$

also

$$g(z) = \text{DV}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) .$$

Für g gilt $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$, $g(z_3) = \infty$, und somit ist $g(z)$ gleich dem Doppelverhältnis $\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$. \square

Wir wollen noch einige *geometrische Eigenschaften* der gebrochen linearen Transformationen studieren. Dazu betrachten wir *Kreise* in $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Darunter wollen wir verstehen: Kreise in \mathbb{C} oder Geraden in \mathbb{C} zusammen mit dem unendlich fernen Punkt.

Satz 20.7 Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ der Riemannschen Zahlenkugel führt Kreise in Kreise über.

Beweis. Es ist klar, daß Translationen und Drehstreckungen Geraden in Geraden und Kreise in Kreise überführen. Nach einer Übungsaufgabe sind Geraden und Kreislinien in \mathbb{C} beschreibbar durch Gleichungen der Gestalt

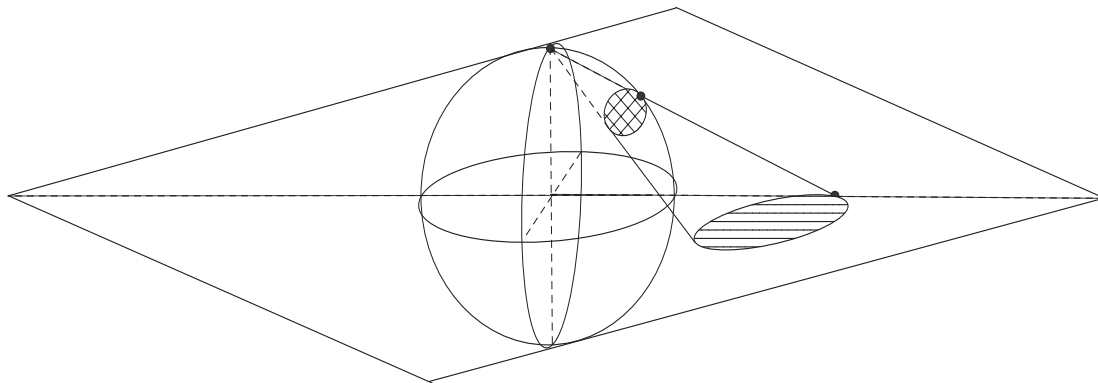
$$\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0, \quad \alpha, \delta \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad |c|^2 > \alpha \delta .$$

Bei der Inversion $w = 1/z$ geht diese Gleichung über in

$$\alpha \frac{1}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0, \quad \text{d. h. in}$$

$$\delta w\bar{w} + \bar{c}w + c\bar{w} + \alpha = 0, \quad |\bar{c}|^2 = |c|^2 > \alpha \delta = \delta \alpha . \quad \square$$

Man kann leicht zeigen, daß die Kreise in $\bar{\mathbb{C}}$ genau die Bilder von Kreisen auf der Sphäre S^2 unter der stereographischen Projektion $n : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sind.



Figur 20.1

Dies wollen wir hier kurz nachrechnen, wozu wir eine analytische Beschreibung der stereographischen Projektion und ihrer Inversen benötigen. Wir schreiben Punkte in \mathbb{R}^3 in der Form

$$(\zeta, \tau) = (\xi + i\eta, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

und wie üblich $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Aus der Figur 17.9 folgt

$$n(\zeta, \tau) = z = \frac{z}{1} = \frac{\zeta}{1 - \tau} \quad \text{mit} \quad |\zeta|^2 + \tau^2 = 1.$$

Umgekehrt muß $n^{-1}(z)$ von der Form $(\lambda z, \sqrt{1 - \lambda^2|z|^2})$ mit $\lambda = \lambda(z) \in \mathbb{R}$ sein. Aus

$$z = n(n^{-1}(z)) = \frac{\lambda z}{1 - \sqrt{1 - \lambda^2|z|^2}}$$

folgt für $z \neq 0, \infty$, daß $1 - \lambda = \sqrt{1 - \lambda^2|z|^2}$, also $\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda^2|z|^2$ und damit $\lambda = (1 + |z|^2)^{-1}$. Hieraus errechnet man unmittelbar

$$n^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right).$$

Bemerkung. Die entsprechenden Formeln für die Projektion $s : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ vom Südpol S aus gewinnt man mit dem analogen Verhältnis

$$\frac{w}{1} = \frac{\zeta}{1 + \tau}.$$

Die Übergangsfunktion von $\mathbb{C}^* \cong n(S^2 \setminus \{N, S\})$ nach $\mathbb{C}^* \cong s(S^2 \setminus \{N, S\})$ bestimmt sich dann mit

$$w\bar{z} = \frac{\zeta\bar{\zeta}}{1 - \tau^2} = 1$$

zu

$$w = \frac{1}{\bar{z}}$$

und ist somit die *Spiegelung am Einheitskreis*. Insbesondere ist diese Koordinatentransformation *antiholomorph* und folglich *orientierungsumkehrend*, so daß die beiden naheliegenden Karten $n : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $s : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ keinen holomorphen Atlas von $\overline{\mathbb{C}}$ darstellen. Dieses Defizit wird aber auf denkbar einfache Weise durch Hinterschaltung der komplexen Konjugation bei der zweiten Karte behoben.

Satz 20.8 $n^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ bildet die Gesamtheit der Kreise und Geraden in $\overline{\mathbb{C}}$ auf die Gesamtheit der Kreise in S^2 ab.

Beweis. Die zu untersuchende Gesamtheit der Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ wird auch beschrieben durch die Gleichungen

$$\alpha|z|^2 + \operatorname{Re}(\beta\bar{z}) + \delta = 0, \quad \alpha, \delta \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C},$$

mit

$$(*) \quad |\beta|^2 - 4\alpha\delta > 0.$$

Durch Einsetzen von $z = \zeta/1 - \tau$ und $|\zeta|^2 + \tau^2 = 1$ erhält man die Gleichung

$$\frac{\alpha(1 - \tau^2)}{(1 - \tau)^2} + \frac{1}{1 - \tau} \operatorname{Re}(\beta\bar{\zeta}) + \delta = 0$$

und somit durch Multiplikation mit $1 - \tau$:

$$\alpha(1 + \tau) + \operatorname{Re}(\beta\bar{\zeta}) + \delta(1 - \tau) = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha - \delta)\tau + \operatorname{Re}(\beta\bar{\zeta}) + (\alpha + \delta) = 0.$$

Dies ist eine Ebenengleichung; der Durchschnitt dieser Ebene mit der Sphäre $|\zeta|^2 + \tau^2 = 1$, der nach Konstruktion nicht leer sein kann (was algebraisch durch die Bedingung (*) gewährleistet wird), ist das Urbild des Kreises bzw. der Geraden, also ein Kreis. Der Nordpol liegt genau dann auf der Ebene, wenn $\alpha = 0$, d. h. wenn wir mit einer Geraden gestartet sind. (*) ist ja gleichbedeutend mit $(\alpha + \delta)^2 < |\beta|^2 + (\alpha - \delta)^2$.

Umgekehrt ist ein Kreis auf S^2 Durchschnitt von S^2 mit einer Ebene $a\tau + \operatorname{Re}(b\bar{\zeta}) + c = 0$ (mit einer geeigneten Bedingung, nämlich daß ihr Abstand von 0 kleiner als 1 ist, also $c^2 < a^2 + |b|^2$). Das Bild ist dann gegeben durch

$$a \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} + \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re}(b\bar{z}) + c = 0,$$

also

$$(a + c)|z|^2 + \operatorname{Re}(2b\bar{z}) + (c - a) = 0.$$

Die erforderliche Bedingung

$$4|b|^2 - 4(c^2 - a^2) > 0$$

ist aber gerade die oben erwähnte Voraussetzung $c^2 < a^2 + |b|^2$. \square

Durch drei verschiedene Punkte in \mathbb{P}_1 geht genau (eine Gerade oder) ein Kreis (nämlich der Schnitt von S^2 mit der Ebene durch diese drei Punkte). Dieser Kreis läßt sich wie folgt charakterisieren:

Satz 20.9 $z \in \mathbb{P}_1$ liegt genau dann auf dem durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreis, wenn

$$\operatorname{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Beweis. Der Automorphismus $f(z) = \operatorname{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ bildet das Tripel z_1, z_2, z_3 auf $0, 1, \infty$ ab. Das Bild des durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreises ist nach Satz 7 ein Kreis, also die Gerade durch $0, 1, \infty$, d. h. $f(\text{Kreis}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

Wir schließen noch einige Bemerkungen zu den Abbildungseigenschaften gebrochen linearer Abbildungen an.

Satz 20.10 Das Gebiet $G \subset \mathbb{P}_1$ werde durch einen Kreis berandet. Dann gibt es eine gebrochen lineare Transformation, die G auf die obere Halbebene abbildet. Insbesondere sind alle diese Gebiete konform äquivalent.

Beweis. Seien z_1, z_2, z_3 so beschaffen, daß der durch sie definierte Kreis das vorgegebene Gebiet G berandet. Dann gilt für das Doppelverhältnis

$$f(z) = \operatorname{DV}(z, z_1, z_2, z_3),$$

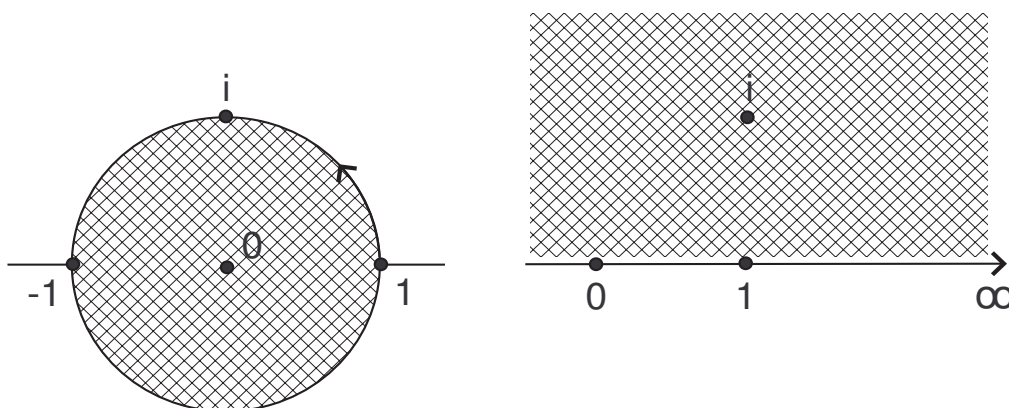
daß

$$f(\partial G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Da $\mathbb{P}_1 \setminus \bar{G}$ dieselben Eigenschaften wie G hat, muß das Bild $f(G)$ die obere oder die untere Halbebene sein. Eine eventuelle Komposition mit $z \rightarrow 1/z$ liefert die Behauptung. \square

Beispiel. Wir betrachten

$$\operatorname{DV}(z, 1, i, -1) = i \frac{1 - z}{1 + z}.$$



Figur 20.2

Der Kreis durch die Punkte $1, i, -1$ ist der Einheitskreis. Also wird $D = \{|z| < 1\}$ unter f konform abgebildet auf die obere oder untere Halbebene. Nun ist aber

$$DV(0, 1, i, -1) = i \in H,$$

wenn H wie üblich die *obere* Halbebene bezeichnet. Also liefert die gegebene Abbildung eine konkrete konforme Abbildung des Einheitskreises auf die obere Halbebene.

Zum Abschluß dieses Kapitels machen wir noch ein paar Bemerkungen zu der Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ der eigentlichen orthogonalen Drehungen des 3-dimensionalen Raumes. Man kann diese selbstverständlich als konforme Abbildungen der Sphäre S^2 auffassen. Unter der stereographischen Projektion muß daher (siehe Satz 19.2) die Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ als Untergruppe von $PGL(2, \mathbb{C})$ realisierbar sein. Es läßt sich leicht (zum Beispiel durch Betrachtung geeigneter Erzeuger) zeigen, daß die spezielle orthogonale Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ isomorph ist zu

$$PSU(2, \mathbb{C}) = SU(2, \mathbb{C}) / \{\pm E_2\},$$

wobei

$$SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a\bar{a} + b\bar{b} = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

die *spezielle unitäre Gruppe* bezeichnet¹⁷. Man beachte, daß der der Gruppe $SU(2, \mathbb{C})$ unterliegende topologische Raum eine dreidimensionale Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist. Neben S^1 ist dies die einzige Sphäre, die eine Gruppenstruktur trägt.

Wir wollen die wesentlichen Schritte für diese Identifikation hier noch durchführen und betrachten dazu zuerst *spezielle* Elemente in $SO(3, \mathbb{R})$. Dazu gehören zunächst die Drehungen um die Polachse mit Winkel λ . Analytisch werden diese durch $(\zeta, \tau) \mapsto (e^{i\lambda}\zeta, \tau)$ beschrieben; sie induzieren unter der stereographischen Projektion die Abbildung

$$z \mapsto e^{i\lambda} z = \frac{e^{i\lambda/2} z + 0}{-0 z + e^{-i\lambda/2}}.$$

Das Bild dieser Abbildung ist also gebrochen linear mit einer beschreibenden Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} e^{i\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda/2} \end{pmatrix} \in SU(2, \mathbb{C}).$$

¹⁷Einen *Beweis* hierzu findet man z. B. bei SPRINGER, Invariant Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics 585.

Als nächstes betrachten wir die Drehung ψ um die η -Achse $\xi = \tau = 0$, die den Nordpol $(0, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ in den Punkt $(1, 0)$ überführt. Diese wird analytisch beschrieben durch

$$(\xi, \eta, \tau) \mapsto (\tau, \eta, -\xi)$$

und induziert deshalb auf $\bar{\mathbb{C}}$ die Abbildung $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} z &\xrightarrow{n^{-1}} \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) \xrightarrow{\psi} \left(\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{-2x}{1+|z|^2} \right) \\ &\xrightarrow{n} \frac{|z|^2-1+2iy}{(1+|z|^2)\left(1+\frac{2x}{1+|z|^2}\right)} = \frac{|z|^2-1+2iy}{1+|z|^2+2x} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{z-1}{z+1}. \end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung $\tilde{\psi}$ ist also gebrochen linear und wird durch die Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{PSU}(2, \mathbb{C}) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

beschrieben. $\tilde{\psi}$ ist bestimmt durch die Werte

$$\tilde{\psi}(0) = -1, \quad \tilde{\psi}(1) = 0, \quad \tilde{\psi}(\infty) = 1,$$

wie es natürlich auch aufgrund der Konstruktion von $\tilde{\psi}$ aus ψ sein muß:

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\sim} (0, 0, -1) \mapsto (-1, 0, 0) \xrightarrow{\sim} -1, \\ 1 &\xrightarrow{\sim} (1, 0, 0) \mapsto (0, 0, -1) \xrightarrow{\sim} 0, \\ \infty &\xrightarrow{\sim} (0, 0, 1) \mapsto (1, 0, 0) \xrightarrow{\sim} 1. \end{aligned}$$

Satz 20.11 $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ wird vermöge der stereographischen Projektion isomorph auf eine Untergruppe von $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ abgebildet. Man kann genauer zeigen:

$$\text{SO}(3, \mathbb{R}) \cong \text{PSU}(2, \mathbb{C}).$$

D. h.: Man hat eine (kanonische) exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm E_2\} \longrightarrow \text{SU}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R}) \longrightarrow 1.$$

Beweis. Jeder orthogonale Automorphismus $\varphi \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ besitzt, wie in der *Linearen Algebra* gezeigt wird, einen Fixpunkt $x_0 \in S^2$, und φ ist eine Drehung um die Achse durch die antipodalen Punkte x_0 und $-x_0$. Da offensichtlich die Gruppe $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ transitiv auf S^2 operiert, kann man eine Drehung $\gamma \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ so wählen, daß $\gamma(x_0) = N$. Dann gilt $\gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}(N) = N$. Also ist

$$\varphi = \gamma^{-1} \circ \vartheta \circ \gamma$$

mit einer Drehung ϑ um die „Polachse“. Die Abbildung γ läßt sich aber ebenfalls aus solchen Drehungen und der speziellen Drehung ψ und ihrer Inversen zusammensetzen. Denn mit einer der Drehungen ϑ kann man den Punkt x_0 in die (ξ, τ) -Ebene befördern und danach mit einer Drehung um die η -Achse in den Nordpol. Die Drehungen um die η -Achse sind genau die Konjugierten $\psi^{-1} \circ \vartheta \circ \psi$ (siehe unten). Wir können damit festhalten:

Die Gruppe $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ wird erzeugt von der speziellen Drehung ψ und ihrer Inversen und den Drehungen ϑ um die Polachse.

Da diese Erzeuger unter stereographischer Projektion in die Untergruppe $SU(2, \mathbb{C}) \subset SL(2, \mathbb{C})$ abgebildet wird, finden wir einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$SO(3, \mathbb{R}) \longrightarrow PSU(2, \mathbb{C}).$$

Wir berechnen das Bild von $\psi^{-1} \circ \vartheta_{2\lambda} \circ \psi$ in $PSU(2, \mathbb{C})$, wobei der Index 2λ bei ϑ den *Drehwinkel* um die Polachse bezeichnet, explizit, da wir die Formel weiter unten noch benötigen. Es ist

$$(\psi^{-1} \circ \vartheta_{2\lambda} \circ \psi)(1, 0, 0) = (\psi^{-1} \circ \vartheta_{2\lambda})(0, 0, -1) = \psi^{-1}(0, 0, -1) = (1, 0, 0),$$

also $\psi^{-1} \circ \vartheta_{2\lambda} \circ \psi$ eine Drehung um die ξ -Achse. Beachte hierbei, daß die Umkehrabbildung von

$$\psi(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{gleich} \quad \frac{1+z}{1-z}$$

ist, denn es gilt

$$\frac{\frac{1+z}{1-z} - 1}{\frac{1+z}{1-z} + 1} = z.$$

Damit erhält man sukzessive für die Bilder von z unter (den Bildern von) ψ , $\vartheta_{2\lambda}$ und ψ :

$$z \longmapsto \frac{z-1}{z+1} \longmapsto e^{2i\lambda} \frac{z-1}{z+1} \longmapsto \frac{1 + e^{2i\lambda} \frac{z-1}{z+1}}{1 - e^{2i\lambda} \frac{z-1}{z+1}},$$

und der letzte Ausdruck ist gleich

$$\begin{aligned} \frac{(1 + e^{2i\lambda})z + (1 - e^{2i\lambda})}{(1 - e^{2i\lambda})z + (1 + e^{2i\lambda})} &= \frac{(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda})z - (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})}{(e^{-i\lambda} - e^{i\lambda})z + (e^{i\lambda} + e^{-i\lambda})} = \frac{(\cos \lambda)z - i(\sin \lambda)}{-i(\sin \lambda)z + (\cos \lambda)} \\ &= -i \frac{(\cos \lambda)(iz) + (\sin \lambda)}{-(\sin \lambda)(iz) + (\cos \lambda)}, \end{aligned}$$

d. h. bis auf Vor- und Nachschalten von Drehungen um ± 90 Grad sind alle Bilder die Kompositionen von Elementen der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{R}) \subset SU(2, \mathbb{C}) \subset SL(2, \mathbb{C}).$$

Im zweiten Teil des Beweises brauchen wir nur noch zu zeigen, daß der Homomorphismus $SO(3, \mathbb{R}) \rightarrow PSU(2, \mathbb{C})$ surjektiv ist. Es sei also umgekehrt $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2, \mathbb{C}), \quad \text{also} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Setzt man dann $a = |a|e^{i\alpha}$, $b = |b|e^{i\beta}$, so wird

$$\varphi(e^{i(\beta-\alpha)}z) = \frac{|a|e^{i\beta}z + |b|e^{i\beta}}{-|b|e^{-i\alpha}z + |a|e^{-i\alpha}} = e^{i(\beta+\alpha)} \frac{|a|z + |b|}{-|b|z + |a|}.$$

Setzt man jetzt noch $|a| = \cos \lambda$, $|b| = \sin \lambda$, so sieht man unmittelbar, daß φ im Bild von $SO(3, \mathbb{R})$ liegt. Somit ist $SO(3, \mathbb{R}) \cong PSU(2, \mathbb{C})$. \square

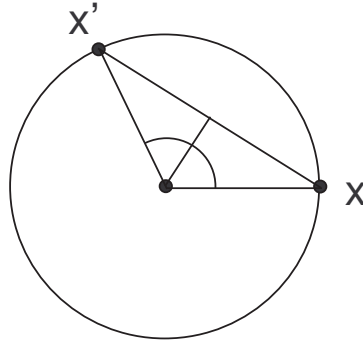
Folgerung 20.12 *Die stereographisch Projektion*

$$S^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

ist eine konforme Abbildung (bzgl. der konformen Struktur auf S^2 als Unterraum des euklidischen Raumes E^3 bzw. bzgl. der von $\bar{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche).

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satz als Übungsaufgabe. \square

Wir skizzieren noch einen etwas konzeptionelleren Beweis für die soeben bewiesene Isomorphie $SO(3, \mathbb{R}) \cong PSU(2, \mathbb{C})$. Dazu betrachten wir den euklidischen („chordalen“) Abstand auf S^2 : Für zwei Punkte $x, x' \in S^2$ bezeichne λ den Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren.



Figur 20.3

Dann gilt für den euklidischen Abstand

$$d(x, x') = 2 \sin \frac{\lambda}{2} = 2 \sqrt{1 - \cos^2(\lambda/2)} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \lambda} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \langle x, x' \rangle}.$$

Dies liefert dann vermöge der stereographischen Projektion $n : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ eine Abstandsfunktion χ auf $\bar{\mathbb{C}}$. Für $z, z' \in \mathbb{C}$ ist notwendig:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \chi^2(z, z') &= 1 - \langle n^{-1}(z), n^{-1}(z') \rangle = 1 - \left\langle \left(\frac{2z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right), \left(\frac{2z'}{1 + |z'|^2}, \frac{|z'|^2 - 1}{1 + |z'|^2} \right) \right\rangle \\ &= \frac{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2) - (4xx' + 4yy' + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1))}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\chi^2(z, z') = 4[|z|^2 + |z'|^2 - 2xx' - 2yy'] / [(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)]$ und schließlich

$$\chi(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

Den entsprechenden Ausdruck für $z' = \infty$ bekommt man, wenn man $z' \rightarrow \infty$ gehen läßt:

$$\chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad \chi(\infty, \infty) = 0.$$

Es ist also zum Beispiel, wie es auch sein muß, $\chi(1, -1) = \chi(0, \infty) = 2$.

Definition: χ heißt die *chordale* Metrik auf $\bar{\mathbb{C}}$.

Wir betrachten jetzt den durch die stereographische Projektion n definierten Gruppenhomomorphismus

$$\begin{cases} \text{Bij } S^2 & \longrightarrow & \text{Bij } \bar{\mathbb{C}} \\ \varphi & \longmapsto & n \circ \varphi \circ n^{-1} \end{cases}$$

zwischen den Gruppen der bijektiven Abbildungen von S^2 und $\overline{\mathbb{C}}$. Dieser induziert aufgrund der Konstruktion der Metrik χ eine Isomorphie

$$\text{Isom}_d S^2 \xrightarrow{\sim} \text{Isom}_\chi \overline{\mathbb{C}},$$

wobei für einen metrischen Raum (X, d) die Gruppe $\text{Isom}_d X$ der *Isometrien* aus den Bijektionen $X \rightarrow X$ besteht, die die Metrik d invariant lassen.

Es ist wohlbekannt, daß sich die Elemente von $\text{Isom}_d S^2$ eindeutig zu *orthogonalen* Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fortsetzen lassen. Insbesondere sind die Elemente von $\text{Isom}_d S^2$ *differenzierbare* Abbildungen bzgl. der differenzierbaren Standard-Struktur von $S^2 \subset E^3$. Somit ist (in offensichtlicher Bezeichnung)

$$\text{O}(3, \mathbb{R}) \cong \text{Isom}_d S^2 \cong \text{Diff}_d S^2 \xrightarrow{\sim} \text{Diff}_\chi \overline{\mathbb{C}} \cong \text{Isom}_\chi \overline{\mathbb{C}}.$$

Nun tragen S^2 und $\overline{\mathbb{C}}$ (als komplexe Mannigfaltigkeit) eine natürliche *Orientierung*. Da die stereographische Projektion $n : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ diese Orientierungen respektiert, gewinnen wir den natürlichen Isomorphismus

$$\text{SO}(3, \mathbb{R}) \cong \text{Diff}_d^+ S^2 \xrightarrow{\sim} \text{Diff}_\chi^+ \overline{\mathbb{C}},$$

wobei für eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Metrik d das Symbol $\text{Diff}_d^+ X$ die Gruppe der orientierungserhaltenden differenzierbaren Automorphismen von X bezeichnen, die bzgl. d Isometrien sind. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\text{Diff}_\chi^+ \overline{\mathbb{C}} = \text{Isom}_\chi^+ \overline{\mathbb{C}} = \text{PSU}(2, \mathbb{C}).$$

Das folgende Lemma liefert die Inklusion \supset , das nächste die Inklusion \subset .

Lemma 20.13 Für $u \in \text{SU}(2, \mathbb{C})$ gilt $\chi(u(z), u(z')) = \chi(z, z')$ für alle $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$.

Beweis. Aus Stetigkeitsgründen können wir $z, z' \in \mathbb{C}$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(z)|^2 + 1 &= \left(\frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \right) \left(\frac{\bar{a}z + \bar{b}}{-b\bar{z} + a} \right) + 1 = \frac{(az + b)(\bar{a}z + \bar{b}) + (\bar{b}z - \bar{a})(b\bar{z} - a)}{|\bar{b}z - \bar{a}|^2} \\ &= \frac{(a\bar{a} + b\bar{b})(|z|^2 + 1)}{|\bar{b}z - \bar{a}|^2} = \frac{|z|^2 + 1}{|\bar{b}z - \bar{a}|^2}, \end{aligned}$$

und ebenso berechnet man

$$|u(z) - u(z')|^2 = \frac{|z - z'|^2}{|\bar{b}z - \bar{a}|^2 |\bar{b}z' - \bar{a}|^2}.$$

Daraus folgt sofort die gewünschte Invarianz. □

Lemma 20.14 Es sei $\Phi \in \text{Isom}_\chi(\overline{\mathbb{C}})$. Dann gibt es ein $u \in \text{SU}(2, \mathbb{C})$ mit

$$\Phi(z) = u(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad \text{bzw.} \quad \Phi(z) = u(\bar{z}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

(Hierbei sei eventuell $\overline{\infty} := \infty$ gesetzt).

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die Gruppe $\text{PSU}(2, \mathbb{C})$ transitiv auf $\overline{\mathbb{C}}$ operiert. Also gibt es zu Φ ein $u \in \text{SU}(2, \mathbb{C})$ mit $\Phi(0) = u(0)$. Nach Lemma 13 ist $u^{-1} \cdot \Phi \in \text{Isom}_\chi(\overline{\mathbb{C}})$. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, daß schon Φ den Nullpunkt festhält. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{|z|^2}{1 + |z|^2} = \frac{1}{4} \chi^2(z, 0) = \frac{1}{4} \chi^2(\Phi(z), 0) = \frac{|\Phi(z)|^2}{1 + |\Phi(z)|^2},$$

woraus sofort

$$|\Phi(z)|^2 = |z|^2$$

folgt und damit

$$|\Phi(z) - \Phi(z')|^2 = |z - z'|^2, \quad z, z' \in \mathbb{C},$$

also nach dem zuvor Gezeigten

$$\Phi(z) \overline{\Phi(z')} - \Phi(z') \overline{\Phi(z)} = z \overline{z'} - z' \overline{z} \quad \text{für alle } z, z' \in \mathbb{C}.$$

Wähle z', z'' so, daß $\Phi(z') = 1$ und $\Phi(z'') = -i$ ist. Man hat dann die Gleichungen

$$\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} = z \overline{z'} - z' \overline{z} \quad \text{und} \quad i(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}) = z \overline{z''} - z'' \overline{z}.$$

Also ist

$$\Phi(z) = \alpha z + \beta \overline{z}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Aus

$$\begin{aligned} |z|^2 = |\Phi(z)|^2 &= (\alpha z + \beta \overline{z})(\overline{\alpha z + \beta \overline{z}}) = (\alpha \overline{\alpha} + \beta \overline{\beta}) |z|^2 + \alpha \overline{\beta} z^2 + \overline{\alpha} \beta \overline{z}^2 \\ &= (\alpha \overline{\alpha} + \beta \overline{\beta}) |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(\alpha \overline{\beta} z^2) \end{aligned}$$

folgt mit $|z| = 1$, daß $\alpha \overline{\beta} = 0$. Somit ist $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$, also $\Phi(z) = e^{i\vartheta} z$ oder $= e^{i\vartheta} \overline{z}$. \square

Bemerkung. Noch wesentlich eleganter läßt sich die Isomorphie $\operatorname{SO}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{PSU}(2, \mathbb{C})$ mit Hilfe der HAMILTONSchen *Quaternionen* \mathbb{H} beschreiben. Wir erinnern daran, daß die von Null verschiedenen Quaternionen (zusammen mit ihrer Multiplikation) als die Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 > 0$$

aufgefaßt werden können (man ordne einer solchen Matrix die Quaternion

$$a + bj = ((\operatorname{Re} a) + (\operatorname{Im} a) i) + ((\operatorname{Re} b) + (\operatorname{Im} b) i) j = (\operatorname{Re} a) + (\operatorname{Im} a) i + (\operatorname{Re} b) j + (\operatorname{Im} b) k$$

zu). Die Quaternionen mit der Norm = 1 bilden eine Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, die bzgl. der Multiplikation die Gruppe $\operatorname{SU}(2, \mathbb{C})$ darstellt. Sie schneidet aus der Hyperebene $H := \operatorname{Im} \mathbb{H}$ der „rein imaginären“ Quaternionen ($\operatorname{Im} a = 0$) die zweidimensionale Sphäre

$$\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : a^2 + |b|^2 = 1\} \subset H$$

heraus. - Es gilt nun der

Satz 20.15 (HAMILTON) Die Abbildungen $\mathbb{H} \ni u \mapsto qu\overline{q} \in \mathbb{H}$ mit fest gewähltem $q \in S^3$ induzieren mit ihren Einschränkungen auf $H \subset \mathbb{H}$ genau alle speziellen orthogonalen Abbildungen von $H \cong \mathbb{R}^3$.

Anhang: Die endlichen Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Hat man eine endliche Untergruppe $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ gegeben, so ist jede dazu *konjugierte* Untergruppe $hGh^{-1} = \{h \circ g \circ h^{-1} : g \in G\}$, $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ fest, zu G isomorph, insbesondere wieder endlich. Außerdem operiert hGh^{-1} „praktisch“ genauso wie G auf $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & \overline{\mathbb{C}} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{h \circ g \circ h^{-1}} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

(Entsprechendes gilt natürlich auch für endliche Untergruppen von $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ etc.). Aus diesem Grunde braucht man nur die in Frage stehenden endlichen Gruppen „bis auf Konjugation“ zu bestimmen. - Es ist daher der folgende Satz von allgemeinem Interesse.

Satz 20.16 *Jede endliche Untergruppe G von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (bzw. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$) bzw. $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ ist konjugiert zu einer Untergruppe von $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ (bzw. $\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$) bzw. $\mathrm{PSU}(n, \mathbb{C})$.*

Beweis. Es sei $\langle v, w \rangle := {}^t v \bar{w}$ das übliche hermitesche Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n . Offensichtlich ist dann

$$(v, w) := \frac{1}{\mathrm{ord} G} \sum_{g \in G} \langle g(v), g(w) \rangle$$

eine Sesqui-Linearform auf \mathbb{C}^n , die zudem positiv-definit ist:

$$(v, v) = \frac{1}{\mathrm{ord} G} \sum_{g \in G} \langle g(v), g(v) \rangle > 0 \quad \text{für } v \neq 0.$$

Diese Form ist sogar G -invariant: Für $h \in G$ folgt

$$\begin{aligned} (h(v), h(w)) &= \frac{1}{\mathrm{ord} G} \sum_{g \in G} \langle g(h(v)), g(h(w)) \rangle \\ &= \frac{1}{\mathrm{ord} G} \sum_{g \in G} \langle (g \circ h)(v), (g \circ h)(w) \rangle = (v, w), \end{aligned}$$

da mit g auch $g \circ h$ ganz G durchläuft.

Schreibt man nun $(v, w) = \langle Hv, w \rangle$ mit einer hermiteschen Matrix $H = {}^t \bar{H}$, so gibt es nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operationen in endlich-dimensionalen unitären Vektorräumen eine unitäre Matrix $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$, so daß

$${}^t S H \bar{S} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Positiv-Definitheit von (v, w) sind alle $\lambda_j > 0$. Infolgedessen gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so daß

$${}^t A H \bar{A} = E_n, \quad \text{also } H = {}^t B \bar{B}, \quad B = A^{-1},$$

d. h.

$$(v, w) = {}^t v {}^t H \bar{w} = {}^t v {}^t B \bar{B} \bar{w} = \langle Bv, Bw \rangle.$$

Somit besteht für alle $g \in G$ die Gleichheit $\langle B \circ g \circ B^{-1}(v), B \circ g \circ B^{-1}(w) \rangle = \langle g \circ B^{-1}(v), g \circ B^{-1}(w) \rangle = \langle B^{-1}(v), B^{-1}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, so daß also $B \circ g \circ B^{-1} \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$.

Ist zusätzlich $\det g = 1$, so ist auch $\det(B \circ g \circ B^{-1}) = 1$, und selbstverständlich kann man B mit $\det B = 1$ wählen. \square

Im Falle $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ wird das Problem der Bestimmung von Konjugationsklassen endlicher Untergruppen also reduziert auf das entsprechende Problem in $\text{PSU}(2, \mathbb{C}) \cong \text{SO}(3, \mathbb{R})$. Beim Studium dieser klassischen endlichen Gruppen $\Gamma \subset \text{SO}(3, \mathbb{R})$ ist sehr hilfreich, daß sie auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ operieren. Setzen wir $\Gamma \neq \{\text{id}\}$ voraus, so ist die Fixpunktmenge

$$F = \{x \in S^2 : \text{es existiert } \gamma_0 \neq \text{id} \text{ mit } \gamma_0(x) = x\} \neq \emptyset \text{ und endlich,}$$

da jedes Element $\gamma_0 \neq \text{id}$ genau zwei Fixpunkte besitzt. Ist $x \in F$, also $\gamma_0(x) = x$, $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$, und $\gamma \in \Gamma$ beliebig, so ist $\gamma \circ \gamma_0 \circ \gamma^{-1} \neq \text{id}$ und

$$(\gamma \circ \gamma_0 \circ \gamma^{-1})(\gamma(x)) = (\gamma \circ \gamma_0)(x) = \gamma(x) \in F.$$

Also operiert Γ auf der endlichen Menge F als *Permutationsgruppe*. Es gibt damit Punkte $x_1, \dots, x_d \in F$, so daß

$$F = \Gamma(x_1) \sqcup \Gamma(x_2) \sqcup \dots \sqcup \Gamma(x_d),$$

wobei $\Gamma(x_j) = \{\gamma(x_j) : \gamma \in \Gamma\}$ die *Bahn* von x_j unter Γ ist. Wir setzen

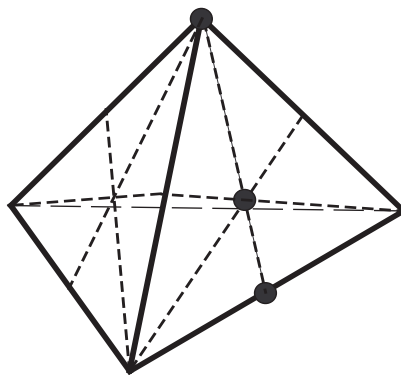
$$\Gamma_j := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x_j) = x_j\}.$$

Offensichtlich ist Γ_j eine Untergruppe von Γ . Wir setzen ferner noch

$$c := \text{ord } \Gamma, \quad c_j := \text{ord } \Gamma_j.$$

Dann ist $\text{card } \Gamma(x_j) = c/c_j$.

Beispiel. Für das Tetraeder hat man 3 Bahnen



Figur 20.4

und $c = 4 \cdot 3 = 12$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$. Es gilt insbesondere

$$3 + \frac{2}{12} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Dies gilt nun allgemein.

Lemma 20.17 *In der vorigen Situation hat man stets die Beziehung*

$$d + 2c^{-1} = 2 + \sum_{j=1}^d c_j^{-1}.$$

Beweis. Mit der Stabilisatoruntergruppe $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) = x\}$, $x \in S^2$, hat man offensichtlich

$$\begin{aligned} 2(\text{ord } \Gamma - 1) &= \sum_{x \in S^2} (\text{ord } \Gamma_x - 1) = \sum_{x \in F} (\text{ord } \Gamma_x - 1) \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{c}{c_j} \text{ord } \Gamma_j - \sum_{j=1}^d \frac{c}{c_j}, \end{aligned}$$

also $2c - 2 = dc - \sum_{j=1}^d (cc_j^{-1})$ und damit $d + 2c^{-1} = 2 + \sum_{j=1}^d c_j^{-1}$. \square

Hieraus kann man nun eine Reihe von Folgerungen ziehen. Zunächst ist $c_j \geq 2$ und damit

$$d < d + \frac{2}{c} \leq 2 + \frac{d}{2}, \quad \text{also } d = 1, 2, 3.$$

a) Für $d = 1$ ist notwendig $\frac{2}{c} = 1 + \frac{1}{c_1} > 1$ und folglich $c = 1$. Widerspruch!

b) Für $d = 2$ kommt $2 = \frac{c}{c_1} + \frac{c}{c_2}$ und damit $c = c_1 = c_2$. Also ist $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$, und jedes $\gamma \in \Gamma$ fixiert (diametral gegenüber liegende) Punkte x_1, x_2 . Nach Konjugation ist die Achse durch diese Punkte die Polachse und notwendigerweise Γ zyklisch von einer beliebigen Ordnung n . Das Bild von Γ in $\text{PSU}(2, \mathbb{C})$ wird erzeugt von der Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/n} \end{pmatrix}$$

c) Bei $d = 3$ gewinnt man aus der Gleichung

$$1 + \frac{2}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} > 1$$

und (ohne Einschränkung) $2 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3$ sofort $c_1 = 2$, $c_2 \leq 3$. Es verbleiben dann die Fälle

c	c_1	c_2	c_3	regulärer Körper
$2n$	2	2	n	Dieder
12	2	3	3	Tetraeder
24	2	3	4	Oktaeder bzw. Würfel
60	2	3	5	Ikosaeder bzw. Dodekaeder

und es ist nicht schwer zu sehen, daß die entsprechenden Gruppen existieren, eindeutig bestimmt sind und die Symmetriegruppen der ganz rechts angegebenen Platonischen Körper darstellen. Hieraus überlegt man sich dann in jedem Einzelfall den folgenden

Satz 20.18 Die nichtzyklischen endlichen Untergruppen von $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ werden (bis auf Konjugation) klassifiziert durch die platonischen Zahlentripel $p \geq q \geq r (= 2)$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Die entsprechende Gruppe wird abstrakt erzeugt von zwei Elementen α, β , welche den erzeugenden Relationen

$$\alpha^q = \beta^p = (\alpha\beta)^r = \text{id}$$

genügen.

Wir wollen schließlich noch die endlichen Untergruppen $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ bestimmen. Wir können wieder $G \subset \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ annehmen und betrachten das Bild Γ unter der Abbildung

$$\varepsilon : \mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSU}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}).$$

Man sieht sofort: Ist Γ zyklisch, so ist es auch $G \subset \varepsilon^{-1}(\varepsilon(G)) = \varepsilon^{-1}(\Gamma)$. G wird erzeugt von einem Element

$$\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \zeta_n = e^{2\pi i/n}, \quad n \geq 2.$$

Man beachte, daß $G \neq \varepsilon^{-1}(\Gamma)$ für ungerades n , da dann $-\mathrm{id} \in \varepsilon^{-1}(\Gamma)$, aber $-\mathrm{id} \notin G$.

Ist Γ nicht zyklisch, so werden wir zeigen, daß $G = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(G)) = \varepsilon^{-1}(\Gamma)$, wozu offensichtlich zu zeigen reicht, daß $-\mathrm{id} \in G$. Solche Gruppen nennt man *binäre Polyedergruppen*, da

$$\mathrm{ord} G = 2 \mathrm{ord} \Gamma.$$

Als Konsequenz haben wir den folgenden Satz.

Satz 20.19 *Bis auf Konjugation sind die nichtzyklischen endlichen Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ die binären Polyedergruppen $\varepsilon^{-1}(\Gamma)$.*

Beweis. Es sei Γ nicht zyklisch von ungerader Ordnung. Nach der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ besitzt dann Γ eine Involution: $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, $\gamma^2 = \mathrm{id}$. Nach Konjugation können wir dann annehmen, daß γ die Drehung ϑ_π um die Polachse ist:

$$\vartheta_\pi = \gamma_0 \circ \gamma \circ \gamma_0^{-1}.$$

Wähle nun Urbilder $g \in G$, $g_0 \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ von γ bzw. γ_0 , und setze $\delta = g_0 g g_0^{-1}$, so daß $\varepsilon(\delta) = \vartheta_\pi$. Wegen

$$-z = \frac{az + b}{-\bar{b} + \bar{a}} \quad \text{für alle } z$$

folgt dann notwendig $b = 0$ und $a = \pm i$, also $\delta^2 = -\mathrm{id}$ und

$$g^2 = (g_0^{-1} \circ \delta \circ g_0)^2 = g_0^{-1} \circ \delta^2 \circ g_0 = -g_0^{-1} \circ g_0 = -\mathrm{id} \in G. \quad \square$$

Die zuvor als „offensichtlich“ bezeichneten Aussagen sollen jetzt noch mit exaktem Beweis nachgetragen werden. Es ist $\varepsilon : \mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSU}(2, \mathbb{C})$ surjektiv und jede Faser $\varepsilon^{-1}(\gamma)$ besteht aus genau zwei Elementen g', g'' , wobei $g'' = (-\mathrm{id}) \circ g'$. Also ist mit unseren früheren Bezeichnungen

$$G \subset \varepsilon^{-1}(\Gamma), \quad \Gamma = \varepsilon(G):$$

$\mathrm{ord} \Gamma \leq \mathrm{ord} G \leq \mathrm{ord} \varepsilon^{-1}(\Gamma) = 2 \mathrm{ord} \Gamma$ und damit, da G eine Untergruppe von $\varepsilon^{-1}(\Gamma)$ ist:

$$\mathrm{ord} G = \mathrm{ord} \Gamma \quad \text{oder} \quad \mathrm{ord} G = 2 \mathrm{ord} \Gamma,$$

d. h. $G = \varepsilon^{-1}(\Gamma)$.

Lemma 20.20 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent :*

- i) G ist eine binäre Polyedergruppe.
- ii) Mit $g \in G$ ist auch $(-\mathrm{id}) \circ g \in G$.
- iii) Es ist $-\mathrm{id} \in G$.

Wir betrachten nun den zyklischen Fall noch etwas genauer. Es sei also Γ zyklisch von der Ordnung n , also nach Konjugation von einem Element

$$z \mapsto e^{2\pi i/n} z$$

erzeugt. Dieses wird in $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C})$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/n} \end{pmatrix}$$

erzeugt, also durch die Matrix C_{2n} , wenn wir allgemein

$$C_m := \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix}, \quad \zeta_m = e^{2\pi i/m}$$

setzen. Man beachte, daß $C_{2n}^n = C_2 = -\mathrm{id} \equiv \mathrm{id}$ in $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C})$.

Für die Gruppe $G \subset \varepsilon^{-1}(\Gamma)$ gibt es nun zwei Möglichkeiten.

- a) $C_{2n} \in G$. Dann ist wegen $C_{2n}^n = -\mathrm{id} \in G$ die Gruppe G binär, also von der Ordnung $2n$. Da die von C_{2n} erzeugte zyklische Untergruppe ebenfalls die Ordnung $2n$ hat, ist dann notwendig

$$G = \langle C_{2n} \rangle.$$

- b) $C_{2n} \notin G$. Dann ist aber $-C_{2n} \in G$, und wegen $(-C_{2n})^n = (-1)^n(-\mathrm{id})$ muß n ungerade sein. Es ist aber $(-C_{2n})^2 = C_n \in G$ und die von C_n erzeugte Untergruppe von G von der Ordnung n . Somit ist

$$G = \langle C_n \rangle.$$

21 Die Automorphismen des Einheitskreises

Wir beweisen zunächst das auch für sich interessante *Schwarzsche Lemma*:

Satz 21.1 Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, D der Einheitskreis $\{|z| < 1\}$, mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ für alle $z \in D$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$ und $|f'(0)| \leq 1$. Besteht in einem Punkt $z_0 \in D$ Gleichheit: $|f(z_0)| = |z_0|$, oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = e^{i\lambda} z$ mit festem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Betrachte die auf D stetige Funktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

die nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph ist. Ist $r < 1$, so gilt wegen des Maximumprinzips für alle $|z| \leq r$:

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

Für $r \rightarrow 1$ ergibt sich $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$, d. h. $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$. Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in D$ (evtl. $z_0 = 0$). Wegen des Maximumprinzips muß dann $g(z) = c$ mit $|c| = 1$, also $f(z) = e^{i\lambda} z$ sein. \square

Wir können nunmehr die Automorphismengruppe $\text{Aut}(D)$ des Einheitskreises leicht bestimmen.

Satz 21.2 $\text{Aut}(D)$ besteht aus allen gebrochen linearen Transformationen der Form

$$f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \lambda \in [0, 2\pi), z_0 \in D.$$

Beweis. $f \in \text{Aut}(D)$ halte den Nullpunkt fest. Dann gilt für f und f^{-1} nach dem Schwarzschen Lemma:

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|,$$

also $|f(z)| = |z|$ und damit

$$f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - 0}{1 - \bar{0}z}.$$

Sei nun $z_0 \in D$ beliebig. Betrachte den linearen Automorphismus $f_{z_0} \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$, der durch

$$f_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

definiert ist. Für $z\bar{z} = 1$ gilt:

$$f_{z_0}(z) \overline{f_{z_0}(z)} = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}} = \frac{1 - z_0 \bar{z} - z \bar{z}_0 + z_0 \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z} - z \bar{z}_0 + z_0 \bar{z}_0} = 1.$$

Es kann daher nur $f_{z_0}(D) = D$ oder $f_{z_0}(D) = \mathbb{P}_1 \setminus \bar{D}$ sein. Der letzte Fall kann jedoch wegen $f_{z_0}(0) = -z_0 \in D$ nicht eintreten.

Ist nun $f \in \text{Aut}(D)$ beliebig, so sei $z_0 = f^{-1}(0)$. Bilde $f \circ f_{z_0}^{-1}$; dann ist $f \circ f_{z_0}^{-1}(0) = 0$, also $f \circ f_{z_0}^{-1}(w) = e^{i\lambda} w$ und schließlich $f(z) = e^{i\lambda} f_{z_0}(z)$. \square

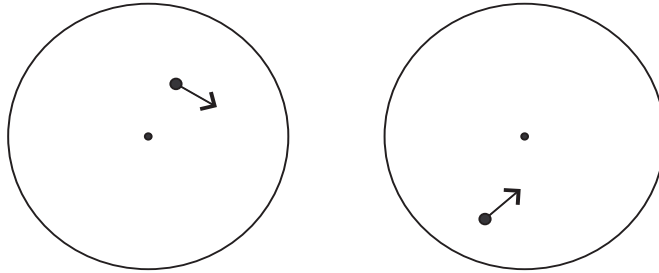
Bemerkung. Die Automorphismen des Einheitskreises lassen sich auch beschreiben als die gebrochen linearen Transformationen der Form

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{mit} \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Satz 21.3 Die Gruppe $\text{Aut}(D)$ operiert transitiv auf D ; d. h. : Für alle $z_1, z_2 \in D$ existiert ein Automorphismus $f \in \text{Aut}(D)$ mit $f(z_1) = z_2$, nämlich, mit den obigen Bezeichnungen,

$$f = f_{z_2}^{-1} \circ f_{z_1}.$$

Genauer kann man nicht nur das Bild eines Punktes vorgeben, sondern sogar noch die Richtung des Bildes eines vorgegebenen nicht verschwindenden Tangentialvektors in diesem Punkt.



Figur 21.1

Bemerkung Die letzte Aussage spiegelt sich wieder in der Tatsache, daß die Automorphismengruppe des Einheitskreises eine *drei*-dimensionale reelle Liegruppe ist.

Wird das Gebiet $G \subset \mathbb{P}_1$ von einem Kreis berandet, so ist G nach Satz 20.9 konform äquivalent zu D , und jeder biholomorphe Isomorphismus $G \rightarrow D$ wird durch ein Element aus $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ bewerkstelligt. Es folgt, daß für jedes solche Gebiet G die Gruppe $\text{Aut}(G)$ eine Untergruppe von $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ ist, und alle diese Gruppen sind konjugiert in $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, also insbesondere (abstrakt) isomorph. Am einfachsten läßt sich die Struktur von $\text{Aut}(G)$ im Falle der *oberen Halbebene* H beschreiben:

Satz 21.4 Die Automorphismengruppe der oberen Halbebene ist gleich der Untergruppe

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{ \pm E_2 \}$$

der vollen Automorphismengruppe $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{ \pm E_2 \}$ von \mathbb{P}_1 .

Beweis. Es sei zunächst $f \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, d. h.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Dann gilt

$$f(0) = \frac{b}{d}, \quad f(1) = \frac{a+b}{c+d}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

also $f(0), f(1), f(\infty) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und damit, da f Kreise in Kreise überführt, $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f(H) = H$ oder $f(H) = -H$. Nun ist aber

$$\text{Im } f(i) = \text{Im } \frac{ai + b}{ci + d} = -\text{Im } \frac{(ai + b)(ci - d)}{c^2 + d^2} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0,$$

und folglich wird die obere Halbebene H biholomorph unter f auf sich selbst abgebildet.

Ist umgekehrt $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ so beschaffen, daß $f(H) = H$, so muß $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gelten. Also sind die Urbilder z_1, z_2, z_3 von $0, 1, \infty$ reell oder gleich Unendlich. Aus der Definition des Doppelverhältnisses folgt dann:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Durch geeignete Erweiterung erreicht man $ad - bc = \pm 1$. Wegen $f(H) \subset H$ kann aber, wie oben gezeigt, nur das Pluszeichen gelten. \square

Wir wollen noch weitere Invarianten von $\text{Aut}(D)$ untersuchen, die uns zu einem (konformen) Modell der *nicht-euklidischen* (genauer: *hyperbolischen*) Geometrie führen. Läßt sich Satz 3 dahingehend verschärfen, daß $\text{Aut}(D)$ doppelt (zweifach) transitiv ist? D. h.: Gibt es für alle $z_0 \neq z_1, w_0 \neq w_1 \in D$ einen Automorphismus $f \in \text{Aut}(D)$ mit $f(z_j) = w_j, j = 1, 2$? Ist f ein solcher Automorphismus, so besitzt

$$f_{w_0} \circ f \circ f_{z_0}^{-1}$$

den Fixpunkt 0, ist also eine Drehung $z \mapsto e^{i\lambda} z$. Somit muß notwendig

$$\frac{w_0 - w_1}{1 - \overline{w_0} w_1} = f_{w_0}(w_1) = f_{w_0} \circ f(z_1) = e^{i\lambda} f_{z_0}(z_1) = e^{i\lambda} \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1}$$

und damit

$$(*) \quad \left| \frac{w_0 - w_1}{1 - \overline{w_0} w_1} \right| = \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1} \right|$$

gelten. Umgekehrt sieht man leicht, daß es zu z_0, z_1, w_0, w_1 mit (*) auch ein geeignetes $f \in \text{Aut}(D)$ gibt. $\text{Aut}(D)$ ist also nicht zweifach transitiv (sondern, wie oben schon erläutert, nur „anderthalbfach“).

