

Materialien zu der Vorlesung

Differentialgeometrie I

Sommersemester 2005

Teil I: Elementare Kurventheorie

Teil II: Theorie der (Hyper -) Flächen

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

Hamburg, Juni 2005

Adresse des Autors:

Professor Dr. Oswald Riemenschneider
Mathematisches Seminar
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Bundesstraße 55
D-20149 HAMBURG
e-mail: riemenschneider@math.uni-hamburg.de

Vorwort

Es handelt sich bei diesem Text, der keine Ansprüche auf Originalität erhebt, um die in ständiger Fortschreibung befindliche Ausarbeitung des ersten Teils einer grundsätzlich auf zwei Semester angelegten Einführung in das Gebiet der *Differentialgeometrie*. Eine ähnliche Vorlesung habe ich schon 1995/96 im Anschluß an meinen Kurs *Mathematik für Physiker I bis IV* und im Wintersemester 2000/01 gehalten. Als Voraussetzungen sollten die Teilnehmer (und damit auch der geneigte Leser dieser Seiten) grundlegendes Wissen aus den Anfängerveranstaltungen *Analysis I bis III* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II* mitbringen. Das thematisch anschließende, konzeptionell wesentlich anspruchsvollere Manuskript mit dem Titel *Differentialgeometrie II* ist schon des längeren in verschiedenen Fassungen (die letzte datiert vom 18. 12. 2004) vorhanden und auf meiner homepage allgemein zugänglich.

Die ersten Versionen des vorliegenden Textes folgten in zahlreichen Aspekten einem Manuskript, das ich als Werkstudent im Anschluß an das Sommersemester 1962 (meinem dritten Studiensemester) auf der Grundlage meiner Mitschrift der Vorlesung von Professor LYRA in Göttingen anfertigte. Leider besitze ich nicht mehr meine ursprünglichen handschriftlichen Notizen, so daß ich mich nicht für ihre Authentizität verbürgen könnte, zumal meine Ausarbeitung in einigen Teilen doch eine sehr verblüffende Ähnlichkeit mit der Darstellung in dem Buch von LAUGWITZ [29]¹ besitzt. Hierzu sollte allerdings auch vermerkt werden, daß Laugwitz ausdrücklich Professor Lyra in dem Vorwort seines Buches dankt. Eine weitere wichtige Quelle, insbesondere auch für die Übungen, war und ist DO CARMO [15].

Im Laufe der Zeit habe ich mich von diesen Quellen aber wieder so weit entfernt, daß in dem vorliegenden Manuskript signifikante *Abweichungen* zu verzeichnen sind. Ausgehend von meiner Beschäftigung mit „Singularitäten“ wurde die *Kurventheorie* angereichert durch die Diskussion einiger (algebraischer) ebener Kurven, die gleichermaßen für Mathematiker und Physiker interessant sein sollten. Hierbei wird zu meinem Bedauern nur am Rande diskutiert werden können, inwieweit das detaillierte Studium *glatter* Kurven notwendigerweise auch das Studium *singulärer* Kurven erfordert. Insbesondere für Physiker sollte der Abschnitt über Kurven als Lösungen von Variationsproblemen nützlich sein.

Der *Hauptsatz* der *Kurventheorie* wird nach dem kurzen Ausflug in die Ebene praktisch zusammen mit den speziellen Überlegungen zu Kurven in dem uns umgebenden dreidimensionalen Raum gleich im n -dimensionalen (euklidischen) Raum abgehandelt, da nur in dieser Allgemeinheit der Beweis der FRENETSchen *Formeln* und ihrer Folgerungen (nicht etwa komplizierter, sondern ganz im Gegenteil) einfacher und damit ihre *Struktur* wesentlich transparenter wird. Dies ist z. B. auch die Auffassung in dem relativ neuen Buch von KÜHNEL [27a], das ich den Teilnehmern des Kurses auch als Begleitlektüre ausdrücklich empfohlen habe.²

Aus den gleichen Gründen wurde vieles aus der klassischen *Flächentheorie* von vornherein für *Hyperflächen* oder sogar beliebige *Untermannigfaltigkeiten* im euklidischen Raum hergeleitet, und zwar in der Weise, daß die Übertragung auf *abstrakte* RIEMANNSche *Mannigfaltigkeiten* fast wörtlich in späteren Kapiteln vorgenommen werden kann. Überhaupt spielt der Mannigfaltigkeits-*Begriff* in diesen Noten eine strukturierende Rolle; am Anfang zunächst mehr im Hintergrund, in den späteren Kapiteln aber in immer stärkerer Beleuchtung.

Ein letztes Wort zu dem umfangreichen Bildmaterial, das in der Vorlesung zur Illustrierung verwendet wurde. Es ist ein leichtes, die vorhandene Literatur zu „plündern“ und hemmungslos dort vorzufindende Bilder auf Folie zu reproduzieren. Etwas anderes ist es, Bilder selbst auf intelligente Weise zu erzeugen und in einen L^AT_EX-file einzubinden. Diesen Prozeß hat der Autor bei weitem noch nicht zu seiner eigenen Zufriedenheit durchlaufen³. Der Leser sollte daher wohlwollend und vielleicht auch ein wenig schmunzelnd auf einige Zeichnungen blicken, die letztlich nur als grobe Skizzen dienen können. Aufgrund T_EX-nischer Probleme werden in den ersten Durchläufen auch Zeichnungen fehlen, die mit *Mathematica* erzeugt wurden, zu deren Herstellung das Buch von GRAY [17] als unerschöpflicher Fundus diente.

¹Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis des vorliegenden Textes.

²Eine weitere wichtige Neuerscheinung ist der elementare Band von BÄR [4].

³Man beachte das Faktum, daß der Autor seiner baldigen Emeritierung (mit durchaus gemischten Gefühlen) entgegen sieht.

Die Buchautoren mögen mir verzeihen, wenn ich nicht die Quelle für jedes einzelne Bild angegeben habe, das seinen Weg per Folie in meine Vorlesung und in transformierter Gestalt in den vorliegenden Text gefunden hat; es mag sie entschädigen, wenn ich auch hier noch einmal wiederhole, was ich stets meinen Studentinnen und Studenten zu sagen pflege: „Eine Vorlesung (und ihre Ausarbeitung) vermag eventuell vieles anzusprechen und auszulösen. Wenn sie zumindest, was ich hoffe, einen Ein- und Überblick gibt und ein wenig Begeisterung für das besprochene Gebiet weckt, so kann sie eines nicht: Das Studium der Literatur ersetzen. Jede(r) muß selbst die (Lehrbuch-) Literatur intensiv sichten und die für sie/ihn *adäquate* Literatur finden.“

Hamburg, im Sommersemester 2005
Oswald Riemenschneider

Inhalt (geplant)

Vorwort	i
Inhalt	iii
Literatur	v

Teil I - Elementare Kurventheorie

1 Beispiele ebener algebraischer Kurven aus der Antike	1
2 Analysis ebener Kurven	13
3 Die allgemeinen FRENETSchen Formeln und die Theorie der Raumkurven	45
4 Globale Eigenschaften von (ebenen) Kurven [fehlt]	xx

Teil II: Theorie der (Hyper -) Flächen

[Wird fortgeschrieben].

Literatur

- [1] Arnold, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1978.
- [2] Aubin, T.: *A Course in Differential Geometry*. AMS: Providence, R. I. 2000.
- [3] Bao, D., Chern, S. S., Shen, Z.: *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*. Springer: New York u. a. 1999.
- [4] Bär, Chr.: *Elementare Differentialgeometrie*. de Gruyter: Berlin–New York 2000.
- [5] Berndt, R.: *Einführung in die Symplektische Geometrie*. Vieweg: Braunschweig–Wiesbaden 1998.
- [6] Besse, A. L.: *Einstein manifolds*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 10*. Springer: Berlin u. a. 1987.
- [7] Bishop, R. L., Goldberg, S. I.: *Tensor Analysis on Manifolds*. MacMillan: New York 1968.
- [8] Blaschke, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie. 3. Auflage*. Springer: Berlin 1929. Nachdruck: Dover: New York 1945.
- [9] Brieskorn, E., Knörrer, H.: *Ebene algebraische Kurven*. Birkhäuser: Basel–Boston–Stuttgart 1981.
- [10] Bröcker, Th., Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [11] Chavel, I.: *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Reprint. Cambridge University Press: Cambridge 1996.
- [12] Chern, S. S.: *Topics in Differential Geometry*. Princeton University Press: Princeton 1951.
- [13] Chern, S. S., Chen, W. H., Lam, K. S.: *Lectures on Differential Geometry*. *Series on University Mathematics - Vol. 1*. Reprinted. World Scientific: Singapore–New Jersey–London–Hong Kong 2000.
- [14] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis. Bände 1 ff.* Vieweg: Braunschweig 1986 ff.
- [15] Do Carmo, M. P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg: Braunschweig–Wiesbaden 1983.
- [16] Do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser: Boston–Basel–Berlin 1992.
- [17] Gray, A.: *Differentialgeometrie. Klassische Theorie in moderner Darstellung*. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg–Berlin–Oxford 1994.
- [18] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. : *Riemannian Geometry*. Springer: New York 1987.
- [19] Gromov, M.: *Metric Structures for Riemannian and Non–Riemannian Spaces*. Birkhäuser: Basel u. a. 1999.
- [20] Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplectic techniques in physics*. Reprint. Cambridge University Press: Cambridge 1996.
- [21] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R.: *The large scale structure of space–time*. Cambridge University Press: Cambridge etc. 1973.
- [22] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press: New York etc. 1978.

- [23] Jänich, K.: Vektoranalysis. Springer: Berlin–Heidelberg–New York etc. 1992.
- [24] Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis. 2d edition. Universitext. Springer: Berlin u. a. 1998.
- [25] Jost, J.: Differentialgeometrie und Minimalflächen. Springer Lehrbuch. Springer: Berlin u. a. 1994.
- [26] Klingenberg, W.: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [27] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry. 2 Volumes. Interscience: New York 1963 and 1969.
- [27a] Kühnel, W.: Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten. 2., überarbeitete Auflage. vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 2003.
- [28] Lang, S.: Introduction to Differentiable Manifolds. Wiley: New York 1962.
- [29] Laugwitz, D.: Differential–Geometrie. Teubner: Stuttgart 1960.
- [30] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: Gravitation. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.
- [31] Petersen, P.: Riemannian Geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 171. Springer: New York u. a. 1998.
- [32] von Querenburg, B.: Mengentheoretische Topologie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.
- [33] de Rham, G.: Variétés différentiables. Hermann: Paris 1955.
- [34] Sachs, R. K., Wu, H.: General Relativity for Mathematicians. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1977.
- [35] Sakai, T.: Riemannian Geometry. Translations of Math. Monographs, vol. 149. American Mathematical Society: Providence 1995.
- [36] Schottenloher, M.: Geometrie und Symmetrie in der Physik. vieweg Lehrbuch, Mathematische Physik. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig/Wiesbaden 1995.
- [37] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. 5 volumes. Publish or Perish: Berkeley 1970 etc.
- [38] Spivak, M.: Calculus on Manifolds. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.
- [39] Stephani, H.: Allgemeine Relativitätstheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1980.
- [40] Sternberg, S.: Lectures on Differential Geometry. Prentice–Hall: Englewood Cliffs 1964.
- [41] Stöcker, R., Zieschang, H.: Algebraische Topologie. Teubner: Stuttgart 1988.
- [42] Thirring, W.: Lehrbuch der Mathematischen Physik. Teil 1: Klassische Dynamische Systeme. Springer: Wien–New York 1977.
- [43] Warner, F. W.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer: New York–Berlin–Heidelberg 1983.

Teil I

Elementare Kurventheorie

*Stolto! a cui parlo? Misero! Che tento?
Racconto il dolor mio
a l'insensata riva
a la mutola selce, al sordo vento...
Ahi, ch'altro non risponde
che il mormorar de l'onde!*

(Giambattista Marino: „Eco“, *La Lira*, 3, XIX)

Motto in der deutschen Übersetzung (*Die Insel des vorigen Tages*) von
Umberto Eco: *L'isola del giorno prima*.

1 Beispiele ebener algebraischer Kurven aus der Antike

In dem ersten Teil dieser Ausarbeitung folgen wir den einführenden Kapiteln der Bücher von M. DO CARMO [15]: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen* [dort findet man auch ein knapp kommentiertes Verzeichnis weiterer Literatur] und D. LAUGWITZ [29]: *Differentialgeometrie*, die sich mit der Theorie der *Kurven* beschäftigen, insbesondere der Kurven in der (euklidischen) Ebene und im dreidimensionalen (euklidischen) Raum.

Ebene (algebraische) Kurven haben seit der Antike eine zentrale Rolle in der Mathematik und ihren Anwendungen gespielt. Ich möchte deshalb zu Anfang meiner Einführung in diesem ersten Kapitel aus dem ausgezeichneten und somit höchst empfehlenswerten Buch [9] von E. BRIESKORN und H. KNÖRRER einige Beispiele aus dem Kapitel „Geschichte der algebraischen Kurven“ erläutern in der Hoffnung, den Leser zur vertieften Lektüre dieses Kapitels zu motivieren. Die Autoren verweisen auf die über 2000-jährige Geschichte einerseits, die modernen Beziehungen zu *Algebraischer Geometrie*, *Analysis* und *Topologie* andererseits, aber auch auf Anwendungen der Kurventheorie in Gebieten wie *Perspektive*, *Optik*, *Astronomie*, *Architektur*, *Kinematik*, *Mechanik* und *Technik*.

Erinnern wir zunächst an die klassischen Probleme des Altertums:

1. Dreiteilung beliebiger Winkel
2. Quadratur des Kreises
3. Verdoppelung des Würfels (DELISches Problem).

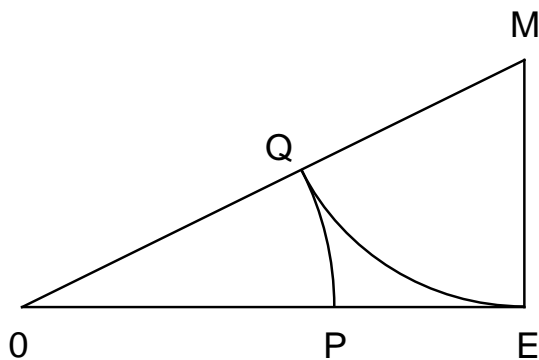
Das Wort *Problem* soll hier in dem folgenden präzisen Sinne verstanden werden:

Kann man diese Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen?

Dazu müssen wir uns *grundsätzlich* fragen:

Was kann man überhaupt mit Zirkel und Lineal konstruieren?

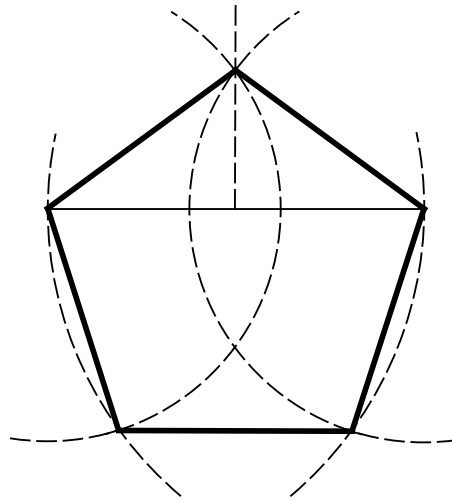
Die Griechen wußten schon, daß man mit solchen Konstruktionen nicht rationale Streckenverhältnisse gewinnen kann. So liefert die folgende Skizze eine Unterteilung der Strecke OE durch P im *goldenen Verhältnis*:



Figur 1.1

Hierbei ist die Länge der Strecke EM die *Hälfte* der Länge der Grundstrecke OE .

Beachtet man noch, daß sich in einem *regelmäßigen* 5-Eck die Länge einer Seite zu der Länge einer *Diagonalen* wie OP zu OE verhält, so findet man ausgehend von der vorigen Konstruktion ein einfaches Verfahren zur zeichnerischen Herstellung eines *regulären Pentagramms* mit Zirkel und Lineal:

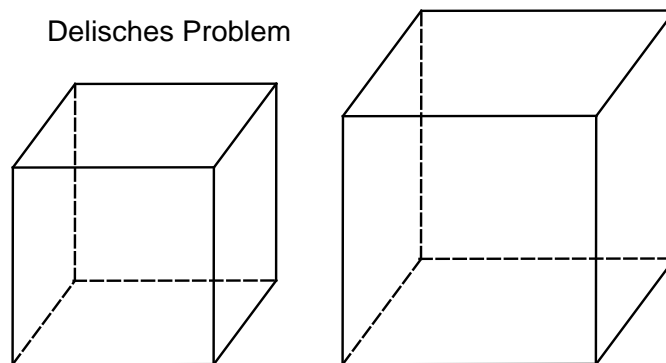


Figur 1.2

Mit der *Geradengleichung* $y = ax + b$ und der *Kreisgleichung* $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ überlegt man sich leicht, daß man ausgehend von endlich vielen Punkten in der Ebene und dem Körper \mathbb{K} , der durch deren Koordinaten erzeugt wird, durch *Konstruktion mit Zirkel und Lineal* nur zu Punkten gelangen kann, deren Koordinaten in (iterierten) *quadratischen Erweiterungen* von \mathbb{K} liegen. Insbesondere erhält man auf diese Weise nur über \mathbb{K} *algebraische* Zahlen. Daraus ergibt sich in allen drei Fällen die Antwort „Nein“. Die Unmöglichkeit der *Quadratur des Kreises* folgt aus dem berühmten Satz von LINDEMANN 1882 über die *Transzendenz* von π : Die Kreiszahl π genügt keiner algebraischen Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}.$$

Die beiden anderen Probleme erledigt man heutzutage mit Hilfe der *Galoistheorie*. Zum Beispiel muß man bei der Verdoppelung des Würfels (mit Kantenlänge 1):



Figur 1.3

die Gleichung $x^3 = 2$, d. h. $x^3 - 2 = 0$ lösen. Eine Lösung $x = a$ ist hier also eine *algebraische* Zahl. Die Frage nach der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal reduziert sich dann auf das folgende Problem: Liegt $\sqrt[3]{2}$ in einer sukzessiven quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} , oder anders ausgedrückt: Kann man $\sqrt[3]{2}$ durch Körperoperationen und endlich viele *Quadrat*-Wurzeln mittels rationaler Zahlen darstellen?

Bei der *Dreiteilung des Winkels* benutzt man das *Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen*

$$\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta .$$

Mit $\beta = \alpha/3$, $x = \sin \beta$, $c = \sin \alpha$, lautet die Frage: Läßt sich die Gleichung

$$4x^3 - 3x + c = 0$$

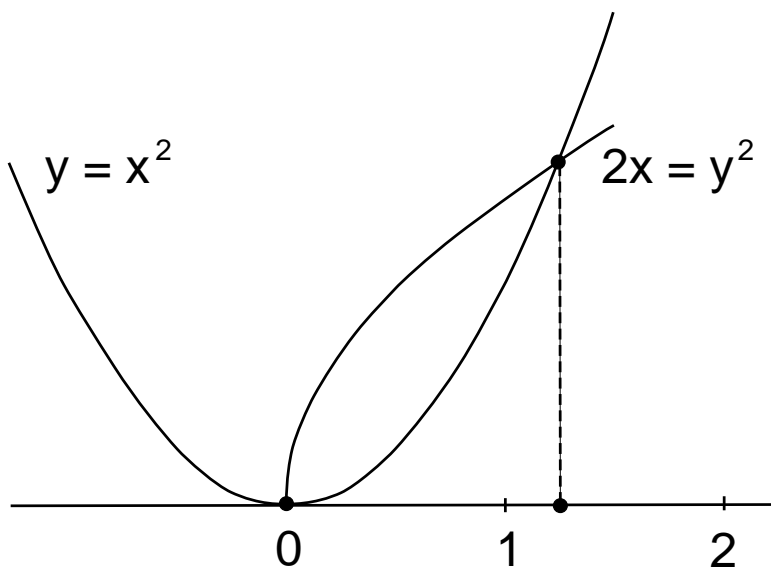
(simultan für alle $c \in \mathbb{R}$) durch Iteration von Quadratwurzelnziehen und rationalen Operationen lösen?⁴

In beiden Fällen ist die Antwort negativ. Nach BRIESKORN loc. cit. sahen die Griechen zumindest die Vergeblichkeit ihrer Bemühungen ein (auch wenn sie keinen Beweis für die Unmöglichkeit hatten) und lösten die Probleme mit Hilfe *anderer* Kurven. Dazu gehörten zunächst die *Kegelschnitte* (MENÄCHMUS, ca. 350 v. Chr.), intensiv studiert durch APOLLONIUS (ca. 225 v. Chr.). Die allgemeine *Kegelschnittgleichung* lautet

$$y^2 = px + qx^2 ,$$

wobei für $q = 0$ eine *Parabel*, für $q > 0$ eine *Hyperbel* und für $q < 0$ eine *Ellipse* vorliegt, die im Falle $q = -1$ zu einem Kreis entartet. Schon im Altertum waren die *Ortsliniendefinitionen* dieser Kurven bekannt.