Man kann das eben abgeleitete Kriterium zu einem infinitesimalen abwandeln. Ist $f \in \text{Aut}(D)$, und sind $z_0, z_1 \in D$ beliebig, so setzen wir $w_j = f(z_j)$ und haben automatisch (*). Wir wollen nachrechnen, was herauskommt, wenn wir z_0 festhalten und z_1 gegen z_0 konvergieren lassen:

$$\frac{1}{1 - |z_0|^2} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \left| \frac{1}{1 - \overline{z_0} z_1} \right| = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1} \frac{1}{1 - \overline{f(z_0)} f(z_1)} \right| = \frac{|f'(z_0)|}{1 - |f(z_0)|^2}.$$

Satz 21.5 Für jedes $f \in \text{Aut}(D)$ gilt

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in D.$$

Mit diesem Ausdruck können wir jetzt auf D einen *Längenbegriff* einführen, der invariant unter der Gruppe $\text{Aut}(D)$ ist: Für stetig differenzierbares $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ setze man

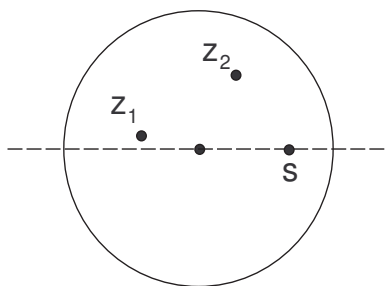
$$L_h(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

$L_h(\gamma)$ heißt die *hyperbolische* Länge der Kurve γ . Klar ist (mit der euklidischen Länge $L(\gamma)$):

- i) $L_h(\gamma) \geq L(\gamma) \geq 0$.
- ii) $L_h(\gamma^{-1}) = L_h(\gamma)$.
- iii) $L_h(\gamma_1 \gamma_2) = L_h(\gamma_1) + L_h(\gamma_2)$.
- iv) Ist $\gamma: [a, b) \rightarrow D$ ein Weg mit $\lim_{t \rightarrow b} |\gamma(t)| = 1$, so gilt $L_h(\gamma) = \infty$.

Zusammenfassend kann man sagen: Der Einheitskreis D ist mit dieser Längenmessung eine *unendliche Welt* mit $\partial D = S^1$ als den unendlich fernen Punkten.

Zu einer solchen Weglänge gehört stets ein Abstands begriff von Paaren von Punkten, nämlich das Infimum der Längen aller beide Punkte verbindenden Wege. Bezeichnet man diese mit δ , so können wir $\delta(z_1, z_2)$ explizit berechnen unter Verwendung der Invarianzeigenschaften von δ . Dazu bilden wir vermöge eines geeigneten Automorphismus $f \in \text{Aut}(D)$ den Punkt z_1 nach 0 und z_2 nach $s \in [0, 1)$ ab:



Figur 21.2

Sei $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ein beliebiger Weg von 0 nach s . Dann ist auch γ_1 ein solcher Weg und damit

$$\begin{aligned} \delta(z_1, z_2) &= \inf \{ L_h(\gamma) \} = \inf \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)| dt}{1 - |\gamma(t)|^2} \right) \\ &\geq \inf \left(\int_a^b \frac{|\gamma_1'(t)|}{1 - |\gamma_1(t)|^2} dt \right) \geq \delta(z_1, z_2), \end{aligned}$$

also, wenn man $x = \gamma_1(t)$ setzt,

$$\delta(z_1, z_2) = \inf \left(\int_a^b \frac{|\gamma_1'(t)|}{1 - |\gamma_1(t)|^2} dt \right) = \int_0^s \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s}.$$

D. h.: Die kürzeste Verbindung zwischen 0 und s ist der entsprechende Abschnitt der reellen Geraden! Das Urbild dieser Geraden unter dem Hilfsautomorphismus f ist ein Kreis durch z_1, z_2 , der wegen der Konformität von f senkrecht auf dem Rand ∂D steht. Solche Kreise sind eindeutig bestimmt; man nennt sie *Orthokreise*.

Satz 21.6 Die hyperbolische Länge L_h ist invariant unter $f \in \text{Aut}(D)$, d. h. ist $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ein Weg, so gilt

$$L_h(f \circ \gamma) = L_h(\gamma).$$

Beweis. Es gilt

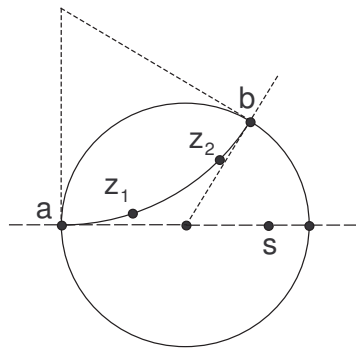
$$\begin{aligned} L_h(f \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{1 - |f \circ \gamma(t)|^2} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt = L_h(\gamma), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Satz 21.7 Durch $\delta(z_1, z_2) = \inf \{ L_h(\gamma) : \gamma \text{ verbindet } z_1, z_2 \text{ in } D \}$ wird eine Metrik auf D erklärt, die invariant unter $\text{Aut}(D)$ ist.

Beweis. Es ist $\delta(z_1, z_2) = \inf \{ L_h(\gamma) \} \geq \inf \{ L(\gamma) \} \geq 0$. Ist also $\delta(z_1, z_2) = 0$, so ist auch der euklidische Abstand gleich Null und damit $z_1 = z_2$. Die restlichen Aussagen folgen aus ii) und iii) nach Satz 5. □

Man beachte jetzt noch mit den Bezeichnungen der folgenden Zeichnung



Figur 21.3

daß

$$\frac{1+s}{1-s} = \frac{0-1}{0+1} : \frac{s-1}{s+1} = DV(0, 1, s, -1) = DV(z_1, b, z_2, a) > 0.$$

In Worten läßt sich dieser Sachverhalt dann wie folgt ausdrücken:

Satz 21.8 Für den hyperbolischen Abstand von $z_1 \neq z_2$ gilt :

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left| \log DV(z_1, a, z_2, b) \right|,$$

wenn a und b die Schnittpunkte des Orthokreises durch z_1 und z_2 mit ∂D bezeichnen. (In der Formel kommt es nicht auf die Reihenfolge von a und b - und natürlich auch nicht von z_1 und z_2 - an!).

Wegen

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s} = \text{Artanh } s$$

und der aus der Konstruktion von s folgenden Beziehung

$$s = |s| = \left| \frac{0-s}{1-\bar{0}s} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

folgt außerdem sofort

$$\delta(z_1, z_2) = \text{Artanh} \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

(insbesondere ist (*) also äquivalent zu $\delta(z_1, z_2) = \delta(w_1, w_2)$) und daraus

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\delta(z, z_0)}{|z - z_0|} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

Dies impliziert, daß δ lokal (bis auf einen Faktor, der mit $z_j \rightarrow \partial D$ gegen ∞ geht) „gleich“ der euklidischen Metrik ist. Insbesondere stimmt dann die von δ erzeugte Topologie mit der euklidischen überein.

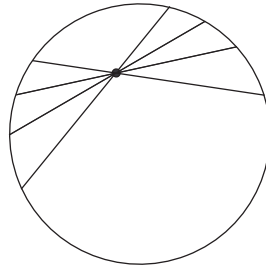
Bemerkung. G. PICK hat wohl als erster (1915) bemerkt, daß das Schwarzsche Lemma mit Hilfe der hyperbolischen Längenmessung eine konzeptionellere Deutung erfährt.

Satz 21.9 Jede holomorphe Abbildung $f : D \rightarrow D$ verkleinert höchstens den hyperbolischen Abstand zwischen zwei Punkten und den hyperbolischen Flächeninhalt :

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|, \quad z_1, z_2 \in D, \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in D.$$

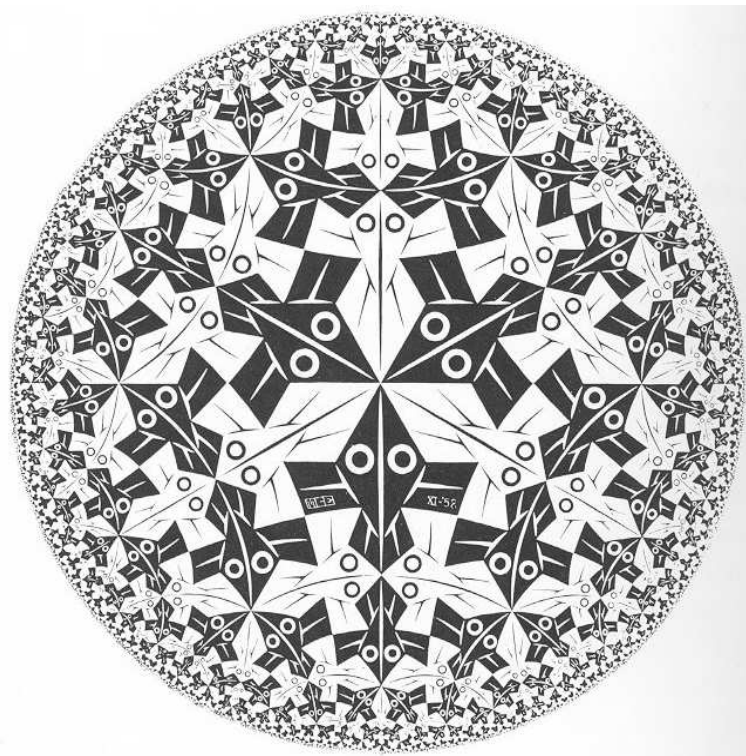
Gleichheit besteht genau dann, wenn f ein Automorphismus von D ist.

Konstruiert man nun eine Geometrie in D mit den gewöhnlichen Punkten, den Orthokreisen als Geraden, den Automorphismen von D als Bewegungen und den euklidischen Winkeln, so kann man leicht nachprüfen, daß die euklidischen Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt sind: Zu jeder Geraden und jedem Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, gibt es unendlich viele Geraden durch diesen Punkt, die keine gemeinsamen Punkte mit der gegebenen Geraden haben, also unendlich viele Parallelen. Deswegen nennt man diese Geometrie auch *hyperbolisch*. Man beachte, daß in dieser Geometrie die Winkelsumme in einem Dreieck stets kleiner als 180 Grad ist. Ein anderes, nichtkonformes Modell, erhält man bekanntlich auf die folgende Weise:



Figur 21.4

Die konforme Geometrie des Einheitskreises ist auf Anregung von Coxeter von dem holländischen Künstler M. Escher mehrfach in Bilder umgesetzt worden. Als Beispiel reproduzieren wir den Holzschnitt *Kreislimit I* aus dem Jahre 1958.



Figur 21.5

22 Der Riemannsche Abbildungssatz

Der *Riemannsche Abbildungssatz* klassifiziert bis auf biholomorphe (d. h. konforme) Äquivalenz die (homologisch) einfach zusammenhängenden Gebiete auf der Riemannschen Zahlenkugel \mathbb{P}_1 . Selbstverständlich ist \mathbb{P}_1 selbst einfach zusammenhängend, da homöomorph zu der Sphäre S^2 . Nimmt man aus \mathbb{P}_1 genau einen Punkt z_0 heraus, so ist der Rest $\mathbb{P}_1 \setminus \{z_0\}$ durch eine gebrochene lineare Transformation biholomorph abbildbar auf $\mathbb{C} = \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$. Für die verbleibenden Fälle können und werden wir daher annehmen, daß das homologisch einfach zusammenhängende Gebiet G in \mathbb{C} enthalten ist und dort mindestens einen Randpunkt besitzt. Es gilt dann der außerordentlich merkwürdige

Satz 22.1 (Riemannscher Abbildungssatz) *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein homologisch einfach zusammenhängendes, von \mathbb{C} verschiedenes Gebiet, so ist G biholomorph äquivalent zu dem Einheitskreis D .*

Wir haben früher schon bemerkt, daß wir hierbei als Eigenschaft eines homologisch einfach zusammenhängenden Gebietes nur verwenden werden, daß jede nirgends verschwindende holomorphe Funktion einen Zweig der Quadratwurzel besitzt. Da \mathbb{C} und D auch (homotopisch) einfach zusammenhängend sind, kann man das Ergebnis auch so formulieren:

Satz 22.2 *Die einfach zusammenhängenden Teilgebiete von \mathbb{P}_1 sind konform äquivalent zu \mathbb{P}_1 , \mathbb{C} oder D , je nachdem, ob das Gebiet keinen, genau einen oder mehr als einen Randpunkt in \mathbb{P}_1 besitzt. Diese drei Fälle schließen sich wechselseitig aus.*

Beweis. Nur die Eindeutigkeitsaussage bedarf einer Begründung. Da \mathbb{P}_1 als topologischer Raum kompakt ist, kann er nicht einmal homöomorph zu den nichtkompakten Räumen \mathbb{C} und D sein, die übrigens selbst homöomorph zueinander sind. \mathbb{C} und D können aber nicht konform äquivalent sein, da jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ wegen des Satzes von Liouville konstant sein muß. \square

Bemerkung. Ein noch wesentlich tiefer liegendes Resultat ist der sogenannte *Uniformisierungssatz*, der besagt, daß überhaupt *jede* einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche konform äquivalent zu (genau) einer der obigen drei Typen ist. Leider können wir dieses Resultat im Rahmen dieser Vorlesung nicht beweisen. Auf Konsequenzen werden wir aber in der Vorlesung *Funktionentheorie II* eingehen.

Man kann den Riemannschen Abbildungssatz noch durch eine *Eindeutigkeitsaussage* ergänzen.

Satz 22.3 *Es sei G wie im Riemannschen Abbildungssatz gewählt, und z_0 sei ein beliebiger, fest gewählter Punkt in G . Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow D$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.*

Beweis. Gibt es überhaupt eine biholomorphe Abbildung von G nach D , so lassen sich offensichtlich die obigen Bedingungen durch Hinterschaltung eines geeigneten Automorphismus von D erzielen. Hat man überdies zwei Abbildungen f_1, f_2 mit diesen Eigenschaften, so ist $f := f_1 \circ f_2^{-1}$ ein Automorphismus des Einheitskreises, der den Nullpunkt festläßt, also eine Drehung um den Nullpunkt, für den außerdem $f'(0)$ positiv sein muß. Das ist wegen des Schwarzschen Lemmas aber nur möglich für die Identität. \square

Genauer gilt: Sind G_1, G_2 einfach zusammenhängende Gebiete in \mathbb{C} mit mehr als einem Randpunkt, und sind $z_1 \in G_1$ und $z_2 \in G_2$ fest gewählt, so ist die Gesamtheit aller konformen Abbildungen von G_1 nach G_2 , die z_1 auf z_2 abbilden, reell einparametrig. Die Abbildungen sind eineindeutig den Werten $\vartheta = \arg f'(z_1)$ zugeordnet.

Der *Beweis* des Riemannschen Abbildungssatzes basiert auf zwei wesentlich verschiedenen Ideen. Die erste ist *geometrischer* Art; sie liefert auf denkbar einfache Weise eine holomorphe *Einbettung* des betreffenden Gebietes G in den Einheitskreis. Aufgrund unserer Kenntnis der Automorphismengruppe von D können wir dann wie oben sofort noch mehr behaupten:

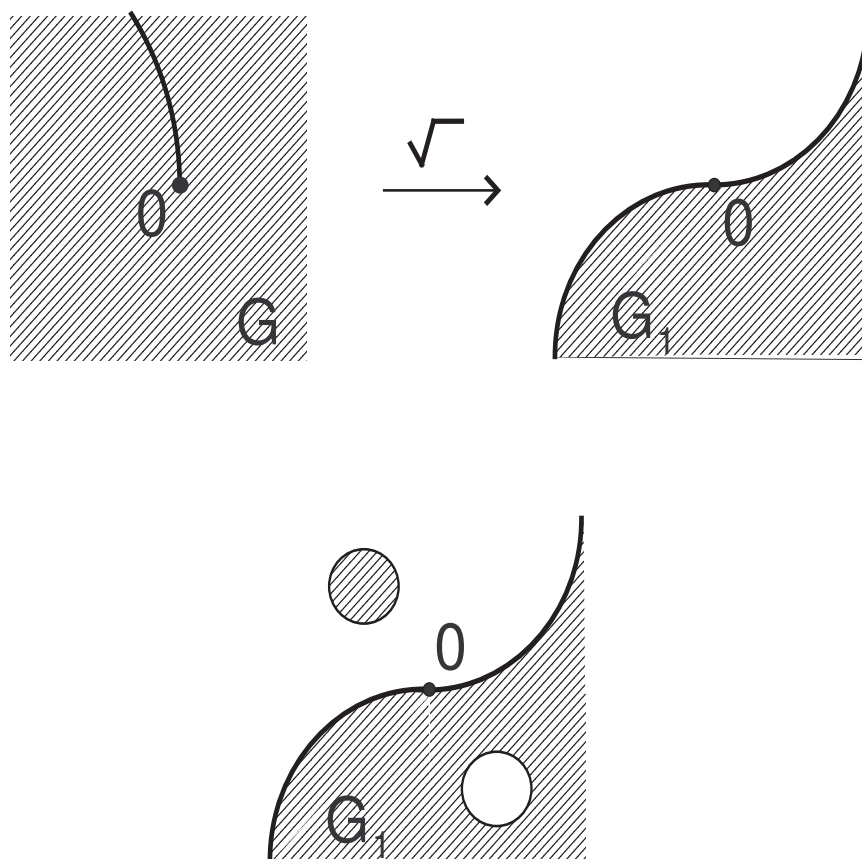
Satz 22.4 *Es sei G wie im Riemannschen Abbildungssatz, und $z_0 \in G$ sei beliebig gewählt. Dann gibt es eine injektive holomorphe Abbildung*

$$f : G \hookrightarrow D$$

mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

Im zweiten (*analytischen*) Teil versucht man dann, diese Abbildungen um den Punkt z_0 herum größtmöglich auszudehnen; d. h. man versucht, die Ableitung $f'(z_0)$ zu maximieren. Daß dies tatsächlich innerhalb der Klasse der holomorphen Einbettungen funktioniert, folgt aus der Theorie der sogenannten *normalen Familien* holomorpher Funktionen (die auch eine entscheidende Rolle auf dem Gebiet der *diskreten dynamischen Systeme von rationalen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel* spielt).

Beweisen wir also zuerst Satz 4. Wir bilden zunächst G in D ab. Nach Voraussetzung und einer eventuell notwendigen Translation können wir erreichen, daß das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ den Nullpunkt nicht enthält. Also ist G ein homologisch einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} , auf dem die Identität $f(z) = z$ nirgends verschwindet. Damit existiert auf G ein holomorpher Zweig g der Quadratwurzel, also eine holomorphe Funktion g mit $g^2(z) = z$. Die Funktion g ist notwendig injektiv und bildet deshalb G konform auf ein (ebenfalls homologisch einfach zusammenhängendes) Gebiet $G_1 \subset \mathbb{C}^*$ ab.



Figur 22.1

Behauptung: G_1 liegt ganz im Äußeren einer Kreisscheibe. Ist nämlich $w \in D_\epsilon(w_0) \subset G_1$, so kann $-w$ nicht in G_1 liegen, da sonst g auf G nicht eindeutig definiert wäre. Also ist $\overline{D}_\epsilon(-w_0) \cap G_1 = \emptyset$. $\mathbb{C} \setminus$

$\overline{D}_\epsilon(-w_0)$ wird aber durch einen Kreis berandet, ist also nach Satz 20.9 durch einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1)$ biholomorph abbildbar auf den Einheitskreis D . Also ist $G_2 = \varphi(G_1) \subset D$. Durch Hinterschaltung eines Automorphismus von D erhalten wir eine injektive holomorphe Abbildung

$$f : G \hookrightarrow D, \quad f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0. \quad \square$$

Nach dem bisher Bewiesenen können wir ohne Einschränkung $G \subset D$ und $0 \in G$ annehmen. Wir studieren die folgende Menge von Funktionen:

$$\mathcal{F} := \{f : G \rightarrow D, \quad f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0, \quad f'(0) > 0\}$$

und zeigen, daß in \mathcal{F} ein bzgl. $f'(0)$ „maximales“ Element liegt, das G tatsächlich biholomorph auf D abbildet.

Die Familie \mathcal{F} ist nicht leer, da die Identität $\text{id} \in \mathcal{F}$ liegt. Damit existiert

$$\alpha := \sup \{f'(0) : f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

und es gilt $\alpha \geq 1$. Wir werden als erstes nachweisen, daß α in \mathcal{F} angenommen wird. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(f_j) \subset \mathcal{F}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} f'_j(0) = \alpha$. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Familie \mathcal{F} so „gut“ ist, daß man aus jeder unendlichen Folge eine Teilfolge auswählen kann, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f_0 konvergiert. (Dies ist die Eigenschaft der *Normalität*, die wir wegen des noch zu beweisenden Satzes von MONTEL aus der Beschränktheit der Familie folgern können). Wir können dann ohne Einschränkung annehmen, daß die obige Folge (f_j) selbst schon lokal gleichmäßig gegen die holomorphe Funktion f_0 konvergiert. Dann folgt aber aus dem Satz von Weierstraß $f'_j(0) \rightarrow f'_0(0)$ und damit $f'_0(0) = \alpha < \infty$ und $f'_0(0) \geq 1$. Insbesondere ist $f_0 \neq \text{const}$. Aus $|f_j| < 1$ folgt zumindest $|f_0| \leq 1$ auf G , und wegen des Maximumprinzips muß sogar $|f_0| < 1$ gelten. Schließlich benötigen wir ein Kriterium dafür, daß eine Grenzfunktion von injektiven Funktionen wieder injektiv ist. Der folgende Satz mit seiner Folgerung ist unmittelbar auf unsere Situation anwendbar und liefert damit die gewünschte Aussage $f_0 \in \mathcal{F}$.

Satz 22.5 *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, und $f_j \in \mathcal{O}(G)$, $j \in \mathbb{N}$, sei eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine nichtkonstante holomorphe Funktion f konvergiere. Ist $z_0 \in G$ so beschaffen, daß f in z_0 eine Nullstelle k -ter Ordnung besitzt, so existiert zu jeder Umgebung $V = V(z_0)$ eine Umgebung $U = U(z_0) \subset V$ und ein Index $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß alle f_j , $j \geq j_0$, auf U die (totale) Nullstellenordnung k besitzen.*

Beweis. Wähle $U = D_\epsilon(z_0) \subset V$ so klein, daß $f|_{\overline{U}}$ nur in z_0 eine Nullstelle besitzt. Setze dann $\delta := \min \{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial U\} > 0$. Da ∂U kompakt ist, existiert ein j_0 , so daß für alle $j \geq j_0$ gilt:

$$\sup_{\zeta \in \partial U} |f_j(\zeta) - f(\zeta)| < \delta.$$

Wegen $f_j = f + (f_j - f)$ hat dann nach dem Satz von Rouché f_j genauso viele Nullstellen in U wie f , $j \geq j_0$. □

Bemerkung. Selbstverständlich kann man den Begriff *Nullstelle* in dem obigen Satz durch das Wort *w_0 -Stelle* ersetzen.

Folgerung 22.6 *Sind die f_j in dem obigen Satz injektiv, so auch f .*

Beweis. Angenommen, es sei $f(z_1) = f(z_2) =: w_0$, $z_1 \neq z_2$. Dann gibt es Umgebungen $U_k = U(z_k)$, $k = 1, 2$, und ein j_0 , so daß für alle $j \geq j_0$ die Einschränkung $f_j|_{U_1}$ genauso viele w_0 -Stellen besitzt wie $f|_{U_1}$, und entsprechend für U_2 . Wähle dann $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so daß f_{j_0} mindestens zwei w_0 -Stellen hat. Also ist f_{j_0} nicht injektiv. Widerspruch! □

Es bleibt außer dem Montelschen Kriterium immer noch zu zeigen, daß die obige Grenzfunktion f_0 tatsächlich G auf den Einheitskreis abbildet: $G_0 = f_0(G) = D$. Der Grund hierfür liegt in dem folgenden Hilfssatz, der als Umkehrung des Schwarzschen Lemmas angesehen werden kann.

Hilfssatz. Sei $G_0 \subset D$ ein von D verschiedenes homologisch einfach zusammenhängendes Teilgebiet mit $0 \in G_0$. Dann gibt es eine injektive holomorphe Abbildung $h : G_0 \rightarrow D$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) > 1$.

Beweis. Wähle $c \in D \setminus G_0$. $\varphi_1(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$ ist dann ein Automorphismus von D , der c nach 0 und 0 nach $-c$ wirft. $\varphi_1(G_0)$ ist einfach zusammenhängend und enthält die 0 nicht; also gibt es auf $\varphi_1(G_0)$ einen Zweig g der Quadratwurzel: $g \in \mathcal{O}(\varphi_1(G_0))$, $g(z)^2 = z$ für alle $z \in \varphi_1(G_0)$. Die Abbildung g ist injektiv, und es gilt $g(\varphi_1(G_0)) \subset D$. Setze weiter $d := g(-c)$, $\varphi_2(z) = e^{i\lambda} \frac{z - d}{1 - \bar{d}z}$ (mit noch zu bestimmender Konstanten λ) und $h = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1 : G_0 \rightarrow D$. Da φ_1, φ_2 bijektiv sind und g injektiv ist, muß h injektiv sein; ferner ist $h(0) = \varphi_2(d) = 0$, und λ läßt sich so wählen, daß $h'(0) > 0$. Betrachte jetzt noch $g^*(z) = z^2$ und $h^* = \varphi_1^{-1} \circ g^* \circ \varphi_2^{-1} : D \rightarrow D$. Offensichtlich ist $h^* \circ h = \text{id}$ auf G_0 ; ferner gilt $h^*(0) = 0$, aber h^* kann keine Drehung sein. Folglich ist mit dem Schwarzschen Lemma

$$|h^*(0)| < 1.$$

Wegen $1 = |h^*(0)h'(0)|$ ist dann $h'(0) > 1$. □

Wir beenden nun den Beweis der obigen Behauptung über die Grenzfunktion f_0 und damit den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (modulo dem Satz von Montel): Angenommen, f_0 würde G_0 nicht auf ganz D abbilden. Dann gibt es nach dem eben bewiesenen Hilfssatz eine injektive holomorphe Abbildung $h : G_0 \rightarrow D$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) > 1$. Für $\tilde{f} := h \circ f_0$ würde dann gelten: $\tilde{f} : G_0 \hookrightarrow D$ ist injektiv, $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}'(0) = h'(0)f_0'(0) > \alpha > 0$. Also wäre $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, aber $\alpha \neq \sup\{f'(0) : f \in \mathcal{F}\}$. Widerspruch! □

Wir müssen uns nun endlich ernsthaft um die noch ausstehenden analytischen Reste kümmern.

Definition. $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Teilmenge und \mathcal{F} eine Menge von Funktionen auf M . \mathcal{F} heißt *gleichgradig stetig*, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ und jedes Element $f \in \mathcal{F}$ gilt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

(Insbesondere sind damit alle $f \in \mathcal{F}$ *gleichmäßig stetig*). Die Familie \mathcal{F} heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in M$ und alle $f \in \mathcal{F}$.

Wir benutzen im folgenden einen Standardsatz aus der reellen Analysis.

Satz 22.7 (Arzelà - Ascoli) Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt, und die Familie \mathcal{F} sei beschränkt und gleichgradig stetig. Dann kann man aus jeder unendlichen Folge $(f_j) \subset \mathcal{F}$ eine unendliche Teilfolge auswählen, die auf M gleichmäßig konvergiert.

Folgerung 22.8 Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Familie \mathcal{F} lokal beschränkt und lokal gleichgradig stetig, dann gibt es zu jeder unendlichen Folge in \mathcal{F} eine unendliche Teilfolge, die auf U lokal gleichmäßig konvergiert.

Einen *Beweis* findet man z. B. in meinem Manuskript *Analysis II* (siehe Satz 20.15) oder bei GRAUERT-LIEB, *Differential- und Integralrechnung II*.

Für holomorphe Funktionen ist die Situation wesentlich einfacher.

Satz 22.9 Sei \mathcal{F} auf $U \subset \mathbb{C}$ eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen. Dann ist \mathcal{F} lokal gleichgradig stetig.

Beweis. Sei $\bar{D} = \bar{D}_r(z_0) \subset U$ so beschaffen, daß $|f'(z)| \leq K$ für alle $z \in \bar{D}$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Wähle $V = V(z_0) = D_{r/2}(z_0)$. Es gilt dann für alle $z_1, z_2 \in \bar{V}$:

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{z \in \bar{V}} |f'(z)| \\ &\leq |z_2 - z_1| \max_{z \in \bar{V}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \\ &\leq |z_2 - z_1| \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \frac{K}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = |z_2 - z_1| \frac{4K}{r}, \end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck ist kleiner als ϵ für alle z_1, z_2 mit

$$|z_1 - z_2| < \delta := \frac{r\epsilon}{4K},$$

wobei $\delta = \delta(\epsilon)$ unabhängig von $f \in \mathcal{F}$ ist. □

Aus der Folgerung zum Satz von Arzelà–Ascoli erhält man unmittelbar

Satz 22.10 (Montel) Jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Definition. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ heißt *normal*, wenn jede Folge in \mathcal{F} eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion oder gegen ∞ strebt.

Der Satz von Montel läßt sich dann auch so ausdrücken:

Jede (lokal) beschränkte Familie (holomorpher Funktionen) ist normal.

Bemerkung. Man kann die Voraussetzungen des Satzes von Montel noch wesentlich abschwächen. Es genügt, daß die Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ mindestens zwei Werte w_1, w_2 ausläßt. Da das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{w_1, w_2\}$ als universelle Überlagerung den Einheitskreis besitzt, kann man jede Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ lokal zu einer holomorphen Funktion $f : U \rightarrow D$ liften. Auf diese neue Familie kann man dann die obige Version des Satzes von Montel anwenden.

Als eine Folgerung aus dem Satz von Montel zitieren wir noch den

Satz 22.11 (Vitali) $G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, \mathcal{F} sei eine normale Familie holomorpher Funktionen auf G , und $M \subset G$ sei nicht diskret. Ferner sei die Folge $(f_j) \subset \mathcal{F}$ punktweise konvergent auf M gegen eine Funktion $g : M \rightarrow \mathbb{P}_1$. Dann konvergiert (f_j) lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Abbildung $g : G \rightarrow \mathbb{P}_1$, die eventuell $\equiv \infty$ sein kann.

Beweis. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

a) $g = \infty$. Wir nehmen an, die Folge (f_j) konvergiere nicht lokal gleichmäßig gegen ∞ . Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, eine kompakte Teilmenge $K \subset G$, eine Teilfolge (f_{j_k}) und Punkte $z_k \in K$ mit $|f_{j_k}(z_k)| < \epsilon$. Da \mathcal{F} normal ist, konvergiert eine weitere Teilfolge von (f_{j_k}) lokal gleichmäßig, und zwar gegen eine holomorphe Funktion. Dies steht aber im Widerspruch zu $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z) = \infty$ für alle $z \in M$!

b) $g \neq \infty$. (f_j) besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge; der Grenzwert darf wegen der Voraussetzung an g nicht gleich ∞ sein, ist also eine holomorphe Funktion f . Angenommen, die ursprüngliche Folge (f_j) konvergiere nicht auch schon gleichmäßig gegen f . Dann gibt es eine Teilfolge (f_{j_k}) , ein $\epsilon > 0$, eine kompakte Teilmenge $K \subset G$ und Punkte $z_k \in K$ mit

$$(*) \quad |f_{j_k}(z_k) - f(z_k)| \geq \epsilon.$$

Durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge kann man annehmen, daß die Folge (f_{j_k}) lokal gleichmäßig konvergent ist gegen eine Grenzfunktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(G)$. Aus $(*)$ folgt dann: $\tilde{f} \neq f$. Nun ist aber $\tilde{f}|_M = g = f|_M$ auf der nichtdiskreten Menge M . Dies liefert mit dem Identitätssatz den Widerspruch $\tilde{f} = f$. \square

Bemerkung. Die vorstehenden Beweise der Sätze von Montel und Vitali sind insofern unbefriedigend, als sie mit der Verwendung des reellen Satzes von Arzelà–Ascoli gegen das „funktionentheoretische Credo“ verstoßen. VITALI hat in seiner originären Arbeit jedoch gezeigt, wie man auch ohne dieses Ergebnis aus der reellen Analysis auskommen kann. - Tatsächlich bewies er den folgenden Satz, der seinerseits wieder den Satz von Montel impliziert.

Satz 22.12 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine nicht diskrete Teilmenge. Ferner sei (f_j) eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf G , die auf M punktweise konvergiere. Dann konvergiert die Folge sogar lokal gleichmäßig auf G gegen eine holomorphe Funktion f .*

Beweis. Es sei $A \subset G$ die Menge der Punkte a , zu denen es eine Umgebung $U = U(a) \subset G$ gibt, auf der die Folge (f_j) gleichmäßig konvergiert. Nach Definition ist diese Menge offen. Wir müssen nur noch zeigen, daß sie abgeschlossen und nicht leer ist. Sei dazu $B \subset G$ die Obermenge von $A \cup M$ derjenigen Punkte, auf der die Folge punktweise konvergiert, und $b \in G$ sei ein Häufungspunkt von B . Es genügt dann zu zeigen, daß $b \in A$. Um dies einzusehen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b = 0 \in G$ annehmen und einen abgeschlossenen Kreis $\bar{D} = \bar{D}_r \subset G$ mit Mittelpunkt 0 wählen. Da alle f_j auf D holomorph sind, besitzt jede dieser Funktionen eine in D konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nj} z^n.$$

Zudem gilt, wenn wir r nur klein genug wählen, $|f_j(z)| \leq M$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \bar{D}$. Dann ist

$$|f_j(z) - f_j(0)| \leq 2M,$$

und durch Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf die Funktion

$$(f_j(rz) - f_j(0))/2M, \quad |z| \leq 1,$$

erhält man sofort die Abschätzung

$$|f_j(z) - f_j(0)| \leq \frac{2M}{r} |z| \quad \text{für } z \in \bar{D}_r.$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ sei nun $\zeta \in D$ ein Punkt mit

$$|\zeta| \leq \frac{\epsilon r}{8M},$$

in dem die Folge der f_j konvergiert. Dann gibt es ein $m = m(\epsilon)$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_{m+k}(\zeta) - f_m(\zeta)| \leq \epsilon/2$, und für dieses m und alle j ist

$$\begin{aligned} |f_{m+j}(0) - f_m(0)| &\leq |f_{m+j}(\zeta) - f_{m+j}(0)| + |f_{m+j}(\zeta) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f_m(0)| \\ &\leq \frac{4M}{r} |\zeta| + |f_{m+j}(\zeta) - f_m(\zeta)| \leq 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist auch die Folge der f_j im Nullpunkt konvergent und damit die Folge der a_{0j} . Es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{0j} =: a_0.$$

Als nächstes betrachtet man die Folge der Funktionen

$$g_j(z) := \frac{f_j(z) - f_j(0)}{z},$$

die in den Nullpunkt hinein holomorph fortgesetzt werden können und in D die Potenzreihenentwicklung

$$g_j(z) = a_{1j} + a_{2j}z + \dots$$

besitzen. Aus der obigen Abschätzung für die Funktionen $f_j(z) - f_j(0)$ und dem Maximumprinzip gewinnt man sofort die Abschätzung

$$|g_j(z)| \leq \frac{2M}{r} \quad \text{für alle } z \in D$$

und alle j gleichzeitig. Die Folge $(g_j(z))$ konvergiert an den gleichen Stellen wie die Folge $(f_j(z))$; mithin kann man mit denselben Argumenten wie oben schließen, daß der Grenzwert

$$a_1 := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{1j}$$

existiert. So fortfahrend gewinnt man die Einsicht, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte

$$a_n := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{nj}$$

existieren. Aufgrund der Cauchyschen Ungleichungen ist aber

$$|a_{nj}| \leq \frac{M}{r^n},$$

und deshalb ist auch

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Insbesondere ist dann die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

in dem offenen Kreis D konvergent und stellt dort eine holomorphe Funktion f dar.

Es bleibt noch zu beweisen, daß die Folge (f_j) gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $D_\rho \subset\subset D$ gegen die Funktion f konvergiert. Wir haben auch

$$|a_{nj} - a_n| \leq \frac{2M}{r^n}$$

für alle j und damit für alle $z \in D_\rho$ und alle N :

$$|f(z) - f_j(z)| \leq \sum_{n=0}^N |a_{nj} - a_n| \rho^n + (2M) \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß

$$(2M) \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und da die Folgen (a_{nj}) bei festem n gegen a_n konvergieren, kann $m = m(\varepsilon)$ so groß gewählt werden, daß

$$|a_{nj} - a_n| \rho^n \leq \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

für alle $j \geq m$ und alle $n \leq N$. Alles zusammen liefert die gewünschte Abschätzung

$$|f(z) - f_j(z)| \leq \varepsilon, \quad j \geq m, \quad |z| \leq \rho. \quad \square$$

Den Satz von Montel (Satz 10) kann man hieraus erneut deduzieren: Da jede offene Menge U höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt, können wir uns auf die Betrachtung von *Gebieten* G beschränken. Man wählt eine in G konvergente, nicht triviale Folge (z_j) ; die Punktmenge $M = \{z_0, z_1, \dots\}$ ist dann nicht diskret. Mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß und dem Cantorschen Diagonalverfahren konstruiert man eine Teilfolge der (f_j) , die auf M punktweise konvergiert. Nach dem vorigen Satz ist diese Teilfolge sogar lokal gleichmäßig konvergent. \square

Zum Abschluß dieses Kapitels berichten wir noch über *Fortsetzungseigenschaften* konformer Abbildungen. Man kann z. B. die folgende Frage stellen:

Es sei $f : G \rightarrow D$ eine konforme Abbildung. Wann ist es möglich, eine topologische Fortsetzung

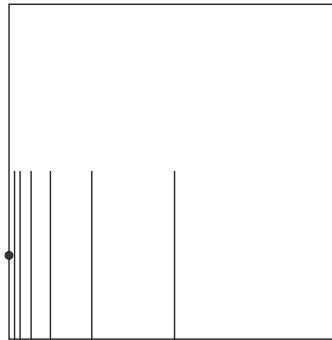
$$(-) \quad \bar{f} : \bar{G} \rightarrow \bar{D}$$

von f zu finden?

Notwendigerweise darf der Rand ∂G dann nicht allzu kompliziert sein, denn die Umkehrabbildung von \bar{f} stiftet einen Homöomorphismus $S^1 \rightarrow \partial G$. Mit anderen Worten: Der Rand von G muß eine *JORDAN-Kurve* sein.

Dies ist selbstverständlich nicht für jedes einfach zusammenhängende Gebiet erfüllt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$G = Q \setminus \bigcup T_j, \quad Q = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad T_j = \left\{ x = \frac{1}{j}, 0 < y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$



Figur 22.2

Ein weiterer Grund für die Nichtexistenz einer homöomorphen Fortsetzung der nach dem Riemannschen Abbildungssatzes vorhandenen biholomorphen Abbildung $G \rightarrow D$ auf den Rand von G liegt darin, daß dieses Gebiet im Gegensatz zum Einheitskreis *nicht erreichbare* Randpunkte besitzt.

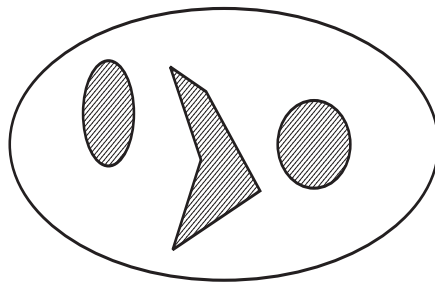
Definition. G sei ein Gebiet und z_0 ein Randpunkt von G . z_0 heißt (in G) *erreichbar*, falls es eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{G}$ gibt mit $\gamma([0, 1)) \subset G$ und $\gamma(1) = z_0$.

Bemerkung. Es gibt somit eindeutige konforme Abbildungen $G \rightarrow G'$, wobei G nur erreichbare Randpunkte besitzt, während dies für G' nicht richtig ist. Offensichtlich gehen aber unter einem Homöomorphismus $\bar{f} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}'$, der $f : G \rightarrow G'$ fortsetzt, erreichbare Randpunkte von G in solche von G' über.

Bevor wir das Hauptresultat zitieren, erinnern wir an den

Satz 22.13 (Jordanscher Kurvensatz) Eine Jordankurve berandet genau zwei Gebiete : das Innere (Beschränkte), das einfach zusammenhängend ist, und das Äußere, das nicht diese Eigenschaft besitzt.

Definition. Ein einfach zusammenhängendes Jordangebiet ist ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet in \mathbb{C} , das von einer Jordankurve berandet wird. Unter einem (mehrfach zusammenhängenden) Jordangebiet versteht man ein Gebiet, dessen Rand aus endlich vielen disjunkten Jordankurven besteht.



Figur 22.3

Einen Teil des Riemannschen Abbildungssatzes kann man jetzt auch wie folgt formulieren.

Satz 22.14 Jedes einfach zusammenhängende Jordangebiet ist biholomorph äquivalent zu dem Einheitskreis D .

Erstaunlicherweise sind dies genau die einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiete, für die eine stetige Fortsetzung der konformen Äquivalenz $G \rightarrow D$ auf den Rand möglich ist.

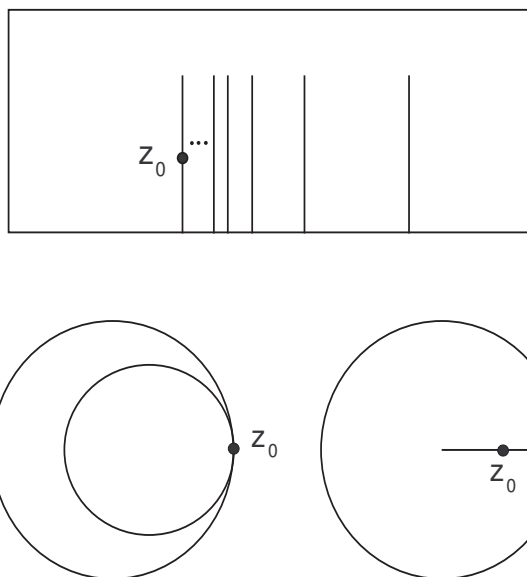
Definition. Ein Randpunkt z_0 eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ heißt ein *einfacher* Randpunkt, falls es für jede Folge $z_j \in G$ mit $\lim z_j = z_0$ eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{G}$ gibt mit $\gamma([0, 1)) \subset G$ und eine streng monoton ansteigende Folge $0 \leq t_j \nearrow 1$, so daß $\gamma(t_j) = z_j$. Ein Randpunkt heißt *normal*, wenn man eine solche Kurve finden kann nach Übergang zu einer Teilfolge von (z_j) .

Bemerkungen. 1. Normale und damit einfache Randpunkte sind insbesondere erreichbar.

2. Läßt sich ein Homöomorphismus $f : G \rightarrow G'$ topologisch auf die Abschlüsse fortsetzen, so gehen normale (bzw. einfache) Randpunkte von G unter \bar{f} auf ebensolche Randpunkte von G' über.

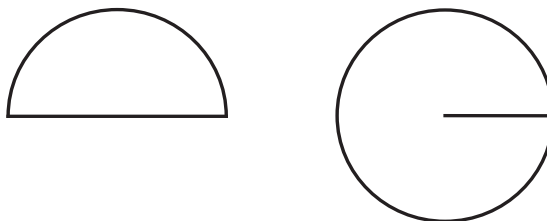
3. Glatte Randpunkte eines Gebietes der Klasse \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, sind einfach.

In der folgenden Figur sind die ausgezeichneten drei Randpunkte erreichbar; für das obere Gebiet ist z_0 aber nicht einmal normal, während die beiden anderen normal, aber nicht einfach sind. Die gezeigten Gebiete sind beschränkt und einfach zusammenhängend, aber keine Jordangebiete.



Figur 22.4

Beispiel. Unter der Abbildung $z \mapsto z^2$ geht ein Halbkreis in einen „geschlitzten“ Kreis konform äquivalent über:



Figur 22.5

Der Bildbereich besitzt *nicht einfache* (wenn auch nur *normale*) Randpunkte im Gegensatz zum Urbildbereich.

Es gilt nun (ohne Beweis):

Satz 22.15 *Jeder Randpunkt eines Jordangebietes ist einfach.*

Fischer–Lieb zeigen in Kapitel VI, §1 (2. Band):

Hilfssatz 1. $z_0 \in \partial G$ sei ein einfacher Randpunkt, $f : G \rightarrow D$ sei konform. Dann existiert eine stetige Fortsetzung

$$G \cup \{z_0\} \longrightarrow \bar{D}.$$

Hilfssatz 2. $z_1 \neq z_2$ seien einfache Randpunkte. Dann ist die Fortsetzung

$$G \cup \{z_1, z_2\} \longrightarrow \bar{D}$$

injektiv.

Alles zusammen ergibt den folgenden

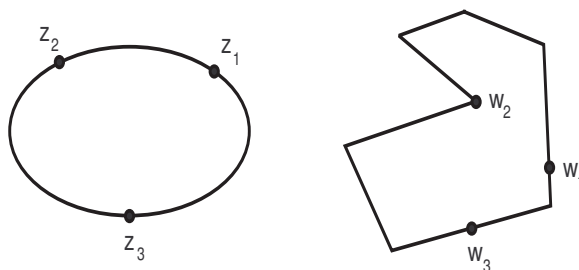
Satz 22.16 (Carathéodory) Für den Rand eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes G sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- i) ∂G ist eine Jordankurve.
- ii) ∂G besteht nur aus einfachen Randpunkten.
- iii) Jede konforme Abbildung $f : G \rightarrow D$ setzt sich zu einem Homöomorphismus $\bar{G} \rightarrow \bar{D}$ fort.

Zu ii) \Rightarrow iii) : Die Abbildung $f : G \rightarrow D$ setzt sich zu einer stetigen Abbildung $F : \bar{G} \rightarrow \bar{D}$ fort mit $F(\bar{G}) \supset D$. Also ist $F(\bar{G})$ dicht in \bar{D} und kompakt, so daß $F(\bar{G}) = \bar{D}$. Da F auch injektiv ist, ist $F : \bar{G} \rightarrow \bar{D}$ bijektiv, und F^{-1} ist stetig (da \bar{G} kompakt ist). \square

Nur eine Umformulierung des letzten Ergebnisses zusammen mit den entsprechenden Überlegungen am Einheitskreis ist

Satz 22.17 Eineindeutige konforme Abbildungen $f : G \rightarrow G'$ von einfach zusammenhängenden Jordangebieten lassen sich zu Homöomorphismen der abgeschlossenen Hüllen fortsetzen. Zu vorgegebenen Tripeln paarweiser verschiedener Punkte (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) im Rand von G bzw. G' mit gleicher „Orientierung“ gibt es genau eine konforme Äquivalenz $f : G \rightarrow G'$, deren Fortsetzung auf den Rand den Punkt z_j auf w_j , $j = 1, 2, 3$, abbildet. Stimmen insbesondere die Fortsetzungen zweier solcher Abbildungen f_1, f_2 in drei Punkten des Randes von G überein, so ist $f_1 = f_2$.



Figur 22.6

Bei a priori beliebigen Rändern beschränkter einfach zusammenhängender Gebiete G, G' läßt sich das Fortsetzungsproblem von biholomorphen Abbildungen $G \rightarrow G'$ nach unseren obigen Überlegungen sinnvollerweise nur dann stellen, wenn G und G' nur normale Randpunkte besitzen. Das Beispiel in Figur 5 verdeutlicht zwar, daß diese Voraussetzung nicht ausreicht, liefert aber einen Hinweis, wie das Problem so abzuändern ist, daß es einer Lösung zugänglich wird. In der Tat kann man die Quadratwurzel nicht zu einer stetigen Umkehrabbildung auf den Abschluß fortsetzen. „Verdoppelt“ man aber den „Stachel“ auf der rechten Seite, betrachtet man also die rechte Figur mit ihrem Abschluß statt in \mathbb{C} in der Riemannschen Fläche X der Wurzelfunktion (mit Einschluß des Nullpunkts als Verzweigungspunkt), so hat man keinerlei Probleme mit der stetigen Fortsetzung mehr.

CARATHÉODORY'S Theorie der *Primenden* kompaktifiziert nun solche Gebiete G , indem man die normalen Randpunkte „mehrfach“ hinzufügt gemäß dem Umstand, daß man die Randpunkte „von verschiedenen Seiten“ in G aus erreichen kann. Dies liefert einen „idealisierten“ Abschluß \bar{G}^* , den man mit der Topologie eines kompakten metrischen Raumes versehen kann, in dem G dicht liegt. In diesem Sinne kann man konforme Abbildungen zu Homöomorphismen der Abschlüsse fortsetzen.

Satz 22.18 (über die Abbildung der Ränder) G_1, G_2 seien einfach zusammenhängende beschränkte Gebiete in \mathbb{C} mit nur normalen Randpunkten. Bildet f das Gebiet G_1 auf G_2 eineindeutig und konform ab, so läßt sich f eindeutig zu einer topologischen Abbildung $\bar{f}^* : \bar{G}_1^* \rightarrow \bar{G}_2^*$ fortsetzen.

Zum *Beweis* siehe z. B. BEHNKE–SOMMER, pp. 364 ff. □

Für *mehrfach zusammenhängende* Gebiete ist die Theorie noch wesentlich komplizierter. - Als Übungsaufgabe überlassen wir dem Leser den Nachweis z. B. der folgenden Aussage.

Satz 22.19 *Zwei Kreisringe $K_{r,R}$ und $K_{s,S}$ sind genau dann konform äquivalent, wenn $R/r = S/s$.*

23 Die Klassifikation von Überlagerungen

In diesem „topologischen Interludium“ wollen wir alle (*unbegrenzten, unverzweigten*) *Überlagerungen* $Y \rightarrow X$ eines fest vorgegebenen topologischen Raumes X klassifizieren¹⁸. Um keine allzu großen Schwierigkeiten zu bekommen, müssen wir einige Voraussetzungen machen, die im folgenden stillschweigend als gegeben angenommen werden.

- i) X und Y sind *wegweise zusammenhängend*.
- ii) X ist überdies „lokal hinreichend zusammenhängend“, d. h. auch noch *lokal wegweise zusammenhängend* und *semi-lokal einfach zusammenhängend*, d. h. für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung $U = U(x)$, so daß die Fundamentalgruppe von U trivial ist, in Zeichen: $\pi_1(U) = 1$.

Bemerkungen. 1. Ist $p : Y \rightarrow X$ eine lokal topologische Abbildung, so erfüllt mit X auch Y dieselben Bedingungen.

2. Die Bedingung i) ist für Mannigfaltigkeiten keine wesentliche Einschränkung, da die Zusammenhangskomponenten einer Mannigfaltigkeit wegweise zusammenhängend sind.

3. Die Bedingung ii) ist für Mannigfaltigkeiten immer erfüllt, da jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer Kugel ist.

Ist $p : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung (von wegzusammenhängenden Räumen), so hat man offensichtlich einen Gruppenhomomorphismus der Fundamentalgruppen:

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) ,$$

wenn $p(y_0) = x_0$, der dadurch entsteht, daß man Schleifen in Y durch y_0 mittels der Abbildung p zu Schleifen in X durch x_0 „herunterdrückt“.