Man kann z. B. das DELISCHE Problem lösen durch das Auffinden des nichttrivialen Schnittpunkts der beiden *Parabeln* $y = x^2$ und $2x = y^2$.

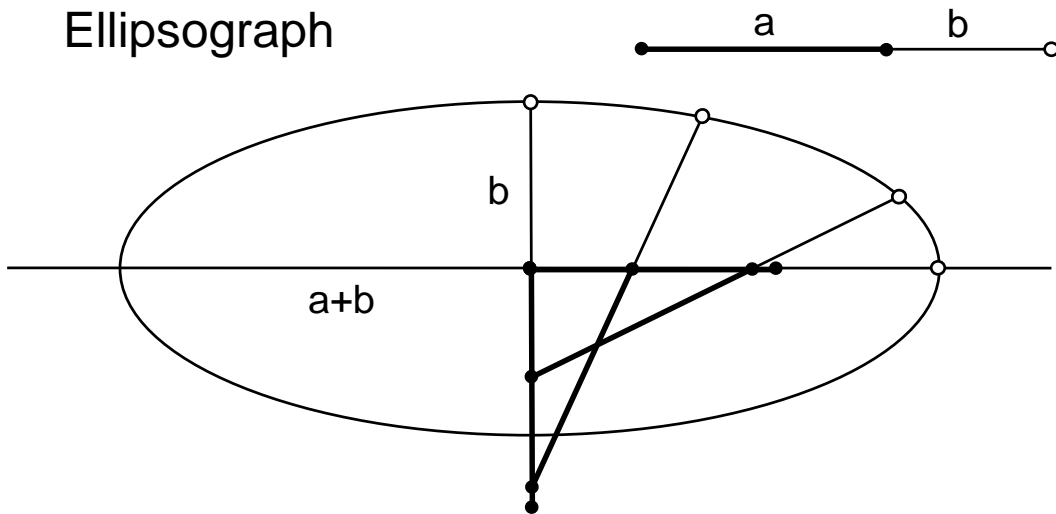


Figur 1.4

Denn für jeden Schnittpunkt gilt $y = x^2$ und $2x = y^2$ und damit $2x = y^2 = x^4$, also $x = 0$ oder $x = \sqrt[3]{2}$.

Dies wäre selbstverständlich kein *vernünftiger* Ersatz für die Konstruktion mit Zirkel und Lineal, sofern man keinen Mechanismus zur Hand hätte, mit dem *Parabelbögen* in einem Zug malen kann. Einen solchen *Parabolographen* kann man leicht mit Hilfe der *Ortslinien*-Definition der Parabel konstruieren. Wir überlassen die Einzelheiten dem Leser und geben nur die Konstruktion eines *Ellipsographen* an.

⁴Siehe hierzu auch den Artikel von DUDLEY UNDERWOOD im *Mathematical Intelligencer: What to do when the trisector comes.*



Figur 1.5

In der Tat folgt aus

$$x^2 + (y - \tilde{y})^2 = a^2 \quad \text{und} \quad \frac{y - \tilde{y}}{a} = \frac{y}{b}$$

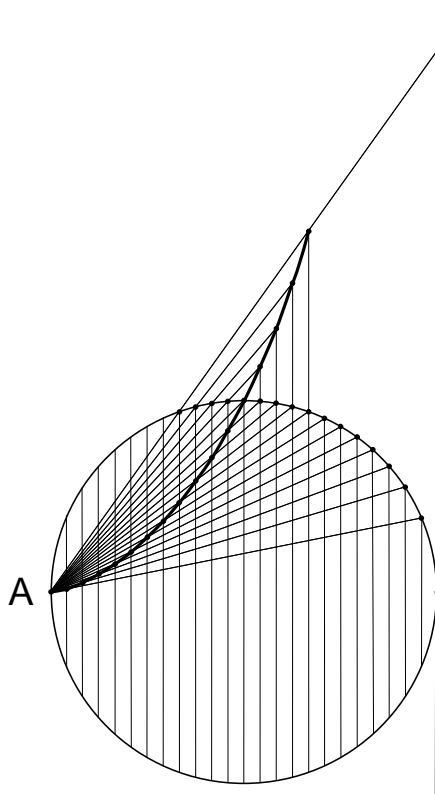
sofort die gewünschte Beziehung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Bemerkung. Die *Dreiteilung des Winkels* läßt sich ebenfalls mit Kegelschnitten bewerkstelligen. Dies ist natürlich nicht möglich für die Quadratur des Kreises (π ist transzendent), aber mit Hilfe *transzendenter* Kurven machbar (*Quadratrix* des HIPPIAS, ca. 425 v. Chr.).

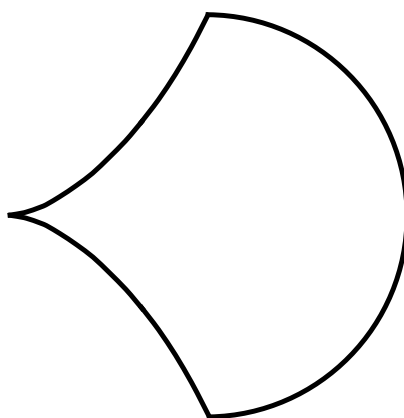
Ein anderes klassisches Beispiel ist die sogenannte *Kissoide* des DIOKLES. Man betrachte einen Kreis, eine Tangente an den Kreis und den Punkt A auf dem Kreis, der dem Berührungspunkt der Tangente gegenüber liegt. Zu jedem von A verschiedenen Punkt auf dem Kreis wähle man den Punkt P auf der Verbindungsgeraden mit A so, daß die Strecke von A nach P so lang ist wie die Strecke von dem beliebig gewählten Punkt nach dem Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit der festgewählten Tangente.

Das Entstehen der Kissoide kann man sich also wie folgt vorstellen. (Eine *organische* Konstruktion wurde von NEWTON gefunden; wir werden diese anschließend besprechen).



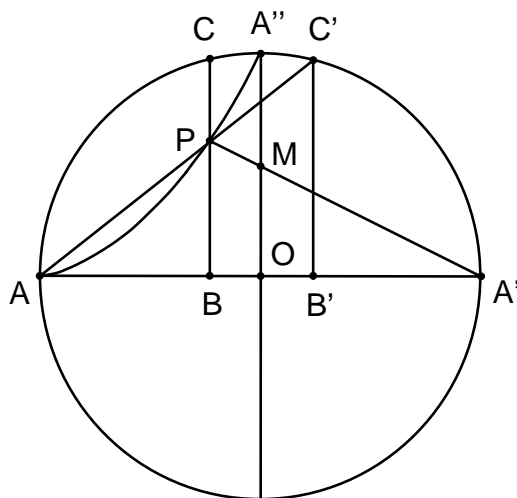
Figur 1.6

Bemerkung. Kissos bedeutet im Griechischen der *Efeu*, Kissoide also etwa die *Efeuähnliche*. Der Name rührt daher, daß die Griechen die eingeschlossene Fläche zwischen der Kissoide und der vorgegebenen Kreisscheibe betrachteten, die eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Efeublatt besitzt.



Figur 1.7

Wir wollen als erstes nachweisen, daß man mit Hilfe der Kissoide das Delische Problem lösen kann.



Figur 1.8

In dieser Zeichnung besteht nach Wahl des Punktes M als Mittelpunkt der Strecke OA'' die Beziehung

$$\frac{A'B}{PB} = \frac{A'O}{MO} = 2$$

und aufgrund der Konstruktion des Punktes P auf der Kissoide

$$\frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BP} .$$

Mit dem *Satz von Thales* hat man ferner

$$\frac{A'B}{BC} = \frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{B'A'} = \frac{AB'}{B'C'} .$$

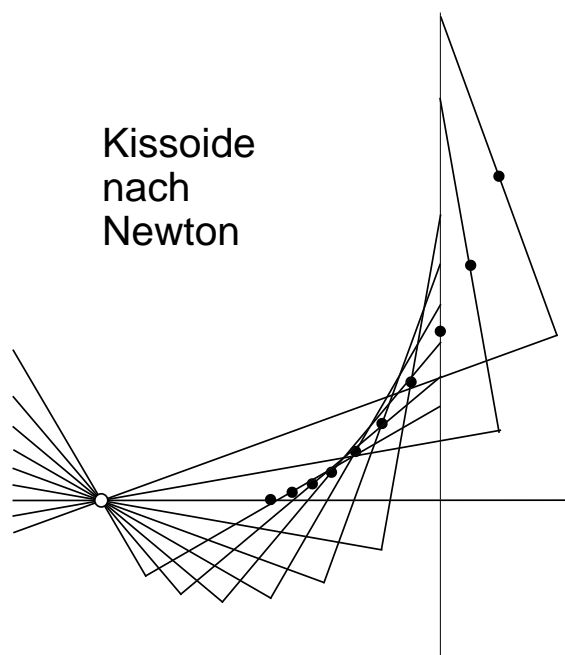
Setzt man also

$$x := A'B , \quad y := BC , \quad z := AB ,$$

so folgt

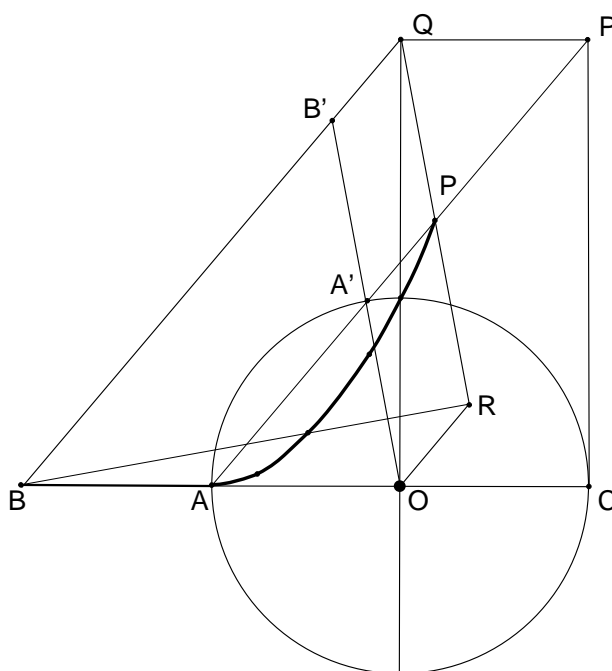
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x/2} \quad \text{und damit} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x/2} = 2 .$$

NEWTON hat, wie oben schon erwähnt, eine organische Weise entdeckt, mit der man die Kissoide zeichnen kann (ob dies den Griechen bekannt war, ist nicht überliefert). Man läßt einen rechtwinkligen *Haken* mit einem *endlichen* Schenkel der Länge $2r > 0$ und einem im Prinzip unendlich langen Schenkel so an einem rechtwinkligen Achsenkreuz entlanglaufen, daß das Ende des endlichen Schenkels auf der y -Achse verbleibt und der unendlich lange Schenkel stets die x -Achse im Abstand $2r$ vom Ursprung schneidet.