Im Falle von *Überlagerungen* $p : Y \rightarrow X$ kann weit mehr über diesen Homomorphismus p_* gesagt werden. Dies hat mit *Liftungseigenschaften* von Abbildungen nach X hinein zu tun. Ist $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ eine *Liftung* von f :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Die *Eindeutigkeitsfrage* ist sehr schnell beantwortet.

Satz 23.1 *Der topologische Raum Z sei zusammenhängend. Dann stimmen zwei Liftungen der stetigen Abbildung $f : Z \rightarrow X$ in die Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ genau dann überein, wenn sie an einer einzigen Stelle $z_0 \in Z$ übereinstimmen.*

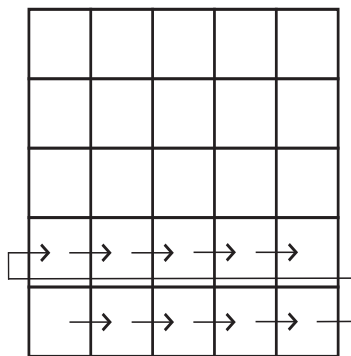
Beweis. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung $W = W(z_0)$, so daß das Bild jeder Liftung von f in einem Blatt über einer gleichmäßig überlagerten Umgebung des Bildpunktes $f(z_0)$ liegt. Zwei Liftungen „landen“ aber lokal offensichtlich genau dann in demselben Blatt, wenn sie an einer Stelle übereinstimmen. Somit ist die Menge A der Punkte $z \in Z$, in denen zwei vorgegebene Liftungen übereinstimmen, sowohl offen als auch abgeschlossen. \square

In Bezug auf die Existenz solcher Liftungen betrachten wir den Spezialfall, daß $Z = I^2 \subset \mathbb{R}^2$ ist, wobei $I = [0, 1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall in \mathbb{R} bezeichnet.

¹⁸Eine etwas verkürzte Fassung dieses Kapitels findet man auch als Anhang zu Kapitel 5 in meinem Manuskript *Differentialgeometrie II*.

Satz 23.2 Sei $f : I^2 \rightarrow X$ stetig, $f(0, 0) = x_0$, $p(y_0) = x_0$. Dann gibt es (genau) eine Liftung \tilde{f} von f mit $\tilde{f}(0, 0) = y_0$.

Beweis. Da I^2 kompakt und f stetig ist und die gleichmäßig überlagerten offenen wegzusammenhängenden Mengen in X eine Basis der Topologie bilden, existiert aufgrund des Lebesgueschen Lemmas eine Zerlegung $I^2 = \cup_{j,k} I_{jk}$ von I^2 in kongruente Quadrate I_{jk} , so daß $f(I_{jk}) \subset U_{jk}$ und U_{jk} eine gleichmäßig überlagerte zusammenhängende offene Menge in X ist. Damit läßt sich $f|_{I_{jk}}$ in jedes Blatt über U_{jk} liften. Diese Liftungen lassen sich aber, ausgehend von dem Anfangswert y_0 , so wählen, daß insgesamt eine stetige Liftung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ entsteht: Man arbeite nämlich wie untenstehend angedeutet die einzelnen kleinen Quadrate ab, und zwar so, daß die Fortsetzung im jeweils „neuen Quadrat links unten“ mit der zuvor konstruierten Fortsetzung übereinstimmt. Dann stimmt diese wegen Satz 1 mit allen vorher schon konstruierten Fortsetzungen auf den gemeinsamen „Rändern“ ihrer Definitionsbereiche überein.



Figur 23.1

Damit haben wir eine *stetige* Liftung mit der geforderten Anfangsbedingung gefunden. \square

Auf jeden *parametrisierten stetigen* Weg $\gamma : I \rightarrow X$ läßt sich der vorige Satz anwenden durch Betrachtung der Abbildung $f(s, t) := \gamma(t)$, $(s, t) \in I \times I$. - Als Ergebnis halten wir fest:

Korollar 23.3 Jeder stetige Weg in X läßt sich (bei vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig) nach Y liften.

Warnung: Ist γ in X geschlossen, so braucht dies für die Liftung $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ nicht der Fall zu sein!

Sind nun γ_0, γ_1 homotope Wege in X mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 , und ist $h : I^2 \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen diesen Wegen, so betrachten wir die eindeutig bestimmte Liftung $\tilde{h} : I^2 \rightarrow Y$ von h mit $\tilde{h}(0, 0) = y_0$. Es ist

$$(p \circ \tilde{h})(0, t) = h(0, t) = x_0 \quad \text{für alle } t \in I,$$

d. h.: $t \mapsto \tilde{h}(0, t)$ ist ein stetiger Weg, dessen Spur in $p^{-1}(x_0)$ enthalten ist. Da aber $p^{-1}(x_0)$ diskret in Y liegt, folgt $\tilde{h}(0, t) \equiv y_0$. Ebenso ergibt sich $\tilde{h}(1, t) \equiv y_1$ mit einem festen Punkt $y_1 \in p^{-1}(x_1)$. Nun liftet $\tilde{h}(s, 0)$ aber gerade die Abbildung $h(s, 0) = \gamma_0$ und ist damit eindeutig bestimmt, und gleiches gilt für $\tilde{h}(s, 1)$. - Es folgt:

Korollar 23.4 Sind γ_0, γ_1 homotop in X , so sind die Liftungen $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ (mit gleichem Anfangspunkt) homotop in Y . Insbesondere haben die beiden Liftungen denselben Endpunkt.

Ist der *geschlossene* Weg γ sogar homotop Null in X , so ist jede Liftung geschlossen und homotop Null in Y . - Als Folgerung erhalten wir aus dieser Bemerkung sofort den grundlegenden

Satz 23.5 Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann ist der kanonische Gruppenhomomorphismus

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv. Die Untergruppe

$$G(Y, y_0) = G(Y, p, X; y_0) := p_*\pi_1(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$$

besteht aus den Homotopieklassen $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, deren Repräsentanten γ geschlossene Liftungen nach Y (mit Anfangs- und Endpunkt y_0) besitzen.

Definition. Die Untergruppe $G(Y, y_0)$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *charakteristische Untergruppe* der Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ (im Punkte y_0).

Was passiert nun, wenn man y_0 - bei festgehaltenem x_0 - variiert? Es sei also $p(y_0) = p(y'_0) = x_0$, und $\tilde{\gamma}$ sei ein stetiger Weg in Y von y_0 nach y'_0 . Dann ist $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ ein geschlossener Weg in X , und man sieht sofort, daß mit der Homotopie-Klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ von γ gilt:

$$G(Y, y'_0) = [\gamma] \cdot G(Y, y_0) [\gamma^{-1}].$$

Dies ist der erste Teil des folgenden Satzes.

Satz 23.6 a) Mit $y_0, y'_0 \in p^{-1}(x_0)$ sind die charakteristischen Untergruppen $G(Y, y_0)$ und $G(Y, y'_0)$ konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$.

b) Ist die Gruppe G konjugiert zu einer Untergruppe $G(Y, y_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$, so gibt es ein y'_0 über x_0 mit $G = G(Y, y'_0)$.

Beweis. Nur Teil b) ist noch zu zeigen. Es sei also $G = [\gamma] \cdot G(Y, y_0) [\gamma^{-1}]$. Ist dann $\tilde{\gamma}$ eine Liftung von γ mit Anfangspunkt y_0 , so ist nach dem bisher Bewiesenen $G = G(Y, y'_0)$, wobei y'_0 den Endpunkt von $\tilde{\gamma}$ bezeichnet. Box

Bemerkungen und Definition. 1. Mit anderen Worten besagt der vorstehende Satz, daß die Menge $C(Y, x_0) := \{G(Y, y_0) : p(y_0) = x_0\}$ eine *Konjugationsklasse* in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist. Sie heißt die *charakteristische Klasse* der Überlagerung $Y \rightarrow X$ im Punkte $x_0 \in X$.

2. Die Abhängigkeit dieser Klasse von dem Punkt x_0 ist nicht mehr wesentlich. Sind x_0, x_1 zwei Punkte in X mit der von einem verbindenden Weg induzierter Isomorphie

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1),$$

so geht die charakteristische Klasse in x_0 in die in x_1 über.

Wir wollen anschließend zeigen, daß die charakteristischen Klassen tatsächlich den Schlüssel zur Klassifikation der Überlagerungen liefern.

Satz 23.7 Zwei Überlagerungen $p : Y \rightarrow X$ und $p' : Y' \rightarrow X$ sind genau dann isomorph (d. h. es existiert ein Homöomorphismus $\alpha : Y \rightarrow Y'$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & Y' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & X \end{array}$$

kommutativ macht), wenn $C(Y, x_0) = C(Y', x_0)$ für ein $x_0 \in X$ (und damit für alle $x_0 \in X$) ist.

Bevor wir dieses zentrale Ergebnis beweisen können, benötigen wir ein *Liftungskriterium*, das wir in nuce schon früher einmal verwendet haben und auch noch weiter gebrauchen werden.

Satz 23.8 *Es sei Z wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend, $f : Z \rightarrow X$ sei eine stetige Abbildung, und $x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z$ seien Punkte mit $f(z_0) = x_0, p(y_0) = x_0$. Genau dann gibt es eine Liftung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ von f mit $\tilde{f}(z_0) = y_0$, wenn*

$$(*) \quad f_*\pi_1(Z, z_0) \subset G(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0).$$

Beweis (Satz 8). a) Wenn eine Liftung \tilde{f} von f existiert, so folgt aus $p \circ \tilde{f} = f$ sofort die Behauptung: Die Bildung des *Homotopie-Homomorphismus* f_* ist „funktoriell“ in f , d. h. in unserer Situation $p_* \circ \tilde{f}_* = (p \circ \tilde{f})_* = f_*$, und damit ergibt sich eine der beiden Richtungen:

$$f_*\pi_1(Z, z_0) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(Y, y_0).$$

b) Sei andererseits die Bedingung (*) gegeben. Ist dann $z \in Z$ beliebig, so sei $\alpha = \alpha_z$ ein Weg von z_0 nach z . Wir setzen $\gamma := f \circ \alpha$ und benennen mit $\tilde{\gamma}$ eine Liftung von γ nach Y mit dem Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = y_0$. Setze schließlich

$$\tilde{f}(z) := \tilde{\gamma}(1).$$

Es ist als erstes zu zeigen, daß die Definition von $\tilde{f}(z)$ nur abhängig von dem Punkte z , nicht aber abhängig von der speziellen Wahl des Weges $\alpha = \alpha_z$ ist. Es sei also α' ein weiterer solcher Weg, und entsprechend wie oben seien γ' und $\tilde{\gamma}'$ definiert. Dann ist $[\gamma^{-1}\gamma'] \in f_*\pi_1(Z, z_0) \subset G(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0)$. Also liftet der Weg $\gamma^{-1}\gamma'$ zu einem *geschlossenen* Weg in Y . Eine Liftung ist aber $\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}'$, so daß also $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$ sein muß.

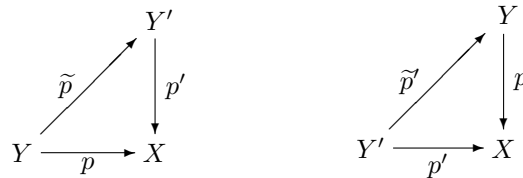
Nach Konstruktion erfüllt \tilde{f} die Bedingung $p \circ \tilde{f} = f$. Die *Stetigkeit* von \tilde{f} ist unmittelbar einsichtig, da Z lokal wegweise zusammenhängend und $p : Y \rightarrow X$ als Überlagerung lokal topologisch ist. \square

Beweis (Satz 7). a) Sind p und p' als Überlagerungen isomorph, und ist α ein Isomorphismus, so besteht für alle $y_0 \in Y$ die Identität $\alpha_*\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(Y', \alpha(y_0))$. Hieraus folgt

$$G(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0) = p'_*\pi_1(Y', \alpha(y_0)) = G(Y', \alpha(y_0))$$

und damit auch $C(Y, x_0) = C(Y', x_0)$, da α die Faser $p^{-1}(x_0)$ bijektiv auf die Faser $(p')^{-1}(x_0)$ abbildet.

b) Es sei umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt und $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ fest gewählt. Dann gibt es wegen der Voraussetzung $p_*\pi_1(Y, y_0) \subset C(Y, x_0) = C(Y', x_0)$ einen Punkt $y'_0 \in (p')^{-1}(x_0) \subset Y'$ mit $p_*\pi_1(Y, y_0) = p'_*\pi_1(Y', y'_0)$. Wegen Satz 8 existieren Liftungen



mit $\tilde{p}(y_0) = y'_0$ und $\tilde{p}'(y'_0) = y_0$. Dann sind aber $\tilde{p} \circ \tilde{p}'$ und $\tilde{p}' \circ \tilde{p}$ Abbildungen, die über p' bzw. p liegen und jeweils einen Punkt festhalten: $(\tilde{p} \circ \tilde{p}')(y'_0) = y'_0, (\tilde{p}' \circ \tilde{p})(y_0) = y_0$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1 ist dann notwendig

$$\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \text{id}_Y, \quad \tilde{p} \circ \tilde{p}' = \text{id}_{Y'},$$

d. h. \tilde{p} ist ein Überlagerungsisomorphismus (mit Inversem \tilde{p}'). \square

Bemerkungen. 1. Die Bedingung von Satz 8 ist immer erfüllt, wenn der Raum Z *einfach zusammenhängend* ist. Denn dann ist $f_*\pi_1(Z, z_0)$ trivial und somit in $G(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0)$ enthalten.

2. Sind X, Y, Z *differenzierbare* Mannigfaltigkeiten bzw. RIEMANNSCHE *Flächen* und die Abbildungen f, p differenzierbar bzw. holomorph, so ist notwendig jede *stetige* Liftung \tilde{f} ebenfalls differenzierbar bzw. holomorph.

3. Beide Bemerkungen zusammen spielten bei der Klassifikation der komplex-analytischen Tori im Anhang zu Kapitel 18 schon (indirekt) eine Rolle. Wir suchten dort eine holomorphe Abbildung $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die für eine gegebene holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C}/\Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Omega_2$ von Tori das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C}/\Omega_1 = T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 = \mathbb{C}/\Omega_2 \end{array}$$

kommutativ macht. Dies bedeutet aber nichts anderes, als die zusammengesetzte Abbildung $f \circ \pi_1: \mathbb{C} \rightarrow T_2$ in die Überlagerung $\pi_2: \mathbb{C} \rightarrow T_2$ zu liften. Wir haben dort ebenfalls schon ein *Homotopie-Argument* gebraucht in Form des *Monodromie-Satzes* für die analytische Fortsetzung holomorpher Funktionen.

Wegen Satz 7 muß es möglich sein, aus der charakteristischen Klasse $C(Y, x_0)$ alle relevanten Informationen über die Überlagerung $Y \rightarrow X$ zu gewinnen. - Wir geben hierzu zwei Beispiele.

Satz 23.9 Die Blätterzahl der Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ ist gleich dem Index von $G(Y, y_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ für beliebige Punkte $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Beweis. Es seien $y_\iota, \iota \in I$, alle Urbilder von x_0 unter p mit einer geeigneten Indexmenge I . Dann ist die Blätterzahl von p nichts anderes als die Kardinalität $\text{card } I$ von I . Wähle nun Wege $\tilde{\gamma}_\iota$ von $y_0 = y_{\iota_0}$ zu y_ι . Die Bildwege $\gamma_\iota := p \circ \tilde{\gamma}_\iota$ sind dann Repräsentanten von Homotopieklassen $[\gamma_\iota] \in \pi_1(X, x_0)$, und die Mengen

$$[\gamma_\iota]G(Y, y_0), \quad \iota \in I,$$

sind genau die Rechtsnebenklassen von $G(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$. Also ist

$$\text{card}[G(Y, y_0) : \pi_1(X, x_0)] = \text{card } I. \quad \square$$

Auch die Gruppe der sogenannten *Decktransformationen* $\text{Deck}(Y, X)$ einer Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ ist aus der charakteristischen Klasse $C(Y, y_0)$ mit gruppentheoretischen Mitteln (zumindest im Prinzip) berechenbar. Nach Definition ist

$$\text{Deck}(Y, X) := \{ \alpha: Y \rightarrow Y : \alpha \text{ ist ein Homöomorphismus mit } p \circ \alpha = p \}.$$

Zur Formulierung des Ergebnisses benötigen wir einen zentralen Begriff aus der *Gruppentheorie*.

Definition und Bemerkung. Ist G eine Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe, so ist

$$N_G(U) = \{ g \in G : g^{-1}Ug = U \}$$

eine Untergruppe von G , die U umfaßt. Sie ist die größte Untergruppe von G , in der U ein Normalteiler ist und heißt der *Normalisator* von U in G . Es gilt $N_G(U) = G$ genau dann, wenn U ein *Normalteiler* in G ist.

In unserer „Überlagerungssituation“ $p: Y \rightarrow X$ schreiben wir ab jetzt $N(Y, y_0)$ für den Normalisator von $G(Y, y_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 = p(y_0)$. - Es gilt:

Satz 23.10 Für alle $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es einen kanonischen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$N(Y, y_0) \longrightarrow \text{Deck}(Y, X)$$

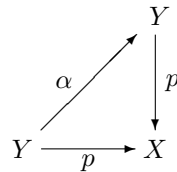
mit Kern $G(Y, y_0)$. Also besteht ein kanonischer Gruppenisomorphismus

$$\text{Deck}(Y, X) \xrightarrow{\sim} N(Y, y_0)/G(Y, y_0).$$

Beweis. Es sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ fest gewählt und $[\gamma] \in N(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$, also $[\gamma]^{-1}G(Y, y_0)[\gamma] = G(Y, y_0)$. Ist $\tilde{\gamma}$ eine Liftung des Repräsentanten γ mit Anfangspunkt y_0 und Endpunkt y'_0 , so ist nach Satz 6 und Voraussetzung

$$G(Y, y'_0) = [\gamma]G(Y, y_0)[\gamma]^{-1} = G(Y, y_0).$$

Mit Satz 8 ist somit das Liftungsproblem



mit $\alpha(y_0) = y'_0$ lösbar. Nach Vertauschung der Rollen von y_0 und y'_0 schließt man genauso auf die Existenz einer inversen Abbildung zu α ; m. a. W.: Die Abbildung α liegt in $\text{Deck}(Y, X)$.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\alpha := \alpha_\gamma$ tatsächlich nur von der Homotopie-Klasse $[\gamma]$ des geschlossenen Weges γ abhängt. Außerdem macht man sich schnell klar, daß die so gewonnene Abbildung

$$(+) \quad N(Y, y_0) \longrightarrow \text{Deck}(Y, X)$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist, dessen Kern gerade $G(Y, y_0)$ ist, da die entsprechenden Decktransformationen y_0 als Fixpunkt besitzen.

Es braucht also nur noch die Surjektivität der Abbildung (+) gezeigt zu werden. Es sei also $\alpha \in \text{Deck}(Y, X)$ gegeben, $\alpha(y_0) =: y'_0$. Wähle dann einen Weg $\tilde{\gamma}$ in Y von y_0 nach y'_0 , und betrachte den Bildweg γ in X mit Restklasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt:

$$[\gamma]^{-1}p_*\pi_1(Y, y_0)[\gamma] = p_*\pi_1(Y, y'_0) = p_*\alpha_*\pi_1(Y, y_0) = (p\alpha)_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0),$$

d. h. die Restklasse $[\gamma]$ ist in dem Normalisator $N(Y, y_0)$ von $G(Y, y_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ enthalten. Sei nun $\alpha := \alpha_\gamma$ wie oben konstruiert. Dann ist $\alpha_\gamma(y_0) = y'_0$ und damit $\alpha^{-1} \circ \alpha_\gamma(y_0) = y_0$. Der Eindeigkeitssatz impliziert dann $\alpha^{-1} \circ \alpha_\gamma = \text{id}_Y$, und folglich ist $\alpha = \alpha_\gamma$. \square

Bevor wir dies alles auf die *universelle Überlagerung* anwenden, notieren wir noch zwei einfach zu beweisende Aussagen¹⁹.

Satz 23.11 Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann operiert die Gruppe $\text{Deck}(Y, X)$ der Decktransformationen eigentlich diskontinuierlich und frei auf Y .

Dies ist klar wegen des Identitätssatzes für Liftungen.

Satz 23.12 Die Gruppe G operiere eigentlich diskontinuierlich und frei auf Y , und $p : Y \rightarrow X := Y/G$ sei die natürliche Überlagerung. Dann ist

$$G \cong \text{Deck}(Y, X).$$

¹⁹Die verwendeten Begriffe und Aussagen werden in dem Anhang zum vorliegenden Kapitel eingeführt bzw. hergeleitet.

Warnung. Nach den beiden soeben formulierten Sätzen ist für eine vorgegebene Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ die Quotientenabbildung $q : Y \rightarrow Y/\text{Deck}(Y, X)$ eine Überlagerung, deren Gruppe der Decktransformationen isomorph zu $\text{Deck}(Y, X)$ ist. Dennoch ist i. A. der Raum $Y/\text{Deck}(Y, X)$ nicht isomorph zu X . Man hat aber stets ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow p & \searrow \pi & \\ & Y/\text{Deck}(Y, X) & \\ & \swarrow q & \\ & X & \end{array}$$

mit einer Überlagerung $q : Y/\text{Deck}(Y, X) \rightarrow X$, die jedoch kein Isomorphismus zu sein braucht. Wir kommen auf dieses Problem am Ende des Kapitels im Zusammenhang mit sogenannten *Galoisschen Überlagerungen* noch einmal zurück.

Wir spezialisieren jetzt alle diese Aussagen für den Fall, daß Y *einfach zusammenhängend*, d. h. wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ trivial ist. Aufgrund früherer Sätze ist klar:

Definition und Bemerkung. Eine Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ heißt *universell*, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- i) \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.
- ii) Die charakteristische Klasse $C(\tilde{X}, x_0)$ besteht nur aus der trivialen Untergruppe in $\pi_1(X, x_0)$.
- iii) Ist die Homotopie-Klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ eines geschlossenen Weges γ in X nicht Null, so liftet γ nicht zu einem geschlossenen Weg in \tilde{X} .

Ist zusätzlich $\pi_1(X, x_0)$ eine *endliche* Gruppe, so sind diese Bedingungen äquivalent zu:

- iv) Die Blätterzahl der Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist gleich $\text{ord } \pi_1(X, x_0)$.

Satz 23.13 *Es gibt eine (und bis auf Isomorphie von Überlagerungen nur eine) universelle Überlagerung von X .*

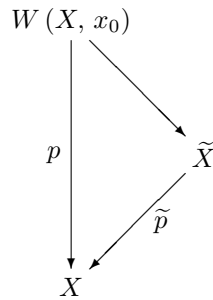
Beweisskizze. Die Konstruktion verläuft sehr ähnlich wie bei der Konstruktion der Riemannschen Fläche zu einem holomorphen Funktionskeim. Betrachte die Gesamtheit $W(X, x_0)$ aller parametrisierten Wege $\gamma : I := [0, 1] \rightarrow X$ in X mit Anfangspunkt x_0 zusammen mit der Projektion

$$p : \begin{cases} W(X, x_0) & \longrightarrow & X \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(1) . \end{cases}$$

$W(X, x_0)$ trägt als Raum stetiger Abbildungen $I \rightarrow X$ eine kanonische Topologie (die sogenannte *kompakt-offene Topologie*), bzgl. derer die Projektion p stetig ist. Wegen iii) in der obigen Definition führt man dann die folgenden Äquivalenzrelation in $W(X, x_0)$ ein:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_2^{-1}\gamma_1 \sim [x_0] \text{ in } \pi_1(X, x_0) .$$

Dann faktorisiert die Projektion $W(X, x_0) \rightarrow X$ über den Quotienten $\tilde{X} := W(X, x_0)/\sim$:



und man zeigt schließlich, daß $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X$ tatsächlich eine universelle Überlagerung von X ist.

Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich sofort mit Satz 6 und den Bemerkungen im Anschluß an Satz 8. \square

Bemerkung. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage spricht man stets von der universellen Überlagerung \tilde{X} . Der Begriff „universell“ erklärt sich aus der Tatsache, daß \tilde{X} über jeder Überlagerung von X liegt, und jede Überlagerung von X erhält man durch Quotientenbildung aus \tilde{X} .

Bevor wir dies genauer ausführen können, ziehen wir erst noch eine Konsequenz aus den Sätzen 10 und 12.

Satz 23.14 *Es sei $\tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X . Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \text{Deck}(\tilde{X}, X).$$

Ist insbesondere X einfach zusammenhängend und operiert G eigentlich diskontinuierlich und frei auf X , so gilt

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

Denn in diesem Fall ist der Normalisator die volle Fundamentalgruppe. \square

Den vorstehenden Satz kann man zur eleganten Bestimmung von Fundamentalgruppen heranziehen.

Beispiele. 1. Die Abbildung $e(t) := e^{2\pi i t}$ liefert eine Überlagerung

$$e: \mathbb{R} \longrightarrow S^1.$$

Da $\pi_1(\mathbb{R})$ trivial ist, muß e die universelle Überlagerung von S^1 darstellen. Die Gruppe der Decktransformationen dieser Überlagerung ist offensichtlich isomorph zu der Gruppe der Translationen in \mathbb{R} um ganzzahlige Werte, und somit ist $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Mit dem gleichen Argument bestimmt man $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

2. Der reell-projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ist der Quotient der n -dimensionalen Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach der Antipoden-Äquivalenzrelation $x' \sim x \iff x' = \pm x$. Mit anderen Worten:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = S^n / \mathbb{Z}_2,$$

wobei die Gruppe \mathbb{Z}_2 erzeugt wird von der Antipoden-Abbildung $x \mapsto -x$. Offensichtlich operiert \mathbb{Z}_2 eigentlich diskontinuierlich und frei auf S^n . Somit trägt $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sogar die kanonische Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, für die die Quotientenabbildung $S^n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Überlagerung ist. Nun ist aber die Sphäre S^n einfach zusammenhängend für $n \geq 2$. Damit ergibt sich mit dem vorigen Satz automatisch

$$\pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2, \quad n \geq 2.$$

Für $n = 1$ ist übrigens $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \cong S^1$ und folglich $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$.

Zur Vervollständigung unseres Glückes fehlt nur noch die explizite Klassifikation der Überlagerungen eines gegebenen Raumes X .

Satz 23.15 *Die Zuordnung*

$$\{p : Y \rightarrow X\} \rightarrow C(Y, x_0)$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge von Isomorphieklassen von unbegrenzten, unverzweigten Überlagerungen von X und der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Die Injektivität dieser Abbildung wurde schon in Satz 7 bewiesen. Zu zeigen bleibt daher nur noch die Surjektivität, d. h. also: Ist $H \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe, so gibt es eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ und einen Punkt $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ mit $p_*\pi(Y, y_0) = H$.

Hierzu benutzt man die universelle Überlagerung $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$ und die Isomorphie $\pi_1(X, x_0) \cong \text{Deck}(\tilde{X}, X)$. Wir können daher die Gruppe H auch als Untergruppe von $\text{Deck}(\tilde{X}, X)$ auffassen. Da letztere eigentlich diskontinuierlich und frei operiert, so tut dies auch H , und wir können den Quotienten \tilde{X}/H bilden. Wie weiter oben schon einmal ausgeführt, erhält man somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \tilde{p} \downarrow & \searrow \pi & \\ & & Y := \tilde{X}/H \\ & \nearrow p & \\ X & & \end{array}$$

mit eindeutig bestimmtem stetigen p . Es ist leicht zu sehen, daß p eine Überlagerung ist, denn H identifiziert Blätter bzgl. \tilde{p} vollständig oder an keiner einzigen Stelle.

Ist ferner γ ein geschlossener Weg in X mit Anfangspunkt x_0 , so wähle man $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$ und $y_0 = \pi(\tilde{x}_0)$. Der Weg γ liftet unter p zu einem geschlossenen Weg in Y mit Anfangspunkt y_0 genau dann, wenn γ unter \tilde{p} zu einem Weg in \tilde{X} liftet mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 und Endpunkt in $H\tilde{x}_0$, also genau dann, wenn die Homotopieklasse $[\gamma] \in H$ liegt. Folglich ist

$$H = p_*\pi_1(Y, y_0). \quad \square$$

Als Konsequenz aus dem Beweis notieren wir noch die

Folgerung 23.16 *Für die universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ ist stets*

$$X \cong \tilde{X}/\text{Deck}(\tilde{X}, X) \cong \tilde{X}/\pi_1(X),$$

und jede andere Überlagerung $Y \rightarrow X$ von X erhält man durch Quotientenbildung von \tilde{X} nach einer Untergruppe $H \subset \pi_1(X)$.

Aufgrund von Satz 15 ist es möglich, in einfachen Fällen alle Überlagerungen eines gegebenen Raumes zu bestimmen.

Beispiele: 1. Ist X einfach zusammenhängend, so existiert bis auf Isomorphie nur die triviale Überlagerung $\text{id} : X \rightarrow X$.

2. Die Untergruppen von $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ sind leicht zu bestimmen. Aus dem Euklidischen Algorithmus

ergibt sich unmittelbar, daß sie von der Form $n\mathbb{Z}$, $n \geq 0$, sind. Der Fall $n = 0$ entspricht natürlich der *universellen* Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, und die Fälle mit $n \geq 1$ werden realisiert durch die konkreten n -blättrigen Überlagerungen

$$\begin{cases} S^1 \longrightarrow S^1 \\ z \longmapsto z^n. \end{cases}$$

von S^1 durch sich selbst.

3. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$ (was z. B. der Fall ist für $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$), so besitzt X nur die universelle und die triviale Überlagerung.

Die *endlichen* Überlagerungen sind einfacher in den Griff zu bekommen; darüber soll an dieser Stelle kurz berichtet werden.

Wir bezeichnen wie üblich mit \mathfrak{S}_n die *symmetrische Gruppe* in n Elementen.

Definition. Eine Untergruppe $G \subset \mathfrak{S}_n$ heißt *transitiv*, falls es für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ein Gruppenelement $\varphi \in G$ gibt mit $\varphi(i) = j$. Ein Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \mathfrak{S}_n$ heißt *transitiv*, falls das Bild im $\alpha \subset \mathfrak{S}_n$ transitiv ist.

Es sei nun $p : Y \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung von X . Wähle $x_0 \in X$ fest und setze $p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_n\}$ mit einer festen Numerierung der Faser über x_0 . Sei weiter eine Homotopieklasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ gegeben. Definiere $\gamma'(i) := j$ für $1 \leq i \leq n$, wenn die Liftung $\tilde{\gamma}$ von γ mit dem Anfangspunkt y_j den Endpunkt y_i besitzt. Da die Liftung eindeutig ist, folgt, daß die Abbildung

$$\gamma' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

injektiv und folglich auch *bijektiv* ist. D. h. also: $\gamma' \in \mathfrak{S}_n$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung und der Unabhängigkeit bei Übergang zu homotopen Wegen ist ebenfalls klar, daß die Abbildung

$$p' : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ [\gamma] \longmapsto \gamma' \end{cases}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus ist. Da Y , wie immer vorausgesetzt, wegweise zusammenhängt, ist p' sogar ein *transitiver* Homomorphismus.

Definition. Wir nennen p' eine *transitive Darstellung* der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ in der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n .

Die ganze vorige Konstruktion hängt natürlich noch von der Numerierung der Faser ab. Haben wir aber zwei solche Numerierungen und vermittelt $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ zwischen diesen beiden, so besitzt p zwei zugeordnete Abbildungen

$$p'_1, p'_2 : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$$

mit

$$p'_2([\gamma]) = \sigma p'_1([\gamma]) \sigma^{-1}.$$

Somit wird durch unsere Konstruktion jeder n -blättrigen Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ eindeutig eine Klasse von *konjugierten* Darstellungen von $\pi_1(X, x_0)$ in \mathfrak{S}_n zugeordnet. - Das Endergebnis läßt sich dann wie folgt zusammenfassen:

Satz 23.17 *Es gibt eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen den (Isomorphieklassen von) n -blättrigen Überlagerungen von X und der Menge der Konjugationsklassen von transitiven Darstellungen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ in der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n .*

Um weitere Anwendungen der allgemeinen Überlagerungstheorie zu erläutern, rufen wir uns den in dieser Vorlesung im Vordergrund stehenden Spezialfall der Riemannschen Flächen ins Gedächtnis. Wir haben gesehen: Für eine beliebige Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ einer Riemannschen Fläche X ist folgendes richtig:

- Y trägt in kanonischer Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche, so daß die Projektion p holomorph und die Gruppe $\text{Deck}(Y, X)$ der Decktransformationen eine Untergruppe der Gruppe $\text{Aut}(Y) \cong \mathcal{O}(Y, Y)$ der biholomorphen Selbstabbildungen von Y ist.

Ähnliches wird aber auch in anderen Kategorien sofort als richtig erkannt. So kann man in der vorstehenden Aussage ohne größere Überlegungen die Riemannschen Flächen durch differenzierbare Mannigfaltigkeiten bzw. komplex-analytische Mannigfaltigkeiten und die holomorphen Abbildungen durch differenzierbare bzw. wieder holomorphe ersetzen. Ein wenig interessanter ist der folgende Satz (siehe hierzu mein Manuskript *Differentialgeometrie II*):

Satz 23.18 *Ist $p : Y \rightarrow X$ eine beliebige Überlagerung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit X , so trägt Y in kanonischer Weise ebenfalls die Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, so daß die Projektion p eine lokale Isometrie und die Gruppe $\text{Deck}(Y, X)$ der Decktransformationen eine Untergruppe der Isometrie-Gruppe $\text{Isom}(Y)$ von Y ist.*

Für die Lie-Theorie ist die folgende Aussage von zentraler Bedeutung:

Satz 23.19 *Es sei X eine (reelle oder komplexe) Liegruppe mit universeller Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Dann trägt auch die Mannigfaltigkeit \tilde{X} die Struktur einer Liegruppe (die nach Auswahl eines Elementes in $p^{-1}(e)$ als Einselement von \tilde{X} eindeutig bestimmt ist, wobei e das Einselement von X bezeichnet), so daß die Projektion p ein (differenzierbarer) Gruppen-Homomorphismus und $\text{Deck}(\tilde{X}, X)$ ein diskreter Normalteiler in \tilde{X} ist.*

Beweisidee. Interessant ist hierbei im Wesentlichen nur die Konstruktion der Multiplikation \tilde{m} auf \tilde{X} . Bezeichnet $m : X \times X \rightarrow X$ die Multiplikation in X , so verlangt die Aussage des Satzes die Existenz einer Abbildung $\tilde{m} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \tilde{X} \\ p \times p \downarrow & & \downarrow p \\ X \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Da $\tilde{X} \times \tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach dem allgemeinen Liftungssatz (bei festgelegtem $e' \in p^{-1}(e)$) genau eine solche Abbildung \tilde{m} mit $\tilde{m}(e', e') = e'$. Man rechnet dann nach, daß damit eine Gruppenstruktur auf \tilde{X} mit Einselement e' erklärt wird, für die alle in dem Satz gemachten Aussagen erfüllt sind. \square

Besonders schön wird die Situation, wenn für eine ganze „Kategorie“ von Objekten eine hinreichend überschaubare Klassifikationsliste der „universellen Objekte“ aufgestellt werden kann. In der Funktionentheorie wissen wir schon Bescheid, auch wenn wir den Beweis erst später führen werden (und das auch nur skizzenhaft).

Satz 23.20 (Uniformierungssatz) *Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist isomorph zu \mathbb{C} , D oder $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.*

Als unmittelbare Folgerung aus der Überlagerungstheorie ergibt sich hieraus:

Satz 23.21 *Jede (zusammenhängende) Riemannsche Fläche X ist isomorph zu einem Quotienten \tilde{X}/G , wobei \tilde{X} gleich \mathbb{C} , gleich dem Einheitskreis D oder der abgeschlossenen Ebene $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ist und die Gruppe $G \subset \text{Aut}(\tilde{X})$ auf \tilde{X} eigentlich diskontinuierlich und frei operiert.*

Bemerkungen. 1. Damit reduziert sich das Problem der Klassifikation der Riemannschen Flächen auf das algebraisch-topologische Problem der Klassifikation der Untergruppen von $\text{Aut}(\tilde{X})$, $\tilde{X} = \mathbb{C}, D, \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, die eigentlich diskontinuierlich und frei operieren. Man beachte,

daß wir die „vollen“ Automorphismengruppen explizit kennen. Man sollte sich aber nicht von diesem schönen Ergebnis täuschen lassen. Es gibt relativ wenige Riemannsche Flächen mit der universellen Überlagerung \mathbb{C} und, wie man sofort einsehen kann, nur eine mit der universellen Überlagerung \mathbb{P}_1 , da alle Automorphismen von \mathbb{P}_1 Fixpunkte besitzen; da es aber unglaublich viele Riemannsche Flächen gibt, haben die „meisten“ den Einheitskreis D als universelle Überlagerung und $\text{Aut}(D)$ besitzt „sehr viele“ Untergruppen des verlangten Typs.

2. Die Gruppe $\text{Aut}(D) \cong \text{Aut}(H) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ kann als Untergruppe von $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ aufgefaßt werden; jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}(D)$ ist damit das Bild einer Untergruppe von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Man nennt die Gruppe G *diskret*, wenn ihr Urbild in $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ diskret bzgl. der von der Vektorraum-Topologie induzierten Relativ-Topologie ist. Ein klassischer Satz von POINCARÉ besagt, daß eine Untergruppe $G \subset \text{Aut}(D)$ genau dann eigentlich diskontinuierlich auf D operiert, wenn sie im vorigen Sinne diskret ist. Die ursprüngliche Definition ist zudem äquivalent zu der folgenden: *Für jede Folge (g_n) paarweise verschiedener Transformationen $g_n \in G$ und jedes Element $z \in H$ besitzt die Folge $g_n(z)$ keinen Häufungspunkt.*

Ein entsprechendes Resultat hat man übrigens auch in der *Differentialgeometrie*: Eine *Raumform* ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Gaußscher Krümmung K (die man dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $K \equiv 0$, $+1$ oder -1 normieren kann).

Satz 23.22 (Killing, Hopf) *Eine einfach zusammenhängende Raumform der Dimension n ist isometrisch zu*

$$\mathbb{R}^n (K \equiv 0), \quad S^n (K \equiv 1), \quad H^n (K \equiv -1).$$

Bemerkung. Hierbei kann der *hyperbolische Raum* H^n , $n \geq 2$, als Menge modelliert werden durch den „Halbraum“ $\{x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$; die *hyperbolische Metrik* auf H^n ist eine Verallgemeinerung der hyperbolischen Metrik auf $D \cong H \subset \mathbb{C}$ im Falle $n = 2$.

Folgerung 23.23 *Jede Raumform ist isomorph zu \tilde{X}/G , wobei $\tilde{X} = \mathbb{R}^n$, S^n oder H^n ist und die Untergruppe $G \subset \text{Isom}(\tilde{X})$ eigentlich diskontinuierlich und frei auf \tilde{X} operiert.*

Besonders wichtig ist der Fall, daß die Raumform $X = \tilde{X}/G$ *kompakt* ist. Man gibt solchen Gruppen bei $\tilde{X} = \mathbb{R}^n$ aus naheliegenden Gründen den folgenden Namen:

Definition. Eine Untergruppe $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ heißt *kristallographisch*, wenn sie eigentlich diskontinuierlich und frei auf \mathbb{R}^n operiert und $X = \mathbb{R}^n/G$ kompakt ist.

Bemerkung. Die Klassifikation der kristallographischen Gruppen für $n = 3$ (und das heißt die mathematische Bestimmung der „Kristalltypen“) in der Mitte des 19. Jahrhunderts war ein erster Triumph der angewandten Gruppentheorie und Auslöser einer Begeisterungswelle für diesen Bereich der Mathematik. Neben dem Fall $n = 2$ der Symmetriegruppen von „Parkettierungen“ der Ebene mit beschränktem Fundamentalebene ist auch der vierdimensionale Fall völlig klassifiziert. Von BIEBERBACH wurde gezeigt, daß die Anzahl solcher Gruppen (bis auf Konjugation) *endlich* ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Die Anzahl ist bis heute nicht bekannt für $n \geq 5$; Abschätzungen zeigen jedoch, daß die Anzahl mit n außerordentlich rapide wächst.

Wir fügen hier noch einige Bemerkungen zur Klassifikation der (komplexen) *Liegruppen* ein. Bekanntlich heißt eine (abstrakte) Gruppe G *einfach*, wenn sie außer dem trivialen Homomorphismus nur Monomorphismen $G \hookrightarrow G'$ zuläßt, wenn also, anders ausgedrückt, G nur die *trivialen Nullteiler* G und $\{e\}$ besitzt²⁰. Leider verträgt sich dieser Begriff bei *Liegruppen* nicht mit dem des einfachen Zusammenhangs: So ist die Gruppe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ nicht einfach in dem gruppentheoretischen Sinne, da sie den nichttrivialen Normalteiler $\{\pm E_2\}$ besitzt, aber einfach zusammenhängend. Dagegen ist die

²⁰Die Gruppentheoretiker behaupten, daß die Klassifikation der *endlichen* einfachen Gruppen mit Arbeiten von einigen Tausend Seiten gegen 1987 im Wesentlichen abgeschlossen wurde.

Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ einfach im gruppentheoretischen Sinne, aber nicht einfach zusammenhängend, da sie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ als universelle Überlagerung besitzt. Man führt daher für Liegruppen eine andere Definition der „Einfachheit“ ein, die für nicht abelsche Liegruppen zu dem folgenden Ergebnis führt:

Definition. Eine nicht abelsche Liegruppe G „ist“ *einfach*, wenn jeder Normalteiler von G (bzgl. der Topologie von G) in G diskret liegt.

Bemerkung. Diese Definition hat zur Konsequenz, daß jeder Liegruppen-Homomorphismus $G \rightarrow G'$ von einer einfachen Liegruppe G in eine andere Liegruppe G' entweder injektiv oder eine Überlagerung ist. Satz 19 impliziert unter anderem, daß jede einfache Liegruppe als universelle Überlagerung wieder eine einfache Liegruppe besitzt.

Beispiel. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sind als Liegruppen einfach.

Bemerkung. Es ist daher nützlich und sinnvoll, eine Klassifikation der einfachen, einfach zusammenhängenden reellen und komplexen Liegruppen zu versuchen. In der Tat gibt es eine solche Klassifikation, die im komplexen Fall besonders einfach wird. Zu ihnen gehören z. B. die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, die *Spin*-Gruppen und die berühmten Gruppen mit den Namen E_6, E_7, E_8 .

Wir kommen zum Abschluß dieses Kapitels noch einmal auf ein Problem der allgemeinen Überlagerungstheorie zurück, das im Falle von Riemannschen Flächen eine überraschende Brücke zur *Algebra*, genauer zur Theorie der *algebraischen Körpererweiterungen* und speziell zur *Galois-Theorie* schlägt: Mit Folgerung 16 erhebt sich die Frage, wann die Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ selbst durch Quotientenbildung (nach der Gruppe der Decktransformationen) entsteht.

Definition. Eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ heißt *normal* (auch *regulär* oder *Galoissch*), wenn in dem kanonischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Y & & \\
 \downarrow p & \searrow \pi & \\
 & Y/\mathrm{Deck}(Y, X) & \\
 & \swarrow q & \\
 X & &
 \end{array}$$

die induzierte Überlagerung q 1-blättrig, also ein Homöomorphismus ist.

Es sollte dem Leser nicht schwer fallen, den folgenden Satz sich selbst aus unseren früheren Überlegungen herzuleiten.

Satz 23.24 *Eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ ist genau dann normal, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist :*

- i) *Die charakteristische Gruppe $G(Y, y_0)$ ist ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$.*
- ii) *Die charakteristische Klasse $C(Y, x_0)$ besteht aus genau einer Untergruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.*
- iii) *Für jeden beliebigen geschlossenen Weg in X ist entweder jede oder keine Liftung nach Y geschlossen.*
- iv) *Die Gruppe $\mathrm{Deck}(Y, X)$ der Decktransformationen operiert transitiv auf der Faser $p^{-1}(x_0)$.*

Ist dies der Fall, so ist die Gruppe $\text{Deck}(Y, X)$ der Decktransformationen kanonisch isomorph zu der Quotientengruppe $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(Y, y_0)$.

Beispiele. Normal sind:

1. Die universelle Überlagerung.
2. Alle Überlagerungen von X , wenn $\pi_1(X)$ abelsch ist, wie z. B. im Fall $X = S^1$ bzw. $X = \mathbb{C}^*$.
3. Alle zweiblättrigen Überlagerungen (denn Untergruppen vom Index 2 sind stets Normalteiler).

Als *Anwendung* dieser Begriffsbildung betrachten wir eine nicht konstante holomorphe Abbildung $f : Y \rightarrow X$ von Riemannschen Flächen, von der wir zusätzlich annehmen, daß sie im Sinne der Topologie *eigentlich* ist, also die Eigenschaft besitzt, daß die Urbilder von kompakten Mengen in X unter f kompakte Teilmengen von Y sind. Solche Abbildungen sind bekanntlich *abgeschlossen*; hierzu genügt für allgemeinere topologische Räume, daß X und Y *lokal kompakt* sind, denn in solchen Räumen ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist. - Man kann in dieser Situation leicht beweisen:

Lemma 23.25 *Es sei $f : Y \rightarrow X$ eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen (zusammenhängenden) Riemannschen Flächen. Dann ist f surjektiv, und für alle $x \in X$ ist die Faser $f^{-1}(x)$ endlich. Zu jeder Umgebung V der Faser gibt es eine Umgebung U von x , so daß $f^{-1}(U) \subset V$. Die Menge $B \subset Y$ der Verzweigungspunkte von f ist, ebenso wie die Menge $A := f(B) \subset X$ ihrer kritischen Punkte, abgeschlossen und diskret. Die Einschränkung $f|_{Y \setminus B} : Y \setminus B \rightarrow X \setminus A$ ist eine endlich-blättrige unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung.*

Den *Beweis*²¹ überlassen wir dem Leser. □

Es gilt übrigens auch eine *Umkehrung* in der folgenden Form:

Lemma 23.26 *Es sei A eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge einer Riemannschen Fläche X , und $f' : Y' \rightarrow X' := X \setminus A$ sei eine endlich-blättrige unbegrenzte unverzweigte Überlagerung. Dann existiert eine Riemannsche Fläche Y , in der Y' als offener Teil liegt, so daß $Y \setminus Y'$ eine diskrete Teilmenge von Y ist, und eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Abbildung $f : Y \rightarrow X$ mit*

$$f|_{Y'} = f'.$$

Von nun an seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 25 gewählt. Durch Liften meromorpher Funktionen $\mathcal{M}(X) =: K \ni g \mapsto g \circ f \in L := \mathcal{M}(Y)$ gewinnt man einen Körperhomomorphismus $K \rightarrow L$, der wegen des Identitätssatzes injektiv ist. Wir können und werden daher K stets als *Unterkörper* von L auffassen.

Satz 23.27 *Die Körpererweiterung $L : K$ ist endlich algebraisch. Der Grad der Erweiterung ist höchstens gleich der Blätterzahl der Überlagerung $Y' \rightarrow X'$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jede meromorphe Funktion h auf Y einer algebraischen Gleichung vom Grad n über dem Körper K genügt, wenn n die Blätterzahl ist. Jeder Punkt $x \in X'$ besitzt eine Umgebung $U \subset X'$, die gleichmäßig überlagert ist durch n Blätter V_1, \dots, V_n , auf deren disjunkter Vereinigung $\bigsqcup V_j$ die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n auf kanonische Weise operiert. Jede meromorphe Funktion g definiert durch Einschränkung meromorphe Funktionen g_j auf V_j , die man auch als meromorphe Funktionen auf U ansehen kann. Die elementar-symmetrischen Funktionen

$$\sigma_1(g) := g_1 + g_2 + \dots + g_n, \quad \sigma_2(g) := \sum_{1 \leq j < k \leq n} g_j g_k, \dots, \sigma_n(g) := g_1 g_2 \dots g_n$$

²¹Man findet ihn und Beweise zu einigen anderen Aussagen in diesem Abschnitt z. B. bei O. FORSTER, *Riemannsche Flächen*.

sind ebenfalls meromorph auf V und unabhängig von der Numerierung der Blätter. Damit sind sie wohldefinierte meromorphe Funktionen auf X' . Läßt sich g holomorph in alle Punkte einer Faser $f^{-1}(a)$, $a \in A$, fortsetzen, so sind die σ_j beschränkt in a und lassen sich infolgedessen nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph nach a fortsetzen. Ist im Allgemeinfall z eine lokale holomorphe Koordinate um a , so verschwindet $z \circ f$ in jedem Punkt der Faser $f^{-1}(a)$, so daß für einen geeigneten Exponenten $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $(z \circ f)^k g$ in jeden Punkt der Faser holomorph fortgesetzt werden kann. Dann lassen sich aber auch die elementar-symmetrischen Funktionen zumindest meromorph nach a fortsetzen.

Wir setzen nun

$$P(T) := T^n - \sigma_1(g)T^{n-1} + \cdots \pm \sigma_n(g) \in K[T].$$

Lokal in den Umgebungen U wie oben ist

$$P(T) = (T - g_1) \cdots (T - g_n)$$

und folglich $P(g) \equiv 0$ auf Y' und damit auch auf Y wegen des Identitätssatzes. \square

Bemerkung. Gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{M}(Y)$ und einen Punkt $x \in X \setminus A$, so daß die Funktionswerte $h(y_j)$ an den Stellen y_j über x paarweise verschieden sind, so ist die Körpererweiterung tatsächlich gleich der Blätterzahl.

Bemerkung. Man kann auch umgekehrt zeigen, daß es zu jeder *endlichen* Erweiterung L eines Funktionenkörpers $K := \mathcal{M}(X)$ einer Riemannschen Fläche X eine weitere Riemannsche Fläche Y mit L als Funktionenkörper gibt und eine (endliche, verzweigte) Überlagerung $Y \rightarrow X$, die die Erweiterung $L : K$ „geometrisch realisiert“. Nach dem *Satz vom primitiven Element* aus der Algebra entsteht L aus K durch Adjunktion eines einzigen Elementes $h \in L$, das algebraisch über K ist. Das Minimalpolynom

$$P(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n \in K[T]$$

von h über $K = \mathcal{M}(X)$ besitzt dann eine nicht triviale Diskriminante, so daß das Polynom

$$P_x(T) = T^n + a_1(x)T^{n-1} + \cdots + a_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

n paarweise verschiedene komplexe Nullstellen hat für alle $x \in X$ mit Ausnahme einer diskreten Teilmenge $A \subset X$ von Stellen. Die Menge

$$Y' := \{(x, y) \in (X \setminus A) \times \mathbb{C} : P_x(y) = 0\}$$

zusammen mit der kanonischen Projektion $Y' \rightarrow X \setminus A$ ist eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerung, die sich nach Lemma 26 zu einer verzweigten Überlagerung $Y \rightarrow X$ fortsetzen läßt.

Wir werden später noch sehen, daß jede *kompakte* Riemannsche Fläche realisiert werden kann als eine endliche verzweigte Überlagerung von \mathbb{P}_1 mit dem Funktionenkörper $\mathbb{C}(z)$, also der rein transzendenten Erweiterung des Körpers \mathbb{C} vom Transzendenzgrad 1. - Es ergibt sich damit:

Satz 23.28 *Die Funktionenkörper der kompakten Riemannschen Flächen sind genau die Erweiterungen des Körpers \mathbb{C} vom Transzendenzgrad 1, also die endlichen Erweiterungen des Körpers $\mathbb{C}(z)$ der rationalen Funktionen.*

Wir kommen zum Abschluß des Kapitels auf die Begriffsbildung einer *normalen* oder *Galoisschen* Überlagerung zurück.