Figur 1.9

Der Mittelpunkt des endlichen Schenkels durchläuft dann die (genauer: einen Teil der) Kissoide, wovon man sich an Hand der folgenden Skizze überzeugen kann.



Figur 1.10

Um eine Gleichung für die Kissoide ableiten zu können, bezeichnen wir die Koordinaten des den Punkt mit den Koordinaten (x, y) definierenden Punktes auf dem Kreisrand mit (\tilde{x}, \tilde{y}) . Es ist dann

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = r^2 \quad \text{und} \quad x = -\tilde{x},$$

und ferner gilt

$$\frac{\tilde{y}}{r + \tilde{x}} = \frac{y}{r - \tilde{x}}.$$

Somit ergibt sich

$$y^2 = \left(\frac{r+x}{r-x}\right)^2 \tilde{y}^2 = \left(\frac{r+x}{r-x}\right)^2 (r^2 - x^2) = \frac{(r+x)^3}{(r-x)}$$

und schließlich die gewünschte Gleichung

$$(r-x)y^2 = (r+x)^3.$$

Dies ist eine *algebraische Gleichung* dritten Grades, die nur im Bereich $-r \leq x < r$ Lösungen besitzt, und zwar, mit Vielfachheit gerechnet, genau zwei für jedes x . Das Nullstellengebilde der Gleichung $(r-x)y^2 - (r+x)^3$ beschreibt also exakt die (beiden Zweige der) Kissoide. Mit dem Satz über implizite Funktionen gewinnt man leicht die Einsicht, daß dieses Nullstellengebilde an jeder Stelle (x, y) mit $y \neq 0$, d. h. $x \neq -r$, eine *Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^2 ist. In dem Punkt $(-r, 0)$ liegt jedoch offensichtlich eine „Singularität“ vor ähnlich wie bei der Neilschen Parabel. Sie ist damit (vielleicht) die erste interessante Singularität, die geschichtlich auftrat (~ 180 A. D.).

Eine schöne *Parametrisierung* der Kissoide gewinnt man mit dem naheliegenden Ansatz

$$t = \frac{y}{r+x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Durch Auflösen der Gleichung

$$t^2 = \frac{y^2}{(r+x)^2} = \frac{r+x}{r-x}$$

nach x und unter Ausnutzung der Definition des Parameters t findet man sofort die Darstellung

$$x = r \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = 2r \frac{t^3}{t^2 + 1}.$$

Wenn man der Geometrie in der Figur 10 nicht zu folgen vermag oder dazu nicht bereit ist, kann man den Nachweis der Richtigkeit der Newtonschen mechanischen Konstruktion auch *analytisch* nachvollziehen. Wir bezeichnen mit τ den Tangens des Winkels α , den der unendlich lange Schenkel mit der x -Achse bildet, und (\tilde{x}, \tilde{y}) seien die Koordinaten des „Eckpunkts“ des Schenkels. Ferner bezeichne y_0 die y -Koordinate des anderen Endpunkts des endlichen Schenkels, und schließlich seien (x, y) die Koordinaten des Mittelpunkts des endlichen Schenkels. Dann hat man für $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, also $-\infty < \tau < \infty$, die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\tilde{y}}{2r + \tilde{x}} = \tau, \quad \frac{\tilde{x}}{y_0 - \tilde{y}} = \tau, \quad \tilde{x}^2 + (y_0 - \tilde{y})^2 = 4r^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\tilde{x}^2 \left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right) = 4r^2 \quad \text{und damit} \quad x = \frac{\tilde{x}}{2} = \frac{r\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}.$$

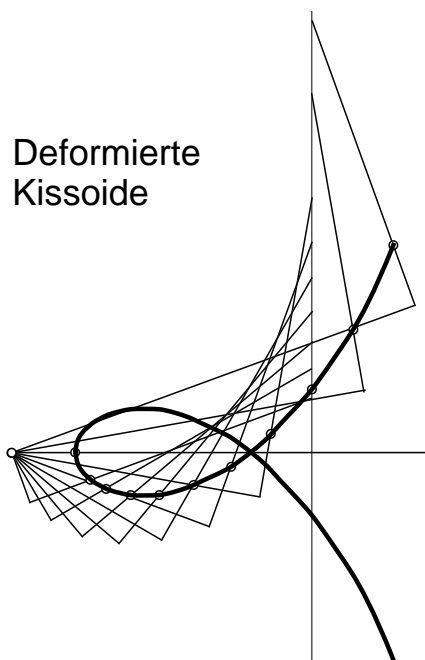
Dies impliziert

$$\begin{aligned} y &= \tilde{y} + \frac{1}{2}(y_0 - \tilde{y}) = (\tilde{x} + 2r)\tau + \frac{\tilde{x}}{2\tau} = 2r\tau + \frac{2r\tau^2}{\sqrt{1 + \tau^2}} + \frac{r}{\sqrt{1 + \tau^2}} \\ &= r \frac{2\tau\sqrt{1 + \tau^2} + 2\tau^2 + 1}{\sqrt{1 + \tau^2}} = r \frac{(\tau + \sqrt{1 + \tau^2})^2}{\sqrt{1 + \tau^2}}. \end{aligned}$$

Der Punkt (x, y) erfüllt dann die korrekte Gleichung

$$(r-x)y^2 = r^3 \left(\frac{\sqrt{1 + \tau^2} - \tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right) \frac{(\tau + \sqrt{1 + \tau^2})^4}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \left[\frac{r}{\sqrt{1 + \tau^2}} (\tau + \sqrt{1 + \tau^2})\right]^3 = (r+x)^3.$$

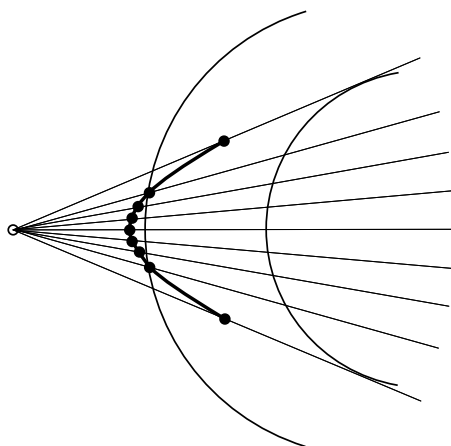
Bemerkungen. 1. Indem man die Bahnen anderer Punkte auf dem endlichen Schenkel verfolgt, erhält man interessante neue Kurven (ebenfalls *Kubiken*), die man als „Deformationen“ der ursprünglichen Kissoide ansehen kann.



Figur 1.11

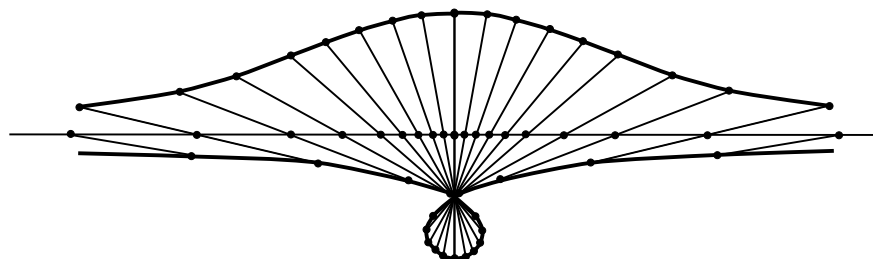
2. Die Konstruktion der Kissoide hängt ab von der Vorgabe eines Punktes und zweier Kurven (hier des Kreises und der Tangente). In gewissem Umfang kann man solche Konstruktionen auch für andere Kurvenpaare, z. B. zwei Kreise, durchführen.

Verallgemeinerte Kissoide



Figur 1.12

Wir behandeln abschließend in diesem Kapitel noch kurz die *Konchoiden*, also die *muschelförmigen* ebenen Kurven. Zu ihrer Konstruktion gibt man eine Gerade vor und einen Punkt außerhalb dieser Geraden. Man betrachtet dann alle Geraden durch den vorgegebenen Punkt und den Ort derjenigen Punkte auf diesen Geraden, deren Abstand zu dem Schnittpunkt der jeweiligen Geraden von der vorgegebenen Geraden einen festen Wert k besitzt. Im Grunde hat man dann jeweils zwei Konchoiden zu vorgegebenem Parameter k , je nachdem auf welcher Seite der ursprünglichen Geraden die Punkte gewählt werden.

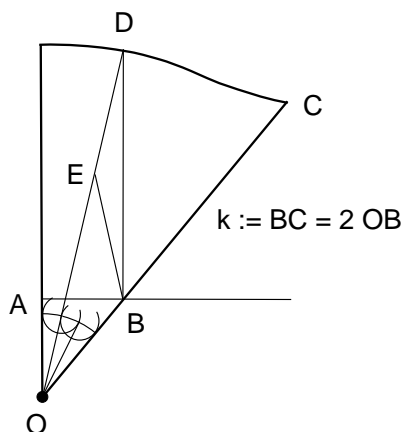


Figur 1.13

Man kann sich leicht einen Mechanismus bauen, der im Prinzip für alle k die Konchoiden zeichnet.

Mit einem solchen Gerät kann man tatsächlich Winkel *dreiteilen*. Ist AOB der beliebig vorgegebene Winkel, so muß man k so wählen, daß $k = BC = 2OB$. Man sieht dann mit elementarer Geometrie, daß das Lot in B auf die Gerade AB die Konchoide mit Parameter k in einem Punkt D schneidet, so daß der Winkel AOD gerade ein Drittel des Winkels AOB beträgt.

Winkeldreiteilung mit Konchoide



Figur 1.14

Die Konchoiden sind *Quartiken*, also durch das Verschwinden eines Polynoms in zwei Veränderlichen vom Grad 4 zu beschreiben. Wählt man nämlich als Gerade die x -Achse und als ausgezeichneten

Punkt Q den mit den Koordinaten $(0, -1)$, so sind die Koordinaten (x, y) der beiden Punkte auf der Konchoiden, die auf der Geraden durch Q und $(t, 0)$ liegen, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{t}{1} = \frac{x-t}{y} \quad \text{und} \quad (x-t)^2 + y^2 = k^2 .$$

Durch Elimination aus der ersten Verhältnisgleichung gewinnt man

$$t = \frac{x}{y+1}$$

und damit nach Einsetzen in die Kreisgleichung die gesuchte Relation:

$$x^2 y^2 + (y^2 - k^2)(y+1)^2 = 0 .$$

Bemerkung. Die bei BRIEKORN - KNÖRRER abgeleitete Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x-1)^2 = k^2 x^2$$

ergibt sich bei Vertauschung der Koordinaten x und y bei anschließender Substitution $x \mapsto (x-1)$.

2 Analysis ebener Kurven

Eine der wichtigsten Aufgaben der Theorie der ebenen Kurven bestand nach der Renaissance der griechischen Mathematik in der Angabe, sprich: Konstruktion der *Tangente* in einem vorgegebenen Punkt der Kurve. Dieses Bemühen um das „Tangentenproblem“ war eine der treibenden Kräfte in der Entwicklung der *Analysis*, wie wir sie heute kennen. Vom Standpunkt der modernen Differentialrechnung aus kann man das Problem überhaupt nicht mehr erkennen: Ist die Kurve lokal als *Graph* einer Funktion zu beschreiben, also z. B. als Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = f(x)$, $x \in I$, so verlangt das Tangentenproblem die Bestimmung der Ableitung f' an einer bestimmten Stelle $x_0 \in I$; die Tangente ist dann beschreibbar als Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{wobei } y_0 = f(x_0).$$

Die Tangente läßt sich auf ähnliche Weise berechnen, wenn uns die Kurve nur *implizit* gegeben ist, z. B. durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion F auf einer offenen Menge des \mathbb{R}^2 . Das „Nullstellengebilde“

$$N = N_F := \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

ist nach dem *Satz über implizite Funktionen* nahe eines Punktes $(x_0, y_0) \in N$ dann der Graph einer Funktion f in x , wenn die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

nicht verschwindet. Die lokal um x_0 durch N definierte Funktion $f = f(x)$ mit $f(x_0) = y_0$ und $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ist dann differenzierbar mit

$$\frac{df}{dx}(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Somit wird in diesem Fall die Tangente beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

für die man die Gleichung $F = 0$ gar nicht nach einer der Variablen aufzulösen braucht. Ist zudem F ein *Polynom* in den Variablen x und y , das Nullstellengebilde also eine *algebraische Kurve*, so sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

rationale Ausdrücke in x_0 und y_0 , so daß man die Tangenten in dieser Situation prinzipiell auch mit Zirkel und Lineal *konstruieren* kann. Eine weitere Möglichkeit, eine (ebene) Kurve zu definieren, besteht darin, sie in parametrisierter Form anzugeben, also als ein Tripel

$$(I, \alpha, \alpha(I)),$$

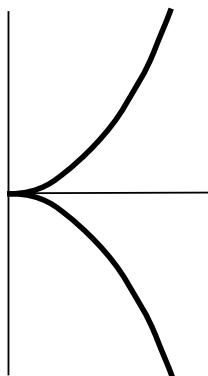
wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung bezeichnet. Die Differenzierbarkeitsforderung impliziert, daß der *Graph* dieser Abbildung, also die Menge

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I : (x, y) = \alpha(t)\},$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist. Aber das Bild $\alpha(I)$ braucht selbstverständlich keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 zu sein, insbesondere nicht an jeder Stelle eine Tangente zu besitzen.

Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ ist stetig differenzierbar und hat als Bild die *NEILSche Parabel* $x^3 = y^2$, die im Ursprung eine „Singularität“ besitzt.

Neilsche Parabel



Figur 2.1

Um solche Beispiele und weiter z. B. die „konstanten Kurven“ auszuschließen, gibt man die folgende Definition.

Definition und Bemerkung. Eine (stetig differenzierbare) *parametrisierte Kurve* im \mathbb{R}^n ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

wobei I ein Intervall von \mathbb{R} ist. Das Bild $\alpha(I)$ nennt man auch die *Spur* von α , in Zeichen:

$$\text{Spur } \alpha := \alpha(I) .$$

Die parametrisierte Kurve α heißt *glatt*, falls ihr Tangentialvektor $\alpha'(t) := (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ von Null verschieden ist für alle $t \in I$.

Eine *glatte* Kurve besitzt in jedem Punkt $\alpha(t_0)$ eine *Tangente*, nämlich

$$t \mapsto \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)t .$$

Da aber α nicht injektiv zu sein braucht, kann eine glatte Kurve α an derselben Stelle, aber zu verschiedenen „Zeiten“, verschiedene Tangenten besitzen.

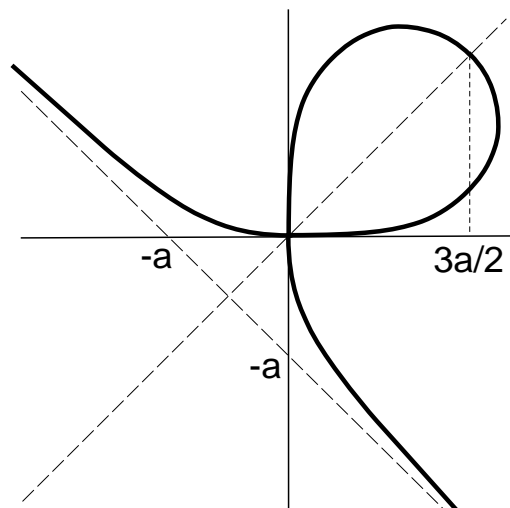
Bemerkung. Für glatte Kurven α , selbst wenn α eine *injektive* Abbildung ist, braucht das Bild $\alpha(I)$ keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n zu sein. Allerdings sagt der Satz über implizite Funktionen, daß dies *lokal* bzgl. des Parameterraumes richtig ist: Zu jedem $t_0 \in I$, das kein Randpunkt von I ist, gibt es ein offenes Teilintervall $t_0 \in J \subset I$, so daß das Bild $\alpha(J)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Dies erklärt dann noch einmal die Existenz einer Tangente im Punkte $\alpha(t_0)$ zu fest vorgegebener Zeit t_0 .

Beispiel. Als Beispiel zu diesen Definitionen betrachten wir das sogenannte *Kartesische Blatt*, das implizit (bei Vorgabe einer festen positiven Konstante a) durch die kubische Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

definiert wird. Da diese Gleichung invariant unter der Vertauschung der Variablen x und y ist, muß das entsprechende Nullstellengebilde symmetrisch zu der Geraden $y = x$ liegen.

Folium Cartesium



Figur 2.2

Ein Teil dieses Kartesischen Blattes wird parametrisiert durch $\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^2$ mit

$$\alpha(t) := \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad a > 0 \text{ fest.}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$\alpha'(t) = \frac{3a}{(1+t^3)^2} (1-2t^3, 2t-t^4),$$

woraus sich sofort ergibt, daß

- in $t = 0$ die Kurve α tangential zur x -Achse ist,
- $\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$ und $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ gilt bei $t \rightarrow \infty$,
- die Kurve und ihre Tangente die Gerade $x + y + a = 0$ bei $t \rightarrow -1$ approximiert.

Die letzte Aussage erhält man mit Hilfe der Regel von de l'Hospital aus den Grenzwerten

$$\frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} + a = a \frac{3t + 3t^2 + 1 + t^3}{1+t^3} \rightarrow 0$$

und

$$\alpha'(t) \rightarrow 3a(1, -1)$$

für $t \searrow -1$.

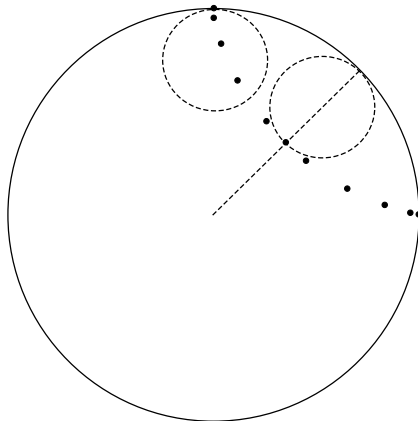
Bemerkung. Für positive t geht bei der Transformation $t \mapsto 1/t$ die Koordinatenfunktion $x = x(t)$ über in $y(t) = x(1/t)$ und umgekehrt. Also ist der Teilbogen $\alpha(t)$, $0 < t < \infty$, invariant unter der Spiegelung an der Geraden $y = x$. Durch Anfügen der entsprechenden Spiegelung des Teils des Bogens im oberen linken Quadranten erhält man das volle Kartesische Blatt.

Es ist oft nützlich und zweckmäßig, sich eine parametrisierte Kurve $\alpha = \alpha(t)$ als die Bewegung eines (*Massen-*) Punktes im Raum \mathbb{R}^n in Abhängigkeit von der *Zeit* $t \in I \subset \mathbb{R}$ vorzustellen. Eine solche *dynamische* Interpretation hilft insbesondere bei der Aufstellung von Parametrisierungen von Kurven, wie wir auch schon im ersten Kapitel an Beispielen demonstriert haben.

Wir wollen dieses Prinzip noch an einem weiteren Beispiel erläutern, nämlich dem der sogenannten *Radkurven*. Wir zitieren nach BRIESKORN - KNÖRRER:

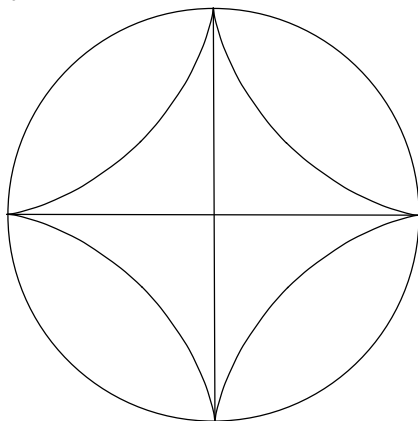
Eine Radkurve ist die Bahnkurve eines Punktes auf einem Kreise K , der auf einem festen Kreise K' abrollt, ohne zu gleiten. Je nach Position der Kreise unterscheidet man dabei Epizykloiden, Hypozykloiden und Perizykloiden. Entartet K' zu einer Geraden, so heißt die entsprechende Kurve Zykloide. [...] Epi-, Hypo- und Perizykloiden sind geschlossene Kurven oder nicht, je nachdem ob die Verhältnisse der Radien r und r' von K und K' rational sind oder nicht. [...] Man kann, und das ist praktisch wichtig, die Definition dieser Kurven noch verallgemeinern, indem man nicht die Bahn eines Punktes auf dem abrollenden Kreis K betrachtet, sondern die Bahn von einem beliebigen Punkt der Ebene von K , die sich mit K bewegt, während K auf K' abrollt. Diese Bahnkurven heißen verlängerte oder verkürzte Epi-, Hypo- und Perizykloiden oder auch kürzer Trochoiden.