Definition und Bemerkungen. Eine Körpererweiterung $L : K$ heißt *Galoissch*, wenn die *relative* Automorphismengruppe

$$G := \text{Aut}(L : K) := \{g \in \text{Aut}(L) : g(\kappa) = \kappa \text{ für alle } \kappa \in K\}$$

endlich und $K \subset L$ gleich dem Fixkörper

$$L^G = \{ \lambda \in L : g(\lambda) = \lambda \text{ für alle } g \in G \}$$

ist. Man nennt dann G auch die *Galois-Gruppe* der Erweiterung und schreibt

$$\text{Gal}(L : K) := \text{Aut}(L : K).$$

Diese Eigenschaft läßt sich rein *körper-theoretisch* umformulieren: Eine Körpererweiterung $L : K$ ist genau dann Galoissch, wenn sie *endlich-algebraisch*, *separabel* und *normal* ist. Separabilität ist immer in Charakteristik Null erfüllt und für uns daher irrelevant. *Normalität* einer Erweiterung $L : K$ bedeutet, daß jedes irreduzible Polynom $P \in K[T]$, das in L eine Nullstelle besitzt, über L schon vollständig in Linearfaktoren zerfällt. - Der *Hauptsatz der Galois-Theorie* besagt:

Satz 23.29 *Es sei $L : K$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L : K)$. Dann besteht eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen den Untergruppen Γ von G und den Zwischenkörpern $K \subset \Lambda \subset L$, die wie folgt definiert ist :*

$$\Gamma \mapsto \Lambda := \{ \lambda \in L : \gamma(\lambda) = \lambda \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \}, \quad \Lambda \mapsto \Gamma := \{ g \in G : g(\lambda) = \lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \}.$$

Die Erweiterung $L : \Lambda$ ist stets Galoissch mit Galois-Gruppe Γ . Die Erweiterung $\Lambda : K$ ist genau dann Galoissch, wenn Γ ein Normalteiler in G ist, und dann ist die Galois-Gruppe von $\Lambda : K$ kanonisch isomorph zu der Quotientengruppe G/Γ .

In dem Fall der endlichen Körpererweiterungen $L = \mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X) = K$ von Funktionenkörpern Riemannscher Flächen operiert offensichtlich die Gruppe $\text{Deck}(Y, X) \cong \text{Deck}(Y', X')$ der Decktransformationen auf L durch $\sigma g := g \circ \sigma^{-1}$, und diese Operation hält den Unterkörper K fest. Also hat man einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Deck}(Y, X) \rightarrow \text{Aut}(L : K).$$

Der zentrale Satz ist in diesem Zusammenhang der folgende.

Satz 23.30 *Die Abbildung*

$$\text{Deck}(Y, X) \rightarrow \text{Aut}(L : K)$$

ist stets ein Gruppenisomorphismus. Die Überlagerung $Y \rightarrow X$ ist genau dann Galoissch in dem Sinne, daß die unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung $Y' \rightarrow X'$ Galoissch ist, wenn $L : K$ eine Galoissche Körpererweiterung ist.

Ohne Beweis. □

Hinweis. Als weiterführende Literatur zu dem gesamten vorliegenden Kapitel empfehlen wir:

R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*,

J. Wolf: *Spaces of constant curvature*,

S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*.

Anhang: Gruppenoperationen

Wir besprechen in diesem Anhang die *allgemeine* Theorie der *Gruppenaktionen* oder *Gruppenwirkungen*. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und G eine Gruppe. Wir wollen die Aussage präzisieren, daß G als eine *Gruppe von Automorphismen* auf X wirkt.

Definition. Eine (*Links-*) *Operation* von G auf X (oder *Operation von links*) ist eine Abbildung

$$\begin{cases} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{cases}$$

mit $e \cdot x = x$ und $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ für alle $x \in X$ und alle $g_1, g_2 \in G$.

Entsprechend ist eine *Operation von rechts* eine Abbildung

$$\begin{cases} X \times G \longrightarrow X \\ (x, g) \longmapsto x \cdot g \end{cases}$$

mit $x \cdot e = x$ und $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$.

Beispiel. Bezeichnet $\text{Aut}(X)$ die Menge aller *bijektiven* Abbildungen $\varphi : X \rightarrow X$ mit der Aktion

$$\begin{cases} \text{Aut}(X) \times X \longrightarrow X \\ (\varphi, x) \longmapsto \varphi(x), \end{cases}$$

so ist die Bedingung für eine *Linksoperation* erfüllt (mit $e = \text{id}_X$), wenn man die Verknüpfung in $\text{Aut}(X)$ durch

$$\varphi_1 \varphi_2 := \varphi_1 \circ \varphi_2$$

definiert. Wir werden i. f. stets *diese* Gruppenstruktur von $\text{Aut}(X)$ (auch für Untergruppen derselben) zu Grunde legen.

Bemerkung. Eigentlich ist diese Multiplikationsvorschrift unnatürlich, da man sich in unserem Kulturkreis bei dem Produkt auf der linken Seite vorstellt, daß man erst φ_1 nimmt und dann mit φ_2 multipliziert, während man auf der rechten Seite zuerst φ_2 operieren läßt und danach φ_1 . Dies ist aber, wie wir sogleich sehen werden (siehe die anschließende Definition), im Prinzip unerheblich und soll daher nicht weiter vertieft werden, da eine weitere Diskussion eher zu Verwirrung als zur Erhellung des Lesers führen mag. Entscheidend ist die Festlegung auf die Multiplikationsregel $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \varphi_2 := \varphi_1 \circ \varphi_2$ in $\text{Aut}(X)$.

Im Prinzip kann man sich auf *Linksoperationen* beschränken. Dies folgt aus dem nachstehenden Lemma. Da aber oft Rechts- und Linksoperationen derselben Gruppe gleichzeitig nebeneinander auftreten, und zwar in natürlicher Weise, sollte man beide Begriffe zur Hand haben. - Wir geben zuerst eine

Definition. Ist G eine Gruppe mit Multiplikation $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, so wird auf der G unterliegenden Menge $|G|$ durch $(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2 := g_2 \cdot g_1$ ebenfalls eine Gruppenstruktur erklärt. Wir schreiben für diese Gruppe i. A. kurz G^{op} .

Lemma 23.31 *Jede Links- (bzw. Rechts-) Operation von G auf X entspricht in eindeutiger Weise einer Rechts- (bzw. Links-) Operation von G^{op} .*

Beweis. Es bezeichne $*$ die Gruppenverknüpfung auf G^{op} , also $g_2 * g_1 = g_1 \cdot g_2$, $g_1, g_2 \in |G| = |G^{\text{op}}|$. Dann ist das Einselement $e \in G$ auch neutral in G^{op} , und ist eine Linksoperation $(g, x) \mapsto g \cdot x$ von $G \times X$ gegeben, so definiere man $X \times G^{\text{op}} \rightarrow X$ durch $x * g = g \cdot x$. Es gilt dann $x * e = e \cdot x = x$ und, wie gewünscht,

$$x * (g_1 * g_2) = (g_1 * g_2) \cdot x = (g_2 g_1) x = g_2 (g_1 x) = (x * g_1) * g_2 . \quad \square$$

Bemerkung. Will man also $\text{Aut}(X)$ auf X von *rechts* operieren lassen, so muß man eigentlich genauer $(\text{Aut}(X))^{\text{op}}$ betrachten, d. h. die Menge $\text{Aut}(X)$ mit der Verknüpfung $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ versehen, die wir oben als die natürlichere apostrophiert haben.

Bemerkung. Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus von G nach G^{op} . Will man aus einer G -Linksoperation eine G -Rechtsoperation machen, so muß man folglich

$$x * g := g^{-1}x$$

setzen. Es ist von daher nicht verwunderlich, daß beim Zusammentreffen von Operationen verschiedener „Händigkeit“ und dem Bemühen, sie auf eine Seite zu ziehen, die Inversenbildung auf natürliche Weise ins Spiel kommt.

Die Operation von $\text{Aut}(X)$ auf X ist grundlegend für alle Gruppenoperationen. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 23.32 *Es sei $G \times X \rightarrow X$ eine Linksoperation. Dann wird für jedes $g \in G$ durch*

$$\varphi_g(x) = gx$$

ein Element $\varphi_g \in \text{Aut}(X)$ definiert, und die Abbildung

$$(*) \quad \varphi : \begin{cases} G \longrightarrow \text{Aut}(X) \\ g \longmapsto \varphi_g \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismus $()$ eine Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ durch $(g, x) \mapsto \varphi_g(x) =: g \cdot x$.*

Beweis. Es gilt für alle $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$:

$$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) ,$$

also $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Außerdem ist $\varphi_e = \text{id}_X$. Somit ist insbesondere

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_{g^{-1}g} = \varphi_e = \text{id}_X ,$$

d. h. $\varphi_g \in \text{Aut}(X)$ und $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. Der Rest ergibt sich von selbst. □

Bemerkung. Rechtsoperationen von G auf X entsprechen nach demselben Muster Gruppenhomomorphismen

$$G \longrightarrow (\text{Aut}(X))^{\text{op}} \quad \text{oder} \quad G^{\text{op}} \longrightarrow \text{Aut}(X) .$$

Operationen von G auf X sind daher nichts anderes als *Darstellungen* der Gruppe G in $\text{Aut}(X)$ bzw. $(\text{Aut}(X))^{\text{op}}$.

Eine Gruppe G operiert auf sich selbst in vielfältiger Weise. Man hat z. B. die Multiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ und kann diese als Abbildungen

$$G \times |G| \longrightarrow |G| \quad \text{bzw.} \quad |G| \times G \longrightarrow |G|$$

auffassen, die man sofort als Links- bzw. Rechtsoperation von G auf $|G|$ entlarvt. Im ersten Fall ist dann für $g \in G$, $x \in |G|$:

$$\varphi_g(x) = gx = \gamma_g(x) , \quad \text{also} \quad \varphi_g = \gamma_g$$

die *Linkstranslation* mit g , und entsprechend ist im zweiten Fall die zugeordnete Abbildung die *Rechtstranslation* $\delta_{g^{-1}}$ mit g . Schreibt man die *Konjugation* in der Form $|G| \times G \rightarrow |G|, (x, g) \mapsto g^{-1} x g$, so ist auch dies eine Operation (von rechts). Sie wird eine Operation von links, wenn man stattdessen $(g, x) \mapsto g x g^{-1}$ betrachtet.

Hat nun X noch mehr Struktur, so wird man verlangen, daß die Abbildung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ ihr Bild in einer geeigneten Untergruppe von $\text{Aut}(X)$ hat. Ist z. B. X ein *topologischer* Raum, so sagt man, G operiere auf X vermöge $G \times X \rightarrow X$ durch *Homöomorphismen*, wenn $\varphi(G) \subset C^0(X, X)$, oder entsprechend - bei einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X - durch *Diffeomorphismen*, wenn $\varphi(G) \subset C^\infty(X, X)$, und schließlich, bei einem Vektorraum E , *linear*, wenn $\varphi(G) \subset \text{GL}(E)$. Nun kann aber auch G noch mehr Struktur besitzen, und man möchte dann gegebenenfalls erreichen, daß die Abhängigkeit des Automorphismus φ_g von g noch eine Rolle spielt. Dies drückt sich am besten durch die ursprüngliche Definition aus.

Ist z. B. die Gruppe G selbst ein *topologischer Raum*, so macht es Sinn zu verlangen, daß die beiden Abbildungen

$$\left\{ \begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ g \longmapsto g^{-1} \end{array} \right.$$

stetig sind. (Dies impliziert insbesondere, daß G auf sich selbst von links durch Multiplikation operiert). Ist dies der Fall, so heißt G eine *topologische Gruppe*. Ist G selbst sogar eine reell-analytische oder komplex-analytische Mannigfaltigkeit und sind die obigen Abbildungen analytisch, so heißt G eine (reelle oder komplexe) *Liegruppe*.

Definition. Hat man für eine *Liegruppe* G und eine *Mannigfaltigkeit* X eine *differenzierbare* Linksoperation $G \times X \rightarrow X$, so sagt man, G operiere als *Liegruppe* (oder *differenzierbar*) auf X . Insbesondere ist dann $\varphi_g \in C^\infty(X, X)$ für alle $g \in G$. Aber man hat zusätzlich noch differenzierbare Abhängigkeit von $g \in G$!

Ist nun wieder $G \times X \rightarrow X$ eine beliebige Linksoperation, so hat man eine natürliche Äquivalenzrelation auf X :

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G \text{ mit } x_2 = g \cdot x_1.$$

Die Äquivalenzklassen $[x]$ sind dann die *Bahnen*

$$[x] := Gx = \{y = g \cdot x : g \in G\}$$

eines Elements x unter der Aktion von G . Man nennt $[x] = Gx$ auch den *Orbit* von x unter der Aktion von G , und

$$G \backslash X := X/G \sim = \{[x] : x \in X\}$$

den *Bahnenraum* oder *Orbitraum* von X nach G . Hat man eine Rechtsoperation, so bezeichnet man die Bahnen sinnvollerweise mit xG und den Bahnenraum mit X/G .

Beispiel. Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so liefert die natürliche *Links*-Wirkung $H \times |G| \rightarrow |G|$ von H auf G durch Multiplikation die Bahnen Hx , die man in der Gruppentheorie als *Rechts*-Nebenklassen bezeichnet. Somit ist in diesem Spezialfall

$$H \backslash G = \{Hx : x \in G\}.$$

Entsprechend ist G/H die Menge der *Links*-Nebenklassen.

Für jede Bahn Gx ist die Abbildung $G \rightarrow Gx, g \mapsto gx$, surjektiv nach Definition. Man bilde nun $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Wir sehen schnell, daß $G_x \subset G$ eine *Untergruppe* von G ist: Für $g \in G_x$ folgt aus $g \cdot x = x$ sofort $g^{-1} \cdot x = g^{-1}(g \cdot x) = e \cdot x = x$, also $g^{-1} \in G_x$. Entsprechend ist für $g_1, g_2 \in G_x$ auch $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$, also $g_1 g_2 \in G_x$. Damit ist G_x tatsächlich

eine Untergruppe von G .

Definition. G_x heißt die *Stabilisatorgruppe* oder *Isotropiegruppe* von G im Punkte $x \in X$.

Satz 23.33 *Liegen x_1 und x_2 in derselben Bahn, so sind G_{x_1} und G_{x_2} in G konjugiert, insbesondere isomorph. Man hat für alle $x \in X$ eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der Linksnebenklassen G/G_x und der Bahn Gx .*

Beweis. Es gelte $x_1G \sim x_2$, also $x_2 = h \cdot x_1$, $h \in G$. Ist dann $g \in G_{x_1}$, so ist

$$(hg h^{-1}) \cdot x_2 = (hg) \cdot x_1 = h \cdot (g x_1) = h \cdot x_1 = x_2,$$

also $hg h^{-1} \in G_{x_2}$. Dieses Argument funktioniert auch in der umgekehrten Richtung, so daß

$$h G_{x_1} h^{-1} = G_{x_2}.$$

Ist weiter $\bar{g} = g G_x \in G/G_x$, also $\bar{g} = \{gh : h \in G_x\}$, so gilt wegen

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x,$$

daß die Abbildung $G \rightarrow Gx$ über die (surjektive) Quotientenabbildung $G \rightarrow G/G_x$ faktorisiert. Somit gewinnen wir eine Abbildung

$$\begin{cases} G/G_x \longrightarrow Gx \\ \bar{g} \longmapsto gx, \end{cases}$$

die automatisch surjektiv ist. Sie ist aber auch injektiv: Ist nämlich $g_1 x = g_2 x$, so folgt

$$(g_1^{-1} g_2) \cdot x = g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = g_1^{-1} \cdot (g_1 x) = e \cdot x = x,$$

also $g_1^{-1} g_2 \in G_x$, d. h. $g_2 \in g_1 G_x$ und damit $\bar{g}_2 = \bar{g}_1$. \square

Die triviale Operation $G \rightarrow \{\text{id}_X\} \subset \text{Aut}(X)$ zeigt, daß Gruppenoperationen sehr „ineffektiv“ sein können.

Definition und Bemerkung. Eine Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ heißt *effektiv*, wenn $g \cdot x = x$ für alle $x \in X$ zur Folge hat, daß $g = e$. Man sieht unmittelbar, daß diese Bedingung zu der *Injektivität* der kanonischen Abbildung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ äquivalent ist. Es ist somit klar, daß man aus *jeder* Gruppenoperation von G auf X eine *effektive* Operation von $\bar{G} := G/\ker \varphi$ (mit den gleichen Bahnen) machen kann.

Offensichtlich liegt eine spezielle Situation vor, wenn stets $G_x = \{e\}$ ist, d. h. wenn $g \cdot x = x$ nur für $g = e$ möglich ist.

Definition. Die Operation $G \times X \rightarrow X$ heißt *frei* (oder genauer: *fixpunktfrei*), wenn für alle $x \in X$ und $g \in G$ aus $g \cdot x = x$ folgt, daß $g = e$.

Beispiel. Ist $X = |G|$ und $G \times X \rightarrow X$ die Operation von G durch Linkstranslation auf sich selbst, d. h.

$$(g, x) \longmapsto gx,$$

so gilt $g \cdot x = x$ für ein $x \in X = |G|$ genau dann, wenn $g = e$. Also ist die Linkstranslation, ebenso wie die Rechtstranslation, eine *freie* Operation.

Bemerkung. Ist $G \times X \rightarrow X$ eine Operation von G auf X , und ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so wird hierdurch offensichtlich eindeutig eine Operation $H \times X \rightarrow X$ induziert. Ist die ursprüngliche Operation frei, so auch die von H .

Beispiel. Es sei $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$, und $\Omega := \{n_1 + n_2\tau : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Dann operiert die Gruppe Ω auf \mathbb{C} vermöge $(\omega, z) \mapsto z + \omega$, $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$. Man sieht sofort, daß Ω frei auf \mathbb{C} operiert.

Im folgenden Teil dieses Anhangs bezeichne X eine topologische Mannigfaltigkeit und $\text{Aut}(X)$ die Gruppe ihrer Homöomorphismen. Ist $G \rightarrow \text{Aut}(X)$ eine Rechts-Operation der Gruppe G auf X , so können wir uns fragen, unter welchen Voraussetzungen der mit der Quotienten-Topologie versehene Quotientenraum X/G wieder eine topologische Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. - Eine erste einfache Antwort gibt

Satz 23.34 *X sei eine n -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, und die endliche Gruppe G operiere (durch Homöomorphismen) frei auf X . Dann ist die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerungsabbildung. Insbesondere ist π lokal topologisch und damit der Quotientenraum X/G ebenfalls eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Der Beweis wird weiter unten unter schwächeren Voraussetzungen erbracht. □

Bemerkung und Beispiel. Operiert die endliche Gruppe nicht fixpunktfrei, so ist der Quotient X/G i. A. keine Mannigfaltigkeit. So operiert die Gruppe \mathbb{Z}_2 durch ihren Erzeuger σ auf \mathbb{R} vermöge der Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Der Quotientenraum \mathbb{R}/\mathbb{Z}_2 ist homöomorph zu der abgeschlossenen rechten Halbachse \mathbb{R}_+ , und diese besitzt offensichtlich nicht die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit, da der Ursprung kein Mannigfaltigkeitspunkt sein kann.

Bei RIEMANNschen Flächen und holomorpher Operation der endlichen Gruppe G ist die Situation allerdings besser: Läßt man den Erzeuger σ von \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{C} durch $z \mapsto -z$ operieren, so ist der Quotient \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 selbst wieder isomorph zu \mathbb{C} und die kanonische Projektion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{C}$ ist nichts anderes als die Abbildung $z \mapsto w = z^2$, also eine verzweigte Überlagerung. Man kann leicht zeigen, daß jede endliche Gruppe von biholomorphen Automorphismen auf einer Riemannschen Fläche in einem Fixpunkt einen einzigen Erzeuger besitzt, der bzgl. einer geeigneten Karte operiert wie $z \mapsto \zeta_k z$ mit einer k -ten Einheitswurzel ζ_k . Entsprechend den vorigen Bemerkungen ist dann der Quotient lokal gegeben durch die verzweigte Überlagerung $z \mapsto w = z^k$. - Dies alles zusammengenommen macht den folgenden Satz zumindest plausibel.

Satz 23.35 *Es sei X eine Riemannsche Fläche, auf der die endliche Gruppe G durch biholomorphe Automorphismen von rechts wirkt. Dann trägt der Quotient X/G in kanonischer Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche, für die die Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ holomorph ist. π ist damit eine verzweigte Überlagerung. π ist genau dann unverzweigt, wenn G fixpunktfrei operiert.*

Bemerkung. Dieser Satz ist im Komplexen an die Dimension 1 gebunden! I. A. besitzen schon Quotienten \mathbb{C}^n/G nach endlichen Untergruppen G von $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ Singularitäten, wenn $n \geq 2$ ist.

Die vorigen Sätze sind nicht stark genug, um schon die einfache Quotientenbildung von \mathbb{C} nach einem Gitter Ω abzudecken. Wir benötigen aus diesem Grunde eine Abschwächung der Voraussetzung der Endlichkeit der Gruppe G . Wir ersetzen sie durch einen Begriff, der als lokale Endlichkeit umschrieben werden könnte. Historisch hat sich eine andere Bezeichnung durchgesetzt.

Definition. Die Gruppe G operiert eigentlich diskontinuierlich (oder kurz auch nur diskontinuierlich) auf (dem Hausdorffraum) X , wenn für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Menge

$$\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

Bemerkungen. 1. Endliche Gruppen operieren immer eigentlich diskontinuierlich.

2. Umgekehrt operieren nur die endlichen Gruppen eigentlich diskontinuierlich auf kompakten Räumen X .

3. Wählt man speziell $K = \{x\}$ für einen Punkt $x \in X$, so impliziert die vorige Definition die Endlichkeit der Standgruppen G_x . Außerdem ist notwendig jede Bahn Gx lokal endlich, d. h. für jedes Kompaktum $K \subset X$ ist $Gx \cap K$ eine endliche Menge.

4. Sind K und L Kompakta in X , so sieht man durch Anwendung der Definition auf die Vereinigung $K \cup L$ sofort, daß diese auch äquivalent ist zu der Endlichkeit der Mengen

$$\{g \in G : g(K) \cap L \neq \emptyset\}.$$

Ein erster Hinweis auf die Nützlichkeit dieser Begriffsbildung ist das folgende

Lemma 23.36 *Der Quotient eines lokal kompakten Hausdorffraumes nach einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe ist wieder hausdorffsch.*

Beweis. Es seien x_1, x_2 zwei Punkte in X , deren Bilder unter der Projektionsabbildung $\pi : X \rightarrow X/G$ verschieden sind. Wir bezeichnen mit K_j eine kompakte Umgebung von x_j , $j = 1, 2$, und setzen $K = K_1 \cup K_2$. Nach Voraussetzung ist $M := \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ eine endliche Teilmenge von G . Wegen $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ ist dann notwendig $g(x_1) \neq x_2$ für alle $g \in M$. Dann gibt es aber offene Umgebungen U_j von x_j , $j = 1, 2$, so daß $g(U_1) \cap U_2 = \emptyset$ für alle $g \in M$, und wählt man, was möglich ist, sogar $U_1 \cup U_2 \subset K$, so ist $g(U_1) \cap U_2 = \emptyset$ für alle $g \in G$. Also sind die Mengen $V_j := \pi(U_j)$, $j = 1, 2$, disjunkt in X/G . V_j enthält aber $\pi(x_j)$ und ist offen in der Relativtopologie, da

$$\pi^{-1}(V_j) = \pi^{-1}(\pi(U_j)) = \bigcup_{g \in G} g(U_j)$$

offen in X ist. □

Um zu unserem eigentlichen Ziel zu gelangen, müssen wir zeigen, daß jeder Punkt eines Raumes, auf dem eine Gruppe von Homöomorphismen eigentlich diskontinuierlich operiert, „gute“ Umgebungen besitzt.

Definition und Bemerkung. Die Gruppe G operiere auf einem Hausdorffraum durch Homöomorphismen. Eine Umgebung $U = U(x)$ eines Punktes $x \in X$ heißt *privilegiert* (bzgl. der Operation), wenn sie invariant unter der Standgruppe G_x ist und $g(U) \cap U$ leer ist für alle $g \in G \setminus G_x$. Insbesondere ist dann lokal um x der Quotientenraum X/G „gleich“ dem Quotienten U/G_x .

Lemma 23.37 *Operiert die Gruppe G eigentlich diskontinuierlich auf dem lokal kompakten Hausdorffraum X , so besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis von privilegierten Umgebungen.*

Beweis. Es sei K eine offene Umgebung von x mit kompaktem Abschluß. Dann ist nach Voraussetzung die Menge $M := \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ endlich. Da X hausdorffsch ist, gibt es eine offene Umgebung $W \subset K$ und offene Umgebungen W_g von $g(x)$ für alle $g \in M \setminus G_x$, die W nicht treffen. Dann ist

$$V := W \cap \bigcap_{g \in M \setminus G_x} g^{-1}(W_g) \subset K$$

eine offene Umgebung von x , die mit $g(V)$ einen leeren Durchschnitt hat für alle $g \in M \setminus G_x$, da $V \cap g(V) \subset W \cap W_g = \emptyset$ für alle $g \in M \setminus G_x$ und $V \cap g(V) \subset K \cap g(K) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus M$. Dann ist aber

$$U := \bigcap_{g \in G_x} g(V) \subset K$$

eine G_x -invariante offene Umgebung von x . Da K beliebig klein gewählt werden kann, bilden die so gewonnenen offenen Umgebungen eine *Umgebungsbasis* von x . □

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts kann nun formuliert und bewiesen werden.

Satz 23.38 X sei ein lokal kompakter Hausdorffraum, und die Gruppe G operiere eigentlich diskontinuierlich und frei durch Homöomorphismen auf X . Dann ist die natürliche Quotientenabbildung

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung mit Blätterzahl $\text{card } G$. Insbesondere ist X/G eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn dies auch für X zutrifft.

Beweis. Es sei $x \in X$ fest vorgegeben und $U = U(x) \subset X$ eine privilegierte Umgebung. Wir setzen $V := \pi(U)$; V ist eine offene Umgebung von $\pi(x)$ in X/G . Da aber G_x nach Voraussetzung trivial ist, ist die Einschränkung $\pi|_U : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Es ist leicht zu sehen, daß die Umgebung V sogar gleichmäßig überlagert wird: $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} g(U)$. \square

Bemerkung. Es gilt auch das Analogon zu Satz 38 für eigentlich diskontinuierliche Gruppenoperation durch biholomorphe Transformationen auf einer Riemannschen Fläche X . Insbesondere ist dann stets X/G wieder eine Riemannsche Fläche.

Zum Schluß notieren wir noch einige Aussagen über endliche Gruppenwirkungen, die eher der *Kombinatorik* zuzuordnen sind.

Folgerung 23.39 Ist die Menge X endlich und operiert die Gruppe G effektiv auf X , so ist auch G notwendig endlich.

Denn dann ist G Untergruppe der *endlichen* Permutationsgruppe $\text{Aut}(X)$. \square

Es sei nun G für den Rest des Anhangs *endlich*, X beliebig. Dann ist auch jede Bahn Gx endlich, und es gilt der folgende

Satz 23.40 (Lagrange) Für alle $x \in X$ gilt

$$\text{ord } G = \text{ord } G_x \cdot \text{ord } Gx.$$

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $\text{ord } Gx = \text{ord}(G/G_x)$. Nach einem Satz von LAGRANGE ist aber für eine beliebige Untergruppe H von G die Ordnung $\text{ord } H$ ein Teiler von $\text{ord } G$, und $\text{ord } G/\text{ord } H$ ist die Anzahl der Links-Nebenklassen gH . \square

Beispiel. Es sei G die Symmetriegruppe des regulären *Icosaeders*. Dann ist

$$\text{ord } G = \text{ord } G_x \cdot \text{ord } Gx = 5 \cdot 12 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30,$$

je nachdem, ob man für x einen *Eckpunkt*, einen *Flächenmittelpunkt* oder einen *Kantenmittelpunkt* wählt. Tatsächlich ist G isomorph zu der *alternierenden Gruppe* \mathfrak{A}_5 in 5 Elementen von der Ordnung $5!/2 = 60$.

Satz 23.41 Operiert die endliche Gruppe G frei auf X , so haben alle Bahnen Gx die gleiche Kardinalität $\text{ord } G$.

Beweis. Wegen $G_x = \{e\}$ und $G \cong G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$ trivial. \square

Beispiel (RUBIKS Würfel). Es sei X die Menge aller *denkbaren* Muster auf dem klassischen $3 \times 3 \times 3$ -Würfel (bei festgehaltenem zentralen Achsenkreuz), d. h. die Menge aller möglichen Muster nach „mechanischem Auseinandernehmen“ und willkürlicher erneuter Zusammensetzung unter Beibehaltung der räumlichen Lage des aus den „Flächenmittelteilen“ bestehenden „Gerippes“. Man überlegt sich leicht, daß dies eine *endliche* Menge der Ordnung N ist, wobei

$$\begin{aligned} N &= (8 \cdot 3)(7 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 3) \cdot (12 \cdot 2) \cdot (11 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2) = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \\ &= 519.024.039.293.878.272.000. \end{aligned}$$

Die (effektiven) Spielzüge auf dem Würfel bilden offensichtlich eine (endliche) Gruppe G . Es ist (zumindest anschaulich) klar, daß G *frei* operiert. Also haben *alle* Orbits die *gleiche* Länge $\text{ord } G$, die ein Teiler von N sein muß. Insbesondere ist $\text{ord } G$ die Anzahl der Muster, die man aus der Ausgangsstellung durch *erlaubte* Spielzüge erzielen kann, also nur durch Drehen der Seitenflächen (und nicht durch Auseinandernehmen und Zusammensetzen). Wir müssen zur Bestimmung derselben die Mächtigkeit des *Bahnenraumes* X/G berechnen. Nun ist jeder elementare Spielzug eine ungerade Permutation der „Eckenkubies“ und „Kantenkubies“ gleichzeitig. Dies impliziert, daß wir mindestens zwei solcher Bahnen haben müssen. Ähnliche Überlegungen zeigen, daß bei Festhalten von 7 Eckenkubies die Orientierung des achten festgelegt ist und bei Festhalten von 11 Kantenkubies auch die Orientierung des zwölften. Damit haben wir insgesamt mindestens

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Bahnen. Mit elementaren Gruppenoperationen wie Konjugation und Kommutatorbildung überlegt man sich leicht, daß X *genau* in diese 12 Bahnen zerfällt, womit man auch ein algorithmisches Verfahren zur Wiederherstellung des Grundmusters gewinnt. Oder anders ausgedrückt: Wird der Würfel willkürlich zusammengesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, ihn wieder durch erlaubte Spielzüge in die Ausgangsstellung zurückführen zu können, gleich $1/12$. Insbesondere ist die Anzahl der erzielbaren Muster auf Rubik's Würfel gleich

$$\text{ord } G = N/12 = 43.252.003.274.489.856.000$$

(in Worten: 43 Quadrillionen 252 Trilliarden 3 Trillionen 274 Milliarden 489 Millionen 856 Tausend).

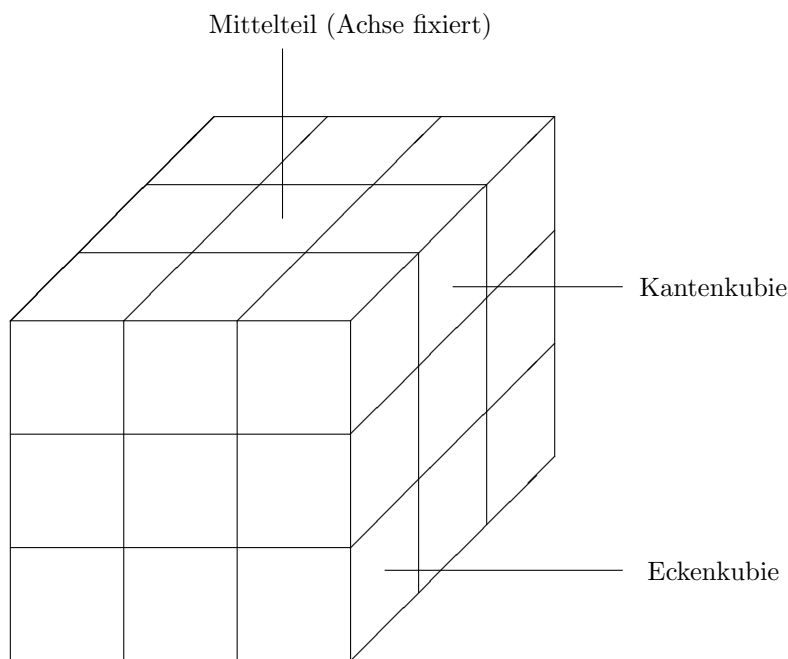


Figure 23.2

24 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip und die Modulfigur

In diesem Kapitel werden wir zu Beginn das SCHWARZsche *Spiegelungsprinzip* an analytischen Randbögen erörtern, um es anschließend zur Bestimmung der universellen Überlagerung der dreifach punktierten projektiven Geraden $\mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ heranzuziehen. Diese Konstruktion besitzt enge Verbindungen u. a. zur *Gruppentheorie*, zur Theorie der *elliptischen Funktionen* und zur Theorie der *Modulfunktionen*. Wir können nur einen kleinen Ausschnitt hiervon skizzieren.

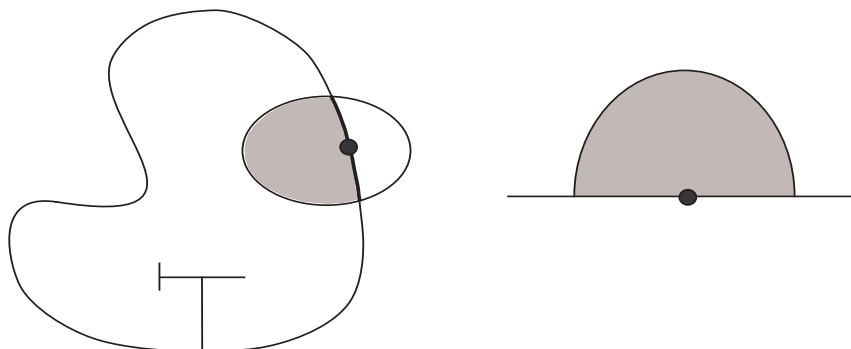
Definition. Ein Gebiet G hat in der offenen Menge U einen *analytischen* oder kurz (\mathcal{C}^ω) -*Rand*, wenn es eine auf U reell-analytische Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $d\varphi \neq 0$ für alle $z \in U$ und

$$U \cap G = \{z \in U : \varphi(z) < 0\}.$$

G hat in einem Punkte $z_0 \in \partial G$ analytischen Rand, falls es eine Umgebung $U = U(z_0)$ gibt, so daß G in U analytischen Rand besitzt.

Kann man $U = U(\partial G)$ wählen, so sagt man auch: G ist *analytisch berandet*.

Bemerkung. Ganz entsprechend kann man auch erklären, was man unter einem \mathcal{C}^k -Rand verstehen will für $k \geq 1$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass man einen solchen Rand lokal stets durch einen \mathcal{C}^k -Koordinatenwechsel „glätten“ kann, wie in der folgenden Skizze angedeutet.



Figur 24.1

Daraus folgt unmittelbar:

Lemma 24.1 *Besitzt das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ im Punkte $z_0 \in \partial G$ einen \mathcal{C}^k -Rand, $k \geq 1$, so ist z_0 ein einfacher Randpunkt von G .*

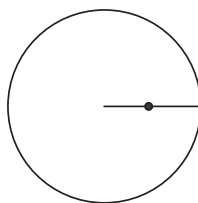
Wir wollen jetzt *analytische* Ränder (lokal) genauer charakterisieren.

Definition. Unter einem (*offenen*) *analytischen Kurvenbogen* verstehen wir das Bild des offenen Intervalls (a, b) unter einer Abbildung $\gamma : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, die (in einer offenen Umgebung von I) reell-analytisch und auf I injektiv ist und der Bedingung $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ genügt. Das Bild des abgeschlossenen Intervalls I unter γ bezeichnen wir auch als *abgeschlossenen* analytischen Kurvenbogen. Ist der Durchschnitt einer offenen Menge U mit dem Rand eines Gebietes G ein offener analytischer Kurvenbogen, so sprechen wir auch von einem *analytischen Randbogen*.

Wiederum folgert man aus dem Satz über implizite Funktionen:

Lemma 24.2 *Das Gebiet G besitze in $z_0 \in \partial G$ einen analytischen Rand. Dann existiert eine Umgebung $U = U(z_0)$, so daß $U \cap \partial G$ ein offener analytischer Kurvenbogen ist.*

Bemerkung und Beispiel. Die Umkehrung von Lemma 2 ist selbstverständlich nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.



Figur 24.2

Wir wollen anschließend demonstrieren, wie man in Verallgemeinerung der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$ an der reellen Achse auch an analytischen Kurvenbögen „spiegeln“ kann. Die reell-analytische Parametrisierung $\gamma : I \rightarrow \bar{C} := \gamma(I) \subset \mathbb{C}$ läßt sich zu einer holomorphen Funktion $\gamma : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen, wobei U_1 eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist, die das Intervall $I = [a, b]$ enthält. Wegen $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ kann man U_1 so klein wählen, daß auch $\gamma'(t) \neq 0$ ist für $t \in U_1$. Somit ist γ lokal injektiv auf U_1 und injektiv auf $I \subset U_1$, so daß wir nach weiterer Verkleinerung von U_1 zusätzlich die Injektivität der Fortsetzung γ voraussetzen dürfen. - Mit anderen Worten:

Lemma 24.3 *Jeder abgeschlossene Kurvenbogen $\gamma : I \rightarrow \bar{C} = \gamma(I)$ ist Einschränkung einer konformen Abbildung $\gamma : U_1 \rightarrow V_1$ mit $I \subset U_1$ und $\bar{C} \subset V_1$.*

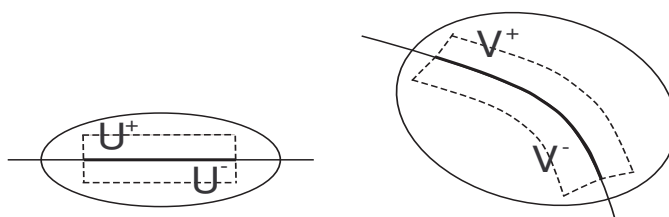
Wir wählen jetzt mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas die positive reelle Zahl c so klein, daß das Rechteck

$$U := \{t \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} t < b, |\operatorname{Im} t| < c\}$$

relativ kompakt in U_1 liegt, und setzen $V := \gamma(U)$. Dann ist $\gamma(U \cap \mathbb{R}) = \gamma((a, b))$ der offene analytische Kurvenbogen $C := \bar{C} \setminus \{\gamma(a), \gamma(b)\}$, und $V \setminus C = \gamma(U \setminus (a, b))$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten $V^+ \cup V^-$, wobei $V^\pm := \gamma(U^\pm)$ und U^+, U^- die beiden Zusammenhangskomponenten

$$U^\pm := \{t \in U : \pm \operatorname{Im} t > 0\}$$

von U bezeichnen.



Figur 24.3

Wir sind nun in der Lage, die *Spiegelung an dem offenen analytischen Kurvenbogen C* (vermöge der Parametrisierung γ) zu definieren durch die Formel

$$\sigma(z) = \gamma\left(\overline{\gamma^{-1}(z)}\right), \quad z \in V.$$

Offensichtlich ist die Abbildung $\sigma : V \rightarrow V$ bijektiv und bildet V^+ in V^- und umgekehrt ab und hält den Kurvenbogen C punktweise fest. Ferner ist sie *antiholomorph*, d. h. es gilt

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0.$$

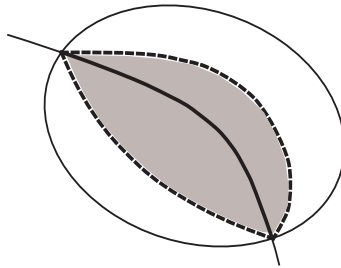
Die zweimalige Anwendung $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma : V \rightarrow V$ ist dann nach der Kettenregel für den Wirtinger-Kalkül *holomorph*, und da σ^2 auf der nicht diskreten Teilmenge $C \subset V$ die Identität ist, ergibt sich aus dem Identitätssatz, daß $\sigma^2 = \text{id}$.

Lemma 24.4 σ ist ein antiholomorpher involutorischer Automorphismus von V , der V^+ mit V^- vertauscht und den analytischen Kurvenbogen C als genaue Fixpunkt-Menge besitzt.

Bemerkung. Die Spiegelung σ ist übrigens nicht (wesentlich) von der Parametrisierung γ des Kurvenbogens C abhängig. Ist nämlich τ eine weitere solche Spiegelung, so sieht man genau wie oben, daß die Zusammensetzung $\sigma \circ \tau$ holomorph in einer Umgebung von C und auf C die Identität sein muß. Somit ist notwendig $\sigma \circ \tau = \text{id}$ in der eindeutig bestimmten Zusammenhangskomponente des Durchschnitts ihrer Definitionsbereiche, die C enthält. Daraus ergibt sich dort aber auch $\tau = \sigma^{-1} = \sigma$.

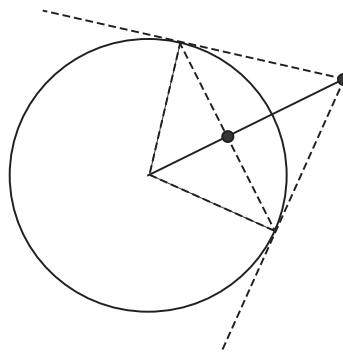
Das gleiche Eindeutigkeits-Argument liefert jetzt sogar eine allgemeinere Aussage.

Satz 24.5 Das Gebiet G besitze in der offenen Menge V einen analytischen Rand. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset V$ von $\partial G \cap V$ und eine (eindeutig bestimmte) Spiegelung σ auf U bzgl. $\partial G \cap V$.



Figur 24.4

Beispiel. Außer der üblichen Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ kennen wir noch ein weiteres Beispiel: $\sigma(z) := 1/\bar{z}$ ist die *Spiegelung am Einheitskreis*, die auf \mathbb{C}^* als Umgebung von $\partial D = S^1$ erklärt ist. $w = \sigma(z)$ ist bestimmt durch die Bedingungen $\arg w = \arg z$ und $|w| \cdot |z| = 1$.



Figur 24.5

Wir können nun das *allgemeine Spiegelungsprinzip* in der Funktionentheorie formulieren.

Satz 24.6 Die Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ sei konform, und jedes der Gebiete G_j habe in der offenen Menge V_j einen analytischen Rand $C_j = V_j \cap \partial G_j$, $j = 1, 2$. Weiter lasse sich f zu einer stetigen Abbildung $f_0 : G_1 \cup C_1 \rightarrow G_2 \cup C_2$ mit $f_0(C_1) \subset C_2$ fortsetzen. Dann gibt es offene Mengen U_1, U_2 mit $C_1 \subset U_1$, so daß sich f zu einer konformen Abbildung

$$\hat{f} : G_1 \cup U_1 \longrightarrow G_2 \cup U_2$$

fortsetzen läßt.

Beweis. Es seien die Umgebungen U_1, W_2 von C_1 bzw. C_2 so klein gewählt, daß dort die Spiegelungen σ_1, σ_2 an C_1 bzw. C_2 existieren. Wegen der Stetigkeit von f_0 können wir zusätzlich annehmen, daß

$$f_0(\overline{G_1} \cap U_1) \subset W_2.$$

Wir setzen dann

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} f_0(z) & , \quad z \in G_1 \cup C_1, \\ (\sigma_2 \circ f_0 \circ \sigma_1)(z) & , \quad z \in U_1 \setminus \overline{G_1}. \end{cases}$$

Es ist klar, daß \hat{f} holomorph auf $G_1 \cup (U_1 \setminus \overline{G_1}) = (G_1 \cup U_1) \setminus C_1$ ist. Strebt z gegen einen Punkt von C_1 , so konvergiert $\sigma_1(z)$ gegen z und $\sigma_2 \circ f_0 \circ \sigma_1(z)$ gegen $\sigma_2(f_0(z)) = f_0(z)$, da $f_0(C_1) \subset C_2$. Also ist \hat{f} zumindest noch stetig in den Punkten von C_1 . Es bleibt nur noch zu zeigen, daß \hat{f} holomorph und injektiv ist; denn dann ist $\hat{f} : G_1 \cup U_1 \rightarrow G_2 \cup U_2$ mit $U_2 := \hat{f}(U_1) \subset W_2$ eine konforme Abbildung.

Da die Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, können wir uns auf offene Umgebungen V mit $V \setminus C_1 = V^+ \cup V^-$ wie in der Definition der Spiegelung beschränken. Auf einer solchen Umgebung ist \hat{f} nach Liften unter der ins Komplexe fortgesetzten Parametrisierung γ von C_1 aber stetig auf U und holomorph auf $U^+ \cup U^-$. Nach einer früheren Übungsaufgabe folgt hieraus aber mit dem Satz von Morera die Holomorphie von $\hat{f} \circ \gamma$ auf U und damit die Holomorphie von \hat{f} auf V .

Man überlegt sich leicht, daß man statt der globalen nur die lokale Injektivität von \hat{f} nachzuweisen braucht. Wegen der Injektivität der Spiegelungen σ_1 und σ_2 ist aber schon klar, daß $g := \hat{f} \circ \gamma$ auf den Mengen U^\pm injektiv ist. Dann muß aber g auch in allen Punkten $x \in U \cap \mathbb{R}$ lokal biholomorph sein, denn sonst wäre g außerhalb von $g(x)$ eine unverzweigte Überlagerung mit Blätterzahl $n \geq 2$, was sofort zu einem Widerspruch zu den Injektivitäts-Voraussetzungen auf U^\pm führt. Hieraus folgt aber weiter, daß g auch auf $U \cap \mathbb{R}$ injektiv ist. Also ist g auf U injektiv und lokal biholomorph und somit biholomorph. \square

Zusammen mit früher zitierten Ergebnissen folgt dann sofort:

Satz 24.7 Die Gebiete G_1, G_2 seien beschränkt, einfach zusammenhängend und analytisch berandet. Dann kann jede konforme Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ zu einer konformen Abbildung $\tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ von Umgebungen \tilde{G}_j der Abschlüsse $\overline{G_j}$ fortgesetzt werden.

Tatsächlich kann die sehr einschränkende Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs hier fortgelassen werden. Mit Hilfe von Fortsetzungseigenschaften harmonischer Funktionen kann man zeigen:

Satz 24.8 Die Gebiete G_1, G_2 seien beschränkt und analytisch berandet. Dann kann jede konforme Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ zu einer konformen Abbildung $\tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ von Umgebungen \tilde{G}_j der Abschlüsse $\overline{G_j}$ fortgesetzt werden.

Wir formulieren noch einen Fortsetzungssatz für *mehrfach zusammenhängende* Jordangebiete (zur Definition siehe Kapitel 22).

Satz 24.9 (Carathéodory) *Konforme Abbildungen zwischen k -fach zusammenhängenden Jordangebieten setzen sich immer zu Homöomorphismen der abgeschlossenen Hüllen fort.*

Zu jedem k -fach zusammenhängenden Jordangebiet gibt es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow G'$ auf ein analytisch berandetes k -fach zusammenhängendes Jordangebiet G' .

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir die *elliptische Modulfunktion* $J : H \rightarrow \mathbb{C}$, die wir im Anhang zu Kapitel 18 schon kennengelernt haben, auf konkrete *geometrische* Weise mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips durch Spiegelung an Rändern von nicht-euklidischen Dreiecken konstruieren.

Wir erinnern zunächst daran, daß jeder Torus $T = \mathbb{C}/\Omega$ komplex-analytisch isomorph ist zu einem Torus T_τ zu dem Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ mit einer Zahl $\tau \in H$, und zwei Tori T_τ und T_σ sind genau dann isomorph in diesem Sinne, wenn σ und τ in derselben Bahn unter der Aktion der *Modulgruppe*

$$\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

liegen:

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Ein *Fundamental-Bereich* für die Aktion von Γ auf der oberen Halbebene H ist die bekannte *Modulfigur* (siehe loc. cit., Figur 18.5, und weiter unten), aus der man unmittelbar ablesen kann, daß der Quotientenraum H/Γ einfach zusammenhängend und nicht kompakt ist.

Bemerkung. Da Γ auf H eigentlich diskontinuierlich durch holomorphe Transformationen operiert, trägt H/Γ nach den allgemeinen Überlegungen des vorigen Kapitels eine komplex-analytische Struktur, und nach dem Uniformisierungssatz kann dieser Raum nur konform äquivalent zu \mathbb{C} oder zu D sein. Wir werden bald einsehen, daß der erste Fall eintritt.

Die Modulgruppe Γ wird erzeugt von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Eine Beweisskizze hierfür geben wir weiter unten). Im ersten Fall hat man die durch T induzierte Translation

$$\tau \mapsto \tau + 1,$$

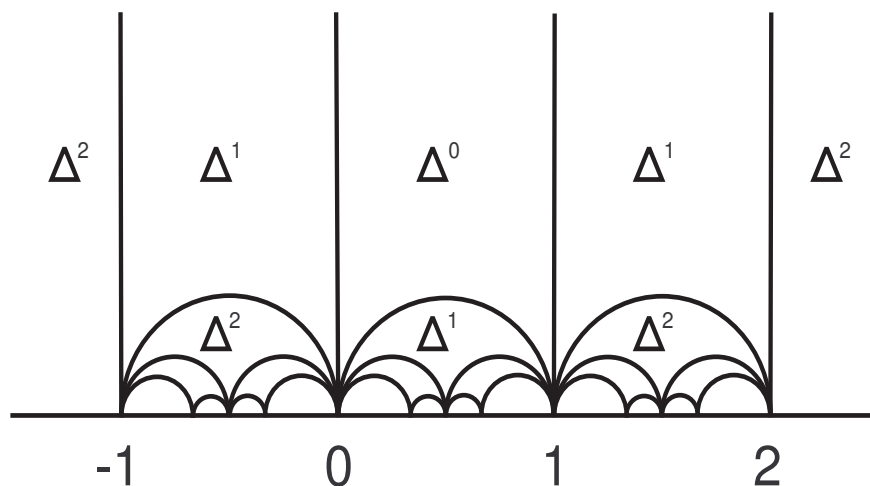
und tatsächlich ist $\Omega_{\tau+1} = \Omega_\tau$. Die Matrix S induziert die Abbildung

$$\tau \mapsto -\frac{1}{\tau},$$

also die Spiegelung am Einheitskreis mit anschließender Spiegelung an der imaginären Achse.

Wir betrachten im folgenden abweichend von dem üblichen Fundamentalbereich der Modulgruppe das folgende nicht-euklidische Dreieck (die Punktwahl wird später noch klarer werden):

$$\Delta^0 = \left\{ z = x + iy \in H : 0 < x < 1, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$



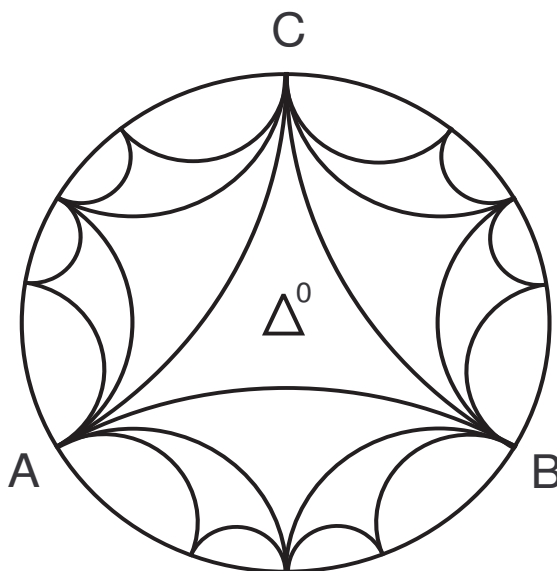
Figur 24.6

und spiegeln an den 3 Dreiecksseiten. Dabei erhalten wir 3 Dreiecke, die alle kurz mit Δ^1 bezeichnet werden sollen (oder korrekter auch $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1$). Dann können wir an 6 weiteren Seiten spiegeln und bekommen die Dreiecke Δ_k^2 etc.

Man sieht leicht, daß dabei sukzessive „unterhalb“ von Δ_0 „alles aufgefüllt“ wird. Da andererseits sukzessive auch alle Translate in \mathbb{Z} -Richtung hinzukommen, folgt

$$\bigcup_{j,k} \overline{\Delta^j_{(k)}} = H \cup \Sigma,$$

wobei $\Sigma \subset \mathbb{R}$ die sogenannte Menge der *Spitzen* ist, die sogar nur aus rationalen Zahlen besteht. Als Figur am KLEINSchen Modell der hyperbolischen Geometrie sieht die gesamte Figur, die auch als *Modulfigur* oder *Modulnetz* bezeichnet wird, noch beeindruckender aus:



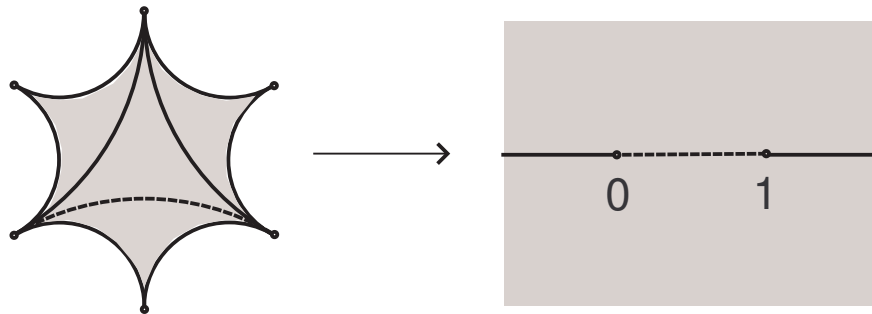
Figur 24.7

Im nächsten Schritt wählen wir eine konforme Abbildung $f : \Delta^0 \rightarrow D$. Da Δ^0 nur einfache Randpunkte besitzt, setzt sich diese Abbildung zu einem Homöomorphismus

$$f : \overline{\Delta^0} \longrightarrow \overline{D}$$

fort (der zudem auf $\overline{\Delta^0} \cap D$ analytisch ist). Wir können eine (stetig fortgesetzte) konforme Abbildung $\overline{D} \rightarrow \overline{H}$ dahinter schalten mit $A, B, C \mapsto 1, \infty, 0$, bzw., und erhalten so einen Homöomorphismus $\lambda : \overline{\Delta_0} \xrightarrow{\sim} \overline{H}$, der die offenen analytischen Randbögen \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} auf die Intervalle $(1, \infty)$, $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, 1)$ abbildet.

Als nächstes spiegeln wir λ nacheinander an diesen offenen Randbögen von $\overline{\Delta_0}$. Dann wird jedes offene Dreieck Δ_k^1 konform nach H^- abgebildet, mit stetiger Fortsetzung nach $\overline{\Delta_k^1}$, wobei der Rand wieder auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ liegt. Dies liefert die Fortsetzung



Figur 24.8

So fortfahrend erhält man eine holomorphe Abbildung

$$\lambda : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

die den folgenden Bedingungen genügt:

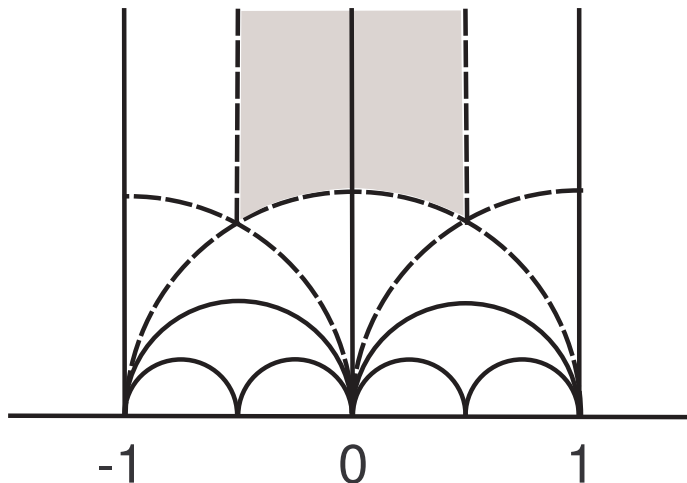
- λ ist surjektiv und unverzweigt, d. h. $(\lambda_k^j)' \neq 0$,
- $\lambda|_{\Delta_k^j} : \Delta_k^j \longrightarrow H^\pm$ ist konform (k gerade oder ungerade),
- λ ist auf den Dreiecksseiten der Modulfigur reellwertig und mit $z \rightarrow \partial D$ auf einer solchen Seite folgt $\lambda(z) \rightarrow 0, 1, \infty$,
- für alle $w \in \mathbb{C}'' := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ existiert eine Umgebung $V = V(w) \subset \mathbb{C}''$, so daß $\lambda^{-1}(V)$ aus paarweise diskunkten offenen Mengen U_i besteht, so daß $\lambda|_{U_i} : U_i \longrightarrow V$ konform ist für alle i .
- λ ist nicht über die Randpunkte von D holomorph fortsetzbar, da die „Spitzen“ *dicht* in ∂D liegen.

D. h. aber mit anderen Worten:

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ ist die universelle Überlagerung von } \mathbb{C}'' = \mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Bemerkung. Man kann übrigens leicht einsehen, daß die Eigenschaften a) bis e) die Überlagerung $\lambda : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ festlegen, sofern man den drei Randpunkten A, B, C eine feste Permutation der Elemente $0, 1, \infty$ zuordnet.

Um den Zusammenhang zwischen λ und J klären zu können, müssen wir einen Zusammenhang zwischen der „Modulfigur“ und einer Untergruppe der Modulgruppe $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ herstellen. Wir betrachten dazu die „neue“ Modulfigur in der oberen Halbebene, in die wir einige „Höhen“ gestrichelt eingezeichnet haben.

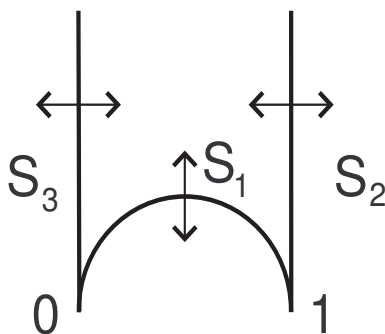


Figur 24.9

Zusammen ergibt das tatsächlich die Modulfigur zu Γ . Zu der „neuen“ Figur gehört auch eine Gruppe Γ_0 , die wir nun bestimmen wollen. Γ_0 soll natürlich die Gruppe der *holomorphen Decktransformationen* bzgl. der Überlagerung λ sein, d. h. die Gruppe der Automorphismen $\gamma \in \text{Aut } H$ mit

$$\lambda \circ \gamma = \lambda.$$

Es ist klar, daß die Modulfigur invariant ist unter der vollen Gruppe, die erzeugt wird von den *Spiegelungen* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ an den Seiten S_1, S_2, S_3 des Dreiecks Δ^0 .



Figur 24.10

Diese Spiegelungen sind aber *antiholomorphe* Abbildungen, und somit ist Γ_0 die Gruppe, die erzeugt wird von Produkten geradzahlig vieler der Spiegelungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Nun ist, wie man sofort sieht, $\sigma_k \sigma_j = (\sigma_j \sigma_k)^{-1}$, und folglich wird die Gruppe Γ_0 erzeugt von den Produkten

$$\tau_1 = \sigma_2 \sigma_3, \quad \tau_2 = \sigma_3 \sigma_1, \quad \tau_3 = \sigma_1 \sigma_2.$$

Schließlich ist aber noch

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 = \text{id} ,$$

so daß also Γ_0 von den beiden Elementen τ_1, τ_2 allein erzeugt wird. Durch Berechnung der Bilder von $0, 1, \infty$ folgt sofort

$$\tau_1(z) = z + 2, \quad \tau_2(z) = \frac{z}{-2z + 1} ,$$

d. h. Γ_0 wird erzeugt von den Matrizen

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man beweist nun leicht das folgende

Lemma 24.10 Die Gruppe Γ_0 ist gleich der Hauptkongruenzuntergruppe

$$\Gamma(2) := \{ A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) : A \equiv E \pmod{2} \} / \{ \pm E \} \subset \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \Gamma .$$

Hierbei bedeutet $A \equiv E \pmod{2}$ für eine ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

daß $a - 1 \equiv d - 1 \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{2}$.

Beweis. Aufgrund der Bauart der Matrizen T_1, T_2 ist evident, daß $\Gamma_0 \subset \Gamma(2)$. Es sei also umgekehrt $A \in \Gamma(2)$; ist der Eintrag $b = 0$, so folgt aus $\det A = 1$ sofort $a = d = \pm 1$, und mit $c = \pm 2k, k \in \mathbb{Z}$, findet man unmittelbar

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix} = \pm T_2^{-k} .$$

Ist nun $b \neq 0$, so zeigt eine weitere kleine Rechnung

$$A T_2^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2kb & b \\ * & * \end{pmatrix} ,$$

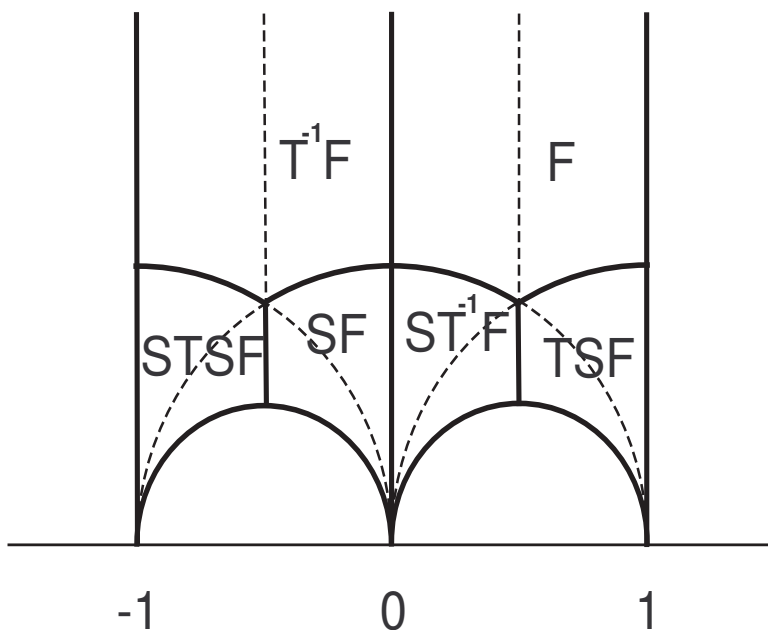
und zusammen mit dem euklidischen Algorithmus sieht man, daß man nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von T_2 die Bedingung $|a| < |b|$ erreichen kann. Entsprechend ist aber auch

$$A T_1^k = \begin{pmatrix} a & 2ka + b \\ * & * \end{pmatrix} ,$$

so daß man nach endlich vielen Schritten bei $b = 0$ anlangt. □

Bemerkung. Mit den gleichen Argumenten überzeugt man sich davon, daß die Modulgruppe Γ von den Matrizen S und T erzeugt wird.

Es ist also λ eine Γ_0 -invariante Funktion, wobei Γ_0 *echt* in der Modulgruppe Γ enthalten ist. Wir wollen aber tatsächlich eine Γ -invariante Funktion konstruieren und müssen uns deshalb mit Γ_0 als *Untergruppe* von Γ beschäftigen. Γ_0 besitzt einen Fundamentalbereich $F_0 = \Delta^0 \cup \Delta^1$ mit dem rechts von Δ^0 liegenden Translat Δ^1 . Zerlegt man die beiden Dreiecke durch Höhenlinien, so zerlegt sich dieses *Fundamentalviereck* von Γ_0 in 12 Dreiecke, von denen sich je zwei zu insgesamt 6 Fundamentalvierecken von Γ zusammenfügen.



Figur 24.11

Hieraus folgt sofort:

Lemma 24.11 Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma_0 = \Gamma(2)$ ist ein Normalteiler in der Modulgruppe Γ vom Index 6.

Man kann aus dieser Figur sogar Repräsentanten der 6 Elemente in der Restklassengruppe Γ/Γ_0 ablesen, indem man einfach feststellt, welche Elemente aus $SL(2, \mathbb{Z})$ das Fundamentalviereck F in die anderen 5 Fundamentalvierecke überführen. Wie in den Bezeichnungen der Figur schon angegeben, sind dies (zusammen mit der Einheitsmatrix) die 6 Elemente:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} \cong T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ST^{-1} = (TS)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad STS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $T^2 \cong (TS)^3 \cong E_2$, woraus man sofort $\Gamma/\Gamma_0 \cong \mathfrak{S}_3$ schließt. - Dies werden wir anschließend noch auf einer konzeptionellen Basis verstehen.

Dazu berechnen wir zunächst die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{C}'' = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. Solche Abbildungen sind natürlich auffaßbar als injektive holomorphe Funktionen $\varphi: \mathbb{C}'' \rightarrow \mathbb{C}$. Aufgrund des Satzes von Casorati-Weierstraß kann eine solche Funktion an der Stelle 0 (und ebenso an den Stellen 1 und ∞) keine wesentliche Singularität besitzen. Also setzen sich diese Automorphismen zu Automorphismen von \mathbb{P}_1 fort, welche die endliche Punktmenge $E := \{0, 1, \infty\}$ permutieren. Da Automorphismen der Riemannschen Zahlenkugel aber schon durch ihre Werte auf drei Punkten festgelegt sind, hat man Gruppenisomorphismen

$$\mathfrak{S}_3 \cong \text{Aut}^E(\mathbb{P}_1) := \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_1) : \varphi(E) = E\} \cong \text{Aut}(\mathbb{C}'')$$

wobei einer Permutation π auf den drei Elementen $0, 1, \infty$ das Doppelverhältnis $DV(w; \pi(0, 1, \infty))$ bzw. dessen Einschränkung auf \mathbb{C}'' zugeordnet wird. Insbesondere entspricht der Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

die rationale Abbildung $w \mapsto 1 - w$ und damit die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als weitere Korrespondenz hat man

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(w \mapsto \frac{1}{w} \right) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: V.$$

Die anderen von der Identität verschiedenen Permutationen in \mathfrak{S}_3 werden gegeben durch

$$UV \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (UV)^2 = VU \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{pmatrix}, \quad UVU \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & \infty & 1 \end{pmatrix}.$$

Die konkret durch rationale Funktionen realisierte Gruppe $\mathfrak{S}_3 \cong \text{Aut}(\mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ besteht somit aus den Funktionen

$$w \mapsto w, 1 - w, \frac{1}{w}, \frac{w - 1}{w}, \frac{1}{1 - w}, \frac{w}{w - 1}.$$

In der Literatur findet man für diese wundersame Gruppe von rationalen Funktionen auch den Namen *anharmonische Gruppe*.

Eine nichtkonstante, unter der Substitution mit diesen Funktionen invariante rationale Funktion wird gegeben durch

$$G(w) = \prod_{g \in \mathfrak{S}_3} (1 + g(w)) = - \frac{(w + 1)^2 (w - 2)^2 (2w - 1)^2}{w^2 (w - 1)^2}.$$

Wenn wir die Funktion λ so normieren, daß beim Laufen auf den Randbögen von $\Delta^0 \subset H$ nach den Eckpunkten $0, 1, \infty$ die Werte von λ nach $1, \infty, 0$ streben, so berechnet man durch Betrachtung der Zuordnung einiger Randpunkte sofort, daß z. B.

$$(\lambda S)z = \lambda \left(-\frac{1}{z} \right) = 1 - \lambda(z) = (U\lambda)(z);$$

denn mit z gegen $0, 1, \infty$ geht Sz (modulo Γ_0) gegen $\infty, -1 \cong 1, 0$ und damit $\lambda(Sz)$ gegen $0, \infty, 1$. Das gleiche gilt aber auch für $1 - \lambda(z)$. Wir haben somit ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{S} & H \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{C}'' & \xrightarrow{U} & \mathbb{C}'' \end{array}$$

Genauso beweist man die Beziehung

$$(\lambda(S^{-1}TS))z = \lambda \left(\frac{z}{1 - z} \right) = \frac{1}{\lambda(z)} = (V\lambda)(z).$$

Hieraus gewinnt man die anderen Substitutionsformeln ganz automatisch:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \lambda(TS z) = \lambda(S(S^{-1}TS)z) = U\lambda(S^{-1}TS z) = UV\lambda(z) = \frac{\lambda(z)-1}{\lambda(z)} \\ \lambda\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \lambda((TS)^2 z) = (UV)^2\lambda(z) = VU\lambda(z) = \frac{1}{1-\lambda(z)} \\ \lambda(z+1) &= \lambda(Tz) = \lambda TS^2 z = UV\lambda(Sz) = UVU\lambda(z) = \frac{\lambda(z)}{\lambda(z)-1}.\end{aligned}$$

Wir sind nunmehr in der Lage, eine nichtkonstante, unter der gesamten Modulgruppe Γ invariante Funktion anzugeben durch

$$j(z) := G(\lambda(z)).$$

Man berechnet:

$$j(\infty) = \infty, \quad j(i) = 0, \quad j(\rho) = 27,$$

wobei ρ die primitive 6-te Einheitswurzel ζ_6 bezeichnet. j bildet das durch die Ecken $i, \rho, i\infty$ bestimmte Dreieck $\Delta \subset H$, also die rechte Hälfte des üblichen Fundamentalbereichs von Γ , konform auf die obere Halbebene ab. Entsprechend bildet dann

$$J(\tau) := 1 - \frac{1}{27} j(\tau) : \Delta \xrightarrow{\sim} H^- \quad \text{mit} \quad (\infty, i, \rho) \mapsto (\infty, 1, 0)$$

ab.

Satz 24.12 *Die Funktion*

$$J(\tau) = 1 - \frac{1}{27} j(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

ist eine Γ -invariante Funktion, die die obere Halbebene auf \mathbb{C} und das Innere des Moduldreiecks mit den Ecken $\zeta_3, i, i\infty$ konform auf die obere Halbebene abbildet mit $J(i\infty) = \infty$, $J(\zeta_3) = 0$, $J(i) = 1$.

Wir wollen jetzt noch den Zusammenhang von J mit den Gittern vom Rang 2 in \mathbb{C} herstellen. Wir schreiben wieder $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und betrachten

$$\wp = \wp_\Omega(z) := \wp(z, \omega_1, \omega_2)$$

als Funktion in z und den Perioden ω_1, ω_2 . Wir wissen von früher:

$$e_1(\omega_1, \omega_2) = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2(\omega_1, \omega_2) = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3(\omega_1, \omega_2) = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

sind die Werte von \wp_Ω , die mit Vielfachheit 2 angenommen werden. Die e_1, e_2, e_3 sind durch das Gitter Ω bestimmt bis auf die Reihenfolge; denn es gilt z. B :

$$e_1(-\omega_2, \omega_1) = e_3(\omega_1, \omega_2), \quad e_3(-\omega_2, \omega_1) = e_1(\omega_1, \omega_2),$$

und beim Übergang von (ω_1, ω_2) zu $(\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$ werden die Werte e_1 und e_2 vertauscht. Ferner gilt:

$$\wp_{\alpha\Omega}(\alpha z) = \alpha^{-2}\wp_\Omega(z),$$

und folglich ist

$$e_k(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \alpha^{-2}e_k(\omega_1, \omega_2).$$

Bilde nun

$$\lambda^*(\omega_1, \omega_2) := \frac{e_2(\omega_1, \omega_2) - e_3(\omega_1, \omega_2)}{e_1(\omega_1, \omega_2) - e_3(\omega_1, \omega_2)}.$$

Diese Funktion nimmt die Werte 0, 1 und ∞ nicht an und erfüllt

$$\lambda^*(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \lambda^*(\omega_1, \omega_2).$$

Also können wir Gitter wieder normieren zur Basis 1, $\tau \in H$ und setzen

$$\lambda^*(\tau) = \lambda^*(1, \tau), \quad e_k(\tau) = e_k(1, \tau) \quad \text{etc.}$$

Damit berechnet man sofort

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^*\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \lambda^*(-1, \tau) = \frac{e_2(\tau) - e_1(\tau)}{e_3(\tau) - e_1(\tau)} = 1 - \lambda^*(\tau), \\ \lambda^*\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right) = \lambda^*(1 - \tau, \tau) = \frac{e_1(\tau) - e_3(\tau)}{e_2(\tau) - e_3(\tau)} = \frac{1}{\lambda^*(\tau)}. \end{array} \right.$$

Dies sind die gleichen Funktionalgleichungen, wie sie λ erfüllt. Damit ist das Transformationsverhalten von λ^* unter der vollen Modulgruppe das gleiche wie bei λ . - Man zeigt nun (siehe FISCHER-LIEB, loc. cit, p.239):

$$\lambda^*(\tau) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \text{Im } \tau \longrightarrow \infty$$

gleichmäßig in $\text{Re } \tau$, und kann daraus schließen, daß $\lambda^* = \lambda$.

Satz 24.13 Für die Funktion $\lambda: H \rightarrow \mathbb{C}''$ gilt:

$$\lambda(\tau) = \frac{e_2(\tau) - e_3(\tau)}{e_1(\tau) - e_3(\tau)}.$$

Bemerkung. Die Tatsache, daß es eigentlich 6 Funktionen λ gibt, die unter der Aktion der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_3 auseinander hervorgehen, spiegelt sich wider in dem eben nachgewiesenen Bildungsgesetz, das eine Gruppenoperation von \mathfrak{S}_3 durch Permutation der Größen e_1, e_2, e_3 zuläßt.

Wir wollen jetzt noch zum Abschluß den Ausdruck

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

umrechnen. Aus der Differentialgleichung der \wp -Funktion

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

folgen die Beziehungen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = g_2 \quad \text{und} \quad 4e_1e_2e_3 = g_3$$

und damit

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = g_2/2$$

und

$$16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 =: \Delta.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda + 1 &= \frac{(e_2 - e_3)^2 - (e_2 - e_3)(e_1 - e_3) + (e_1 - e_3)^2}{(e_1 - e_3)^2} \\ &= \frac{(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)}{(e_1 - e_3)^2} = \frac{3g_2}{4(e_1 - e_3)^2} \end{aligned}$$

und

$$\lambda^2(\lambda - 1)^2 = (e_2 - e_3)^2(e_2 - e_1)^2(e_1 - e_3)^{-4}.$$

Dies ergibt den wichtigen

Satz 24.14 Die elliptische Modulfunktion J schreibt sich in der Form

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Wir können hieraus noch eine wichtige Eigenschaft elliptischer Integrale ableiten. Ist Ω ein Gitter, so bestimmen sich daraus die Konstanten $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ mit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Wir wollten aber jedes Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}, \quad P_3 \text{ ein Polynom mit drei verschiedene Nullstellen,}$$

ein *elliptisches Integral* nennen. Wir müssen uns also die Frage stellen: Gegeben sei (evtl. nach Transformation und Normierung) ein Polynom

$$4w^3 - g_2w - g_3 \quad \text{mit} \quad \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Gibt es dann ein Gitter Ω mit $g_2(\Omega) = g_2, g_3(\Omega) = g_3$? - Dies ist in der Tat richtig.

Satz 24.15 Zu beliebigen $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ mit $\Delta \neq 0$ gibt es stets ein zugehöriges Gitter.

Beweis. Seien zunächst die vorgegebenen Zahlen g_2, g_3 beide von 0 verschieden. Wegen $J(H) = \mathbb{C}$ existiert ein $\tau \in H$ mit

$$\frac{g_2^3(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)} = J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Wähle ω_1 so, daß

$$\omega_1^2 \frac{g_2(1, \tau)}{g_3(1, \tau)} = \frac{g_2}{g_3},$$

und setze $\omega_2 = \tau\omega_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} &= \frac{g_2(\omega_1, \tau\omega_1)}{g_3(\omega_1, \tau\omega_1)} = \frac{\omega_1^6 g_2(1, \tau)}{\omega_1^4 g_3(1, \tau)} = \frac{g_2}{g_3} \\ \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} &= \frac{g_2^3(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)} = \frac{g_2^3}{\Delta}. \end{aligned}$$

Beides zusammen ergibt sofort $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2), g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2)$ (denn $\lambda^3 = \lambda^2$ impliziert $\lambda = 1$).

Ist $g_2 = 0$, so benutzen wir $J(\zeta_3) = 0$, also $g_2(1, \zeta_3) = 0$. Wähle ω_1 so, daß $\omega_1^{-6} g_3(1, \zeta_3) = g_3$. Dann leistet das Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_1\zeta_3$ das Gewünschte.

Ist $g_3 = 0$, so folgt mit $g_3(1, i) = 0$ (wegen $J(i) = 1$) und $\omega_1^{-4} g_2(1, i) = g_2$, daß das Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_1 i$ die richtigen Invarianten besitzt. \square

Bemerkung. Man beachte, daß zu $g_2 = 0$ bzw. $g_3 = 0$ nur ganz spezielle Gitter gehören, nämlich *rhombische* bzw. *rechteckige*.

25 Der große Satz von Picard

Wir wollen in diesem kurzen Kapitel den *großen Satz* von PICARD beweisen, der bekanntlich den folgenden Sachverhalt behauptet:

Satz 25.1 (Picard) *Eine holomorphe Funktion nimmt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme als Funktionswert an.*

Wir merken hier noch einmal an, daß aus diesem Satz als Korollar sofort der *kleine Satz* von PICARD folgt.

Satz 25.2 *Nimmt eine ganze Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mindestens zwei Werte nicht an, so ist sie konstant.*

Der Satz von Picard, der eine weitreichende Verallgemeinerung des Satzes von CASORATI und WEIERSTRASS ist - der seinerseits zu seinem Beweis herangezogen werden muß - hängt eng zusammen mit der Geometrie der „zweifach punktierten“ Ebene \mathbb{C}'' , deren universelle Überlagerung der Einheitskreis ist, wie wir in dem vorigen Kapitel bewiesen haben.

Tatsächlich beweisen wir anschließend den folgenden, viel allgemeineren Satz, der auf GRUBER zurückgeht:

Satz 25.3 *Jede holomorphe Abbildung $f : D^* \rightarrow X$ der punktierten Einheitskreisscheibe D^* in die Riemannsche Fläche X ist in den Nullpunkt hinein fortsetzbar, sofern*

- i) X die universelle Überlagerung D besitzt;
- ii) es eine gegen Null konvergente Folge $z_j \in D^*$ gibt, für die die Bildfolge in X konvergiert.

Dieser Satz impliziert den großen Satz von Picard: Denn besitzt f in einem Punkt z_0 eine wesentliche Singularität, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $z_0 = 0$ und f auf der punktierten Einheitskreisscheibe D^* holomorph ist. Würde f zwei Werte auslassen, so wäre f eine holomorphe Abbildung von D^* in die Riemannsche Fläche $X := \mathbb{C}''$ mit der universellen Überlagerung D . Wegen des Satzes von CASORATI-WEIERSTRASS gibt es zu jeder Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$, also insbesondere zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}''$, eine Nullfolge $z_j \neq 0$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} f(z_j) = w_0$. Nach Satz 3 kann man dann aber f nach 0 holomorph fortsetzen, was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht. \square

Nehmen wir zur Untersuchung der Möglichkeiten zum Beweis von Satz 3 zunächst an, daß die Funktion f in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sei. Dann kann man das Bild $f \circ \gamma$ jeder Schleife γ in D^* in X zusammenziehen. Dies reicht aber auch aus, denn wir haben in Kapitel 23 das folgende Lemma bewiesen, das im komplex-analytischen Fall eine einfache Folgerung aus dem *Monodromie-Satz* ist:

Lemma 25.4 *Es sei $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, und es gelte*

$$(*) \quad f \circ \gamma \sim 0 \text{ in } X_2$$

für jede geschlossene Kurve γ in X_1 . Dann läßt sich f in die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ liften.

Können wir also zeigen, daß in der Situation von Satz 3 jede Schleife γ in D^* ein nullhomotopes Bild $f \circ \gamma$ in X besitzt, so sind wir fertig. Denn dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & D \\
 & \nearrow F & \downarrow \pi \\
 D^* & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

Insbesondere ist die Liftung F beschränkt und somit wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes holomorph nach 0 fortsetzbar. Das gilt dann aber auch für $f = \pi \circ F$, was zu beweisen war. \square

Nun ist aber jeder geschlossene Weg in D^* homotop zu einem Vielfachen des festen Weges $\kappa_r(t) = r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 < r < 1$. Es genügt also zu zeigen:

(*) *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist*

$$f \circ \kappa_r \sim 0 \text{ in } X \text{ für ein } r .$$

Da wir wieder mit dem Monodromiesatz argumentieren wollen, benötigen wir auch die universelle Überlagerung von D^* . Diese wird offensichtlich gegeben durch

$$D \cong H \xrightarrow{i} H_- \xrightarrow{\text{exp}} D^* .$$

Also haben wir erneut wegen Lemma 4 eine holomorphe Liftung

$$\begin{array}{ccc} D \cong H & \xrightarrow{g} & H \cong D \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ D^* & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

die bezüglich der hyperbolischen Metrik längenverkürzend ist (siehe Satz 21.9). Es genügt nun zum Beweis von (*) zu zeigen:

(**) *Die hyperbolische Metrik h auf D induziert eine Metrik h_0 auf X , die die Topologie von X induziert.*

Denn nach Voraussetzung gibt es eine Folge $z_n \rightarrow 0$ in D^* , deren Bildfolge $f(z_n)$ gegen einen Punkt $w_0 \in X$ konvergiert. Man setze $\kappa_n := \kappa_{r_n}$, wobei $r_n := |z_n|$. Die Liftung von κ_n zu einem Weg in der universellen Überlagerung $D \cong H$ bezeichnen wir mit γ_n . Dann ist $g \circ \gamma_n$ eine Liftung von $f \circ \kappa_n$, und es gilt

$$L_{h_0}(f \circ \kappa_n) = L_h(g \circ \gamma_n) \leq L_h(\gamma_n) ,$$

wobei sich bei leichter Umrechnung der hyperbolischen Metrik auf D zu einer Metrik auf H und unter Benutzung der Parametrisierung $\gamma_n(t) = -i \log r_n + t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die folgende Abschätzung ergibt:

$$L_h(\gamma_n) = \int_{\gamma_n} \frac{d|z|}{2 \operatorname{Im} z} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{-2 \log r_n} = -\frac{\pi}{\log r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ,$$

also

$$L_{h_0}(f \circ \kappa_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Wähle nun eine einfach zusammenhängende Umgebung $U \subset X$ von w_0 . Nach Voraussetzung ist $f(z_n) \in \operatorname{Spur} f \circ \kappa_n \cap U$ für fast alle n , und damit ist auch

$$\operatorname{Spur} f \circ \kappa_n \subset U , \quad n \gg 0 .$$

Dann ist aber $f \circ \kappa_n \sim 0$ in X .

(**) ist aber klar: Die Metrik h ist $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ -invariant, also erst recht invariant unter $\Gamma_0 \subset \Gamma = \operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$, und induziert die euklidische Topologie auf $H \cong D$. Also induziert h eine Metrik h_0 auf dem Quotientenraum $H/\Gamma_0 \cong X$, die die *Quotiententopologie* auf X erzeugt. Die letztere ist aber trivialerweise die vorgegebene Topologie auf X . \square

26 Garben und Cohomologie - Theorie

Zum Nachweis der Existenz von *globalen* analytischen Objekten hilft oft das Wissen um das Vorhandensein lokaler Lösungen und das Verschwinden „topologischer Hindernisse“, die vielfach von „(co)homologischer“ Natur sind. Z. B.: Ist $f \in \mathcal{O}^*(G)$, so gibt es lokal um einen beliebigen Punkt $z_0 \in G$ immer Funktionen g mit $\exp g(z) = f(z)$, $z \in U = U(z_0)$. Wann aber gibt es einen globalen Zweig $g \in \mathcal{O}(G)$ des Logarithmus von f ? Wir werden weiter unten sehen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn eine f zugeordnete *Cohomologie-Klasse* mit Werten in \mathbb{Z} verschwindet. Alle solchen Klassen verschwinden, wenn die Cohomologie-Gruppe $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ ist, und dies ist der Fall, wenn das Gebiet *einfach zusammenhängend* ist.

Wir wollen solche Probleme in diesem Kapitel systematischer angehen. Der richtige Rahmen ist die Sprache der Garben und der Cohomologie mit Werten in Garben.

Definition und Notation. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* \mathcal{F} von abelschen Gruppen besteht aus einem Paar (\mathcal{F}, ρ) , wobei

- i) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$ eine Familie abelscher Gruppen und
- ii) $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \mathcal{T}, V \subset U}$ eine Familie von Gruppenhomomorphismen $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ bezeichnet mit

$$\rho_U^U = \text{id}_U \quad \text{für alle } U \in \mathcal{T}$$

und

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U, \quad W \subset V \subset U.$$

Für ein Element $f \in \mathcal{F}(U)$ schreibt man oft auch kurz $f|_V = \rho_V^U(f)$ und nennt $f|_V$ die *Einschränkung* von f auf $V \subset U$. Dementsprechend heißen die Abbildungen ρ_V^U auch *Restriktions-Abbildungen* oder *Einschränkungs-Homomorphismen*.

Man erklärt in naheliegender Weise auch *Prägarben von Mengen*, von *Vektorräumen*, von *Ring*en und sogar von *Moduln* \mathcal{M} über einer Prägarbe von Ringen \mathcal{R} . In dem letzten Fall sind die $\mathcal{M}(U)$ Moduln über den Ringen $\mathcal{R}(U)$; ist dann $V \subset U$, so wird durch den Einschränkungs-Homomorphismus $\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(V)$ der $\mathcal{R}(V)$ -Modul $\mathcal{M}(V)$ auch zu einem $\mathcal{R}(U)$ -Modul, und es ist zu verlangen, daß die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(U)$ -Moduln in diesem Sinne ist.

Bemerkung. Etwas „vornehmer ausgedrückt“ ist eine Garbe \mathcal{F} nichts anderes als ein *kontravarianter Funktor* von der Kategorie der offenen Teilmengen eines festen topologischen Raumes X zusammen mit den Inklusionen als Morphismen in die Kategorie der abelschen Gruppen mit den Gruppenhomomorphismen als Morphismen. Manche Autoren verlangen dabei noch, daß $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. (Siehe aber auch weiter unten).

Beispiele. 1. X sei ein topologischer Raum, und $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ sei die \mathbb{C} -Algebra der *stetigen Funktionen* auf $U \subset X$. Zusammen mit der üblichen Einschränkung $f|_V$ für $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$, $V \subset U$, erhält man eine Prägarbe, die mit dem Symbol \mathcal{C} bezeichnet wird; dies ist sogar eine Prägarbe von \mathbb{C} -Algebren.

2. Ganz entsprechend interpretiert man für eine RIEMANNSCHE *Fläche* X das Symbol \mathcal{O} als eine Prägarbe, die jeder offenen Menge $U \subset X$ die Algebra $\mathcal{O}(U)$ der *holomorphen Funktionen* auf U zuordnet (zusammen mit der üblichen Einschränkung von Funktionen). Auch diesmal ist \mathcal{O} eine Prägarbe von \mathbb{C} -Algebren.

3. X sei ein topologischer Raum, R ein beliebiger Ring, $R(U) = \{f : U \rightarrow R : f \text{ lokal konstant}\}$. Dann ist R eine Prägarbe (von Ringen).

Diese Beispiele von Prägarben (gegeben durch Ringe von konkreten *Abbildungen* zusammen mit den üblichen *Einschränkungsabbildungen*) erfüllen automatisch zwei weitere wichtige Bedingungen, nämlich eine Eindeutigkeits- und eine Existenz-Eigenschaft, die man auch als *SERRE-Bedingungen* bezeichnet:

Definition. Eine Prägarbe (\mathcal{F}, ρ) heißt eine *Garbe*, falls für $U = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ folgende Axiome erfüllt sind:

(I) $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$, $(f_1)|_{U_\iota} = (f_2)|_{U_\iota}$ für alle $\iota \in I$ impliziert $f_1 = f_2$.

(II) Sind Elemente $f_\iota \in \mathcal{F}(U_\iota)$ gegeben mit $(f_\iota)|_{U_\iota \cap U_\kappa} = (f_\kappa)|_{U_\iota \cap U_\kappa}$ für alle $\iota, \kappa \in I$, so existiert ein (eindeutig bestimmtes) Element $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_\iota} = f_\iota$ für alle $\iota \in I$.

Bei einer Garbe \mathcal{F} bezeichnet man ein Element in $\mathcal{F}(U)$ auch als einen *Schnitt* in \mathcal{F} über U , und die Gruppe $\mathcal{F}(U)$ heißt die *Gruppe der Schnitte* oder der *Schnitt-Modul* von \mathcal{F} über U .

Beispiele. 1. \mathcal{C} heißt die *Garbe der stetigen Funktionen* auf dem topologischen Raum X .

2. \mathcal{O} heißt die *Garbe der holomorphen Funktionen* auf der Riemannschen Fläche X .

3. Die einem Ring R wie oben zugeordnete Garbe bezeichnet man ebenfalls mit R und nennt sie die *konstante R -Garbe* oder *Garbe der lokal-konstanten Funktionen mit Werten in R* auf dem topologischen Raum X .

4. Mit \mathcal{M} bezeichnen wir die *Garbe der meromorphen Funktionen* auf einer Riemannschen Fläche X . \mathcal{M} ist eine \mathcal{O} -Modulgarbe.

5. Mit \mathcal{O}^* bezeichnen wir die (multiplikativ geschriebene) *Garbe der nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen* auf der Riemannschen Fläche X .

6. Entsprechend ist unter \mathcal{M}^* die Garbe zu verstehen mit

$$\mathcal{M}^*(U) = \{ f \in \mathcal{M}(U) : f \text{ verschwindet auf keiner Zusammenhangskomponenten von } U \text{ identisch} \}.$$

Bemerkung. Wendet man die Serreschen Garbenaxiome (I) und (II) auf die Überdeckung

$$U = \emptyset = \bigcup_{\iota \in \emptyset} U_\iota$$

an, so ergibt sich für eine *Garbe* \mathcal{F} stets $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

Man ordnet nun einer beliebigen *Prägarbe* \mathcal{F} ein *topologisches* Objekt über dem Raum X zu, mit dessen Hilfe man sie in eine *Garbe* „einbetten“ kann. Zunächst definiert man den *Halm* von \mathcal{F} über einem Punkt $x \in X$: Es bezeichne $\mathcal{T}_x = \{ U \subset \mathcal{T} : x \in U \}$ den (offenen) *Umgebungsfilter* von x ; dann ist $(\mathcal{F}(U), \rho_V^U)_{V \subset U, U, V \in \mathcal{T}_x}$ ein *induktiv geordnetes* System, so daß wir auf der disjunkten Vereinigung

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{T}_x} \mathcal{F}(U)$$

eine Äquivalenzrelation erklären können vermöge

$$\mathcal{F}(U) \ni f \sim_x g \in \mathcal{F}(V) \iff \text{es existiert } W \subset U \cap V, W \in \mathcal{T}_x, \text{ so daß } f|_W = g|_W.$$

Die Äquivalenzklasse eines Schnittes $f \in \mathcal{F}(U)$ bzgl. der Relation \sim_x für $x \in U$ nennen wir auch den *Keim* f_x von f im Punkte x . Selbstverständlich können wir solche Keime mittels Repräsentanten auf gemeinsamen Definitionsbereichen addieren (evtl. auch multiplizieren), so daß der *Halm*

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{\mathcal{T}_x} := \bigsqcup_{U \in \mathcal{T}_x} \mathcal{F}(U) / \sim_x$$

von \mathcal{F} in x wieder eine *abelsche Gruppen–Struktur* etc. mit dem Nullelement $(0_U)_x$, 0_U das Nullelement in $\mathcal{F}(U)$, besitzt. Die kanonische Abbildung $f \mapsto f_x$ ist ein Gruppen–Homomorphismus $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$, den wir auch manchmal mit ρ_x^U bezeichnen.

Beispiel. Der Halm \mathcal{O}_{z_0} , $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$, besteht aus den Keimen holomorpher Funktionen im Punkte z_0 , und diese stehen in eineindeutiger Korrespondenz zu den *konvergenten Potenzreihen* in z_0 . Also ist, sogar als \mathbb{C} –Algebra,

$$\mathcal{O}_{z_0} \cong \mathbb{C} \langle z - z_0 \rangle ,$$

wobei die rechte Seite den *Ring der konvergenten Potenzreihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

im Punkte z_0 bezeichnet, also der Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius.

Weiter unten benötigen wir eine einfache Kennzeichnung des Nullelementes 0_U für den Schnittmodul $\mathcal{F}(U)$ einer *Garbe* \mathcal{F} . Wir fügen den leichten Beweis an dieser Stelle ein, um uns mit den einfachen Schlußweisen bei Garben vertraut zu machen.

Lemma 26.1 *\mathcal{F} sei eine Garbe abelscher Gruppen, und es sei $f \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt : $f = 0_U \in \mathcal{F}(U)$ genau dann, wenn $f_x = 0_x$ für alle $x \in U$.*

Beweis. Da die Restriktionsabbildung ρ_V^U ein Gruppen–Homomorphismus ist, ist das Bild von 0_U gleich 0_V . Daraus folgt sofort $(0_U)_x = 0_x$. Ist umgekehrt für einen Schnitt $f \in \mathcal{F}(U)$ der Keim f_x gleich 0_x für alle $x \in U$, so gibt es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$, so daß $f|_V = 0_V = (0_U)|_V$. Aus dem Eindeutigkeits–Axiom (I) folgt unmittelbar $f = 0_U$. \square

Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung aller Halme \mathcal{F}_x der Prägarbe \mathcal{F} , die wir mit $|\mathcal{F}|$ bezeichnen, zusammen mit der Projektion

$$p : \begin{cases} |\mathcal{F}| & := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \longrightarrow X \\ & \cup \\ & \mathcal{F}_x \qquad \qquad \qquad \longmapsto x \end{cases}$$

Ferner ordnen wir jedem Schnitt $f \in \mathcal{F}(U)$ eine Menge $[U, f] \subset |\mathcal{F}|$ zu vermöge:

$$[U, f] := \{ f_x : x \in U \} .$$

Satz 26.2 *Das System \mathcal{B} aller Mengen $[U, f]$, $f \in \mathcal{F}(U)$, ist die Basis einer Topologie auf $|\mathcal{F}|$, für die die Projektion $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ lokal topologisch ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Man kann $|\mathcal{F}|$ auf kanonische Weise eine Garbe zuordnen:

$$|\mathcal{F}|(U) = \{ s : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig mit } p \circ s = \text{id}_U \} ,$$

die wir wieder mit $|\mathcal{F}|$ bezeichnen. Man hat dann offensichtliche kanonische Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(U) \longrightarrow |\mathcal{F}|(U) \\ f \longmapsto s_f , \text{ wobei } s_f(x) := f_x , \end{cases}$$

die mit den Einschränkungabbildungen kommutieren. -

Satz 26.3 Die Prägarbe \mathcal{F} ist genau dann eine Garbe, wenn die kanonischen Homomorphismen $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} |\mathcal{F}|(U)$ Isomorphismen sind für alle offenen Teilmengen $U \subset X$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung. Im folgenden werden wir die Garbe \mathcal{F} stets mit der Garbe der (stetigen) Schnitte in dem topologischen Raum $|\mathcal{F}|$ identifizieren.

Definition. Die Prägarbe \mathcal{F} genügt dem Identitätssatz, falls aus $f, g \in \mathcal{F}(G)$, $G \subset X$ ein Gebiet, und $f_x = g_x$ für ein $x \in G$ folgt, daß $f = g$.

Beispiele. Die Garben \mathcal{O}, \mathcal{M} genügen dem Identitätssatz, nicht aber z. B. $\mathcal{C}, \mathcal{C}^\infty$.

Satz 26.4 Die Prägarbe \mathcal{F} genüge dem Identitätssatz. Dann ist die Garbe $|\mathcal{F}|$ (als topologischer Raum) hausdorffsch, falls der unterliegende topologische Raum X lokal zusammenhängt.

Beispiel. Als erste Anwendung der Garbe $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für eine Riemannsche Fläche X können wir die Riemannsche Fläche, also die „maximale analytische Fortsetzung“ eines Funktionskeimes f_x erneut konstruieren. Es ist $f_x \in |\mathcal{O}|$, und Z bezeichne die Zusammenhangskomponente von f_x in dem Raum $|\mathcal{O}|$ mit der Projektion $p|_Z : Z \rightarrow X$. Dann trägt Z in kanonischer Weise eine holomorphe Struktur und eine holomorphe Funktion f mit den gewünschten Eigenschaften.

Gemäß der allgemeinen Philosophie des „Funktoriellen“ müssen wir jetzt neben Garben auch *Garbenmorphismen* einführen.

Definition. Es seien (\mathcal{F}, ρ) und (\mathcal{G}, ρ) (Prä-) Garben. Ein (Prä-) *Garbenmorphismus* φ ist ein System von Gruppenhomomorphismen $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, so daß für alle $V \subset U$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutieren.

Beispiele. 1. Die lokal konstanten Funktionen sind sowohl stetig als auch differenzierbar etc. Dies führt zu den Garbenhomomorphismen

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}.$$

2. Des weiteren hat man auf offenen Teilmengen X von (\mathbb{R}^n) und \mathbb{C}^n die Garbenhomomorphismen

$$d : \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,1)},$$

wobei

$$df := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

bzw.

$$df := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

das *totale Differential* und

$$\bar{\partial}f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

dessen Anteil im „Bigrad“ $(0, 1)$ bezeichnet bzgl. der offensichtlichen Zerlegung

$$\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)} .$$

(Siehe auch weiter unten).

3. Die Zuordnung $\mathcal{F}(U) \longrightarrow |\mathcal{F}|(U)$ ist ein Morphismus von Prägarben. Die Garbe $|\mathcal{F}|$ ist eindeutig bestimmt durch die folgende *universelle Eigenschaft*:

Jeder Prägarben–Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ der Prägarbe \mathcal{F} in eine Garbe \mathcal{G} faktorisiert über $|\mathcal{F}|$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ & \searrow & \nearrow |\varphi| \\ & |\mathcal{F}| & \end{array}$$

4. Es gibt eine wohlbestimmte Garbe, deren Halme die triviale Gruppe ist; man bezeichnet sie aus naheliegenden Gründen mit 0 . Für jede Garbe \mathcal{F} hat man eindeutig bestimmte Homomorphismen $0 \rightarrow \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \rightarrow 0$.

Eine Garbenabbildung $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ induziert für alle $x \in X$ einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ durch

$$\varphi_x(f_x) = (\varphi(f))_x .$$

Definition. Eine Sequenz

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

von Garben heißt *exakt* (an der Stelle \mathcal{G}), falls die induzierte Sequenz

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x$$

exakt ist für alle $x \in X$ (d. h. wenn $\text{im } \varphi_x = \ker \psi_x$ gilt für alle $x \in X$). Ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

exakt, so heißt φ ein *Garbenmonomorphismus*; ist die Sequenz

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

exakt, so heißt φ ein *Garbenepimorphismus*. Ist beides richtig, so heißt φ ein *Garbenisomorphismus*.

Satz 26.5 Ein Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist genau dann ein Garbenmonomorphismus, wenn die Abbildungen

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

injektiv sind für alle offenen Teilmengen $U \subset X$.

Beweis. Sei φ ein Monomorphismus und $\varphi_U(f) = 0$ für einen Schnitt $f \in \mathcal{F}(U)$. Für beliebiges $x \in U$ ist dann $\varphi_x(f_x) = (\varphi_U(f))_x = 0_x$ und folglich $f_x = 0_x$. Dies impliziert wegen Lemma 1 $f = 0$.

Es seien umgekehrt alle Abbildungen φ_U injektiv und $\varphi_x(f_x) = 0$ für einen Keim f_x . Es sei $f \in \mathcal{F}(U)$ ein Repräsentant von f_x in einer Umgebung U von x . Dann ist $(\varphi_U(f))_x = \varphi_x(f_x) = 0_x$, und es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von x , so daß $\varphi_V(f|_V) = 0_V$. Folglich ist $f|_V = 0_V$ und damit $f_x = 0_x$. \square

Warnung. Eine analoge Aussage zu Satz 5 ist *nicht* richtig für Epimorphismen: Ist $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Epimorphismus und $g \in \mathcal{G}(U)$, so folgt nur: Für alle $x \in U$ existiert eine Umgebung V von x mit $V \subset U$ und ein Schnitt $f_V \in \mathcal{F}(V)$, so daß $\varphi_V(f_V) = g|_V$.

Beispiel. Da lokal Logarithmen von nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen existieren, ist der durch das „Exponieren“ $f \mapsto e^f$ gegebene Garbenhomomorphismus $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ ein Epimorphismus, aber die Homomorphismen $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}^*(U)$, $U \subset \mathbb{C}$, sind nicht notwendig surjektiv, z. B. im Falle $U = \mathbb{C}^*$.

Man kann Exaktheit auch für längere Sequenzen erklären durch „Exaktheit an allen erlaubten Stellen“. Es folgt leicht in Verallgemeinerung von Satz 5:

Satz 26.6 *Ist die Garben-Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$$

exakt, so auch die entsprechenden Sequenzen der Schnittmoduln :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U), \quad U \subset X.$$

Bemerkung. Man umschreibt diesen Sachverhalt mit der Sprechweise: „Der Schnittfunktor ist links-exakt“.

Folgerung 26.7 *Ein Garbenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist genau dann eine Isomorphie von Garben, wenn alle Homomorphismen φ_U , $U \subset X$, bijektiv sind.*

Beweis. Eine Richtung ergibt sich unmittelbar aus dem vorstehenden Satz. Ist umgekehrt $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ein Isomorphismus für alle offenen Mengen $U \subset X$, so ist auch

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

ein Gruppen-Isomorphismus für alle $x \in X$. \square

Beispiel. Der Epimorphismus $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ kann ergänzt werden zu der wichtigen kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1,$$

wobei 1 für die multiplikativ geschriebene *triviale Garbe* steht. Hieraus ergibt sich die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(U) \xrightarrow{\cdot 2\pi} \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(U)$$

für alle *Gebiete* $U \subset \mathbb{C}$, aber i. a. nicht die Surjektivität des Pfeiles auf der rechten Seite.