Das Prinzip der Konstruktion von Trochoiden kann man sich in der folgenden Skizze veranschaulichen.

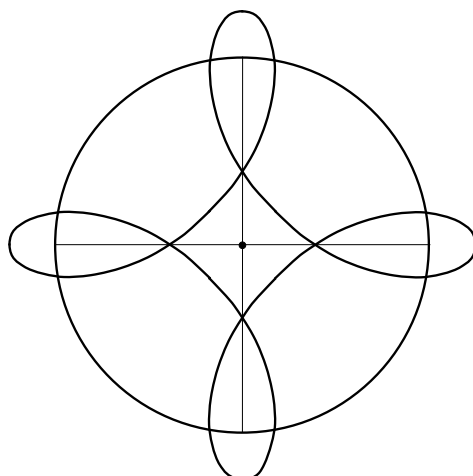


Figur 2.3

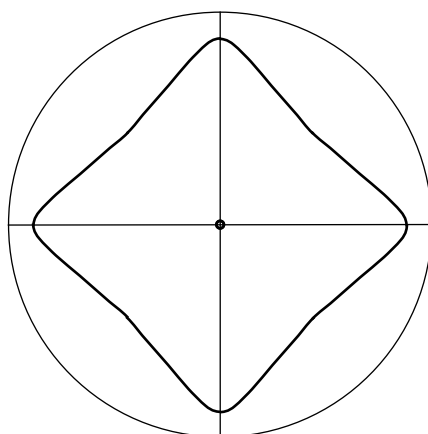
Hier sind einige konkrete Beispiele:



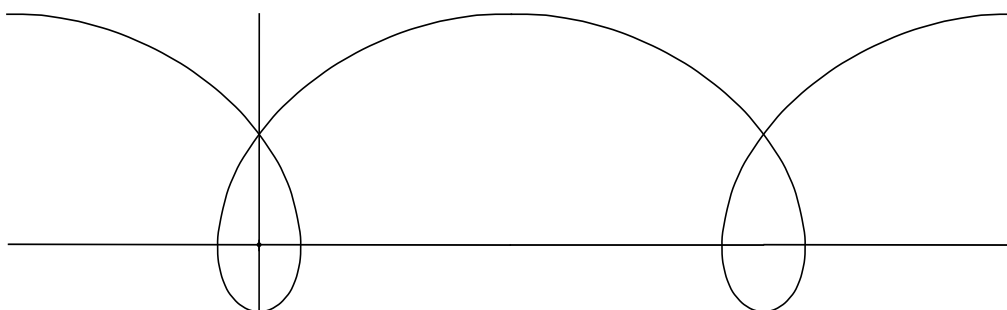
Figur 2.4



Figur 2.5

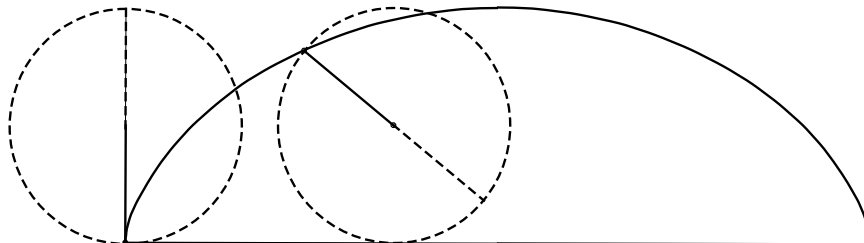


Figur 2.6



Figur 2.7

Wir wollen uns in dem folgenden Abschnitt mit einigen der wundersamen Eigenschaften der (gemeinen) *Zykloide* beschäftigen.



Figur 2.8

Nimmt man den Radius des rollenden Kreises mit 1 an, so kann man als Zeitparameter den Winkel t im Bogenmaß wählen und gewinnt daraus sofort die Darstellung

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Es wird dann $t = \arccos(1 - y)$ und damit

$$x = \arccos(1 - y) + \sqrt{2y - y^2}$$

eine Gleichung der Zykloide, aus der man unmittelbar abliest, daß sie keine algebraische, also eine *transzendente* Kurve ist.

Dennoch ist überraschenderweise die Länge L der Zykloide über einen vollen Bogen *rational*: Eine einfache Rechnung ergibt

$$L = \int_0^{2\pi} ((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t)^{1/2} dt = \int_0^{2\pi} (2(1 - \cos t))^{1/2} dt.$$

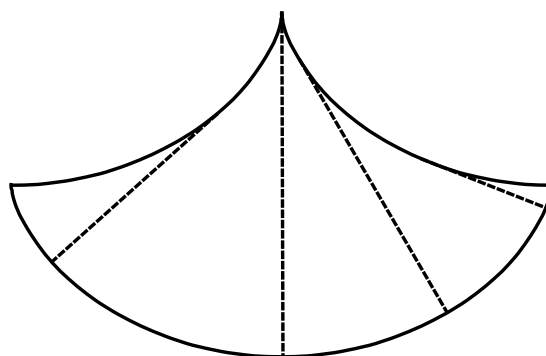
Mit $\cos t = \cos(t/2 + t/2) = \cos^2 t/2 - \sin^2 t/2 = 1 - 2 \sin^2 t/2$ wird dann schließlich

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \sin t/2 dt = -4 \cos t/2 \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Dieses Resultat läßt sich noch wesentlich verallgemeinern. Bei der Einführung der *Trochoiden* haben wir einen der Grenzfälle nicht erwähnt, nämlich den, daß man auch eine *Gerade* auf einem Kreis abrollen lassen kann und die Bahn eines festen Punktes auf der Geraden verfolgt. Eine solche Kurve heißt auch eine *Kreisevolvente*. Eine entsprechende Konstruktion läßt sich auch mit einer Geraden und einer beliebigen Kurve durchführen; man spricht dann von einer *Evolvente* der gegebenen Kurve.

Bemerkung. Zu einer allgemeinen Beschreibung von Evolventen und weiteren Untersuchungen und Beispielen siehe weiter unten.

Als Spezialfall untersuchen wir hier den Fall einer Zykloide zusammen mit der Tangente an dem maximalen Punkt (und dem Berührungspunkt als ausgezeichneten Punkt an dieser Stelle). Für diese Evolvente der Zykloide findet man an den Stellen $\pm\pi$ sofort den Wert 2 und an der Stelle 0 wegen der obigen Berechnung den Wert 4. Eine (aus später noch deutlicher werdenden Gründen) an der x -Achse gespiegelte Skizze sieht etwa wie folgt aus:



Figur 2.9

und nährt einen Verdacht, den wir sogleich als Lemma formulieren und beweisen wollen.

Lemma 2.1 Die Evolvente der Zykloide ist die (geeignet verschobene) Zykloide selbst.

Beweis. Wir müssen offensichtlich bei fester Zeit t die Länge $\sigma(t)$ des Bogens der Zykloide von $\alpha(t)$ bis $\alpha(\pi)$ bestimmen und dann auf der Tangente an der Stelle $\alpha(t)$ von dem Berührungspunkt um die Strecke der Länge $\sigma(t)$ weitergehen, wobei wir uns aus Symmetriegründen auf nicht negative t beschränken können. Die Gleichung der Evolvente lautet somit

$$\beta(t) = \alpha(t) + \sigma(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} .$$

Ersetzt man noch $\sigma(t)$ durch die Länge $s(t)$ des Zykloidenbogens von $\alpha(0)$ nach $\alpha(t)$, so ist $\sigma(t) + s(t) = 4$ und damit die Evolventengleichung

$$\beta(t) = \alpha(t) + (4 - s(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} .$$

Wir haben oben schon benutzt, daß

$$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t) = 2 \sin(t/2) (\sin(t/2), \cos(t/2))$$

und damit

$$\|\alpha'(t)\| = 2 |\sin(t/2)| .$$

In dem Bereich $0 \leq t \leq \pi$ berechnet man damit sofort

$$s(t) = 4(1 - \cos(t/2))$$

und

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(t) + 8 \cdot \sin(t/2) \cos(t/2) \cdot \frac{(\sin(t/2), \cos(t/2))}{2 \cdot \sin(t/2)} \\ &= \alpha(t) + 2(\sin t, 2 \cos^2(t/2)) = \alpha(t) + 2(\sin t, 1 + \cos t) \\ &= (t + \sin t, 3 + \cos t) . \end{aligned}$$

Ersetzt man jetzt noch den Parameter t durch $t - \pi$, so kommt

$$\beta(t - \pi) = (t - \sin t, 1 - \cos t) + (-\pi, 2) ,$$

also die in den Anfangspunkt $(-\pi, 2)$ verschobene Zykloide (nach linearer Parametertransformation). \square

Dieses Lemma ist in etwas modifizierter Form der Grund für die Tatsache, daß die Zykloide auch die sogenannte *Brachistochrone* ist, also die Kurve „schnellsten (reibungsfreien) Rutschens eines Massenpunktes unter der Erdanziehung“. Diese Eigenschaft werden wir weiter unten noch herleiten. Sie ist aber auch die *Tautochrone*, d. h. diejenige Kurve, auf der ein Massenpunkt bei Rutschen unter der Erdanziehung unabhängig vom Startpunkt stets die gleiche Zeit braucht, um zum tiefsten Punkt zu gelangen.

Lemma 2.2 *Die Zykloide besitzt die Tautochronen-Eigenschaft.*

Beweis. Wir spiegeln sinnvollerweise den Graphen der Zykloide an der Geraden $y = 1$ und gewinnen damit die Parametrisierung $\alpha(\tau) = (\tau - \sin \tau, 1 + \cos \tau)$ für die entsprechende Kurve mit streng monoton fallende Spur im Intervall $[0, \pi]$. Startet der Massenpunkt mit Masse m zur Zeit τ_0 an der Stelle (x_0, y_0) (mit Geschwindigkeit Null), so muß nach dem Energie-Erhaltungssatz zu jeder Zeit τ die Beziehung

$$\frac{m}{2} v^2 - mg(y_0 - y) = 0$$

mit der absoluten Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{d\tau}$$

gelten, also $ds/d\tau = \sqrt{2g} \sqrt{y_0 - y}$. Somit ergibt sich für die volle Gleitzeit bis zum tiefsten Punkt:

$$T(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{y_0 - y}} .$$

Für das infinitesimale Längenelement ds ist aber

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} ,$$

und ferner gilt

$$y_0 - y = \cos \tau_0 - \cos \tau = 2 \left(\cos^2 \frac{\tau_0}{2} - \cos^2 \frac{\tau}{2} \right) .$$

Alles zusammen liefert dann

$$T(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{\sin \tau/2}{\sqrt{\cos^2(\tau_0/2) - \cos^2(\tau/2)}} d\tau .$$

Substituiert man in diesem Integral $w := \cos(\tau/2)$ und $u := w/w_0$, so wird tatsächlich unabhängig von τ_0

$$T(\tau_0) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int_0^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{w_0^2 - w^2}} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \arcsin u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{g}} . \quad \square$$

Bemerkung. HUYGENS hat als erster bemerkt, daß man aufgrund der Tautochronen-Eigenschaft der Zykloide im Gegensatz zum mathematischen Pendel, dessen Schwingungsdauer abhängig von der Anfangsauslenkung ist, mit einem „Zykloiden-Fadenpendel“ gemäß der Figur 9 ein Pendel mit konstanter Schwingungsdauer konstruieren kann.