Definition und Bemerkung. Ist $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus, so kann man eine Garbe $\ker \varphi$ erklären durch

$$(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U \subset \mathcal{F}(U),$$

und die kanonische Sequenz

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

ist exakt, d. h. $(\ker \varphi)_x = \ker \varphi_x \subset \mathcal{F}_x$ für alle $x \in X$. $\ker \varphi$ heißt der *Kern* des Homomorphismus φ . Wegen $|\ker \varphi| \subset |\mathcal{F}|$ fassen wir den Kern von φ als *Untergarbe* von \mathcal{F} auf.

Ist umgekehrt

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

eine exakte Sequenz, so ist die Garbe \mathcal{K} kanonisch isomorph zu $\ker \varphi$.

Dagegen muß man bei der Definition des *Bildes* im $\varphi \subset \mathcal{G}$ vorsichtiger sein. Man setzt:

$$(\operatorname{im} \varphi)(U) := \{f \in \mathcal{G}(U) : \text{für alle } x \in U \text{ existiert } V = V(x) \subset U, \text{ so daß } f|_V \in \operatorname{im} \varphi_V\}.$$

Man beweist leicht $(\operatorname{im} \varphi)_x = \operatorname{im} \varphi_x$, so daß $\operatorname{im} \varphi$ als eine Untergarbe von \mathcal{G} aufgefaßt werden kann und der Homomorphismus φ über $\operatorname{im} \varphi$ faktorisiert. Die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{im} \varphi \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Bemerkung. Zu jeder Untergarbe $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ gibt es, wie in der linearen Algebra, auch eine *Quotientengarbe* \mathcal{F}/\mathcal{K} mit einer kanonischen assoziierten Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Die Schnitte in der Quotientengarbe sind Äquivalenzklassen von Schnitten in \mathcal{F} , die sich *lokal* um Schnitte in \mathcal{K} unterscheiden.

Für einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ liefert diese Konstruktion eine Quotientengarbe $\mathcal{G}/\operatorname{im} \varphi$, die man auch als *Cokern* von φ bezeichnet. Man hat also stets auch die exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \varphi \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow 0.$$

Es sei uns im folgenden eine sogenannte *kurze* exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

vorgegeben. Wir wollen uns ganz allgemein die Frage stellen, wann $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ für eine feste offene Menge $U \subset X$ surjektiv ist bzw. genauer, wann ein Schnitt $g \in \mathcal{G}(U)$ ein Urbild $f \in \mathcal{F}(U)$ besitzt. Da man Garben auf X in offensichtlicher Weise auf offene Teilmengen U einschränken kann, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U = X$ voraussetzen.

Wegen der Surjektivität von φ gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ von X und Urbilder $f_\iota \in \mathcal{F}(U_\iota)$ für $g|_{U_\iota}$. Wir nennen das System $(f_\iota)_{\iota \in I}$ ein System *lokaler Liftungen von g zur Überdeckung \mathfrak{U}* . Wenn man den Schnitt g liften kann zu einem Schnitt f , so kann man natürlich $f_\iota := f|_{U_\iota}$ wählen und hat dann automatisch

$$f_{\iota\kappa} := (f_\iota)|_{U_{\iota\kappa}} - (f_\kappa)|_{U_{\iota\kappa}} = 0 \text{ auf dem Durchschnitt } U_{\iota\kappa} := U_\iota \cap U_\kappa.$$

Für beliebige Systeme von lokalen Liftungen braucht dies natürlich nicht zu gelten; man hat aber

$$\varphi_{U_{\iota\kappa}}(f_{\iota\kappa}) = g|_{U_{\iota\kappa}} - g|_{U_{\iota\kappa}} = 0$$

und damit

$$f_{\iota\kappa} \in (\ker \varphi)(U_{\iota\kappa}) = \mathcal{K}(U_{\iota\kappa}).$$

Wir können damit die Elemente $f_{\iota\kappa}$ als Schnitte in dem Kern \mathcal{K} von φ über dem Durchschnitt $U_{\iota\kappa}$ auffassen. Das System der $(f_{\iota\kappa})_{(\iota,\kappa) \in I \times I}$ ist aber nicht völlig willkürlich, denn auf dreifachen Durchschnitten $U_{\iota\kappa\lambda} = U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$ gilt notwendig die sogenannte *Cozykel-Bedingung*

$$(*) \quad f_{\iota\kappa} + f_{\kappa\lambda} + f_{\lambda\iota} = f_\iota - f_\kappa + f_\kappa - f_\lambda + f_\lambda - f_\iota = 0,$$

die, in einem allgemeinen abstrakten Rahmen auch ohne die vorherige spezielle Herleitung, weitere Bedingungen nach sich zieht wie (man setze erst $\lambda = \kappa = \iota$ und dann $\lambda = \iota$):

$$(**) \quad f_{\iota\iota} = 0, \quad f_{\iota\kappa} = -f_{\kappa\iota}.$$

Wir nennen ein solches System $(f_{\iota\kappa})_{(\iota,\kappa) \in I \times I}$ einen 1–Cozyklus zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in der Garbe \mathcal{K} . Die Gesamtheit dieser 1–Cozyklen bildet offensichtlich eine abelsche Gruppe, die wir mit

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K})$$

bezeichnen.

Wir haben also jedem globalen Schnitt $g \in \mathcal{F}(X)$ bzgl. eines festen Systems lokaler Liftungen eine (von g abhängende) offene Überdeckung \mathfrak{U} von X und einen 1–Cozyklus

$$\delta g \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K})$$

zugeordnet. Wenn wir ein anderes System $(\tilde{f}_\iota)_{\iota \in I}$ von lokalen Liftungen von g zur gleichen Überdeckung \mathfrak{U} wählen, so liegen die Differenzen $k_\iota := \tilde{f}_\iota - f_\iota$ in $\mathcal{K}(U_\iota)$, so daß für den hiermit konstruierten 1–Cozyklus $\tilde{\delta}g$ gilt:

$$(\tilde{\delta}g)_{\iota\kappa} - (\delta g)_{\iota\kappa} = k_\iota - k_\kappa.$$

1–Cozyklen dieser Art nennt man auch 1–Coränder zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in der Garbe \mathcal{K} . Diese bilden die Untergruppe

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K})$$

der zerfallenden oder 0–cohomologen 1–Cozyklen. Die letzte Bezeichnung steht im Zusammenhang mit der Quotientengruppe

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K}),$$

die man auch als 1–te (Čechsche) Cohomologiegruppe zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in der Garbe \mathcal{K} bezeichnet. - Wir halten fest: Zu jedem Schnitt $g \in \mathcal{G}(X)$ liefern Systeme von lokalen Liftungen zu einer festen Überdeckung \mathfrak{U} eine wohlbestimmte Cohomologie–Klasse

$$\delta g \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K}).$$

Lemma 26.8 *Der Schnitt $g \in \mathcal{G}(X)$ besitzt genau dann ein Urbild in $\mathcal{F}(X)$ unter dem Garbepimorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, wenn eine solche zugeordnete Cohomologie–Klasse $\delta g \in H^1(\mathfrak{U}, \ker \varphi)$ verschwindet (und dann verschwinden alle diese „Hindernisse“).*

Insbesondere ist unter dieser Voraussetzung der Schnitt–Homomorphismus

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$

surjektiv, wenn für alle offenen Überdeckungen \mathfrak{U} von X die erste Čechsche Cohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{U}, \ker \varphi)$ Null ist.

Beweis. Läßt sich g zu einem Schnitt in \mathcal{F} „liften“, so kann man den Cozyklus $(f_{\iota\kappa})$ zu einer beliebigen offenen Überdeckung \mathfrak{U} so wählen, daß $f_{\iota\kappa} = 0_{U_{\iota\kappa}}$. Dieser Cozyklus zerfällt aber offenbar:

$$0_{U_{\iota\kappa}} = 0_{U_\iota} - 0_{U_\kappa}.$$

Ist umgekehrt für eine feste Überdeckung \mathfrak{U} der Cozyklus $f_{\iota\kappa}$ ein Corand in der Garbe $\mathcal{K} = \ker \varphi$, so gibt es Schnitte $k_\iota \in \mathcal{K}(U_\iota)$, so daß auf jedem Durchschnitt $U_{\iota\kappa}$ gilt:

$$f_\iota - f_\kappa = f_{\iota\kappa} = k_\iota - k_\kappa.$$

Dann kann aber $\tilde{f}_\iota := f_\iota - k_\iota$ ebenfalls als ein Schnitt in $\mathcal{F}(U_\iota)$ aufgefaßt werden, der wegen

$$\tilde{f}_\iota = \tilde{f}_\kappa \quad \text{auf } U_{\iota\kappa}$$

und dem Serreschen Garbenaxiom (II) sich zu einem globalen Schnitt $\tilde{f} \in \mathcal{F}(X)$ zusammenfügt. Weiter ist

$$(\varphi_X(\tilde{f}))|_{U_\iota} = \varphi_{U_\iota}(\tilde{f}|_{U_\iota}) = \varphi_{U_\iota}(f_\iota - k_\iota) = \varphi_{U_\iota}(f_\iota) = g|_{U_\iota},$$

da $k_\iota \in \ker \varphi_{U_\iota}$, und damit $\varphi_X(\tilde{f}) = g$. \square

Als *Konsequenz* aus der vorstehenden Diskussion sehen wir, daß das Verschwinden von Cohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{K})$ zu Existenzaussagen für analytische Objekte führen kann. Insbesondere liefert das soeben bewiesene Lemma zusammen mit der exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ das folgende

Korollar 26.9 *Ist für jede offene Überdeckung \mathfrak{U} der Riemannschen Fläche X die erste Cohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ gleich Null, so besitzt jede nirgends verschwindende holomorphe Funktion f auf X einen globalen Logarithmus.*

Bevor wir uns der Entwicklung der allgemeinen Cohomologie–Theorie zuwenden, wollen wir noch eine weitere Anwendung in Bezug auf das MITTAG–LEFFLER–Problem vorstellen. Dieses besteht bekanntlich darin, meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenem lokalem Verhalten zu konstruieren. Für eine systematische Behandlung (auch auf Riemannschen Flächen) bedeutet dies:

Definition. Eine MITTAG–LEFFLER–Verteilung auf einer Riemannschen Fläche X (zur Überdeckung \mathfrak{U}) ist ein System

$$(h_\iota)_{\iota \in I} \quad \text{mit} \quad h_\iota \in \mathcal{M}(U_\iota),$$

so daß

$$(+) \quad h_{\iota\kappa} := h_\iota - h_\kappa \in \mathcal{O}(U_{\iota\kappa}) \text{ auf } U_{\iota\kappa} \text{ für alle } \iota, \kappa \in I.$$

Eine Lösung dieser Verteilung ist eine globale meromorphe Funktion

$$h \in \mathcal{M}(X)$$

mit

$$h|_{U_\iota} - h_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota) \text{ für alle } \iota \in I.$$

Bemerkungen. 1. Die Bedingung (+) ist offensichtlich notwendig, damit die vorgegebene MITTAG–LEFFLER–Verteilung überhaupt eine Lösung besitzen kann!

2. Sie ist gleichbedeutend damit, daß der durch

$$h_{\iota\kappa} := h_\iota - h_\kappa$$

definierte 1–Cozyklus in

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$$

liegt.

Wortwörtlich wie oben zeigt man dann:

Satz 26.10 *Das Mittag–Leffler–Problem (h_ι) zur Überdeckung \mathfrak{U} ist genau dann lösbar, wenn der zugeordnete Cozykel $(h_{\iota\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ cohomolog Null in \mathcal{O} ist.*

Jede Mittag–Leffler–Verteilung auf X ist lösbar, wenn die Cohomologiegruppen

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

verschwinden.

Bemerkung. Man macht sich sofort klar, daß in der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

die Schnitte in der Quotientengarbe \mathcal{M}/\mathcal{O} in eineindeutiger Korrespondenz zu den MITTAG–LEFFLER–Verteilungen stehen. Somit ist der vorstehende Satz eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma 8.

Beispiel. X sei eine (zusammenhängende) nicht kompakte Riemannsche Fläche (z. B. ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$). Dann gilt

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0 \text{ für alle Überdeckungen } \mathfrak{U} .$$

Wir werden dieses tiefliegende Resultat nicht beweisen. (Siehe aber das folgende Kapitel, in dem wir zumindest den Fall einer Kreisscheibe bzw. den Fall $X := \mathbb{C}$ behandeln). Es hat zur Konsequenz, daß auf jeder solchen Riemannschen Fläche jedes Mittag–Leffler–Problem lösbar ist.

Wir gehen die Cohomologie–Theorie jetzt in größerer Allgemeinheit an. Es sei X ein topologischer Raum, und $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ sei eine offene Überdeckung. Für $(\iota_0, \dots, \iota_q) \in I^{q+1}$ setzen wir dann

$$U_{\iota_0, \dots, \iota_q} := U_{\iota_0} \cap \dots \cap U_{\iota_q} .$$

Die q -te Cokettengruppe mit Werten in einer Garbe \mathcal{F} ist gegeben durch

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(\iota_0, \dots, \iota_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\iota_0, \dots, \iota_q}) .$$

Für eine q -Cokette $\xi = (f_{\iota_0, \dots, \iota_q})$ definieren wir einen (Co-) Rand $\delta\xi \in C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ durch

$$(\delta\xi)_{\kappa_0, \dots, \kappa_{q+1}} := \sum_{\lambda=0}^{q+1} (-1)^\lambda (f_{\kappa_0, \dots, \widehat{\kappa_\lambda}, \dots, \kappa_{q+1}})|_{U_{\kappa_0, \dots, \kappa_{q+1}}} .$$

Klar ist, daß $\delta := \delta^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Gruppenhomomorphismus ist, und man rechnet leicht nach, daß $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$. Damit hat man Untergruppen

$$Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker(\delta^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$$

und

$$B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{im}(\delta^{q-1} : C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) ,$$

wobei noch formal $C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ zu setzen ist. Wegen $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$ ist dann $B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subset Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Definition und Bemerkung.

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

heißt die q -te (Čechsche) Cohomologiegruppe zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in der Garbe \mathcal{F} .

Berechnen wir diese Cohomologiegruppe für $q = 0$. Nach Definition ist $B^0 = 0$, also $H^0 = Z^0$. $(f_\iota) \in Z^0$ heißt aber $\delta(f_\iota) = (f_\iota - f_\kappa) = 0$ in C^1 , d. h. $f_\iota = f_\kappa$ auf $U_\iota \cap U_\kappa$. Folglich ist

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

unabhängig von der Überdeckung \mathfrak{U} . Man macht sich weiter sofort klar, daß für $q = 1$ die weiter oben gegebene Definition herauskommt.

Als nächstes müssen wir uns von der speziellen Überdeckung \mathfrak{U} befreien. Die Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_\kappa\}_{\kappa \in K}$ heißt *feiner* als \mathfrak{U} , falls eine Abbildung $\tau : K \rightarrow I$ existiert mit $V_\kappa \subset U_{\tau(\kappa)}$. Es gibt dann leicht zu konstruierende (von τ unabhängige) Homomorphismen

$$(t^q)_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) ,$$

und da es zu zwei beliebigen Überdeckungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{W}$ stets eine *gemeinsame Verfeinerung* \mathfrak{V} gibt, existiert der induktive Limes

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) .$$

Definition. $H^q(X, \mathcal{F})$ heißt die q -te Čechsche Cohomologiegruppe von X mit Werten in \mathcal{F} .

Im Falle $q = 1$ ist die Abbildung $(t^1)_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{W}}$ stets injektiv. Denn ist $(f_{\iota\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Cozyklus, dessen Bild $(f_{\tau(\iota)\tau(\kappa)}) \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ zerfällt, dann ist $f_{\tau(k)\tau(\ell)} = g_k - g_\ell$ über $V_{k\ell}$ mit Schnitten $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$. In dem Durchschnitt $U_\ell \cap V_{k\ell}$ ist dann

$$g_k - g_\ell = f_{\tau(k)\tau(\ell)} = f_{\tau(k)\iota} + f_{\iota\tau(\ell)} = f_{\iota\tau(\ell)} - f_{\iota\tau(k)} ,$$

und folglich $g_k + f_{\iota\tau(k)} = g_\ell + f_{\iota\tau(\ell)}$, wodurch bzgl. der Überdeckung $(U_\ell \cap V_k)$ von U_ℓ ein Schnitt h_ℓ in \mathcal{F} über U_ℓ definiert wird. Für diese gilt aber auf $U_{\iota\kappa} \cap V_k$ die Beziehung

$$f_{\iota\kappa} = f_{\iota\tau(k)} + f_{\tau(k)\kappa} = f_{\iota\tau(k)} + g_k - f_{\kappa\tau(k)} - g_k = h_\ell - h_\kappa .$$

Da hierin k beliebig ist, folgt erneut aus dem zweiten Garbenaxiom die Gültigkeit dieser Gleichung auf ganz $U_{\iota\kappa}$. - Hieraus ergibt sich nun sofort:

Lemma 26.11 *Die kanonischen Homomorphismen*

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

sind stets injektiv.

Warnung. Eine entsprechende Aussage ist für $q \geq 2$ im Allgemeinen falsch!

Folgerung 26.12 *Ist $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$, so verschwinden auch die Cohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für jede beliebige Überdeckung \mathfrak{U} .*

Insbesondere ist auf einer Riemannschen Fläche X jedes Mittag–Leffler–Problem lösbar, wenn

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0 .$$

Es ist nun interessant zu wissen, wann die kanonischen Homomorphismen $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ schon isomorph sind.

Definition. \mathcal{F} sei eine Garbe von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum X , und \mathfrak{U} sei eine Überdeckung von X . \mathfrak{U} heißt eine LERAYsche Überdeckung (1. Ordnung) von X bzgl. \mathcal{F} , falls $H^1(U_\iota, \mathcal{F}) = 0$ ist für alle $\iota \in I$.

Wir haben nun den wichtigen

Satz 26.13 (Leray) *Ist die Überdeckung \mathfrak{U} Leraysch bezüglich der Garbe \mathcal{F} , so ist*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) .$$

Bemerkung. Man hat eine entsprechende Aussage auch für die q -ten Cohomologiegruppen, wenn sämtliche höheren Cohomologiegruppen für alle Durchschnitte der U_ι verschwinden.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für jede Verfeinerung \mathfrak{W} von \mathfrak{U} die Restriktionsabbildungen

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$$

Isomorphismen sind. Wegen Lemma 11 brauchen wir nur die Surjektivität zu beweisen. Es sei also $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$, und es sei ein Cozyklus $(f_{k\ell}) \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ vorgegeben. Da $U_\iota \cap \mathfrak{W}$ eine offene

Überdeckung von U_ℓ ist und nach Voraussetzung $H^1(U_\ell, \mathcal{F})$ verschwindet, ist auch $H^1(U_\ell \cap V_k, \mathcal{F}) = 0$. Somit existieren Schnitte $g_{\ell k}$ in \mathcal{F} über $U_\ell \cap V_k$, so daß über $U_\ell \cap V_{k\ell}$ gilt:

$$f_{k\ell} = g_{\ell k} - g_{\ell\ell}.$$

Dann ist auf $U_{\ell\kappa} \cap V_{k\ell}$ die Gleichheit $g_{\kappa k} - g_{\ell k} = g_{\kappa\ell} - g_{\ell\ell}$ erfüllt, und erneut nach dem zweiten Garbenaxiom gibt es Schnitte $F_{\ell\kappa} \in \mathcal{F}(U_{\ell\kappa})$, so daß

$$F_{\ell\kappa} = g_{\kappa k} - g_{\ell k} \quad \text{auf} \quad U_{\ell\kappa} \cap V_k.$$

Offensichtlich ist das System $(F_{\ell\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Wir setzen schließlich $h_k = (g_{\tau(k)k})|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$. Dann gilt über $V_{k\ell}$:

$$F_{\tau(k)\tau(\ell)} - f_{k\ell} = (g_{\tau(\ell)k} - g_{\tau(k)k}) - (g_{\tau(\ell)k} - g_{\tau(\ell)\ell}) = g_{\tau(\ell)\ell} - g_{\tau(k)k} = h_\ell - h_k.$$

Also zerfällt der 1–Cozyklus $(F_{\tau(k)\tau(\ell)}) - (f_{k\ell})$. □

Beispiele. 1. Nach dem Beispiel im Anschluß an Satz 10 ist jede Überdeckung einer Riemannschen Fläche mit Karten Leraysch bzgl. der Strukturgarbe \mathcal{O} , da die Karten konform äquivalent zu offenen Mengen in \mathbb{C} sind. Speziell ist die Standard–Überdeckung $\mathbb{P}_1 = U_0 \cup U_\infty$, $U_0 := \mathbb{C}$, $U_\infty := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}$, eine Leray–Überdeckung von \mathbb{P}_1 bezüglich \mathcal{O} . Ein 1–Cozykel mit Werten in \mathcal{O} ist dann vollständig bestimmt durch eine einzige holomorphe Funktion f_∞ auf dem Durchschnitt $U_0 \cap U_\infty = \mathbb{C}^*$. Nach dem Satz über die Laurent–Trennung ist aber

$$f_{0\infty} = f_0 - f_\infty \quad \text{mit holomorphen Funktionen} \quad f_0 \in \mathcal{O}(U_0), \quad f_\infty \in \mathcal{O}(U_\infty).$$

Somit ist

$$H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = 0.$$

Insbesondere kann jedes Mittag–Leffler–Problem auf \mathbb{P}_1 gelöst werden, was man aber ohne große Anstrengung direkt, d. h. ohne Cohomologie–Theorie einsehen kann.

2. Für die konstanten Garben $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind *kontrahierbare* topologische Räume X die „richtigen“ Objekte für Leray–Überdeckungen, d. h. für solche verschwindet $H^1(X, R)$. Hieraus folgt unmittelbar

$$H^1(\mathbb{C}, R) = 0, \quad H^1(\mathbb{C}^*, R) \cong R.$$

Für die zweite Behauptung überdeckt man \mathbb{C}^* mit den beiden offenen Mengen

$$U_+ := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad \text{und} \quad U_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Diese Mengen sind sternförmig und damit kontrahierbar. Somit ist U_+, U_- eine Leraysche Überdeckung bzgl. der konstanten Garbe R und ein 1–Cozyklus wird gegeben durch eine lokal konstante Funktionen auf $U_+ \cap U_- = H_+ \sqcup H_-$, also durch das Paar $(a_+, a_-) \in R \oplus R$ der Werte dieser Funktion auf der zusammenhängenden Menge H_+ bzw. auf H_- . Die Coränder können dann identifiziert werden mit dem Bild der Diagonal–Abbildung $R \ni a \mapsto (a, a) \in R \oplus R$, woraus sofort die Behauptung folgt.

Um die funktoriellen Eigenschaften der Cohomologie zu studieren, müssen wir noch Garbenmorphismen $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ betrachten. Ein solcher induziert offensichtliche Gruppenhomomorphismen

$$C^q(\varphi) : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}),$$

die mit den Corandoperatoren δ^q vertauschen:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{C^q(\varphi)} & C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \\ \delta^q \downarrow & & \downarrow \delta^q \\ C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{C^{q+1}(\varphi)} & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \end{array}$$

Dann existieren auch Homomorphismen

$$H_{\mathfrak{U}}^q(\varphi) : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) ,$$

und diese kommutieren mit den Verfeinerungsabbildungen; somit gewinnt man schließlich kanonische Gruppenhomomorphismen

$$H^q(\varphi) : H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{G}) .$$

Zu Beginn dieses Abschnittes haben wir zu einer kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, wenn man die dortigen Überlegungen geeignet interpretiert, eine Abbildung

$$H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

konstruiert und bewiesen, daß ein Teil der folgenden Aussage richtig ist.

Satz 26.14 *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

gibt es eine kanonische lange Cohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \\ & & H^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \\ & & H^2(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots & & . \end{array}$$

Diese Sequenz ist „funktoriell“ in der vorgegebenen kurzen exakten Sequenz.

Ohne *Beweis*. (Siehe FORSTER, *Riemannsche Flächen*, Satz 15. 12).

Bemerkung. „Jede“ Cohomologie–Theorie muß solches leisten.

Ganz wichtig sind nun Garben \mathcal{A} mit $H^q(X, \mathcal{A}) = 0$ für alle $q \geq 1$. Man nennt solche *azyklisch*. Eine *azyklische Auflöser* einer Garbe \mathcal{F} ist eine exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots$$

mit azyklischen Garben \mathcal{A}^q . (Jede Garbe besitzt Auflösungen durch sogenannte „welke“ Garben, die insbesondere azyklisch sind).

Man hat dann zu (*) einen *Komplex* von Schnittmoduln:

$$(**) \quad \mathcal{A}^*(X) : 0 \longrightarrow \mathcal{A}^0(X) \xrightarrow{\bar{\alpha}_0} \mathcal{A}^1(X) \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} \mathcal{A}^2(X) \xrightarrow{\bar{\alpha}_2} \dots ,$$

wobei $\bar{\alpha}_q := H^0(\alpha_q)$ bezeichnet. Der Terminus *Komplex* bedeutet, daß

$$\bar{\alpha}_{j+1} \circ \bar{\alpha}_j = 0 , \quad \text{d. h. im } \bar{\alpha}_j \subset \ker \bar{\alpha}_{j+1} .$$

Dies folgt selbstverständlich aus

$$\bar{\alpha}_{j+1} \circ \bar{\alpha}_j = H^0(\alpha_{j+1}) \circ H^0(\alpha_j) = H^0(\alpha_{j+1} \circ \alpha_j) = H^0(0) = 0 .$$

Im Allgemeinen ist dieser Komplex aber nicht exakt, d. h. es ist nicht notwendig im $\bar{\alpha}_j = \ker \bar{\alpha}_{j+1}$. Ein Maß für die „Inexaktheit“ des Schnitt–Komplexes (**) sind die abstrakten Cohomologiegruppen

$$H^q(\mathcal{A}^*(X)) = \ker \bar{\alpha}_q / \text{im } \bar{\alpha}_{q-1} .$$

Mit Satz 5 folgt sofort wegen $\bar{\alpha}_{-1} = 0$, daß

$$H^0(\mathcal{A}^*(X)) = \ker \bar{\alpha}_0 = \mathcal{F}(X) .$$

Tatsächlich erhält man so alle Cohomologiegruppen mit Werten in \mathcal{F} :

Satz 26.15 Ist $(*)$ eine azyklische Auflösung von \mathcal{F} , so gilt

$$H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\mathcal{A}^*(X)) \quad \text{für alle } q \geq 0.$$

Beweis. $(*)$ ist äquivalent zu einer Serie von kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{B}^1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathcal{B}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{B}^2 \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow \mathcal{B}^j \longrightarrow \mathcal{A}^j \longrightarrow \mathcal{B}^{j+1} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}^0 = \ker \alpha_0 \cong \mathcal{F}$ und $\mathcal{B}^j = \ker \alpha_j = \text{im } \alpha_{j-1}$ für $j \geq 1$ und die Abbildung $\alpha_j : \mathcal{A}^j \rightarrow \mathcal{A}^{j+1}$ über \mathcal{B}^{j+1} faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^j & \xrightarrow{\alpha_j} & \mathcal{A}^{j+1} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{B}^{j+1} & \end{array}$$

Daraus folgen exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{B}^j(X) \longrightarrow \mathcal{A}^j(X) \longrightarrow \mathcal{B}^{j+1}(X) \longrightarrow H^1(\mathcal{B}^j) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow H^1(\mathcal{B}^{j+1}) \longrightarrow H^2(\mathcal{B}^j) \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow H^q(\mathcal{B}^{j+1}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{B}^j) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

wenn wir abkürzend $H^q(\mathcal{F})$ für $H^q(X, \mathcal{F})$ schreiben. Also folgt induktiv für $j = q - 1$:

$$H^q(\mathcal{F}) = H^q(\mathcal{B}^0) = H^{q-1}(\mathcal{B}^1) = \dots = H^1(\mathcal{B}^{q-1}) \cong \mathcal{B}^q(X) / \text{im } (\mathcal{A}^{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{B}^q(X)).$$

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^j(X) & \xrightarrow{\bar{\alpha}_j} & \mathcal{A}^{j+1}(X) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{B}^{j+1}(X) & \end{array}$$

in dem die Abbildung $\mathcal{B}^{j+1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{j+1}(X)$ injektiv ist. Daraus folgt für $j = q \geq 1$:

$$\ker \bar{\alpha}_q = \ker (\mathcal{A}^q(X) \rightarrow \mathcal{B}^{q+1}(X)) = \mathcal{B}^q(X).$$

Weiter ist für $j = q - 1$:

$$\text{im } \bar{\alpha}_{q-1} = \text{im } (\mathcal{A}^{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{B}^q(X)).$$

Also ist

$$H^q(\mathcal{F}) \cong \mathcal{B}^q(X) / \text{im } (\mathcal{A}^{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{B}^q(X)) = \ker \bar{\alpha}_q / \text{im } \bar{\alpha}_{q-1} = H^q(\mathcal{A}^*(X)). \quad \square$$

Wir wenden dieses Resultat jetzt auf den DE RHAMschen *Isomorphismus* an und beschäftigen uns mit seinem komplex–analytischen Counterpart in Form des Satzes von DOLBEAULT im folgenden Kapitel. Es sei dazu X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Auf dieser existiert die Garbe \mathcal{E}^p der differenzierbaren p –Formen:

$$\mathcal{E}^p(U) = \text{Vektorraum der } p\text{-Formen auf } U .$$

Ist U eine Koordinatenumgebung auf X mit Koordinaten x_1, \dots, x_n , so ist

$$\mathcal{E}^p(U) = \left\{ \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right\} .$$

Der Differentialoperator $d : \mathcal{E}^p(U) \rightarrow \mathcal{E}^{p+1}(U)$ definiert einen Garbenmorphismus

$$d : \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1} \text{ für alle } p \geq 0 .$$

Sei $\alpha \in \mathcal{E}^p(U)$ eine *geschlossene* Form, d. h. $d\alpha = 0$. Dann liefert das POINCARÉsche *Lemma* die Existenz von Formen $\beta \in \mathcal{E}^{p-1}(V)$ auf sternförmigen Gebieten $V \subset U$ mit $d\beta = \alpha|_V$. D. h. insbesondere, daß die Garbensequenz

$$\mathcal{C}^\infty = \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n \longrightarrow 0$$

exakt ist. Der Kern von $d : \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1$ besteht aus den \mathcal{C}^∞ –Funktionen f mit $df = 0$, also aus den *lokal konstanten Funktionen*. Somit ist $\ker d$ die konstante \mathbb{R} –Garbe. - Dies liefert einen Teil der folgenden Aussagen.

Satz 26.16 *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X der Dimension n mit abzählbarer Topologie ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n \longrightarrow 0$$

eine azyklische Auflösung der konstanten \mathbb{R} –Garbe.

Dies vorausgesetzt, erhält man als Konsequenz die

Folgerung 26.17 (de Rham) *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X der Dimension n mit abzählbarer Topologie ist die Cohomologiegruppe $H^q(X, \mathbb{R})$ kanonisch isomorph zu der de Rham–schen Cohomologiegruppe*

$$dRh^q(X, \mathbb{R}) := \{ \alpha \in \mathcal{E}^q(X) : d\alpha = 0 \} / d\mathcal{E}^{q-1}(X) .$$

Bemerkungen. 1. Aus dem Satz von de Rham folgt $H^q(X, \mathbb{R}) = 0$ für alle $q > n = \dim_{\mathbb{R}} X$.

2. Ist $H^q(X, \mathbb{R}) = 0$ für ein festes $q \geq 1$, so ist *jede* geschlossene q –Form auf X exakt, und umgekehrt folgt aus dieser Tatsache das Verschwinden der Cohomologiegruppe $H^q(X, \mathbb{R})$, welche eine rein *topologische* Invariante ist. Wir sehen also erneut, daß die Existenz analytischer Objekte unmittelbar an topologische Bedingungen geknüpft sein kann. Speziell für *einfach zusammenhängende* Mannigfaltigkeiten X ist $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$, was zu der bekannten Bevorzugung von einfach zusammenhängenden Gebieten in Mathematik und Physik führt.

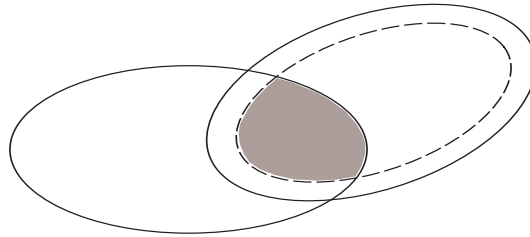
3. Das Poincarésche Lemma für sternförmige Gebiete $X \subset \mathbb{R}^n$ impliziert $H^q(X, \mathbb{R}) = 0$ für alle $q \geq 1$. Dies wurde weiter oben schon verwendet. Die Verschwindensaussage bleibt richtig für *kontrahierbare* Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Zum Beweis von Satz 16 und seiner Folgerung 17 ist natürlich nur zu zeigen, daß die Garben \mathcal{E}^p *azyklisch* sind. Dies liegt daran, daß \mathcal{E}^p „Teilungen der Eins“ gestattet. (Hierbei braucht man, daß der topologische Raum X *parakompakt* ist, also, wie in den Sätzen vorausgesetzt, abzählbare Topologie besitzt). Man nennt solche Garben auch *fein*; wir wollen deren Theorie hier aber nicht weiter ausbreiten.

Wir führen den *Beweis* nur für $q = 1$, um das Prinzip zu verdeutlichen. Es ist zu zeigen, daß $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^p) = 0$ ist für alle Überdeckungen \mathfrak{U} von X . Sei also ein Cozyklus $(\alpha_{i\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^p)$ vorgegeben, also insbesondere $\alpha_{i\kappa} \in \mathcal{E}^p(U_{i\kappa})$. Wähle eine differenzierbare Teilung der Eins zu dieser Überdeckung, d. h. Funktionen $\lambda_i \in \mathcal{E}^0(X)$ mit:

- i) $\text{supp } \lambda_\iota \subset\subset U_\iota$,
- ii) das System $\{\text{supp } \lambda_\iota : \iota \in I\}$ ist lokal endlich,
- iii) $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Bilde dann bei festem $\iota \in I$ den Schnitt $\lambda_\mu \alpha_{\iota\mu} \in \mathcal{E}^p(U_{\iota\mu})$. Dieser läßt sich offensichtlich durch Null zu einem Schnitt in $\mathcal{E}^p(U_\iota)$ fortsetzen.



Figur 26.1

Also kann man (wegen ii)) bilden:

$$\beta_\iota := \sum_{\mu \in I} \lambda_\mu \alpha_{\iota\mu} \in \mathcal{E}^p(U_\iota).$$

Dann folgt wegen iii) auf $U_{\iota\kappa}$:

$$\begin{aligned} \beta_\iota - \beta_\kappa &= \sum_{\mu} \lambda_\mu \alpha_{\iota\mu} - \sum_{\mu} \lambda_\mu \alpha_{\kappa\mu} \\ &= \sum_{\mu} \lambda_\mu (\alpha_{\iota\mu} + \alpha_{\mu\kappa}) = \left(\sum_{\mu} \lambda_\mu \right) \alpha_{\iota\kappa} = 1 \alpha_{\iota\kappa}. \end{aligned}$$

Also zerfällt der gegebene Cozyklus $(\alpha_{\iota\kappa})$. □

27 Cohomologie - Theorie Riemannscher Flächen

In diesem Kapitel werden wir einige cohomologische Aussagen über (vor allem kompakte) Riemannsche Flächen beweisen oder doch zumindest zitieren und aus diesen weitreichende analytische und geometrische Konsequenzen ziehen. Es soll als Einführung dienen in ein umfangreiches Anwendungsspektrum, das aber erst in der Theorie der höherdimensionalen komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten und Räume und in der algebraischen Geometrie voll zum Tragen kommt.

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß die Cohomologiegruppen $H^1(D_r, \mathcal{O})$ für Kreisscheiben verschwinden. Dazu benötigen wir zuerst das DOLBEAULTsche Lemma in einer Veränderlichen. Wir beginnen aber mit der Lösung der inhomogenen CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen.

Lemma 27.1 *Zu jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion $g \in \mathcal{E}_c^0(\mathbb{C})$ auf ganz \mathbb{C} mit kompaktem Träger existiert eine Funktion*

$$f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Beweis. Man kann eine Lösungsfunktion f explizit angeben:

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Da der Integrand anscheinend singular an der Stelle $\zeta = z$ wird, müssen wir zeigen, daß das Integral tatsächlich existiert und daß man unter dem Integralzeichen nach der Variablen \bar{z} differenzieren darf. Dies sieht man am einfachsten durch Einführung von Polarkoordinaten $\zeta = re^{i\vartheta}$ im zweiten Integral. Damit wird

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint g(z + re^{i\vartheta}) e^{-i\vartheta} dr d\vartheta,$$

wobei über $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ und über ein kompaktes Intervall $0 \leq r \leq R < \infty$ zu integrieren ist, da g kompakten Träger besitzt.

Bei diesem eigentlichen Integral kann man aber die Differentiation nach \bar{z} mit der Integration vertauschen. Geht man dann wieder zu kartesischen Koordinaten zurück, so bekommt man

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad \text{wobei} \quad K_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} : \varepsilon \leq |\zeta| \leq R\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} = \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{g(z + \zeta)}{\zeta} \right), \quad \zeta \neq 0.$$

Mit der 1-Form

$$\omega := \frac{1}{2\pi i} \frac{g(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \text{ fest},$$

wird dann unter Verwendung des Satzes von GAUSS

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{K_\varepsilon} d\omega = - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z + \varepsilon e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Da g eine stetige Funktion ist, ist aber der letzte Grenzwert gleich $g(z)$. □

Diese Aussage läßt sich auf differenzierbare Funktionen g auf Kreisscheiben D (einschließlich $D = \mathbb{C}$) durch ein Ausschöpfungsverfahren erweitern.

Satz 27.2 *Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ eine Kreisscheibe, wobei $0 < R \leq \infty$, und es sei $g \in \mathcal{E}^0(D)$. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{E}^0(D)$ mit*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Beweis. Wähle eine aufsteigende Folge $0 < R_0 < R_1 < \dots < R_n < \dots < R$ mit $\lim R_n = R$ und setze $D_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R_n\}$. Es gibt dazu eine Folge von Funktionen $\psi_n \in \mathcal{E}_c^0(\mathbb{C})$ mit $\text{supp } \psi_n \subset D_{n+1}$, $(\psi_n)|_{D_n} \equiv 1$. Wir können damit $g_n := \psi_n g$ als ein Element von $\mathcal{E}_c^0(D) \subset \mathcal{E}_c^0(\mathbb{C})$ auffassen. Somit existieren nach Lemma 1 Funktionen $f_n \in \mathcal{E}^0(D)$ mit $\partial f_n / \partial \bar{z} = g_n$.

Im nächsten Schritt ändern wir die f_n durch Addition geeigneter holomorpher Funktionen ab zu Funktionen $\tilde{f}_n \in \mathcal{E}^0(D)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\text{i) } \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g \text{ auf } D_n.$$

$$\text{ii) } \|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{n-1} \leq 2^{-n}.$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_n$ die *Supremumsnorm* auf der Kreisscheibe D_n . Diese Folge wird induktiv erklärt durch $\tilde{f}_0 := f_0$, und sind $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n$ schon konstruiert, so beachte man, daß

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_{n+1} - \tilde{f}_n) = g - g = 0 \text{ auf } D_n.$$

Also ist $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ holomorph auf D_n , und es gibt ein geeignetes Taylorpolynom T_n mit

$$\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - T_n\|_{n-1} \leq 2^{-n}, \text{ da } D_{n-1} \subset\subset D_n.$$

Man setze nun $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - T_n$. Dann ist ii) erfüllt und auch i) wegen

$$\frac{\partial \tilde{f}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = g \text{ auf } D_{n+1}.$$

Insbesondere ist die Differenz $\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n$ holomorph auf D_n , und nach ii) und dem Weierstraßschen Konvergenzsatz ist die Reihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

auf D_{n-1} gleichmäßig konvergent gegen eine holomorphe Funktion F_n . Somit erfüllt die Funktion $\tilde{f}_n + F_n$ auf D_{n-1} ebenfalls die Gleichung

$$\frac{\partial(\tilde{f}_n + F_n)}{\partial \bar{z}} = g.$$

Diese Funktion ist aber auf ganz D erklärt, denn sie stellt auf D_{n-1} den Grenzwert

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$

dar. □

Hieraus folgt nun der grundlegende *Verschwindensatz* in der komplexen Analysis.

Folgerung 27.3 Für jede Kreisscheibe $D = D_R \subset \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$, verschwindet die erste Cohomologiegruppe mit Werten in der Garbe der holomorphen Funktionen :

$$H^1(D_R, \mathcal{O}) = 0.$$

Beweis. Es sei \mathfrak{U} irgendeine Überdeckung von D , und es sei ein 1-Cozyklus

$$\xi = (f_{\iota\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^0)$$

vorgegeben. Wegen $H^1(D, \mathcal{E}^0) = 0$ ist aber auch $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^0) = 0$. Also gibt es *differenzierbare* Funktionen $f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota)$, so daß

$$f_{\iota\kappa} = f_\iota - f_\kappa \text{ auf } U_{\iota\kappa}.$$

Wegen

$$\frac{\partial g_\iota}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g_\kappa}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{\iota\kappa}}{\partial \bar{z}} = 0$$

verklebt sich das System der Funktionen

$$\left(\frac{\partial g_\iota}{\partial \bar{z}} \right)_{\iota \in I}$$

zu einer globalen differenzierbaren Funktion auf D . Also gibt es nach Satz 2 eine differenzierbare Funktion g auf D mit

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_\iota}{\partial \bar{z}} \quad \text{auf } U_\iota .$$

Definiere nun $f_\iota := g_\iota - g$. Dann ist auch $f_{\iota\kappa} = f_\iota - f_\kappa$. Ferner ist

$$\frac{\partial f_\iota}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_\iota}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0 ,$$

also f_ι holomorph. Somit ist der Cozyklus $\xi \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und damit seine Cohomologieklassse $[\xi] = 0 \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. \square

Bemerkung. Diese Verschwindensaussage bleibt für jede nicht kompakte Riemannsche Fläche richtig und wird mit einer ähnlichen Methode gezeigt.

Als nächstes wollen wir das DOLBEAULT-Lemma in einer Veränderlichen formulieren. Da dieses jedoch auch in mehreren komplexen Veränderlichen Bestand hat und weitgehende Anwendungen besitzt, betrachten wir sogleich eine allgemeinere Situation.

Auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit haben die (komplexen) Differentialformen $\mathcal{E}^m(U)$ noch eine weitere Struktur. Man erinnere sich an den Wirtingerkalkül: Sind

$$z_1 = x_1 + i y_1, \dots, z_n = x_n + i y_n$$

komplex-analytische Koordinaten, so bildet man die 1-Formen

$$dz_j = dx_j + i dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j .$$

Damit schreibt sich eine beliebige (komplex-wertige) 1-Form eindeutig als

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j dz_j + \sum_{j=1}^n a_{\bar{j}} d\bar{z}_j := \omega^{(1,0)} + \omega^{(0,1)} ,$$

und bei komplex-analytischem Koordinatenwechsel bleibt diese Zerlegung in die $(1, 0)$ -Form bzw. $(0, 1)$ -Form

$$\omega^{1,0} := \sum_{j=1}^n a_j dz_j \quad \text{bzw.} \quad \omega^{0,1} := \sum_{j=1}^n a_{\bar{j}} d\bar{z}_j$$

erhalten. Speziell für eine Funktion $f \in \mathcal{E}^0(U)$ schreibt man die entsprechende Zerlegung des Differentials df in der Form

$$df = \partial f + \bar{\partial} f .$$

Ausgeschrieben bedeutet dies also:

$$\partial f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j .$$

Insbesondere ist $f \in \mathcal{O}(U)$ genau dann, wenn $\bar{\partial} f = 0$. Jedenfalls ist uns dies im Falle $n = 1$ bekannt (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen); in höheren Dimensionen handelt es sich bei dieser Aussage allerdings um ein tiefgehendes Resultat von HARTOGS, das wir hier nicht beweisen können.

In einer komplexen Veränderlichen kann man festhalten:

Lemma 27.4 *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \longrightarrow 0$$

ist exakt auf jeder Riemannschen Fläche X .

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß wir uns in einer lokalen Karte $U \subset \mathbb{C}$ befinden. Nach den Vorbemerkungen ist die Exaktheit an der ersten beiden Stellen klar. Aber auch die Surjektivität der Abbildung $\bar{\partial} : \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}$ ist eine direkte Folge aus Satz 2. Denn ist die $(0, 1)$ -Form ω vorgegeben, so ist sie lokal in einer Kreisscheibe D von der Gestalt $g d\bar{z}$. Ist dann f eine Funktion auf D mit $\partial f / \partial \bar{z} = g$, so ist

$$\bar{\partial} f = (\partial f / \partial \bar{z}) d\bar{z} = \omega. \quad \square$$

Auf einer Riemannschen Fläche X können wir weiter das Differential von 1-Formen auf die $(1, 0)$ -Formen einschränken:

$$d(f dz) = (\partial f + \bar{\partial} f) \wedge dz = - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Erneut mit Satz 2 schließt man, daß der Garbenhomomorphismus $d : \mathcal{E}^{1,0} \rightarrow \mathcal{E}^2$ *surjektiv* ist. Sein Kern besteht aus den Keimen von $(1, 0)$ -Formen $f dz$, deren Differential verschwindet. Dies ist aber gleichbedeutend mit der *Holomorphie* der Koeffizientenfunktion f . Diese Formen von der lokalen Gestalt $f dz$ mit holomorphen f sind gerade die Integranden der klassischen Funktionentheorie. Sie heißen auch *holomorphe Differentiale* oder besser *holomorphe Differentialformen 1. Ordnung*. Ihre Definition hängt selbstverständlich nicht von der Wahl einer Karte ab. Als Kern eines Garbenhomomorphismus bilden die Keime holomorpher Differentiale eine Garbe auf X , die man i. A. mit Ω^1 bezeichnet. - Wir fassen zusammen:

Lemma 27.5 *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$$

ist exakt auf jeder Riemannschen Fläche X . □

Wie die Garben \mathcal{E}^m besitzen auch $\mathcal{E}^{1,0}$ und $\mathcal{E}^{0,1}$ Teilungen der Eins und sind folglich azyklisch. - Wir können somit festhalten:

Folgerung 27.6 *Auf jeder Riemannschen Fläche X hat man kanonische Identitäten*

$$H^1(X, \mathcal{O}) = \mathcal{E}^{0,1}(X) / \bar{\partial} \mathcal{E}^0(X) \quad \text{und} \quad H^1(X, \Omega^1) = \mathcal{E}^{1,0}(X) / d\mathcal{E}^0(X).$$

Die höheren Cohomologiegruppen $H^q(X, \mathcal{O})$ und $H^q(X, \Omega^1)$, $q \geq 2$, verschwinden.

Folgerung 27.7 *Auf jeder nicht kompakten Riemannschen Fläche X sind die inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in dem folgenden Sinne lösbar: Zu jeder $(0, 1)$ -Form ω auf X gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{E}^0(X)$ mit $\bar{\partial} f = \omega$.*

Bemerkung. Entsprechend wie im Falle $n = 1$ hat man für n Veränderliche eine Zerlegung

$$\mathcal{E}^m(U) = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{E}^{p,q}(U),$$

Man nennt $\mathcal{E}^{p,q}(U)$ den Vektorraum der (p, q) -Formen; diese haben in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\sum a_{j_1, \dots, j_p, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_q} dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{k}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{k}_q}.$$

Es gibt einen linearen Operator $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q} \rightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}$ und für jede natürliche Zahl $1 \leq p \leq n$ einen Komplex

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{E}^{p,n} \longrightarrow 0,$$

wobei Ω^p die Garbe der Keime von *holomorphen* p -Formen ist, die in lokalen Koordinaten von der Form

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1, \dots, j_p} dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \quad \text{mit} \quad a_{j_1, \dots, j_p} \in \mathcal{O}(U)$$

sind. Die Garben $\mathcal{E}^{p,q}$ sind azyklisch und können zur Berechnung der Cohomologiegruppen der Ω^p herangezogen werden.

Satz 27.8 (Dolbeault) *Auf jeder komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X der komplexen Dimension n ist der DOLBEAULT-Komplex*

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{E}^{p,n} \longrightarrow 0$$

eine azyklische Auflösung von Ω^p .

Insbesondere hat man kanonische Isomorphismen

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X)) / \text{im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q}(X)).$$

Die Cohomologiegruppen $H^q(X, \Omega^p)$ sind Null für $q > n$.

Mit den Sätzen von DE RHAM und DOLBEAULT kann man *Dualitätssätze* für gewisse Cohomologiegruppen besser verstehen. Wir demonstrieren dies zuerst an der Existenz des „Cup-Produkts“ in der *totalen Cohomologie*

$$H^*(X, \mathbb{K}) := \bigoplus_{q=0}^n H^q(X, \mathbb{K})$$

einer reell n -dimensionalen differenzierbaren (parakompakten) Mannigfaltigkeit X mit Koeffizienten in dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Dieses Produkt macht aus $H^*(X, \mathbb{K})$ tatsächlich einen (assoziativen) Ring, den sogenannten *Cohomologie-Ring* von X mit Werten in \mathbb{K} . Die Idee ist denkbar einfach: Da Cohomologie-Klassen in $H^q(X, \mathbb{K})$ durch geschlossene Differentialformen vom Grad q repräsentiert werden, benötigen wir ein Produkt von zwei geschlossenen Formen σ und ω vom Grad p bzw. q . Es ist nur zu natürlich, hierfür das äußere Produkt $\sigma \wedge \omega$ zu wählen, das tatsächlich geschlossen ist wegen

$$d(\sigma \wedge \omega) = d\sigma \wedge \omega \pm \sigma \wedge d\omega.$$

Ist aber $\sigma = d\eta$ ein Rand und ω geschlossen, so ist wegen

$$d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega \pm \eta \wedge d\omega = \sigma \wedge \omega$$

auch $\sigma \wedge \omega$ ein Rand. - Mit anderen Worten:

Lemma 27.9 *Das Dachprodukt von p - und q -Formen induziert eine kanonische bilineare Abbildung*

$$H^p(X, \mathbb{K}) \times H^q(X, \mathbb{K}) \longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{K}).$$

Definition und Bemerkung. Man bezeichnet diese bilineare Abbildung auch als *Cup-Produkt* und schreibt für das Bild zweier Klassen ξ_p, ξ_q auch $\xi_p \cup \xi_q$. In der dualen Situation der *Homologie* entspricht diese Bildung dem *Cap-Produkt* \cap , das vermöge des „Schnittes“ zweier Zyklen definiert wird. Als bilineare Abbildung induziert \cup eine lineare Abbildung

$$H^p(X, \mathbb{K}) \otimes H^q(X, \mathbb{K}) \longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{K}),$$

die wir ebenfalls mit dem Symbol \cup belegen.

Ein Spezialfall liegt nun vor, wenn $p + q = n$ und X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall ist $\psi := \sigma \wedge \omega$ eine n -Form, die wir über X integrieren können. Das Integral hängt aber nur von der Cohomologiekategorie von ψ ab; denn ist $\psi = d\varphi$, so ist nach dem Satz von STOKES

$$\int_X \psi = \int_X d\varphi = \int_{\partial X} \varphi = 0.$$

Es gibt somit auf jeder kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X der Dimension n eine bilineare Abbildung, auch *Paarung* genannt,

$$H^q(X, \mathbb{K}) \otimes H^{n-q}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Eine Version des *Dualitätssatzes* von POINCARÉ besagt nun das Folgende:

Satz 27.10 *Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit X der reellen Dimension n sind die kanonischen Paarungen*

$$H^q(X, \mathbb{K}) \otimes H^{n-q}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

nicht ausgeartet.