In einem kleinen Zwischenspiel wollen wir an dieser Stelle (unter einer Zusatzvoraussetzung) beweisen, daß auch nur die Zykloide die Tautochronen-Eigenschaft besitzt. Es sei also $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ mit $\alpha(0) = (0, 0)$ gegeben. Wir suchen diejenige Kurve, für die bei beliebigem $s_0 > 0$ die „Rutschzeit“ eines Massenpunktes von $\alpha(s_0)$ unter der Schwerkraft (parallel zur y -Achse) unabhängig von s_0 ist, wobei wir natürlich Reibung ausschließen. Wir haben früher schon gezeigt, daß diese Zeit (bis auf einen konstanten Faktor) gleich

$$(*) \quad T(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{\alpha_2(s_0) - \alpha_2(s)}}$$

ist. Damit dieses Integral überhaupt sinnvoll ist, müssen wir

$$\alpha_2(s) < \alpha_2(s_0), \quad s < s_0, \quad s, s_0 \text{ beliebig } \leq S,$$

voraussetzen, also annehmen (was aus physikalischen Gründen auch sinnvoll ist), daß α_2 streng monoton auf $s \geq 0$ und damit $\alpha_2'(s) > 0$, $s > 0$ ist.

Zur Vereinfachung schreiben wir $y = f(s) := \alpha_2(s)$. Nach Voraussetzung besitzt f (in einem geeigneten Intervall $0 \leq y \leq Y$) eine Umkehrfunktion

$$g(y) \quad \text{mit} \quad g'(y) > 0, \quad y > 0.$$

Wir substituieren nun in (*) $t := \sqrt{f(s)}$ und erhalten mit $t_0 := \sqrt{f(s_0)}$:

$$\tilde{T}(t_0) := T(s_0) = \int_0^{t_0} \frac{2t g'(t^2)}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} dt,$$

also

$$(+)$$

$$\tilde{T}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{h(t)}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} dt \equiv \text{const.}, \quad t_0 > 0,$$

mit

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t^2).$$

Wir werden (unter einer weiteren Zusatzannahme) weiter unten zeigen, daß dann notwendigerweise $h(t) \equiv \text{const.}$ sein muß. Dies führt tatsächlich auch zum Ziel; denn dann ist

$$g(t^2) = Ct, \quad \text{also} \quad g(t) = C\sqrt{t}, \quad C > 0,$$

und wegen $s = g(t^2) = Ct$ ist

$$y = \alpha_2(s) = f(s) = t^2 = \frac{1}{C^2} s^2 := \frac{1}{8\rho} s^2, \quad \rho = \frac{1}{8} C^2,$$

und es folgt mit $dy = \frac{1}{4\rho} s ds$ und $ds^2 = dx^2 + dy^2$:

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy = \sqrt{\frac{2\rho}{y} - 1} dy.$$

Substituiert man hierin

$$y = \rho(1 - \cos t),$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= \rho \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t} - 1} \sin t dt = \rho \int \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}} \sin t dt \\ &= \rho \int (1 + \cos t) dt = \rho(t + \sin t). \end{aligned}$$

Diese Parametrisierung $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ist aber gerade diejenige einer Zykloide, die durch Abrollen eines Kreises vom Radius ρ entsteht.

Bemerkung. Schreibt man in (*) $U(s)$ anstelle von $\alpha_2(s)$, so bedeutet (*) gerade: Man finde dasjenige *Potential* $U(s)$, $s \in \mathbb{R}$, für welches die Schwingungsdauer eines Masseteilchens auf der s -Achse

unabhängig von der maximalen Auslenkung s_0 ist. Auch in hervorragenden Lehrbüchern der Theoretischen Physik wie LANDAU - LIFSCHITZ wird nur nachgewiesen, daß die Bedingung

$$U(s) = \frac{k}{2} s^2, \quad k > 0,$$

hinreichend, aber nicht, daß sie notwendig ist.

Auch wir wollen diesen Beweis nicht in völliger Allgemeinheit führen. Wir setzen nämlich zusätzlich zu (+) voraus, daß die Funktion h nicht nur auf $0 < t \leq T$ analytisch ist, sondern sogar nach $t = 0$ analytisch fortgesetzt werden kann.

Behauptung. Ist h analytisch auf $0 \leq t \leq T$, so gilt für alle $j \geq 0$, $t_0 > 0$:

$$(++) \quad \int_0^{\pi/2} h^{(j)}(t_0 \sin \varphi) \sin^j \varphi d\varphi = C \delta_{0j}.$$

Denn falls dies richtig ist, folgt für alle $j \geq 1$ mit $t_0 \rightarrow 0$ das Verschwinden der Ableitungen $h^{(j)}(0) = 0$, und folglich ist $h = \text{const}$.

Beweis von (++): Für $j = 0$ folgt (++) aus (+) mit der Substitution $t = t_0 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Sei nun (++) für ein festes $j \geq 0$ und alle $t_0 > 0$ schon bewiesen. Wir erhalten dann das Ergebnis durch Differentiation nach $t_0 > 0$. \square

Wir haben bisher konkret mit *parametrisierten* Kurven gearbeitet, haben aber auch das eine oder andere Mal „Umparametrisierungen“ zugelassen. Wir wollen dieses abstrakte Konzept an dieser Stelle konkretisieren, da es uns von nun an ständig begleiten wird.

Definition und Bemerkungen. Unter einer *Parametertransformation* verstehen wir einen \mathcal{C}^1 -Isomorphismus

$$h : J \longrightarrow I$$

von Intervallen I, J in \mathbb{R} . Es ist dann entweder

- i) $h'(s) > 0$, $s \in J$, oder
- ii) $h'(s) < 0$, $s \in J$.

Im ersten Fall heißt h *orientierungserhaltend* und im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*.

Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $h : J \rightarrow I$ eine Parametertransformation, so ist $\alpha \circ h$ ebenfalls eine parametrisierte Kurve mit der gleichen *Spur*:

$$\text{Spur}(\alpha \circ h) = \text{Spur} \alpha.$$

Die parametrisierte Kurve α ist genau dann glatt, wenn dies $\alpha \circ h$ ist.

Die Operationen des *Umparametrisierens* bzw. *orientierten Umparametrisierens* sind Äquivalenzrelationen auf der Menge der parametrisierten Kurven. Wir nennen die entsprechenden Äquivalenzklassen *Kurven* bzw. *orientierte Kurven*. Entsprechendes gilt dann auch für *glatte* Kurven.

Wir wollen nun für jede glatte Kurve „kanonische“ Parametrisierungen einführen. Dazu setzt man für jede parametrisierte glatte Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bei festem $t_0 \in I$:

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Aus der Analysis-Vorlesung ist bekannt, daß jeder Bogen $\alpha([t_1, t_2])$ für $[t_1, t_2] \subset I$ rektifizierbar ist und die Bogenlänge

$$L_{t_1, t_2}(\alpha) := \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = s(t_2) - s(t_1), \quad t_1, t_2 \in I, \quad t_1 \leq t_2,$$

besitzt. Also ist die Funktion $s = s(t)$ bis auf eine additive Konstante *eindeutig* bestimmt.

Bemerkung und Definition. Für jede parametrisierte glatte Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ist $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ und damit $s : I \rightarrow s(I) =: J \subset \mathbb{R}$ eine (orientierte) Parametertransformation, und es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion

$$\tilde{\alpha} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $\tilde{\alpha}(s(t)) = \alpha(t)$ (nämlich $\tilde{\alpha} = \alpha \circ s^{-1}$).

Satz 2.3 *Unter den vorigen Voraussetzungen gilt*

$$\left\| \frac{d\tilde{\alpha}}{ds}(s) \right\| = 1, \quad s \in J,$$

und

$$L_{s_1, s_2}(\tilde{\alpha}) = |s_1 - s_2|.$$

Definition. Man spricht dann davon, daß die Kurve *nach der Bogenlänge s parametrisiert* sei (oder eine Kurve der Geschwindigkeit 1 ist).

Satz 2.4 *Sind α und β nach der Bogenlänge parametrisiert und geht β aus α durch Umparametrisierung hervor, so gilt*

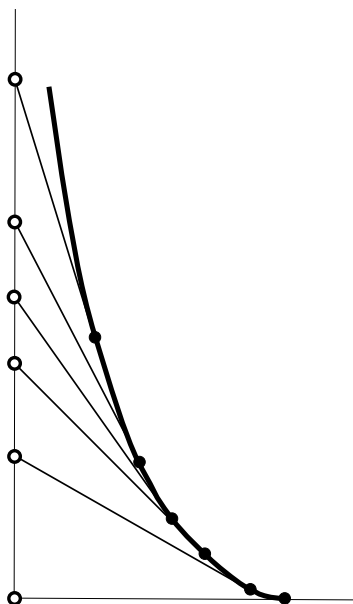
$$\beta(t) = \alpha(\pm t + t_0),$$

wobei das positive Zeichen genau bei orientierungserhaltender Umparametrisierung gilt.

Folgerung 2.5 *Orientierte Kurven besitzen eine (bis auf eine additive Konstante) eindeutig bestimmte Parametrisierung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ durch die Bogenlänge $s \in I$. Sie ist charakterisiert durch die Bedingung $\|\alpha'\| \equiv 1$.*

Nach diesem kurzen abstrakten Abstecher wollen wir als weiteres interessantes und historisch bedeutsames *Beispiel* die sogenannte *Traktrix* oder auch *Hundekurve* genauer untersuchen. Der Name rührt daher, daß man sich entweder vorstellt, daß ein (schwerer) Massepunkt auf einer ebenen Fläche an einem schwerelosen Faden der Länge ℓ entlang einer Geraden gezogen wird bzw. daß ein Beutegreifer (Hund) ein Beutetier hetzt, in dem er auf dieses, das entlang einer Geraden flieht, sich hinbewegt, aber konstanten Abstand ℓ einhält⁵.