Bemerkung. Eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_1 \otimes V_2 \rightarrow \mathbb{K}$ von \mathbb{K} -Vektorräumen heißt bekanntlich *nicht ausgeartet*, wenn aus $\langle v_1, v_2 \rangle$ für alle v_2 folgt, daß $v_1 = 0$ und vice versa. Hat man eine solche Bilinearform gegeben, so induziert diese eine kanonische Isomorphie $V_2 \cong V_1^*$ von V_2 mit dem Dualraum von V_1 und umgekehrt, sofern einer der beiden Räume endlich-dimensional ist. Dies ist aus allgemeinen topologischen Gründen für die Cohomologiegruppen $H^q(X, \mathbb{K})$ bei kompaktem X richtig.

Wir können also festhalten:

Folgerung 27.11 *Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit X der reellen Dimension n ist für jedes q die Cohomologiegruppe $H^{n-q}(X, \mathbb{K})$ der Dualraum zu $H^q(X, \mathbb{K})$.*

Bemerkung. Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten hat dieser Satz einen ganz konkreten analytischen Hintergrund. Er besagt dann offensichtlich das Folgende:

Satz 27.12 *Es sei ω eine geschlossene q -Form auf der kompakten, orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Genau dann ist ω exakt, wenn für jede geschlossene $(n - q)$ -Form σ das Integral*

$$\int_X \omega \wedge \sigma = 0$$

ist.

Folgerung 27.13 *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist $H^2(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.*

Man kann ganz ähnliche Überlegungen auch für die *analytischen* Cohomologiegruppen $H^q(X, \Omega^p)$ durchführen. - Wir beginnen unsere weiteren Untersuchungen, speziell im kompakten Fall, mit dem folgenden unbewiesenen

Satz 27.14 *Es sei X eine Riemannsche Fläche, und $U \subset\subset V$ seien offene Teilmengen von X . Dann besitzt der kanonische Beschränkungshomomorphismus*

$$H^1(V, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O})$$

ein endlich-dimensionales Bild.

Der *Beweis* ist schwer; er verwendet Hilbertraum-Methoden für L^2 -Funktionen. Der interessierte Leser sei auf FORSTER, loc. cit., Satz 14.9 verwiesen. \square

Der Satz scheint auf den ersten Blick hochgradig uninteressant zu sein, da in vielen Fällen die beiden in dem Satz vorkommenden Cohomologiegruppen Null sind. Allerdings braucht man diesen Satz als Zwischenschritt für solche Verschwindensaussagen, und er liefert *Endlichkeitsaussagen* für *kompakte* X . Hier kann man z. B. $U = V = X$ wählen und erhält als unmittelbare Konsequenz:

Satz 27.15 Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist

$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty .$$

Definition und Beispiel. Die Zahl g heißt das *Geschlecht* der Riemannschen Fläche X . Wir schreiben dann auch $g = g(X)$. Wir wissen schon, daß $g = g(\mathbb{P}_1) = 0$ ist.

Bemerkung. Dieser Satz ist viel allgemeiner richtig: Für jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X und jede *kohärente* \mathcal{O} -Modulgarbe \mathcal{F} auf X ist

$$\dim H^q(X, \mathcal{F}) < \infty , \quad q \geq 0 .$$

Hierbei ist „Kohärenz“ ein Endlichkeitsaxiom, das z. B. zutrifft für *lokal-freie* Garben, also solche, die lokal eine *endliche Summe* von Kopien der „Strukturgarbe“ \mathcal{O} sind. Die Garben Ω^p sind von diesem Typ.

Es gilt also:

Satz 27.16 Auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X sind alle Cohomologiegruppen $H^q(X, \Omega^p)$ endlich-dimensionale \mathbb{C} -Vektorräume.

Bemerkung. Für die wichtigsten Garben auf kompakten Riemannschen Flächen beweisen wir diese Aussage in dem nachfolgenden Kapitel.

Mit Hilfe der Dolbeaultschen Darstellung der Cohomologieklassen in $H^q(X, \Omega^p)$ durch $\bar{\partial}$ -geschlossene (p, q) -Formen gewinnt man auch hier eine *Dualitätstheorie*. Wir betrachten dazu die kanonische bilineare Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{p,q}(X) \times \mathcal{E}^{n-p,n-q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{n,n}(X) = \mathcal{E}^{2n}(X) \\ (\sigma, \omega) \longmapsto \sigma \wedge \omega \end{cases}$$

Ist hier z. B. ω eine $\bar{\partial}$ -geschlossene Form und σ $\bar{\partial}$ -exakt, also $\sigma = \bar{\partial}\eta$ mit einer Form $\eta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X)$, so ist

$$\bar{\partial}(\eta \wedge \omega) = (\bar{\partial}\eta) \wedge \omega \pm \eta \wedge \bar{\partial}\omega = \sigma \wedge \omega .$$

Infolgedessen wird eine kanonische bilineare Abbildung

$$H^q(X, \Omega^p) \times H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}) \longrightarrow H^n(X, \Omega^n)$$

induziert. Klassen in $H^n(X, \Omega^n)$ kann man aber über kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X der komplexen Dimension n integrieren durch Integration eines Repräsentanten $\varphi \in \mathcal{E}^{n,n}$; denn ist $\varphi = \bar{\partial}\psi$ mit einer Form $\psi \in \mathcal{E}^{n,n-1}$, so ist $\partial\psi \in \mathcal{E}^{n+1,n-1} = 0$ und damit $d\psi = \varphi$, so daß nach dem Satz von Stokes

$$\int_X \varphi = \int_X d\psi = \int_{\partial X} \psi = 0$$

ist. - Es gilt nun der folgende

Satz 27.17 Auf jeder n -dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist für beliebige p, q die zusammengesetzte bilineare Abbildung

$$H^q(X, \Omega^p) \times H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}) \longrightarrow H^n(X, \Omega^n) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

nicht ausgeartet. Insbesondere sind die endlich-dimensionalen Vektorräume

$$H^q(X, \Omega^p) \quad \text{und} \quad H^{n-q}(X, \Omega^{n-p})$$

dual zueinander.

Wichtig für uns ist der eindimensionale Fall. - Wir deduzieren aus dem vorhergehenden Satz die (unkanonischen) Isomorphismen $H^0(X, \Omega^1) \cong H^1(X, \mathcal{O})$ und $H^1(X, \Omega^1) \cong H^0(X, \mathcal{O})$, die im Anhang des folgenden Kapitels noch verallgemeinert und bewiesen werden, und damit das folgende Resultat.

Folgerung 27.18 *Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X besitzt der Vektorraum $H^0(X, \Omega^1)$ der globalen holomorphen 1–Formen, auch Abelsche Differentiale 1. Gattung genannt, die Dimension $g = g(X)$. Der Vektorraum $H^1(X, \Omega^1)$ hat die Dimension 1.*

Dies alles kann man jetzt so miteinander kombinieren, daß die *topologische* Bedeutung der zunächst analytisch definierten Größe $g = g(X)$ evident wird. Wir starten dazu mit der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \longrightarrow 0$$

und wenden auf sie die lange exakte Cohomologiesequenz an. Indem wir abkürzend $H^q(\mathcal{F})$ anstelle von $H^q(X, \mathcal{F})$ schreiben, erhalten wir nach den vorherigen Überlegungen eine exakte Sequenz der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^0(\Omega^1) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(\Omega^1) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}) \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & 0 \end{array}$$

Da injektive bzw. surjektive Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bijektiv sein müssen, schließt man unmittelbar auf die Injektivität der Abbildung $H^0(\Omega^1) \rightarrow H^1(\mathbb{C})$ und die Surjektivität von $H^1(\mathbb{C}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})$. - Wir fassen zusammen:

Satz 27.19 *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X hat man eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega^1) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$, wenn $g = g(X)$.

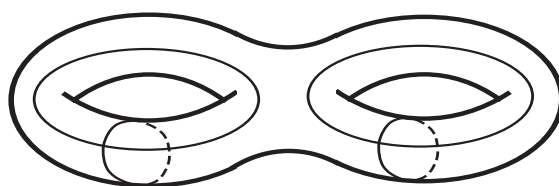
Denn: Jede kurze exakte Sequenz von endlich–dimensionalen Vektorräumen „spaltet“; insbesondere ist der mittlere Term die direkte Summe der beiden äußeren Terme. □

Es sollte insbesondere möglich sein, eine *geometrisch–kombinatorische* Charakterisierung des Geschlechtes einer kompakten Riemannschen Fläche X zu finden, die man direkt von ihrer *topologischen Gestalt* ablesen kann. Dies ist in der Tat zutreffend: Die erste BETTI–Zahl $b_1 := \dim H_1(X, \mathbb{C})$ ist - wieder aufgrund der POINCARÉ–Dualität $H^1(X, \mathbb{C}) \cong H_1(X, \mathbb{C})$ - ebenfalls gleich $2g$. Erzeuger der ersten Homologiegruppe sind geschlossene Kurven auf X , die nicht *homolog Null* sind, also kein Gebiet auf X beranden. Auf \mathbb{P}_1 gibt es keine solche Kurven, auf einem Torus offensichtlich zwei (nicht zueinander homologe).

In der allgemeinen Flächentheorie leitet man nun den folgenden, anschaulich völlig einsichtigen Klassifikationssatz her.

Satz 27.20 *Jede kompakte orientierbare Fläche, d. h. zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit X ist bestimmt durch die erste Betti–Zahl $b_1 = 2g$. Topologisch ist X eine Sphäre S^2 mit g ange-setzten Henkeln und damit eine Brezel–Fläche mit g Löchern.*

Beispiel. Im Falle $g = 2$ sieht eine Brezel–Fläche wie folgt aus (mit eingezeichneten $2g = 4$ Erzeugern der ersten Homologiegruppe).



Figur 27.1

Wegen $\dim H_0(\mathbb{C}) = \dim H_2(\mathbb{C}) = 1$ ist eine kompakte orientierte Fläche X topologisch auch bestimmt durch ihre *Eulerzahl*

$$\chi(X) = \dim H_0(X, \mathbb{C}) - \dim H^1(X, \mathbb{C}) + \dim H^2(X, \mathbb{C}) = 2 - 2g.$$

Sie nimmt also die Werte $2, 0, -2, -4, \dots$ an. Insbesondere ist

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(\mathbb{C}/\Omega) = 0.$$

Die Eulerzahl läßt sich auch *kombinatorisch* durch Bestimmungsstücke einer beliebigen *Triangulierung* von X berechnen, wie in der algebraischen Topologie bewiesen wird.

Satz 27.21 Für jede Triangulierung einer orientierten kompakten Fläche X gilt

$$\chi(X) = e_0 - e_1 + e_2,$$

wobei e_0 die Anzahl der Ecken, e_1 die Anzahl der Kanten und e_2 die Anzahl der Flächen der vorgegebenen Triangulierung bezeichnet.

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung der berühmten EULERSchen *Polyederformel*

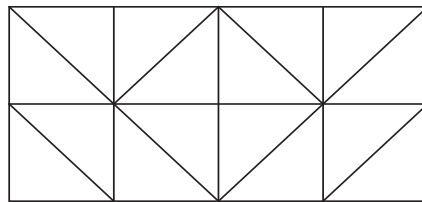
$$e_0 - e_1 + e_2 = 2$$

für *konvexe Polyeder* im \mathbb{R}^3 , die man auch als *Pflasterungen* der Sphäre S^2 auffassen kann. Kommt in einer solchen Pflasterung als Fläche ein n -gon vor, so kann man dieses durch Einfügen einer Ecke im Inneren in n Dreiecke zerlegen. Dies erhöht die Eckenanzahl e_0 um Eins, die Kantenanzahl e_1 um n und die Flächenanzahl e_2 um $n - 1$, so daß die alternierende Summe $e_0 - e_1 + e_2$ unverändert bleibt. Somit ist jedem konvexen Polyeder in \mathbb{R}^3 eine Triangulierung von S^2 mit der gleichen Eulerzahl zugeordnet.

Beispiele. Reguläre *Tetraeder*, *Oktaeder* und *Ikosaeder* können als Triangulierungen der Sphäre S^2 aufgefaßt werden. Für die Eulerzahl findet man in allen drei Fällen

$$4 - 6 + 4 = 6 - 12 + 8 = 20 - 30 + 12 = 2.$$

Die folgende Figur repräsentiert eine Triangulierung eines Torus, wobei wie immer die gegenüberliegenden Ränder identifiziert werden müssen.



Figur 27.2

Hier ist also $e_0 = 8$, $e_1 = 24$, $e_2 = 16$ und folglich die Eulerzahl gleich 0 .

Wir wollen als nächstes die Geschlechter zweier kompakter Riemannscher Flächen X, Y unter einer *verzweigten Überlagerung* $p: X \rightarrow Y$ mit Daten der Überlagerung in Verbindung bringen. In diesem Fall definiert man die *Verzweigungsordnung* in einem Punkt $x_0 \in X$ durch

$$v(x_0) = v \geq 0,$$

wenn in einer lokalen Karte um x_0 die Abbildung p von der Gestalt $z \mapsto z^{v+1}$ ist. Damit ist an allen außer endlich vielen Punkten $v(x_0) = 0$, und es existiert die *totale Verzweigungsordnung*

$$\nu := \sum_{x_0 \in X} v(x_0).$$

Da p in der Nähe von x_0 eine Überlagerung mit Blätterzahl $v(x_0) + 1$ ist, ist notwendig für alle $y_0 \in Y$ die Anzahl

$$\sum_{p(x_0)=y_0} (v(x_0) + 1)$$

konstant gleich b , der *Blätterzahl* der Überlagerung $p: X \rightarrow Y$.

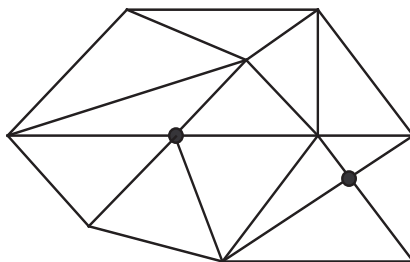
Satz 27.22 (Riemann - Hurwitz) *Ist $p: X \rightarrow Y$ eine verzweigte holomorphe Überlagerung von kompakten Riemannschen Flächen mit totaler Verzweigungsordnung ν und Blätterzahl b , so gelten die Formeln*

$$\chi(X) = b \chi(Y) - \nu$$

und

$$g(X) = \frac{\nu}{2} + b(g(Y) - 1) + 1.$$

Beweis. Die zweite Formel ist nur eine Umformung der ersten. Wir können uns also auf den Beweis der ersten beschränken. Dazu trianguliert man die Riemannsche Fläche Y so fein, daß alle Bilder y_0 von Verzweigungspunkten x_0 Ecken sind, aber in der „ersten Umgebung“ einer solchen Ecke keine weiteren Bilder von Verzweigungspunkten liegen:



Figur 27.3

Eine solche Triangulierung kann offensichtlich (nach evtl. weiterer Verfeinerung) zu einer Triangulierung von X „geliftet“ werden, in der alle Verzweigungspunkte von p Ecken sind. Es ist damit, daß sich jeder „Stern“ um einen Verzweigungspunkt der Ordnung v „ver- $(v + 1)$ -facht“,

$$e_0(X) = b e_0(Y) - \sum_{x_0 \in X} v(x_0) = b e_0(Y) - \nu$$

und weiter

$$e_1(X) = b e_1(Y) \quad \text{und} \quad e_2(X) = b e_2(Y). \quad \square$$

Bemerkung. Im folgenden Kapitel beweisen wir die Riemann–Hurwitz–Formel ohne Verwendung von Methoden der algebraischen Topologie mit rein *analytischen* Mitteln.

Bemerkung und Definition. Ist die Blätterzahl $b = 2$, so ist notwendig ν die *totale Anzahl* der Verzweigungspunkte von p in X und auch die Anzahl der Bilder der Verzweigungspunkte in Y . Wählt man in der Riemann–Hurwitz–Formel speziell $Y = \mathbb{P}_1$, also $g(Y) = 0$, so ist notwendig

$$g(X) = \frac{\nu}{2} - 1 \quad \text{und} \quad \nu = 2(g(X) + 1); .$$

Die Anzahl der Verzweigungspunkte ist also immer gerade. Zeichnet man umgekehrt in der Riemannschen Zahlenkugel $2(g+1)$ Punkte aus, so hat jede zweifache Überlagerung X von \mathbb{P}_1 , die genau in diesen Punkten verzweigt ist, das Geschlecht g . Dies ist z. B. der Fall für die *Tori*; wie wir früher schon mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen gezeigt haben, können diese als zweifache Überlagerung des \mathbb{P}_1 mit 4 Verzweigungspunkten realisiert werden. Also sehen wir auch mit der Riemann-Hurwitz-Formel, daß das Geschlecht der *Tori* gleich 1 ist. Für $g \geq 2$ nennt man Riemannsche Flächen von dem eben geschilderten Typ auch *hyperelliptisch*.

Bemerkung. Man kann sich fragen, welches die minimale Blätterzahl ist, mit der man eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g dem \mathbb{P}_1 verzweigt überlagern kann. Wir werden noch zeigen, daß man stets $b \leq g+1$ erreichen kann. Tatsächlich kann man mit der Theorie der *WEIERSTRASS-Punkte* zeigen (siehe FORSTER, loc. cit., Corollar 18.9), daß man für $g \geq 2$ sogar die schärfere Schranke $b \leq g$ hat. Damit sind alle Flächen vom Geschlecht $g = 2$ automatisch hyperelliptisch. Es gilt für $g \geq 2$ sogar die Abschätzung $b \leq [g + 3/2]$, wobei für eine positive reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, mit $[x]$ bezeichnet wird.

Es fehlt noch der Nachweis, daß sich jede kompakte Riemannsche Fläche X der Riemannschen Zahlenkugel verzweigt überlagern läßt. - Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus

Satz 27.23 *Es sei U eine relativ kompakte offene Teilmenge der Riemannschen Fläche X . Dann existiert zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine meromorphe Funktion h auf U mit einem Pol in z_0 , die außerhalb von z_0 holomorph ist.*

Denn für kompaktes X kann man $U = X$ setzen und findet so eine meromorphe Funktion mit einem vorgegebenen Pol $x_0 \in X$. Damit ist h nicht trivial und definiert folglich eine eigentliche holomorphe Abbildung $h: X \rightarrow \mathbb{P}_1$.

Folgerung 27.24 *Jede kompakte Riemannsche Fläche X besitzt eine holomorphe Überlagerungsabbildung nach \mathbb{P}_1 .*

Beweis von Satz 23. Nach Satz 14 ist die Dimension

$$k := \dim \operatorname{im} (H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{O})) < \infty.$$

Sei U_0 eine Koordinatenumgebung von z_0 (mit holomorpher Koordinate z), und es sei $U_1 := X \setminus \{z_0\}$. Dann ist $\mathfrak{U} := \{U_0, U_1\}$ eine Leraysche Überdeckung von X . Auf $U_0 \cap U_1 = U_0 \setminus \{z_0\}$ betrachte man die holomorphen Funktionen

$$f_j(z) := z^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Diese definieren Cozykel ζ_j in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Nach Voraussetzung sind die Einschränkungen

$$\zeta_j|_U \in Z^1(\mathfrak{U} \cap U, \mathcal{O}), \quad j = 1, \dots, k+1,$$

linear abhängig modulo Rändern, wobei $\mathfrak{U} \cap U$ die Überdeckung $(U_0 \cap U, U_1 \cap U)$ von U bezeichnet. Da auch diese Leraysch ist, existieren Zahlen $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$, die nicht alle gleich Null sind, und $\eta = (h_1, h_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap U, \mathcal{O})$, so daß

$$c_1 \zeta_1 + \dots + c_{k+1} \zeta_{k+1} = \delta \eta \quad \text{bzgl. } \mathfrak{U} \cap U.$$

Somit ist

$$h_2 - h_1 = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_{k+1}}{z_k} \quad \text{auf } U_1 \cap U_2 \cap U.$$

Dann existiert eine meromorphe Funktion h auf U mit

$$h|_{U \setminus \{z_0\}} = h|_{U \cap U_2} = h_2 \quad \text{und} \quad h|_{U \cap U_1} = h|_{U \setminus \{z_0\}} = h_1 + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{c_j}{z^j}. \quad \square$$

Man kann Satz 23 noch wesentlich verschärfen.

Folgerung 27.25 *Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten $z_1, \dots, z_m \in X$ und vorgegebenen Werten $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. Dann existiert $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(z_k) = a_k$, $k = 1, \dots, m$.*

Beweis. Nach dem Satz zuvor (mit $U = X$) gibt es zu fest vorgegebenem z_j eine Funktion $f_j \in \mathcal{M}(X)$, die in z_j einen Pol besitzt und holomorph ist in z_k , $k \neq j$. Setze dann

$$g_{jk} := \frac{f_j - f_j(z_k)}{f_j - f_j(z_k) + 1} \in \mathcal{M}(X).$$

Die Funktion g_{jk} verschwindet in z_k und besitzt den Wert 1 in z_j . Als nächstes setzt man

$$h_\ell := \prod_{k \neq \ell} g_{\ell k}.$$

Für diese gilt $h_\ell(z_k) = \delta_{\ell k}$. Damit wird durch

$$f := \sum_{\ell=1}^m a_\ell h_\ell$$

eine meromorphe Funktion der gesuchten Art definiert. \square

Als nächstes beschäftigen wir uns in diesem Kapitel etwas genauer mit dem MITTAG–LEFFLER–Problem auf kompakten Riemannschen Flächen. Jede Mittag–Leffler Verteilung $\mu = (h_\nu) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ definiert per definitionem einen Cozyklus $\delta \mu := (h_{\nu\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ durch $h_{\nu\kappa} = h_\nu - h_\kappa$. Die Verteilung μ ist genau dann lösbar, wenn die Klasse $[\delta \mu]$ in der Cohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gleich Null ist. Nun ist aber, wie wir im folgenden Kapitel beweisen werden, auf jeder kompakten Riemannschen Fläche X die Cohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ (Folgerung 28.11). Somit gibt in diesem Fall auch jeder Cozyklus in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ Anlaß zu einer Mittag–Leffler–Verteilung. Da aber für $g \geq 1$ die Cohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O})$ von Null verschieden ist, können wir festhalten:

Lemma 27.26 *Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ gibt es Mittag–Leffler–Probleme, die nicht lösbar sind.*

Beispiel. Aus früheren Überlegungen im Zusammenhang mit elliptischen Funktionen wissen wir dies schon für die Tori: Es gibt keine elliptischen Funktionen mit genau einem Pol erster Ordnung.

Es erhebt sich die Frage, wie man *effektiv* bestimmen kann, ob eine vorgegebene Mittag–Leffler–Verteilung lösbar ist. Man kann die Frage beantworten mit Hilfe der Dualitätstheorie, die uns vermöge der Paarung mit holomorphen 1–Formen ein Kriterium an die Hand gibt, wann eine Cohomologieklassse mit Werten in \mathcal{O} verschwindet.

Es sei also im folgenden eine holomorphe 1–Form $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$ vorgegeben. Durch Multiplikation mit der Mittag–Leffler–Verteilung μ gewinnen wir eine 0–Cokette

$$\mu \omega := (h_\nu \omega|_{U_\nu})$$

mit Werten in der Garbe der „meromorphen“ 1–Formen, also von Formen, die lokal die Gestalt $h dz$ mit einer *meromorphen* Funktion h besitzen. Wir bezeichnen diese Garbe mit \mathcal{M}^1 .

Wir zeigen als erstes, daß man einer beliebigen meromorphen 1–Form ω an jeder Stelle $x_0 \in X$ durch

$$\text{res}_{x_0}(h dz) := \text{res}_{x_0} h$$

ein wohldefiniertes *Residuum* zuordnen kann. Ist nämlich

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

die Laurent-Entwicklung von h in einer geeigneten Karte $\cong D$ mit Koordinate z und $z = 0$ in x_0 , so existiert eine Stammfunktion $g(z)$ von $h(z) - c_{-1}/z$. Dann ist

$$dg = \left(h(z) - \frac{c_{-1}}{z} \right) dz \quad \text{und damit} \quad \omega = dg + \frac{c_{-1}}{z} dz.$$

Formen vom Typ dg besitzen aber in keinem Koordinatensystem ein Residuum. Ist nämlich

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$$

die Laurent-Entwicklung in irgendeiner Koordinate, so ist

$$dg(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n d_n z^{n-1} \right) dz.$$

Auch die Form dz/z hat in jedem Koordinatensystem das Residuum 1. Denn ist $w = \varphi(z)$ eine Koordinatentransformation um 0, so ist

$$\frac{dw}{w} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz.$$

Nach Voraussetzung besitzt φ im Nullpunkt eine Nullstelle 1. Ordnung, so daß $\text{res}_0(\varphi'(z)/\varphi(z)) = 1$.

Warnung. Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß das Residuum für isolierte Singularitäten von *Funktionen* auf Riemannschen Flächen nicht invariant unter Koordinatentransformationen definiert ist.

Kommen wir nun zu der 0-Cokette $\mu\omega$ zurück. Wir können selbstverständlich annehmen, daß $h_l\omega$ auf U_l nur endlich viele Polstellen besitzt. An jeder dieser Stellen x_0 ist das Residuum $\text{res}_{x_0}(h_l\omega)$ definiert und unabhängig von der offenen Menge U_l , in der x_0 liegt, da in $U_{l\kappa}$ die Differenz $h_l\omega - h_\kappa\omega = (h_l - h_\kappa)\omega$ holomorph ist. Somit existiert

$$\text{res}(\mu\omega) = \sum_{x \in X} \text{res}_x(\mu\omega).$$

Man rechnet verhältnismäßig einfach aus (wir holen die Rechnung in dem Anhang des folgenden Kapitels nach), daß für die Paarung einer die Cohomologiekategorie $[\delta\mu]$ repräsentierenden $(0, 1)$ -Form σ_μ mit der holomorphen $(1, 0)$ -Form ω die folgende Formel gilt:

$$\langle [\delta\mu], \omega \rangle = \int_X \sigma_\mu \wedge \omega = (2\pi i) \text{res}(\mu\omega).$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz.

Satz 27.27 *Eine Mittag-Leffler-Verteilung μ auf der kompakten Riemannschen Fläche X ist genau dann lösbar, wenn für alle $\omega \in \Omega^1$ die Residuen*

$$\text{res}(\mu\omega)$$

verschwinden.

Bemerkung und Beispiel. Dies sind $g = g(X)$ lineare Bedingungen an die Cohomologiekategorie der vorgegebenen Mittag-Leffler-Verteilung. Für einen Torus $X = \mathbb{C}/\Omega$ ist ein Erzeuger von $\Omega^1(X)$ gerade die durch die Ω -invariante Form dz auf \mathbb{C} induzierte Form auf X . Liftet man eine vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung auf X nach \mathbb{C} , so bedeutet die im vorigen Satz abgeleitete Bedingung gerade, daß die Summe ihrer Residuen in einem Fundamental-Parallelogramm gleich Null sein muß.

Zum Abschluß notieren wir noch den *Residuensatz* für kompakte Riemannsche Flächen. Man beachte hierbei, daß unsere obige Definition eines *Residuums* auch für beliebige isolierte Singularitäten von holomorphen 1-Formen ihre Gültigkeit behält.

Satz 27.28 *Es sei ω eine holomorphe 1–Form auf der kompakten Riemannschen Fläche X mit endlich vielen isolierten Singularitäten x_1, \dots, x_m . Dann gilt*

$$\sum_{x \in X} \operatorname{res}_x \omega = 0.$$

Durch Anwendung dieses Satzes auf die meromorphe 1–Form dh/h für eine nicht triviale meromorphe Funktion h auf X gewinnt man die anschließende Folgerung, die man auch unmittelbar aus der Theorie der verzweigten Überlagerungen hätte herleiten können.

Folgerung 27.29 *Für jede nicht triviale meromorphe Funktion h auf einer kompakten Riemannschen Fläche X gilt*

$$\sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x h = 0.$$

Denn es ist

$$\operatorname{ord}_x h = \operatorname{res}_x \frac{dh}{h}. \quad \square$$

Zum Nachweis von Satz 28 benötigen wir noch das folgende

Lemma 27.30 *Für jede Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit kompaktem Träger auf einer Riemannschen Fläche X ist*

$$\int_X d\omega = 0.$$

Beweis. Durch Multiplikation mit einer Teilung der Eins in einer Umgebung des Trägers von ω kann man erreichen, daß ω zerlegt werden kann in eine endliche Summe $\omega_1 + \dots + \omega_m$, wobei jedes ω_j einen kompakten Träger in einer zu D biholomorph äquivalenten Karte U'_j besitzt. Mit geeigneten relativ kompakten Karten $U_j \subset \subset U'_j$, die ebenfalls den Träger von ω_j enthalten und zu Kreisscheiben biholomorph äquivalent sind, ist dann unter Verwendung des Satzes von GAUSS in der Ebene:

$$\int_X d\omega = \sum_{j=1}^m \int_X d\omega_j = \sum_{j=1}^m \int_{U_j} d\omega_j = \sum_{j=1}^m \int_{\partial U_j} \omega_j = 0. \quad \square$$

Beweis von Satz 28. Wir wählen paarweise disjunkte Umgebungen U_j der Punkte x_j , relativ kompakte Teilmengen $V_j \subset \subset U_j$ mit $x_j \in V_j$ und C^∞ –Funktionen f_j auf X , die Träger in U_j besitzen und jeweils auf V_j identisch Eins sind. Mit $f := 1 - (f_1 + \dots + f_m)$ ist die Form $f\omega$ identisch Null auf jedem $V_j \setminus \{x_j\}$ und daher in jeden Punkt x_j hinein fortsetzbar. Da $f\omega$ kompakten Träger besitzt, ist nach dem vorstehenden Lemma

$$\int_X d(f\omega) = 0.$$

Auf $V_j \setminus \{x_j\}$ ist $f_j\omega = \omega$ und damit $d(f_j\omega) = d\omega = 0$, da ω eine holomorphe Form auf $X' := X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ ist. Somit kann man $d(f_j\omega)$ als eine 2–Form auf ganz X auffassen, die einen kompakten Träger in $U_j \cap X'$ besitzt. Wegen $d(f\omega) = -\sum_{j=1}^m d(f_j\omega)$ ist dann aber

$$\sum_{j=1}^m \int_X d(f_j\omega) = 0.$$

Wenn wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit U_j mit dem Einheitskreis D um den Nullpunkt $x_j = 0$ identifizieren, so gibt es Zahlen $0 < \varepsilon < r < 1$, so daß $\operatorname{supp} f_j \subset D_r$ und $(f_j)|_{\overline{D_\varepsilon}} \equiv 1$. Mit dem Residuensatz in der komplexen Ebene ist dann schließlich

$$\int_X d(f_j\omega) = \int_{\varepsilon \leq |z| \leq r} d(f_j\omega) = - \int_{\partial D_\varepsilon} f_j\omega = -2\pi i \operatorname{res}_{x_j} \omega. \quad \square$$

28 Der Satz von Riemann - Roch und Einbettung Riemannscher Flächen

Die folgenden beiden Kapitel widmen wir den Sätzen von RIEMANN-ROCH und von ABEL-JACOBI. Es sei im folgenden X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g . Ein *Divisor* auf X ist eine (formale) Summe

$$D = \sum_{x \in X} a(x)x, \quad a(x) \in \mathbb{Z}, \quad \text{fast alle } a(x) = 0,$$

also in konzeptionellerer Auffassung eine Abbildung $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$, die fast überall, d. h. bis auf endlich viele Stellen $x \in X$, verschwindet²². Die Koeffizienten $a(x)$ sind dann zu interpretieren als die Funktionswerte $D(x)$. Man nennt die Teilmenge $\{x \in X : D(x) \neq 0\}$ auch den *Träger* des Divisors D , in Zeichen $\text{supp } D$. Die Menge $\text{Div } X$ aller Divisoren bildet unter der Addition von \mathbb{Z} -wertigen Funktionen eine abelsche Gruppe. Sie besitzt eine *partielle Ordnung*: Man schreibt $D^* \geq D$ genau dann, wenn $D^* - D \geq 0$, wobei $D \geq 0$ gesetzt wird, falls $D(x) \geq 0$ ist für alle $x \in X$. Einen vom Nulldivisor 0 verschiedenen Divisor $D \geq 0$ nennt man auch *positiv* und schreibt dann $D > 0$. Jeder Divisor D schreibt sich eindeutig in der Form $D = D^+ - D^-$, wobei die Divisoren D^+ und D^- nicht negativ sind und disjunkte Träger besitzen.

Definition. Auf der Gruppe $\text{Div } X$ hat man einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$\text{deg} : \begin{cases} \text{Div } X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ D = \sum a(x)x & \longmapsto & \sum a(x). \end{cases}$$

Man nennt $\text{deg } D$ den *Grad* des Divisors D . Die Divisoren vom Grad 0 bilden eine Untergruppe von $\text{Div } X$, die oft auch mit $\text{Div}_0 X$ bezeichnet wird.

Jeder nicht trivialen meromorphen Funktion $h \in (\mathcal{M}(X))^*$ ist der *Null und Polstellen-Divisor*

$$\text{div } h = \sum_{x \in X} n_x(h)x, \quad n_x(h) = \text{Nullstellenordnung von } h \text{ in } x$$

zugeordnet. Wir schreiben $N = N_h$ für den *Nullstellen-Divisor* $(\text{div } h)^+$ und $P = P_h$ für den (absoluten) *Polstellen-Divisor* $(\text{div } h)^-$ der Funktion h . Es gilt stets wegen des *Residuensatzes* auf kompakten Riemannschen Flächen X (siehe Folgerung 27.29)

$$\text{deg } \text{div } h = 0 \quad \text{d. h.} \quad \text{div } h \in \text{Div}_0 X.$$

Weiter ist $\text{div}(gh) = \text{div } g + \text{div } h$ etc. Also ist $\{\text{div } h : h \in \mathcal{M}(X)^*\}$ eine Untergruppe von $\text{Div } X$, die die Gruppe der *Hauptdivisoren* $\text{Div}_H X$ auf X heißt.

Definition und Bemerkung. Man nennt die Quotientengruppe $\text{Div}_0 X / \text{Div}_H X$ auch die *PICARD-Gruppe* $\text{Pic}^0 X$ von X . Sie kodiert alle Divisoren auf X vom Grad Null, die nicht Null- und Polstellendivisoren von globalen meromorphen Funktionen auf X sind. Wir werden im folgenden Kapitel nachweisen, daß sie die Struktur eines g -dimensionalen Torus besitzt. Sie kann auch identifiziert werden mit der Gruppe der *holomorphen Geradenbündel* über X , die *topologisch trivial* sind.

Kommen wir zuerst zu dem *Satz von RIEMANN und ROCH*. Es sei $D = \sum a(x)x$ ein Divisor auf der kompakten Riemannschen Fläche X . Statt des Problems, die *Gleichung*

$$\text{div } h = -D, \quad h \in \mathcal{M}(X)$$

²²Wir hoffen, daß der Leser keine Schwierigkeiten damit hat, daß wir bislang das Symbol D vornehmlich für Kreisseiben verwendet haben.

für einen Divisor vom Grad 0 zu lösen, können wir auch fragen, ob es zu einem beliebigen Divisor D eine meromorphe Funktion $h \in \mathcal{M}(X)$ gibt mit

$$\operatorname{div} h \geq -D, \quad \text{also} \quad \operatorname{div} h + D \geq 0,$$

und gegebenenfalls wieviele? Hierbei hat das Minuszeichen auf der rechten Seite keine tiefere Bedeutung und steht dort aus historischen Gründen. Unsere Aufgabenstellung lautet also präziser, wenn wir den vorgegebenen Divisor D in der obigen Form $D^+ - D^-$ zerlegen: Bestimme die Dimension des Vektorraums aller meromorphen Funktionen h auf X mit

$$P_h \leq D^+ \quad \text{und} \quad N_h \geq D^-.$$

Darauf gibt der Satz von Riemann–Roch nun eine Antwort. - Wir müssen zunächst einige neue garbentheoretische Definitionen bzgl. eines festen Divisors $D \in \operatorname{Div} X$ geben. Für jede offene Menge $U \subset X$ setzen wir

$$\mathcal{O}_D(U) := \{h \in \mathcal{M}(U) : \operatorname{div} h \geq -D|_U\}.$$

Dies liefert offensichtlich eine Garbe, die zudem eine *Untergarbe* von \mathcal{M} ist: $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{M}$.

Die wichtigsten Eigenschaften dieses Systems von Garben fassen wir in dem folgenden Lemma zusammen.

Lemma 28.1 *Es gilt $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{D^*}$, falls $D^* - D \in \operatorname{div}_H X$. Insbesondere ist jede der Garben \mathcal{O}_D lokal isomorph zu der Strukturgarbe \mathcal{O} . Für zwei Divisoren $D < D^*$ ist in kanonischer Weise \mathcal{O}_D eine Untergarbe von \mathcal{O}_{D^*} : $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D^*}$.*

Beweis. Unter der Voraussetzung $D^* - D = \operatorname{div} h$ liefert der vermöge der *Multiplikation* mit h gegebene \mathcal{O} -Modulautomorphismus von \mathcal{M} auf sich selbst nach Einschränkung auf \mathcal{O}_{D^*} einen Garbenisomorphismus $\mathcal{O}_{D^*} \rightarrow \mathcal{O}_D$, da mit $\operatorname{div} g \geq -D^*$ sofort $\operatorname{div}(hg) = \operatorname{div} h + \operatorname{div} g \geq \operatorname{div} h - D^* = -D$ folgt und umgekehrt.

Die *lokale Isomorphie* $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ folgt aus dem ersten Teil aufgrund der Tatsache, daß jeder Divisor D lokal selbstverständlich ein Hauptdivisor ist: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Koordinatenumgebung U , deren Durchschnitt mit $\operatorname{supp} D$ höchstens aus dem Punkt x besteht, und folglich gibt es eine meromorphe Funktion $h \in \mathcal{M}(U)$ mit $\operatorname{div} h = D|_U$.

Die letzte Behauptung folgt trivialerweise aus $-D > -D^*$. □

Bemerkung. Wegen der lokalen Isomorphie $(\mathcal{O}_D)|_U \cong \mathcal{O}|_U$ kann man die Garben \mathcal{O}_D auch als Garben von Keimen von *holomorphen Schnitten* in geeigneten *holomorphen Geradenbündeln* über der Riemannschen Fläche X auffassen. Einzelheiten dazu findet man weiter unten im Text.

Als erste leichte Übung erhalten wir die einfache und dennoch später sehr folgenreiche Aussage.

Lemma 28.2 *Für Divisoren D mit $\deg D < 0$ ist $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.*

Beweis. Angenommen, es existiert $0 \neq h \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Dann ist $\operatorname{div} h \geq -D$ und folglich $\deg \operatorname{div} h \geq \deg(-D) = -\deg D > 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\deg \operatorname{div} h = 0$. □

Wir werden jetzt die Formel von Riemann und Roch in cohomologischer Fassung formulieren und nach zwei kurzen Anwendungen zumindest teilweise herleiten. Die zunächst ausgelassenen Beweise der *Endlichkeitsaussagen* werden später mit Hilfe der noch zu entwickelnden konkreten *Dualitätstheorie* nachgeliefert.

Satz 28.3 (Riemann - Roch) *Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = g(X)$, und $D \in \operatorname{Div} X$ sei ein beliebiger Divisor. Dann sind die Vektorräume $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich dimensional, und es gilt:*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

Bemerkung. Aus der Formel des Satzes von Riemann–Roch folgt die *Ungleichung*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg D ,$$

die tatsächlich historisch auf RIEMANN zurückgeht. Insbesondere ist

$$H^0(X, \mathcal{O}_D) \neq 0 , \quad \text{falls} \quad \deg D \geq g .$$

Der eigentliche Beitrag von ROCH besteht in der Bestimmung der Dimension des *Fehlerterms* $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ in der Ungleichung von Riemann, die auch als *Spezialitätsindex* des Divisors D bezeichnet wird. Rochs Interpretation des Spezialitätsindex können wir allerdings aus der obigen modernen Formulierung erst nach dem schon mehrfach angekündigten Beweis eines allgemeineren *Dualitätssatzes* im Sinne von SERRE gewinnen.

Schon die Riemannsche Ungleichung gestattet zwei wesentliche Einsichten in die Theorie der kompakten Riemannschen Flächen.

Folgerung 28.4 *Jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g läßt sich als verzweigte Überlagerung von \mathbb{P}_1 mit einer Blätterzahl $\leq g + 1$ realisieren.*

Beweis. Man wähle einen festen Punkt $x_0 \in X$ und den positiven Divisor $D := (g + 1) \cdot x_0$. Nach der obigen Bemerkung ist dann $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$. Somit muß der Vektorraum $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ mehr als die holomorphen, also die konstanten Funktionen enthalten. Anders ausgedrückt: Es gibt eine meromorphe Funktion h auf X , die in x_0 tatsächlich einen Pol besitzt (von einer Ordnung $\leq g + 1$) und ansonsten holomorph ist. $h : X \rightarrow \mathbb{P}_1$ ist dann eine verzweigte Überlagerung von einer Blätterzahl, die $g + 1$ nicht übersteigt. \square

Folgerung 28.5 *Jede kompakte Riemannsche Fläche X mit Geschlecht 0 ist konform äquivalent zur Riemannschen Zahlenkugel \mathbb{P}_1 .*

Denn eine verzweigte Überlagerung mit der Blätterzahl 1 kann nur eine biholomorphe Äquivalenz sein. \square

Den *Beweis* des Satzes von Riemann–Roch führt man so, daß aus $D < D^*$ und der Richtigkeit für einen der beiden Divisoren die Richtigkeit für den anderen folgt. Also bleibt dann nur noch über, den Fall $D = 0$ zu behandeln. Hier ist aber nichts zu beweisen, da nach Definition $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ für den Nulldivisor $D = 0$ gilt und damit

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg 0$$

ist.

Da man von jedem Divisor D zu jedem anderen Divisor D^* durch endlich viele Additionen oder Subtraktionen von *Punktdivisoren* $1 \cdot x$ gelangt, können wir annehmen, daß

$$D^* = D + 1 \cdot x_0$$

mit einem fest gewählten Punkt $x_0 \in X$ gilt. Dann ist $D^* > D$ und folglich \mathcal{O}_D eine Untergarbe von \mathcal{O}_{D^*} .

Der Schlüssel zum Beweis des Satzes von Riemann–Roch liegt in der Untersuchung der *Quotientengarbe*

$$\mathcal{Q}_D^{D^*} := \mathcal{O}_{D^*} / \mathcal{O}_D .$$

Wegen $\mathcal{O}_{D^*} = \mathcal{O}_D$ außerhalb des Punktes x_0 ist dies eine Garbe, deren Halme an allen Stellen $x \neq x_0$ trivial sind. Lokal in einer Kartenumgebung mit $z = 0$ an der Stelle x_0 wird ein Schnitt in dem Quotienten repräsentiert durch einen Schnitt in \mathcal{O}_{D^*} , also durch eine meromorphe Funktion des Typs

$$(+) \quad h(z) := z^{-n}(c + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) \quad \text{mit} \quad n := D^*(x_0) = D(x_0) + 1.$$

Modulo Schnitten in \mathcal{O}_D ist dieser Schnitt folglich eindeutig repräsentiert durch die Zahl c in der Formel (+). Mit anderen Worten: Es gibt eine Isomorphie von \mathbb{C} -Vektorräumen $(\mathcal{Q}_D^{D^*})_{x_0} = \mathbb{C}$. Schnitte in der Quotientengarbe sind also Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{C}$ mit Träger in x_0 , also völlig festgelegt durch ihren Wert an der Stelle x_0 ; insbesondere ist

$$H^0(U, \mathcal{Q}_D^{D^*}) \cong \mathbb{C} \quad \text{falls} \quad x_0 \in U \quad \text{und} \quad H^0(U, \mathcal{Q}_D^{D^*}) \cong 0 \quad \text{falls} \quad x_0 \notin U.$$

Die Cohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{Q}_D^{D^*})$ verschwindet aber, da offensichtlich die Garbe $\mathcal{Q}_D^{D^*}$ Teilungen der Eins besitzt²³. Mit der langen Cohomologiesequenz gewinnt man folglich aus der kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D^*} \longrightarrow \mathcal{Q}_D^{D^*} \longrightarrow 0$$

die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D^*}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{Q}_D^{D^*}) \\ \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D^*}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{Q}_D^{D^*}) = 0. \end{aligned}$$

Da nach den vorstehenden Überlegungen die Dimension des Vektorraums $H^0(X, \mathcal{Q}_D^{D^*})$ gleich Eins ist, ist $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ genau dann endlich dimensional, wenn dies für $H^0(X, \mathcal{O}_{D^*})$ zutrifft. Für $D = 0$ ist aber $H^0(X, \mathcal{O}_0) \cong \mathbb{C}$, und daraus folgt per Induktion die Endlich-Dimensionalität aller Vektorräume $H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Aus dem gleichen Grunde gewinnt man die Einsicht, daß *alle* Vektorräume $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ von endlicher Dimension sind, wenn man dies für einen *einzigsten* Divisor zeigen kann. Mit *Dualitätstheorie* werden wir aber sehen, daß für jeden *kanonischen* Divisor²⁴ K der Vektorraum $H^1(X, \mathcal{O}_K)$ eindimensional ist.

Wir werden für den Rest des Beweises davon ausgehen, daß wir es mit einer exakten Sequenz von endlich dimensionalen Vektorräumen zu tun haben. Für eine solche ist notwendigerweise die Wechselsumme der Vektorraum-Dimensionen gleich Null, wie eine leichte Überlegung mit Linearer Algebra vermittelt. Zerlegung der Sequenz in kurze exakte Sequenzen und die Dimensionsformel für kurze exakte Sequenzen ergibt. Wir erhalten damit die Aussage, daß

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D^*}) + \dim H^0(X, \mathcal{Q}_D^{D^*}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D^*}) = 0$$

oder, anders zusammengefaßt, daß

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) + 1 = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D^*}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D^*}).$$

Wegen $\deg D^* = \deg D + 1$ ist der Ausdruck

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D$$

unabhängig von dem Divisor D . □

Zur konsistenten Behandlung der Dualitätstheorie im Rahmen der Garben \mathcal{O}_D auf kompakten Riemannschen Flächen ist es zweckmäßig, auch das Null- und Polstellen-Verhalten einer *meromorphen 1-Form* in einem Divisor zu kodieren. Hat die Form $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ in zwei verschiedenen Koordinaten w und z mit $w = \varphi(z)$ die Darstellungen

$$\omega = f(z) dz = g(w) dw,$$

²³Sie ist sogar *welk*, d. h. jeder Schnitt auf einer offenen Menge läßt sich zu einem Schnitt auf ganz X fortsetzen. Solche *welke* Garben besitzen stets nur triviale Cohomologie.

²⁴Dieser Begriff wird auf der folgenden Seite konkret eingeführt.

so ist $f(z) = g(\varphi(z))\varphi'(z)$ und damit

$$(\operatorname{div} f)(z) = (\operatorname{div} g)(\varphi(z)) \quad \text{wegen} \quad (\operatorname{div} \varphi')(z) = 0 \quad \text{für alle } z.$$

Somit wird durch

$$\operatorname{div} \omega = \operatorname{div}(f dz) := \operatorname{div} f$$

der Form ω lokal ein von dem Koordinatensystem unabhängiger Divisor und damit auch global ein Divisor $\operatorname{div} \omega$ zugeordnet, der additiv in ω ist und der Bedingung

$$\operatorname{div}(h\omega) = \operatorname{div} h + \operatorname{div} \omega \quad \text{für } h \in \mathcal{M}(X), \quad \omega \in \mathcal{M}^1(X)$$

genügt.

Definition. Wir definieren analog zu den Garben \mathcal{O}_D für eine offene Teilmenge $U \subset X$ den Modul $\Omega_D^1(U)$ durch $\{\omega \in \mathcal{M}^1(U) : \operatorname{div} \omega \geq -D|_U\}$. Dies liefert diesmal eine \mathcal{O} -Untergarbe $\Omega_D^1 \subset \mathcal{M}^1$.

In einem gewissen Sinne ist die Einführung dieser Garben überflüssig.

Definition und Bemerkung. Jeder Divisor der Form $\operatorname{div} \omega$ mit einer nicht trivialen meromorphen 1-Form $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ heißt ein *kanonischer Divisor* und wird im Allgemeinen mit dem Symbol K belegt. Solche Divisoren existieren, da es nicht triviale meromorphe Funktionen h auf X und damit auch nicht triviale meromorphe 1-Formen, z. B. $\omega := dh$, gibt.

Beispiel. Aus der Transformationsformel $w = 1/z$ auf dem \mathbb{P}_1 ergibt sich

$$dw = \frac{-1}{z^2} dz.$$

Somit besitzt \mathbb{P}_1 eine nicht triviale meromorphe 1-Form mit dem kanonischen Divisor $K = -2z_0$, wobei z_0 den Nullpunkt im Koordinatensystem U_0 bezeichnet. Hieraus schließt man sofort, daß jeder Divisor D auf \mathbb{P}_1 mit $\operatorname{deg} D = -2$ kanonisch ist.

Lemma 28.6 *Es sei K ein kanonischer Divisor auf der kompakten Riemannschen Fläche X . Dann besteht für jeden Divisor D eine kanonische Isomorphie*

$$\mathcal{O}_{D+K} \xrightarrow{\sim} \Omega_D^1.$$

Beweis. Es sei $K = \operatorname{div} \omega$ ein *kanonischer Divisor* zu der nicht trivialen meromorphen 1-Form ω auf X . Ist dann $h \in \mathcal{O}_{D+K}(U)$, so ist $h\omega|_U \in \mathcal{M}^1(U)$ mit

$$\operatorname{div}(h\omega) = \operatorname{div} h + \operatorname{div} \omega|_U \geq -(D|_U + K|_U) + K|_U = -D|_U.$$

Somit liefert die Zuordnung $h \mapsto h\omega|_U$ einen Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_{D+K} \rightarrow \Omega_D^1$.

Für diese Abbildung kann man aber auch sofort eine Umkehrabbildung hinschreiben. Ist nämlich $\eta \in \mathcal{M}^1(U)$ vorgegeben, so existiert eine eindeutig bestimmte meromorphe Funktion h auf U mit $\eta = h\omega|_U$. Mit der gleichen Rechnung wie zuvor sieht man, daß $\operatorname{div} h \geq -(D + K)|_U$, falls $\operatorname{div} \eta \geq -D|_U$. \square

Der allgemeine *Dualitätssatz* auf kompakten Riemannschen Flächen kann nun sehr einfach wie folgt formuliert werden.

Satz 28.7 (Serre - Dualität) *Man hat einen kanonischen Isomorphismus*

$$H^0(X, \Omega_{-D}^1) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*.$$

Wir verschieben den *Beweis* in den Anhang dieses Kapitels. Siehe auch FORSTER, loc. cit., 17.9. \square

Bemerkungen. 1. Hiermit lautet die Formel von Riemann und Roch in *klassischer* Fassung wie folgt:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}^1) = 1 - g + \deg D$$

für jeden Divisor D auf einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g .

2. Satz 6 beinhaltet beide Aussagen von Satz 27.17 für kompakte Riemannsche Flächen. Denn setzt man $D = 0$, so kommt

$$H^1(X, \mathcal{O})^* \cong H^1(X, \mathcal{O}_0)^* \cong H^0(X, \Omega_0^1) \cong H^0(X, \Omega^1).$$

Auf der anderen Seite hat man

$$H^1(X, \Omega^1)^* = H^1(X, \Omega_0^1)^* \cong H^1(X, \mathcal{O}_K)^* \cong H^0(X, \Omega_{-K}^1) \cong H^0(X, \mathcal{O}).$$

Folgerung 28.8 ω sei eine nicht triviale meromorphe 1-Form auf X vom Geschlecht g . Dann folgt

$$\deg K = \deg \operatorname{div} \omega = 2(g - 1).$$

Beweis. Aus dem Dualitätssatz als auch aus dem Satz von Riemann-Roch resultiert die Gleichungskette

$$\begin{aligned} g - 1 &= \dim H^0(X, \Omega^1) - \dim H^1(X, \Omega^1) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) \\ &= 1 - g + \deg K, \end{aligned}$$

aus der sich unmittelbar die Behauptung ergibt. \square

Wir schließen noch einen weiteren *Beweis* der RIEMANN-HURWITZ-Formel an (siehe Satz 27.22). Aufgrund der soeben hergeleiteten Folgerung ist die EULER-Charakteristik $\chi(X) = 2 - 2g$ einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g gleich dem *Negativen* des Grades jedes kanonischen Divisors K_X . - Wir können die in Rede stehende Beziehung daher auch wie folgt in eine Formel gießen.

Satz 28.9 (Riemann - Hurwitz) Ist $p : X \rightarrow Y$ eine verzweigte holomorphe Überlagerung von kompakten Riemannschen Flächen mit totaler Verzweigungsordnung ν und Blätterzahl b , so gilt die Formel

$$\deg K_X = b \deg K_Y + \nu.$$

Beweis. Es sei η eine nicht triviale meromorphe 1-Form auf Y ; dann ist $\omega := p^*\eta$ eine entsprechende Form auf X und folglich $\deg K_Y = \deg \operatorname{div} \eta$, $\deg K_X = \deg \operatorname{div} \omega$. Ist nun p in einer lokalen Karte um einen Punkt in X von der Form $z \mapsto w := z^{v+1}$ und η lokal um den Bildpunkt (bis auf einen nirgends verschwindenden Faktor) von der Gestalt $w^n dw$ mit $n \in \mathbb{Z}$, so ist ω lokal im Wesentlichen von der Form $z^{n(v+1)+v} dz$.

Bezeichnen wir nun mit n_j die entsprechenden Ordnungen in den kritischen Werten $y_j \in Y$ und mit v_{jk} die Verzweigungsordnungen von p in den Urbildern $x_{jk} \in p^{-1}(y_j)$, so ist also

$$\deg K_Y = \sum_j n_j \quad \text{und} \quad \deg K_X = \sum_{j,k} n_j(v_{jk} + 1) + v_{jk}.$$

Die ganz rechts stehende Doppelsumme stimmt aber wegen $\sum_k (v_{jk} + 1) = b$ und $\sum_{j,k} v_{jk} = \nu$ mit $b \deg K_Y + \nu$ überein. \square

Bemerkung. Man beachte die völlige Analogie zu dem früheren Beweis mit der *homologischen* Methode der *simultanen Triangulierungen* von X und Y .

Wir zeigen als nächstes, daß für $\deg D \gg 0$ die Garbe \mathcal{O}_D *sehr viele* Schnitte besitzt, und danach, wie man mit deren Hilfe die kompakte Riemannsche Fläche X als *abgeschlossenen analytischen Unterraum* eines projektiven Raumes \mathbb{P}_N realisieren kann.

Satz 28.10 Ist D ein Divisor mit Grad $\deg D > 2(g - 1)$. Dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$$

und

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D > g - 1.$$

Beweis. Nur die erste Aussage ist zu zeigen; es ist tatsächlich

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega^1_{-D}) = H^0(X, \mathcal{O}_{-D+K}) = 0$$

wegen Lemma 2, da

$$\deg(-D + K) = -\deg D + \deg K < -\deg K + \deg K = 0. \quad \square$$

Im Zusammenhang mit der Lösung von Mittag-Leffler-Problemen auf kompakten Riemannschen Flächen X in Kapitel 27 haben wir an einer Stelle benutzt (Lemma 27.26), daß die erste Cohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{M})$ mit Werten in der Garbe der Keime von meromorphen Funktionen verschwindet. - Wir holen den Beweis jetzt nach.

Folgerung 28.11 Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0.$$

Beweis. Es sei $(h_{\iota\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ ein 1-Cozyklus zu einer Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in \mathcal{M} . Indem wir evtl. zu einer endlichen Verfeinerung \mathfrak{B} von \mathfrak{U} übergehen, deren Elemente *relativ kompakt* in Elementen von \mathfrak{U} enthalten sind, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Funktionen $h_{\iota\kappa}$ nur endlich viele Polstellen besitzen. Infolgedessen gibt es einen positiven Divisor D mit $\deg D > 2g - 2$, so daß $(h_{\iota\kappa}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Mit $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = 0$ folgt dann die Behauptung. \square

Wir wollen abschließend mit Hilfe von Satz 10 für eine beliebige kompakte Riemannsche Fläche X vermöge von Schnitten in einer geeigneten Garbe \mathcal{O}_D , $\deg D \gg 0$, eine holomorphe Einbettung in einem projektiven Raum \mathbb{P}_N konstruieren. Wir wählen dazu $\deg D$ so groß, daß \mathcal{O}_D „viele“ Schnitte besitzt (wieviele wir brauchen, wird im Laufe des Gedankengangs noch deutlich werden), und bezeichnen mit

$$s_0, \dots, s_N \text{ eine Basis von } H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

Lokal um jeden Punkt von X existiert eine Umgebung U und eine meromorphe Funktion $h \in \mathcal{M}(U)$ mit $\text{div } h = D|_U$, so daß die Multiplikation mit h auf U einen Garbenisomorphismus

$$h : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$$

induziert. Man setze nun

$$f_0 := s_0 h, \dots, f_N := s_N h.$$

Hiermit wird eine holomorphe Abbildung

$$f_U : U \rightarrow \mathbb{C}^{N+1} \text{ durch } f_U(x) := (f_0(x), \dots, f_N(x))$$

definiert. Durch eine andere Wahl von h wird $f_U(x)$ nur an jeder Stelle $x \in U$ durch einen Faktor $c(x) \neq 0$ abgeändert.

Nun impliziert für einen Schnitt $s \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ die Bedingung $(sh)(x) = 0$ an einer Stelle $x \in U$, daß

$$s \in H^0(X, \mathcal{O}_{D-x}) \subset H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

Wäre also $f_U(x) = 0$ für ein $x \in U$, so würde folgen:

$$H^0(X, \mathcal{O}_{D-x}) = H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

Dies kann nach Satz 10 für $\deg D > 2(g - 1) + 1$ wegen $\deg(D - x) = \deg D - 1$ aber nicht sein. Ebenso folgt aus

$$H^0(X, \mathcal{O}_{D-x-y}) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_{D-x})$$

für $\deg D > 2(g - 1) + 2 = 2g$, daß es stets Schnitte $s \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ gibt mit

$$s(x) = 0, \quad s(y) \neq 0 \quad \text{für } x \neq y.$$

Hieraus folgt: Es gibt eine wohlbestimmte injektive (holomorphe) Abbildung

$$f: X \hookrightarrow \mathbb{P}_N = \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*.$$

Wendet man das obige Argument für $x = y$ an, so ergibt sich ebenfalls sofort, daß das Differential

$$df(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in X$$

ist. Wegen der Kompaktheit von \mathbb{P}_N schließt man daraus, daß das Bild $f(X) \subset \mathbb{P}_N$ eine abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 von \mathbb{P}_N und die Abbildung $f: X \rightarrow f(X)$ biholomorph ist. \square

Bemerkungen. 1. Die oben konstruierte holomorphe Abbildung $X \rightarrow \mathbb{P}_N$ hängt nicht wesentlich, wie es zunächst den Anschein haben könnte, von der Basis s_0, \dots, s_N des Schnittmoduls $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ ab. Geht man nämlich zu einer anderen Basis über, so bedeutet dies nur die Hinterschaltung eines *linearen Automorphismus* von \mathbb{P}_N .

2. Der berühmte *Satz von CHOW* besagt, daß jede abgeschlossene analytische Untervarietät X des projektiven Raumes $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ *algebraisch* ist in dem Sinne, daß es endlich viele homogene Polynome P_1, \dots, P_m in den Variablen z_0, \dots, z_N gibt mit

$$X = \{ [z_0 : \dots : z_N] \in \mathbb{P}_N : P_1(z_0, \dots, z_N) = \dots = P_m(z_0, \dots, z_N) = 0 \}.$$

Wir sehen damit erneut, daß kompakte Riemannsche Flächen X auch als *algebraische Kurven* aufgefaßt werden können.

Anhang: Der Serresche Dualitätssatz

Wir werden in diesem Anhang den SERRESCHEN *Dualitätssatz* in einer (auf den ersten Blick anderen) Situation beweisen. Daß die hier behandelte Version exakt mit der im Haupttext formulierten übereinstimmt, werden wir im abschließenden Kapitel 29 zeigen.

Wir betrachten in diesem Anhang *holomorphe Geradenbündel* L auf der kompakten Riemannschen Fläche X , die man formal als Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ definieren kann. (Zu ihrer geometrischen Interpretation siehe Kapitel 29). Ein holomorphes Geradenbündel L wird somit bzgl. einer geeigneten offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ von X gegeben durch einen 1-Cozyklus in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, also durch ein System von invertierbaren Funktionen $f_{\iota\kappa} \in \mathcal{O}^*(U_{\iota\kappa})$, die der Cozykel-Bedingung

$$f_{\iota\kappa} f_{\kappa\lambda} = f_{\iota\lambda} \quad \text{auf} \quad U_{\iota\kappa\lambda} := U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$$

genügen. Ein *Schnitt* s in dem Bündel L entspricht dann einem System $(s_\iota)_{\iota \in I}$ von Funktionen s_ι auf U_ι mit

$$s_\iota(x) = f_{\iota\kappa}(x) s_\kappa(x) \quad \text{für} \quad x \in U_{\iota\kappa}.$$

Ein solcher Schnitt heißt *differenzierbar*, *holomorph* etc., falls alle s_ι diese Eigenschaft besitzen. Diese Bedingung macht auch Sinn für offene Teilmengen $U \subset X$, so daß wir auch von der *Garbe* der Keime von differenzierbaren bzw. holomorphen Schnitten in dem Geradenbündel L sprechen können. Diese werden mit

$$\mathcal{E}(L) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{O}(L)$$

bezeichnet.

Bemerkung. Die Garben \mathcal{O}_D können mit der Garbe von Keimen holomorpher Schnitte in einem geeigneten holomorphen Geradenbündel identifiziert werden.

Es lassen sich ferner genauso einfach die Garben der Keime von differenzierbaren $(1, 0)$ - und $(0, 1)$ -Formen mit Werten in L einführen, die die Bezeichnungen

$$\mathcal{E}^{1,0}(L) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}^{0,1}(L)$$

erhalten. Da Exaktheit einer Sequenz eine rein lokale Eigenschaft ist, liefert das DOLBEAULTSche *Lemma* auch für jedes holomorphe Geradenbündel L eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow \mathcal{E}(L) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}(L) \longrightarrow 0$$

und damit wegen der offensichtlichen Feinheit der Garben $\mathcal{E}(L)$ und $\mathcal{E}^{0,1}(L)$ die kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}(L)) &= \ker(\bar{\partial} : H^0(X, \mathcal{E}(L)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}(L))), \\ H^1(X, \mathcal{O}(L)) &= H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}(L)) / \text{im}(\bar{\partial} : H^0(X, \mathcal{E}(L)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}(L))), \\ H^q(X, \mathcal{O}(L)) &= 0, \quad q \geq 2. \end{aligned}$$

Die *holomorphen* 1-Formen mit Werten in L bilden eine Untergarbe von $\mathcal{E}^{1,0}(L)$, die wir mit $\Omega^1(L)$ bezeichnen wollen.

Ferner können wir jedem holomorphen Geradenbündel L das *duale* Bündel L^* zuordnen, das durch den inversen 1-Cozyklus $(1/f_{\iota\kappa})$ definiert wird. Jedem Paar von Schnitten

$$\varphi \in H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}(L)) \quad \text{und} \quad \psi \in H^0(X, \Omega^1(L^*))$$

kann man (in lokalen Koordinaten) dann durch

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \wedge \psi$$

eine auf ganz X wohldefinierte $(1, 1)$ -Form zuordnen, die man über X integrieren kann:

$$H^0(X, \mathcal{E}^{0,1}(L)) \times H^0(X, \Omega^1(L^*)) \ni (\varphi, \psi) \mapsto \int_X \varphi \wedge \psi .$$

Diese bilineare Abbildung faktorisiert auf der linken Seite nach dem Satz von STOKES über das Bild von $\bar{\partial}$ und liefert somit eine bilineare Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}(L)) \times H^0(X, \Omega^1(L^*)) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Der SERRESche *Dualitätssatz* besagt nun in diesem Zusammenhang:

Satz 28.12 (Dualitätssatz) *Für ein beliebiges holomorphes Geradenbündel L auf der kompakten Riemannschen Fläche X ist die natürliche Paarung*

$$H^1(X, \mathcal{O}(L)) \times H^0(X, \Omega^1(L^*)) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

nicht ausgeartet. Insbesondere ist

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}(L)) = \dim H^0(X, \Omega^1(L^*)) .$$

Bemerkung. Der 1-Cozyklus mit $f_{\iota\kappa} \equiv 1$ zu einer beliebigen offenen Überdeckung definiert das sogenannte *triviale* Geradenbündel, das mit seinem dualen Bündel übereinstimmt. Für dieses ist augenscheinlich die Garbe der holomorphen Schnitte gleich der Strukturgarbe \mathcal{O} und die Garbe der Keime von holomorphen 1-Formen gleich Ω^1 . Somit beinhaltet der vorstehende Satz die schon mehrfach benutzte Aussage, daß

$$\dim H^0(X, \Omega^1) = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g(X) .$$

Beweis von Satz 12. □

Supplement: Der Primzahlsatz

Wir wollen in diesem Anhang den sogenannten *Primzahlsatz* beweisen. Dieser macht eine *asymptotische* Aussage über das Verhalten der *Primzahlfunktion* $\pi(x)$, die die Anzahl der Primzahlen zwischen 0 und einer beliebig vorgegebenen reellen Zahl $x \geq 0$ mißt, also über die Funktion

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \quad x \geq 0.$$

Vermutet wurde ein konkretes asymptotisches Verhalten von π wohl schon am Ende des 18. Jahrhunderts von CARL FRIEDRICH GAUSS, der an Hand der Logarithmentafeln von SCHULZE, einem Geschenk des Herzogs Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig aus dem Jahre 1791 an den damals 14-jährigen Schüler, und aufgrund umfangreicher eigener Rechnungen schon in jungen Jahren die Vermutung hatte, daß die Funktion $\pi(x)$ „gut approximiert“ wird durch den *Integral-Logarithmus*

$$\text{Li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

(Hier steht \log weiterhin wie in unserem gesamten Manuskript für den natürlichen Logarithmus). Nachweislich sprach er aber diese Vermutung erst in einem vierseitigen Brief an seinen früheren Schüler, den damaligen Leutnant der Artillerie und späteren Astronomen in Berlin, JOHANN FRANZ HENCKE, im Jahre 1849 aus (der Brief ist datiert vom 24. Dezember). Er verweist dort auf seine sporadischen Berechnungen, die er 1792/93 begonnen habe, im Jahre 1796 bis zur Zahl 400.031 weiterführte und schließlich bis zur Grenze 3.000.000 ausdehnte, und faßt einige Ergebnisse zusammen. Umfangreichere Tafeln befanden sich in seinem Nachlaß; siehe hierzu: Yuri Tschinkel, *About the cover: On the distribution of primes - Gauss' tables*, Bulletin of the American Mathematical Society **43** (19), 89–91. Man berechnet zum Beispiel

$$\int_{1900000}^{2000000} \frac{dt}{\log t} = 6904,54423628\dots$$

und findet tatsächlich 6904 Primzahlen in diesem Bereich (Gauß berechnet das Integral zu 6904,54424 und findet fälschlicherweise „nur“ 6902 Primzahlen; siehe loc. cit.).

Ein erster *Beweis* des Primzahlsatzes wurde von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN fast gleichzeitig, aber unabhängig voneinander im Jahre 1896 in der folgenden Form gegeben:

Satz 29.8 *Es gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

für $x \rightarrow \infty$, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1.$$

Alle analytischen Beweise beruhen auf der bahnbrechenden Arbeit von BERNHARD RIEMANN über die ζ -Funktion und verwenden (zum Teil sehr tiefliegende) Aussagen der Funktionentheorie. Wir wollen im folgenden einen Beweis skizzieren, der nur ganz elementare Ergebnisse der Funktionentheorie heranzieht.

Bemerkungen. 1. Man kann die komplexen auch durch elementare *reelle* Methoden ersetzen und damit die Funktionentheorie überflüssig werden lassen, wie ERNST WITT in seinen Vorlesungen demonstriert hat. Sein Beweis nimmt nur eine einzige handgeschriebene Seite ein und ist in seinen gesammelten Werken im Faksimile abgedruckt. Eine (vermeintliche) Lücke wurde von HELMUT MÜLLER geschlossen²².

2. Seit Mitte des letzten Jahrhunderts gibt es aber auch Beweise nach der sogenannten *Siebmethode*

²²Siehe H. Müller,, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg,

von SELBERG, ERDÖS et alii, die gänzlich ohne analytische Methoden auskommen.

Eng verbunden mit $\pi(x)$ sind weitere Funktionen, mit deren Hilfe der Primzahlsatz eine noch handlichere Form annimmt. Man setzt

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & n = p^m, \\ 0, & n \text{ ist keine Primzahlpotenz.} \end{cases}$$

Man nennt Λ die VON MANGOLDTSche *Funktion*. Mit ihr bildet man die CHEBYSHEV-*Funktion*

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leq x} \log p.$$

Für festes p zählt also $\psi(x)$ die Zahl $\log p$ so oft, wie Potenzen p^m existieren mit $p^m \leq x$, d. h.

$$\left[\frac{\log x}{\log p} \right]$$

mal. Hierbei bezeichnet $[y]$ die größte ganze Zahl, die $\leq y$ ist. Deshalb ergibt sich sofort die Abschätzung

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \log x \cdot \sum_{p \leq x} 1 = \log x \cdot \pi(x).$$

Andererseits gilt für alle $1 < y < x$:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \\ &< y + \frac{1}{\log y} \sum_{p^m \leq x} \log p \leq y + \frac{\psi(x)}{\log y}. \end{aligned}$$

Setzt man speziell $y = x/(\log x)^2$, so erhält man die Ungleichung

$$\pi(x) \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \cdot \frac{\log x}{\log x - 2 \log \log x}.$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

und wir sehen:

Lemma 29.9 *Der Primzahlsatz ist äquivalent zu der Aussage*

$$\psi(x) \sim x.$$

Eine weitere von CHEBYSHEV eingeführte Funktion ist

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p \leq \psi(x).$$

Man überzeugt sich leicht von der (endlichen) Summendarstellung

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots.$$

Sei weiter $0 < \alpha < 1$ fest gewählt. Dann gilt mit $p > x^\alpha$ auch $\log p > \log x^\alpha = \alpha \log x$ und deshalb

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \alpha \log x \cdot \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 = \alpha \log x (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \\ &\geq \alpha \pi(x) \log x - \alpha x^\alpha \log x. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \geq \alpha \pi(x) \frac{\log x}{x} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}},$$

und da der letzte Quotient bekanntlich für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, erhält man für alle α wie oben

$$\limsup \frac{\vartheta(x)}{x} \geq \alpha \limsup \pi(x) \frac{\log x}{x} = \alpha \limsup \frac{\psi(x)}{x}.$$

Zusammen mit der Abschätzung in der umgekehrten Richtung ergibt sich dann unter der Voraussetzung, daß die Limites existieren:

Lemma 29.10
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Um uns der Konvergenzaussage zu nähern, beweisen wir als erstes das folgende

Lemma 29.11
$$\vartheta(x) = O(x).$$

Dieses hat nach Lemma 10 zur Konsequenz, daß die entsprechende Wachstumsordnung auch für die Funktion ψ Bestand hat.

Folgerung 29.12
$$\psi(x) = O(x).$$

Beweis von Lemma 11. Es gilt offensichtlich

$$\binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

und der links stehende Binomialkoeffizient wird geteilt von allen Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$. Folglich ist

$$\prod_{n < p \leq 2n} p < 2^{2n} \quad \text{und} \quad \sum_{2^{k-1} < p \leq 2^k} \log p \leq 2^k \log 2$$

und damit

$$\vartheta(2^k) = \sum_{p \leq 2^k} \log p \leq (2^k + 2^{k-1} + \dots) \log 2 < 2^{k+1} \log 2,$$

was sofort wegen der Monotonie von ϑ die gewünschte Abschätzung

$$\vartheta(x) \leq (4 \log 2) x$$

nach sich zieht. □

Bemerkung. Faßt man alle diese Aussagen geeignet zusammen und beweist man noch ein wenig mehr, so erhält man den folgenden

Satz 29.13 (Chebyshev) *Es existieren Konstanten $0 < a < A$, so daß*

$$a \frac{x}{\log x} < \pi(x) < A \frac{x}{\log x}$$

für alle hinreichend großen x .

Als *Folgerung* schließt man hieraus das folgende Resultat, das von BERTRAND vermutet wurde und deshalb manchmal als *Bertrandsches Postulat* in der Literatur zu finden ist, aber tatsächlich auf CHEBYSHEV zurückgeht:

Satz 29.14 Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.

Siehe hierzu z. B. CHANDRASEKHARAN: *Introduction to Analytic Number Theory*.

Als nächstes müssen wir uns etwas intensiver mit der RIEMANNschen ζ -Funktion beschäftigen. Wir schreiben, wie es in der Zahlentheorie üblich ist, $s = \sigma + it$ für die komplexen Zahlen. Für natürliches n ist

$$|n^s| = n^\sigma.$$

Da die Reihe $\sum n^{-\sigma}$ bekanntlich konvergiert für alle $\sigma > 1$, folgt: Die Funktion

$$\zeta(s) := \sum \frac{1}{n^s}$$

ist absolut und gleichmäßig konvergent auf jedem Halbraum $\sigma \geq \sigma_0$ mit festem $\sigma_0 > 1$, und damit insbesondere holomorph auf $\operatorname{Re} s > 1$. Natürlich ist die Reihe in $s = 1$ divergent. Die Funktion ζ läßt sich aber in die ganze rechte Halbebene ohne den Punkt 1 holomorph fortsetzen und hat in 1 einen *einfachen* Pol mit Residuum 1; man beweist nämlich, wie wir anschließend zeigen werden,

$$(*) \quad \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 + s \int_1^\infty ([x] - x) x^{-(s+1)} dx,$$

wobei die rechte Seite holomorph in $\operatorname{Re} s > 0$ ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals für $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, die sich einfach aus $|[x] - x| \leq 1$ ergibt.

Wir tragen den Beweis von (*) nach. Wegen des Identitätssatzes können wir uns von vornherein auf den Halbraum $\operatorname{Re} s > 2$ beschränken. Hier gilt

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} ns \int_n^{n+1} x^{-(s+1)} dx \\ &= s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [x] x^{-(s+1)} dx = s \int_1^\infty [x] x^{-(s+1)} dx. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$s \int_1^\infty x^{-s} ds = -s \frac{x^{-s+1}}{s-1} \Big|_1^\infty = \frac{s}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Eine weitere wichtige Darstellung der ζ -Funktion wird durch das *Euler-Produkt* gegeben. Wir nummerieren die Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge:

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$$

Dann ist wegen des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen das unendliche Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \dots\right) \dots$$

gleich

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{1}{(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots)^s} = \sum \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

also (unter Verwendung der geometrischen Reihe)

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

sofern die rechte Seite (absolut und lokal gleichmäßig) in dem angegebenen Halbraum konvergiert, was nicht schwer zu beweisen ist, da dort die Reihe $\sum p^{-s}$ lokal absolut gleichmäßig konvergent ist.

Aus der Eulerschen Produktdarstellung folgt unmittelbar

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für alle } \operatorname{Re} s > 1.$$

Für den Beweis des Primzahlsatzes ist die folgende Verschärfung wichtig. Der gegebene kurze Beweis stammt von MERTENS (1898).

Lemma 29.15 *Die Riemannsche ζ -Funktion hat keine Nullstellen auf dem abgeschlossenen Halbraum*

$$\operatorname{Re} s \geq 1.$$

Beweis. Sei $\zeta(1 + ib) = 0$, $b \in \mathbb{R}^*$. Dann ist die Funktion

$$\varphi(s) := \zeta^3(s) \zeta^4(s + ib) \zeta(s + 2ib)$$

holomorph in $s = 1$ und hat dort eine Nullstelle. Also gilt

$$\lim_{s \rightarrow 1} \log |\varphi(s)| = -\infty.$$

Sei nun $\sigma > 1$ fest gewählt. Mit dem Euler-Produkt ergibt sich

$$\begin{aligned} \log |\zeta(\sigma + it)| &= -\operatorname{Re} \sum_p \log(1 - p^{-\sigma - it}) \\ &= \operatorname{Re} \sum_p \left\{ p^{-\sigma - it} + \frac{1}{2} (p^2)^{-\sigma - it} + \frac{1}{3} (p^3)^{-\sigma - it} + \dots \right\} \\ &=: \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma - it}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten a_n nicht negativ sind. Damit ist

$$\log |\varphi(\sigma)| = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} (3 + 4n^{-ib} + n^{-2ib}),$$

und der Realteil des Ausdrucks $(3 + 4n^{-ib} + n^{-2ib})$ ist gleich

$$3 + 4 \cos(b \log n) + \cos(2b \log n) = 2(1 + \cos(b \log n))^2 \geq 0.$$

Dies führt zu der dem obigen Grenzwert für φ widersprechenden Abschätzung $\log |\varphi(\sigma)| \geq 0$. \square

Bemerkung. Man kann die Riemannsche ζ -Funktion meromorph nach \mathbb{C} fortsetzen mit den sogenannten trivialen Nullstellen in $-2, -4, \dots$ (Siehe hierzu z. B. CONWAY [6]). Man könnte die Aussage des Primzahlsatzes qualitativ wesentlich verschärfen, wenn man das folgende Resultat zur Verfügung hätte.

Riemannsche Vermutung *Die nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion liegen auf der kritischen Geraden $\operatorname{Re} s = 1/2$.*

In der Tat ist diese Aussage äquivalent zu der folgenden weitaus präziseren Formulierung der GAUSSschen Vermutung:

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x).$$

Als nächstes untersuchen wir die Funktion

$$g(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Nach dem bisher Bewiesenen ist g meromorph nach $\operatorname{Re} s > 0$ fortsetzbar und holomorph auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ mit Ausnahme des Punktes 1. In $s = 1$ hat g offensichtlich einen Pol erster Ordnung. Da ζ dort einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 hat, ergibt sich unmittelbar

$$\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \text{holomorpher Anteil},$$

woraus sich das Residuum von g an der Stelle 1 ebenfalls zu

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)g(s) = -\lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)^2 \zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} = 1$$

berechnet.

Wir benötigen noch eine Darstellung der Funktion g als MELLIN-Transformierte. Diese erhält man im Wesentlichen durch logarithmisches Differenzieren des Euler-Produktes.

$$\begin{aligned} g(s) &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{d}{ds} \log \zeta(s) = -\frac{d}{ds} \log \prod (1-p^{-s})^{-1} \\ &= \sum_p \frac{d}{ds} \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}} \log p \\ &= \sum_p (p^{-s} + p^{-2s} + \dots) \log p = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \end{aligned}$$

mit der von Mangoldtschen Funktion Λ . Auf der anderen Seite existiert wegen

$$\psi(x) \leq \pi(x) \log x \leq x \log x$$

das uneigentliche Integral

$$s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

als holomorphe Funktion auf $\operatorname{Re} s > 1$ und ist ebenfalls gleich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \left\{ \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n+1) - \Lambda(n+1)}{(n+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir einen Satz, der den Primzahl-Satz unmittelbar impliziert.

Satz 29.16 Sei $f(x)$ eine nichtnegative, nichtfallende Funktion auf dem reellen Intervall $(1, \infty)$ mit $f = O(x)$, so daß die „Mellin-Transformierte“

$$g(s) := s \int_1^{\infty} f(x) x^{-(s+1)} dx$$

auf $\operatorname{Re} s > 1$ erklärt und holomorph ist. Sei ferner c eine positive reelle Konstante, so daß

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

holomorph fortgesetzt werden kann in eine Umgebung eines jeden Punktes von $\operatorname{Re} s = 1$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Bemerkung. Dies ist eine *Arme Leute-Version* des berühmten IKEHARA - WIENER - TAUBER-Satzes (1932). Ich folge zum Beweis der Methode von D. J. NEWMAN in der von J. KOREVAAR im *Mathematical Intelligencer*, vol. 4, Nr. 3 (1982), präsentierten Variante.

Zum Beweis des Primzahlsatzes braucht man das obige Ergebnis nur auf das Funktionenpaar $f = \psi$, $g = -\zeta'/\zeta$ anzuwenden. Die Voraussetzungen sind alle schon vorher abgeleitet worden, so daß sich wegen $c = 1$ der Primzahlsatz in der äquivalenten Formulierung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ergibt. □

Newman bewies tatsächlich auf elementare Weise den folgenden Satz (der seinerseits von INGHAM 1935 aus dem Wienerschen Satz gefolgert worden war).

Satz 29.17 Sei $F(t)$ beschränkt und integrierbar über jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$, so daß die Laplace-Transformierte

$$G(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-tz} dt$$

auf $\operatorname{Re} z > 0$ holomorph ist. $G(z)$ möge in jeden Punkt $\operatorname{Re} z = 0$ des Randes holomorph fortsetzbar sein. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty F(t) dt$$

und ist gleich $G(0)$.

Zeigen wir zuerst, daß dieses Ergebnis Satz 16 (und damit den Primzahlsatz) impliziert. Man setze

$$F(t) := e^{-t} f(e^t) - c.$$

Da nach Voraussetzung $f(x) \leq Cx$ ist, ist $F(t)$ beschränkt und lokal integrierbar. Die Laplace-Transformierte von F ergibt sich leicht zu

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^\infty \{e^{-t} f(e^t) - c\} e^{-tz} dt, \quad x = e^t \\ &= \int_1^\infty f(x) x^{-(z+2)} dx - \frac{c}{z} = \frac{1}{z+1} \left\{ g(z+1) - \frac{c}{z} - c \right\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung an g kann die Transformierte G in eine Umgebung von $\operatorname{Re} z = 0$ holomorph fortgesetzt werden, und das Integral

$$\int_0^\infty F(t) dt = \int_0^\infty \{e^{-t} f(e^t) - c\} dt = \int_1^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx$$

ist damit wegen Satz 17 existent.

Hieraus folgt nun, wie behauptet, $f(x) \sim cx$. Denn angenommen, es bestünde die Abschätzung $\limsup f(x)/x > c$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für beliebige große y die Ungleichung

$$f(y) > (c + 2\delta)y$$

besteht. Dies impliziert

$$f(x) \geq f(y) > (c + 2\delta)y > (c + \delta)x$$

für alle x mit $y < x < \rho y$, wobei $\rho := (c + 2\delta)(c + \delta)^{-1} > 1$. Damit ist

$$\int_y^{\rho y} \frac{f(x) - cx}{x^2} dx > \int_y^{\rho y} \frac{\delta}{x} dx = \delta \log \rho = C_0 > 0,$$

so daß das uneigentliche Integral wegen des Cauchy-Kriteriums im Widerspruch zu dem obigen Ergebnis doch nicht existieren kann. - Genauso verläuft der Beweis für den Fall $\liminf f(x)/x < c$. \square

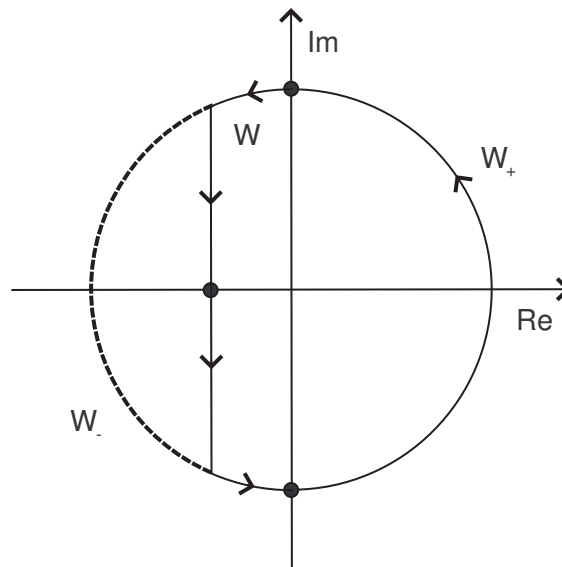
Es bleibt nur noch die Verpflichtung, Satz 17 zu beweisen. Ohne Einschränkung können wir dabei $|F(t)| \leq 1$ annehmen. Wir setzen

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t) e^{-tz} dt, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

G_λ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} , und es genügt zu zeigen, daß

$$G_\lambda(0) = \int_0^\lambda F(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} G(0).$$

Wir betrachten zu diesem Zweck die folgenden Wege:



Hierbei sind W_+ und W_- die Halbkreise in der rechten und linken Halbebene mit Mittelpunkt 0 und geeignetem Radius R , und W verläuft ein Stück auf W_- , dann auf der Geraden $\text{Im } z = -\delta < 0$, bis er wieder auf W_- stößt, und von da wieder auf W_- bis zu W_+ . Nach Voraussetzung kann man zu vorgegebenem $R > 0$ eine positive reelle Zahl $\delta_0 > 0$ so wählen, daß für alle $\delta \leq \delta_0$ der Weg W in dem Bereich links der imaginären Achse verläuft, in den G holomorph fortsetzbar ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_+ + W} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} dz,$$

aber auch, wie man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel unmittelbar erkennt,

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_+ + W} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz .$$

Wir setzen im folgenden für den Integranden kurz $I_\lambda(z)$, und müssen also zeigen, daß man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ den Radius $R = R(\varepsilon)$ und $\delta \leq \delta_0 = \delta_0(R)$ so wählen kann, daß

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{W_+ + W} I_\lambda(z) dz \right| < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen λ .

Auf $|z| = R$ ist

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{z + \bar{z}}{R^2} = \frac{2x}{R^2} , \quad x = \operatorname{Re} z .$$

Ist also $z \in W_+$, so gilt dort

$$|I_\lambda(z)| \leq e^{\lambda x} \frac{2x}{R^2} \left| \int_\lambda^\infty F(t) e^{-tz} dt \right| \leq e^{\lambda x} \frac{2x}{R^2} \int_\lambda^\infty e^{-tx} dt = \frac{2}{R^2} ,$$

da das letzte Integral gleich $x^{-1} e^{-\lambda x}$ ist. Dieses einfache Resultat ist der Grund für die Ersetzung des Faktors $1/z$ durch den Ausdruck $e^{\lambda z} (1/z + z/R^2)$; der Trick geht auf CARLEMAN zurück. Selbstverständlich folgt daraus

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_+} I_\lambda(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R} ,$$

so daß dieser Anteil des Integrals unabhängig von λ kleiner $\varepsilon/4$ ist, sofern nur $R > 4/\varepsilon$ gewählt wird. Entsprechend folgt wegen

$$|G_\lambda(z)| \leq \frac{e^{\lambda|x|} - 1}{|x|} \leq \frac{e^{\lambda|x|}}{|x|} ,$$

daß sich unabhängig von λ das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz$$

wie $1/R$ für $R \rightarrow \infty$ verhält. Somit können wir auch diesen Anteil des Integrals unabhängig von λ bei hinreichend großem R betragsmäßig durch $\varepsilon/4$ abschätzen.

Es bleibt nur noch, das Verhalten des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz$$

bei $R \rightarrow \infty$ zu untersuchen. (Man beachte, daß wir bisher noch nicht die Fortsetzungseigenschaft von G benutzt haben!). Es sei also zu beliebigem $\varepsilon > 0$ der Radius R so groß gewählt, daß die beiden bisher betrachteten Integrale unabhängig von λ betragsmäßig kleiner als $\varepsilon/4$ sind. Betrachte dann bei diesem R die beiden kleinen Teilwege $W_{\delta_0} = W_- \cap W$, also die Menge der Punkte $z \in W_-$ mit $-\delta_0 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$. Auf diesen ist

$$\left| G(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq M ,$$

also auch

$$\left| G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq M e^{-\lambda|x|} \leq M ,$$

wobei M von R und δ_0 abhängt. Folglich ist

$$\left| \int_{W_\delta} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für ein hinreichend kleines $\delta \leq \delta_0$ unabhängig von λ . Somit bleibt nur noch, den Teil des Integrals mit (festem) $\operatorname{Re} z = -\delta$ zu bearbeiten. Dort gilt aber mit einer neuen, von R und δ abhängigen Konstanten N , daß

$$\left| G(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq N,$$

so daß der volle Integrand dem Betrage nach kleiner gleich $N e^{-\lambda\delta}$ ist und damit

$$\left| \int_{W-W_\delta} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \leq 2R \cdot N e^{-\lambda\delta} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle hinreichend großen $\lambda \geq \lambda_0$ gilt. □

Bemerkung. KOREVAAR bemerkt in dem oben zitierten Artikel, daß man die Anforderungen an die Funktion G bzgl. ihrer Fortsetzbarkeit sogar noch abschwächen kann!

Wir zitieren zum Abschluß noch einige weitere zahlentheoretische Aussagen, die man mittels Funktionentheorie beweisen kann.

Satz 29.18 (Dirichlet) *Es seien m, a natürliche Zahlen mit $\operatorname{ggT}(a, m) = 1$. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p mit*

$$p \equiv a \pmod{m}.$$

Es gibt also unendlich viele Primzahlen in jeder arithmetischen Progression.

Beweis. Siehe z. B. CHANDRASEKHARAN, p. 120.

Satz 29.19 (Jacobi) *Jede natürliche Zahl m ist so oft als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar, als das 8-fache der Summe derjenigen positiven Teiler von m beträgt, die nicht durch 4 teilbar sind.*

Beweis. Siehe z. B. HURWITZ - COURANT, p. 206.

Beispiel. Die Zahl $m = 3$ besitzt die Teiler 1, 3; also ist die obige Summe der nicht durch 4 teilbaren Teiler gleich 4, und es gibt damit 32 Darstellungen der Zahl 3 als Summe von 4 Quadraten wie z. B. $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$. An diesem Beispiel wird deutlich, daß bei der obigen Anzahlformel natürlich sämtliche Vertauschungen und Vorzeichen einzeln gezählt werden müssen.

Eine Folgerung aus dem Satz von Jacobi ist der (historisch) wesentlich früher bewiesene

Satz 29.20 (Lagrange) *Jede natürliche Zahl ist die Summe von vier Quadraten.*

Eine entsprechende Aussage kann man für die Darstellbarkeit als Summe von zwei Quadraten machen (siehe z. B. HURWITZ - COURANT, p. 212):

Satz 29.21 *Die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist gleich dem 4-fachen der Differenz der folgenden beiden Zahlen :*

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der positiven Teiler von } m \text{ der Form } 4k + 1, \\ & \text{Anzahl der positiven Teiler von } m \text{ der Form } 4k + 3. \end{aligned}$$

Beispiele. $m = 25$ besitzt die Teiler 1, 5, 25; es sind damit alle von der 1. Form. Damit gibt es $3 \times 4 = 12$ Darstellungen, nämlich

$$25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2,$$

wobei die erste 4-mal und die zweite 8-mal zu zählen sind.

Für $m = 24$ hat man die Teiler 1 und 3 und somit *keine* Darstellung als Summe zweier Quadrate, wovon man sich auch leicht durch Probieren überzeugt.

Eine einfache Folgerung aus dem vorstehenden Satz ist der berühmte

Satz 29.22 (Fermat) *Jede Primzahl der Form $4k + 1$ ist auf genau eine Weise (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.*

Weitere Anwendungen der Funktionentheorie betreffen das weite Gebiet der *Transzendenten Zahlen* (siehe z. B. das Buch von S. LANG über diesen Gegenstand). Wir erwähnen hierzu das berühmte 7. Hilbertsche Problem, welches danach fragt, ob α^β transzendent (oder zumindest irrational) ist für *algebraisches* α und *irrationales* β . Setzt man in dieser Vermutung speziell $\alpha = a$, $\beta = {}^a \log b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ein, so folgt insbesondere, daß β rational oder transzendent sein muß. Dies ist eine bis heute nicht gelöste Vermutung von EULER aus dem Jahre 1748.²³

Überraschenderweise gelang es Gel'fond und Schneider schon viel früher, als von Hilbert prophezeit, den folgenden Satz zu beweisen, der nur einen Spezialfall der Hilbertschen Vermutung darstellt, aber immerhin die Transzendenz von Zahlen wie $2^{\sqrt{2}}$ und $e^\pi = i^{-2i}$ impliziert. (Dagegen ist bis heute nicht bekannt, ob z. B. die Zahl $e + \pi$ transzendent ist).

Satz 29.23 (Gel'fond - Schneider) *Es seien α, β algebraische Zahlen mit $\alpha \neq 0, 1$, β irrational. Dann ist α^β transzendent.*

Man kann diesen Satz auf vielfältige Weise uminterpretieren. Er ist in der Tat gleichwertig zu den folgenden Aussagen. (Hierbei bezeichnet \mathbb{A} den Körper der *algebraischen* Zahlen und nicht etwa, wie auch üblich, die affine Gerade).

1. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, $\beta \notin \mathbb{Q}$, so ist $\alpha^\beta \notin \mathbb{Q}$.
2. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, $\beta \neq 0, 1$, so ist $\log \alpha / \log \beta \in \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{A})$.
3. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, und sind $\log \alpha, \log \beta$ linear unabhängig über \mathbb{Q} , so sind sie auch linear unabhängig über \mathbb{A} .

Schließlich sollte nicht unerwähnt bleiben, daß der von A. WILES vollendete Beweis des *Großen Satzes von Fermat* mittels eines Spezialfalls der SHIMURA - TANIYAMA - WEIL-Vermutung wesentlich auf dem (arithmetischen) Studium spezieller elliptischer (nämlich sogenannter *semistabiler*) Kurven beruht. Auch der mit einer Fields-Medaille ausgezeichnete Beweis von FALTINGS der sogenannten *Mordellschen Vermutung*, die in gewissem Sinne eine Vorstufe des Großen Fermat beinhaltet, benutzt alles, was gut und schön ist aus dem Bereich der *Abelschen Varietäten*, die höherdimensionale Verallgemeinerungen der elliptischen Kurven darstellen.

²³Zu diesem und dem folgenden siehe z. B. den Artikel von R. TIJDEMAN über *Hilbert's seventh problem. On the Gel'fond-Baker method and its applications* in: Mathematical developments arising from Hilbert problems. Proc. Symp. Pure Math. XXVIII, Part 1. AMS: Providence, R.I. 1976.

Aufgaben

1. Es sei Q ein offenes achsenparalleles Rechteck in \mathbb{C} mit dem Randzyklus

$$\Gamma = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_4] + [z_4, z_1],$$

wobei die z_j die Eckpunkte von Q in geeigneter Numerierung bezeichnen. Man zeige:

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in Q, \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

2. a) Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und $z_0 \notin \text{spur } \gamma$. Dann ist

$$t \mapsto z_0 + \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}$$

ein Integrationsweg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{spur } \alpha \subset \partial D_1(z_0)$. Man zeige $n(\gamma, z_0) = n(\alpha, z_0)$.

b) Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg mit $\text{spur } \alpha \subset \partial D_1(z_0)$. Man zeige, daß es eine stetige Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(t) = z_0 + e^{i\varphi(t)}$, und drücke $n(\alpha, z_0)$ durch φ aus.

3. Man zeige, daß die folgenden Aussagen über ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ äquivalent sind:

- G ist (homologisch) einfach zusammenhängend,
- jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion,
- jede harmonische Funktion auf G ist dort Realteil einer holomorphen Funktion.

4. Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem kein Zweig des Logarithmus existiert. Man zeige, daß es auf G auch keinen Zweig der m -ten Wurzel geben kann ($m \geq 2$).

Hinweis: Es gibt einen Zyklus Γ^* in G mit $n(\Gamma^*, 0) \neq 0$. Daraus leite man eine Zerlegung $\mathbb{C} \setminus G = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $0 \in A_1$, A_1 kompakt ab. Nach FISCHER - LIEB IV, Satz 3.3 gibt es dann einen Zyklus Γ in G mit $n(\Gamma, 0) = 1$. Man nehme nun an, es gäbe einen Zweig f der m -ten Wurzel, und berechne $n(f \circ \Gamma, 0)$.

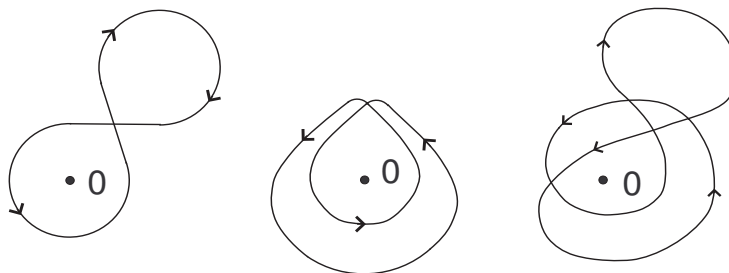
5. Man formuliere präzise und beweise die in der Vorlesung vage motivierte Aussage, daß jeder 1-Zyklus in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ *gleich* einer ganzzahligen Linearkombination von *geschlossenen* Wegen in G ist.

6. Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $D \subset G$ sei eine diskrete Teilmenge, und f sei holomorph auf $G \setminus D$. Man zeige: Genau dann besitzt f eine Stammfunktion auf $G \setminus D$, wenn alle Residuen von f verschwinden. (Zur Erinnerung: Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn für jede einfach geschlossene Kurve γ in G das Innere von γ in G enthalten ist).

7. Man berechne die Integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz,$$

wobei γ eine der unten abgebildeten Kurven ist:



8. Es sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet G , die an einer Stelle $z_0 \in G$ konvergiert und deren Ableitungsfolge $(f'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ kompakt konvergiert. Man zeige, daß dann auch die Folge selbst kompakt konvergiert.

9. Man zeige, daß jede MITTAG - LEFFLER-Verteilung auf der Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ lösbar ist, und konstruiere eine meromorphe Funktion auf D , die einfache Pole vom Residuum 1 genau in den Punkten $1 - 1/n$, $n = 1, 2, \dots$ besitzt. Gibt es in D eine meromorphe Funktion, bei der jeder Punkt des Randes von D Häufungspunkt von Polen ist?

10. Man zeige (nur unter Verwendung von FISCHER-LIEB, Kapitel VII, Paragraph 1), daß die (meromorphe) Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j \neq 0} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right)$$

die Periode 1 besitzt.

11. Man finde die Produktentwicklungen bzw. Partialbruchentwicklungen der *hyperbolischen* Funktionen.

12. Durch Untersuchung der Funktion $1/\cos z$ ermittle man die Reihensummen

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{(2j-1)^{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

insbesondere die Summe der *Leibnizschen Reihe*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

(Siehe dazu Paragraph 4 und die dortigen Aufgaben 5 und 4 in FISCHER - LIEB, Kapitel VII).

13. a) Man zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \Gamma(n)} = 1, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

b) Es sei F eine in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ erklärte holomorphe Funktion mit

$$1. \quad F(1) = 1; \quad 2. \quad zF(z) = F(z+1); \quad 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(z+n)}{n^z F(n)} = 1.$$

Man zeige: F ist die Gammafunktion.

14. Es sei C eine Ellipse mit den Halbachsen $a > b$. Man zeige, daß die Bogenlängenberechnung von C auf ein Integral

$$\int \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} dx$$

führt. Welche Bedeutung hat der Parameter k ?

15. Man beweise:

$$\begin{aligned} K(k) &:= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right], \quad 0 \leq k < 1. \end{aligned}$$

Zusatz für Physiker(innen) und physikalisch interessierte Mathematiker(innen): Bei einem mathematischen Pendel mit Länge ℓ , maximalem Ausschlagswinkel α und voller Schwingungsdauer T gilt mit $k = \sin(\alpha/2)$:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K(k).$$

Hierbei bezeichnet g die Erdbeschleunigung.

16. Wie muß ein Periodengitter Ω aussehen, damit die zugehörigen Invarianten g_2 und g_3 reell sind? Man zeige: Sind g_2 und g_3 reell, so haben die Laurententwicklungen von \wp und \wp' um 0 nur reelle Koeffizienten.

17. Man diskutiere das Verhalten der Weierstraßschen \wp -Funktion auf einem achsenparallelen Rechteckgitter. Man zeige insbesondere, daß \wp auf dem Rand des von 0 , ρ_1 , $\rho_1 + \rho_2$, ρ_2 aufgespannten abgeschlossenen Rechtecks Q reell ist und Q bijektiv auf die abgeschlossene untere Halbebene (einschließlich ∞) abbildet. Ferner zeige man für den Fall, daß ein *quadratisches* Gitter vorliegt, die Beziehungen

$$e_1 > 0 = e_2 > e_3 = -e_1.$$

18. Sei Ω ein Gitter vom Rang 2, und es seien f und $g \in K(\Omega)$. Dann besteht zwischen f und g eine algebraische Relation mit konstanten Koeffizienten; d. h. es existiert ein Polynom $P \in \mathbb{C}[u, v]$, $P \neq 0$, so daß $P(f, g) \equiv 0$.

19. Es sei $D^* = D \setminus \{0\}$, D die Einheitskreisscheibe, und

$$K = K_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < R < \infty\}.$$

Man zeige, daß D^* zu K homöomorph, aber nicht biholomorph äquivalent ist.

(Dies ist mehr eine Übung zum *Maximumprinzip* und zu dem *Riemannsches Hebbarkeitssatz* als zu dem *Riemannsches Abbildungssatz*).

20. Die 2-Sphäre $S^2 = \{x^2 + y^2 + s^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ erbt vermöge der kanonischen euklidischen Struktur des \mathbb{R}^3 eine „konforme“ Struktur, d. h. man hat einen natürlichen Begriff von *orientierten Winkeln* auf S^2 . Man führe diesen Begriff exakt ein und beweise, daß die *stereographische Projektion*

$$S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

winkeltreu (also konform) ist.

21. Man betrachte die Werte der Exponentialfunktion auf dem „Halbstreifen“

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

und konstruiere eine konforme Abbildung von S auf die obere Halbebene H .

22. a) Man bilde das Innere (bzw. Äußere) eines Kreisbogenzweiecks in der Ebene konform auf eine Halbebene ab.

(*Hinweis:* Mit einer linearen Transformation bilde man zunächst auf einen Winkelraum $|\arg z| < \alpha$ ab.)

b) Dasselbe für das Gebiet zwischen zwei einander von innen berührenden Kreislinien.

23. Es sei G das Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Man finde eine konkrete biholomorphe Abbildung von G auf den Einheitskreis

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

24. Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit der Eigenschaft, daß $z \in G \implies \bar{z} \in G$. Man zeige, daß jede biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow D$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$, $z_0 \in G \cap \mathbb{R}$ ein fester Punkt, das Gebiet

$$G^+ = \{z \in G : \operatorname{Im} z > 0\}$$

biholomorph auf

$$D^+ = \{z \in D : \operatorname{Im} z > 0\}$$

abbildet.