⁵In Kapitel 20 meines Manuskripts *Analysis II* wird eine andere Kurve als „Hundekurve“ bezeichnet.



Figur 2.10

Wir wollen im folgenden die Traktrix auf verschiedene Weisen beschreiben, wobei wir uns auf den Fall der auf $\ell = 1$ normierten Länge beschränken können. Ohne Einschränkung sei die y -Achse als die „Fluchtgerade“ ausgezeichnet; die Bewegung finde im rechten Halbraum $x > 0$ statt. Ist dann $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eine Parametrisierung der gesuchten Kurve und $\varphi = \varphi(t)$ der Steigungswinkel der Tangente an die Kurve im Punkte $\alpha(t)$ mit der x -Achse, so ist

$$-\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi) = \frac{x(t)}{\ell} = x(t)$$

und folglich, wenn wir auf Bogenlänge $t = s$ parametrisiert haben,

$$x'(s) = \frac{x'(s)}{\sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \cos \varphi = -x(s).$$

Daraus ergibt sich sofort $x(s) = Ce^{-s}$. Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha(0) = (1, 0)$ annehmen können, muß $C = 1$ sein.

Die Gleichung für die zweite Komponente ergibt sich aus $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$ zu

$$y'(s) = \sqrt{1 - e^{-2s}}.$$

Man kann eine Stammfunktion der rechten Seite elementar angeben. Setzt man $\xi = e^{-s}$, so wird $d\xi = -e^{-s} ds = -\xi ds$ und folglich

$$\int \sqrt{1 - e^{-2s}} ds = - \int \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} d\xi.$$

Eine Stammfunktion des rechts auftretenden Integrals ist, wie wir weiter unten noch zeigen werden oder durch Differentiation leicht bestätigt werden kann, für den in Frage stehenden Bereich $\xi > 0$ gegeben durch

$$(*) \quad \sqrt{1 - \xi^2} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} .$$

Infolgedessen erhalten wir

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2s}} ds = \left(-\sqrt{1 - \xi^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \Big|_1^{e^{-s}} \\ &= -\sqrt{1 - e^{-2s}} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2s}}}{e^{-s}} \\ &= \log(1 + \sqrt{1 - e^{-2s}}) + s - \sqrt{1 - e^{-2s}} . \end{aligned}$$

Bemerkung. Die eben abgeleitete Darstellung der Traktrix in der Bogenlänge ist nicht gerade sehr elegant. Dieses Beispiel zeigt eindrücklich, daß die Parametrisierung einer glatten Kurve durch ihre Bogenlänge zwar ein außerordentlich wichtiges *theoretisches* Werkzeug ist, insbesondere wenn man Kurven physikalisch-analytisch beschreiben will, das aber nicht überbewertet werden darf dahingehend, daß man grundsätzlich glatte Kurven mit ihrer natürlichen Parametrisierung explizit darstellen sollte (geschweige denn darstellen kann).

In der Tat kann man aus der obigen Parametrisierung die bekannte „funktionale“ Darstellung $y = f(x)$ und eine weitere Parametrisierung der Traktrix ableiten, die z. B. auch bei DO CARMO verwendet wird: Setzt man in den obigen Ausdruck $s = -\log x$ ein, so bekommt man die bekannte Traktrix-Funktion

$$y = f(x) = -\sqrt{1 - x^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} .$$

Bemerkung. Die Übereinstimmung dieser Darstellung mit (*) ist in keinster Weise überraschend. Mit den früher abgeleiteten Beziehungen erhalten wir sofort die folgende Differentialgleichung für die Traktrix (die wir auch der geometrischen Definition unmittelbar hätten entnehmen können):

$$(+)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)^{-1} = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} ,$$

die die obige Lösung wegen (*) und der Anfangsbedingung $y = 0$ für $x = 1$ hat.

Wir geben noch eine weitere Parametrisierung der Traktrix an. Offensichtlich ist es sinnvoll,

$$e^{-s} = \sin t \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leq t < \pi$$

zu setzen. In diesen Parametern ist dann

$$x(t) = \sin t \quad \text{und} \quad -e^{-s} ds = \cos t dt ,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{dy}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt} = -\sqrt{1 - e^{-2s(t)}} \cos t e^{s(t)} = -\sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t (\sin t)^{-1} \\ &= \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - \sin t . \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich sofort die *geometrische Bedeutung* der Variablen t gewinnen. Mit

$$\beta(t) := (\sin t, y(t))$$

hat man

$$\beta'(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t \right) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) = (\cos t, \cos t \cdot \cot t)$$

und damit

$$\|\beta'(t)\|^2 = (\cos t)^2 + \left(\sin t - \frac{1}{\sin t} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 t} - 1 = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \cot^2 t,$$

also

$$\|\beta'(t)\| = |\cot t| = -\cot t.$$

Es folgt, wenn ϑ den (im Bereich $[0, \pi]$ kleineren) Winkel zwischen $\beta'(t)$ und der y -Achse bezeichnet:

$$-\cos \vartheta \cdot \cot t = \|(0, 1)\| \cdot \|\beta'(t)\| \cos \vartheta = \langle (0, 1), \beta'(t) \rangle = \cos t \cdot \cot t$$

und somit $\cos t = -\cos \vartheta = \cos(\pi - \vartheta)$, d. h. $t = \pi - \vartheta$. Mit anderen Worten: t ist der *größere* der beiden Winkel zwischen der Tangente an die Traktrix und der y -Achse.

Die Differentialgleichung für $y(t)$ läßt sich sehr einfach lösen (oder aus Tabellen ablesen). Wegen

$$(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$$

erhält man mit

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}}{\tan \frac{t}{2}} = \frac{\left(\tan \frac{t}{2} \right)'}{\tan \frac{t}{2}} = \left(\log \tan \frac{t}{2} \right)'$$

die zweite Komponente $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \cos t + \log \tan \frac{t}{2}.$$

Bemerkung. Man kann aus dieser Beschreibung leicht die früheren (nicht in jeder Einzelheit hergeleiteten) zurückgewinnen. Es genügt dazu, die Stammfunktion (*) aus der soeben durchgeführten Berechnung zu deduzieren. In der Tat erhält man mit der Substitution $\xi = \sin t$, $d\xi = \cos t dt$:

$$\int \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt = \cos t + \log \tan \frac{t}{2}.$$

Nun ist

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + 1 - \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{\xi}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}$$

und folglich, wie behauptet,

$$\int \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi = \sqrt{1-\xi^2} - \log \frac{1 + \sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

Bemerkung. Es ist offensichtlich sinnvoll, die obige Parametrisierung der Traktrix

$$\beta(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) = (x(t), y(t))$$

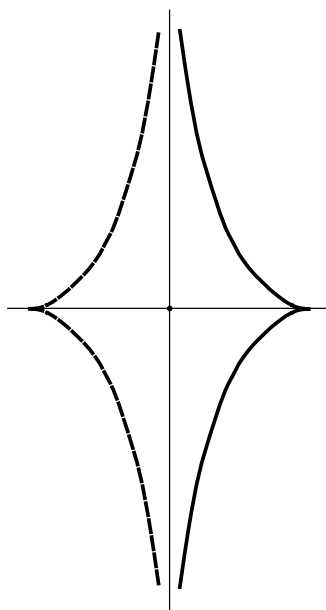
auch auf das Intervall $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ auszudehnen. Man sieht unmittelbar, daß mit $\bar{t} = \pi - t$ gilt:

$$\beta(\bar{t}) = (x(t), -y(t)).$$

Somit wird hierdurch die „volle“ Traktrix parametrisiert. Diese Parametrisierung ist aber bei $t = \pi/2$ nicht glatt. In der Tat springt hier der normierte Tangentialvektor von $(1, 0)$ auf $(-1, 0)$! Setzt man schließlich

$$\beta(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{|t|}{2}), \quad 0 < |t| < \pi,$$

so erhält man auch noch den in der nachfolgenden Zeichnung gestrichelten Teil.



Figur 2.11

Es gibt noch eine schöne Eigenschaft der *Schar* aller Kurven, die man durch Verschieben der Traktrix in y -Richtung erhält. Wir fragen nach der Gesamtheit aller Kurven, die auf dieser Schar *senkrecht* stehen. Die Antwort ist einfach. Wegen

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan \alpha}$$

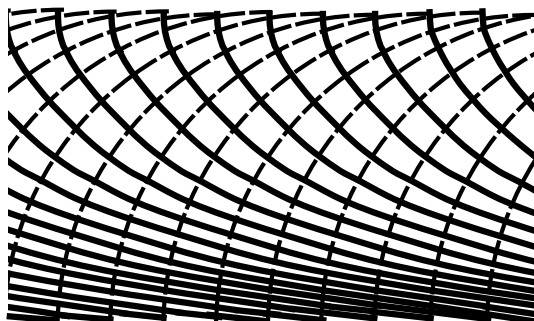
ist die Differentialgleichung dieser sogenannten *Orthogonaltrajektorien* wegen (+) von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

deren Lösungen die *Viertelkreise*

$$y = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad 0 < x < 1$$

sind. (In der folgenden Zeichnung sind die Variablen x und y vertauscht).



Figur 2.12

Wir kommen nun zu dem Begriff der *Krümmung* von Kurven, der auch für das Verständnis der Krümmungseigenschaften höherdimensionaler Objekte unerlässlich ist. Grundlegend ist der folgende Satz für glatte Kurven in \mathbb{E}^n .

Satz 2.6 *Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare glatte Kurve, und es sei $s \in I$ die Bogenlänge, d. h. $\|\alpha'(s)\| = 1$. Dann gilt*

$$\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \quad s \in I.$$

Beweis. Mit den differenzierbaren Abbildungen

$$\beta(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t) e_j \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) e_j$$

bzgl. eines Orthonormalsystems e_1, \dots, e_n des euklidischen Raumes \mathbb{E}^n folgt allgemein wegen

$$\langle \beta(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{j=1}^n b_j(t) c_j(t)$$

sofort

$$\langle \beta(t), \gamma(t) \rangle' = \sum_{j=1}^n (b_j'(t) c_j(t) + b_j(t) c_j'(t)) = \langle \beta'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \beta(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Wendet man diese Formel auf $\beta = \gamma := \alpha'$ und die Identität

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \|\alpha'(s)\|^2 \equiv 1$$

an, so ergibt sich sofort die behauptete Relation:

$$2 \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle' \equiv 0. \quad \square$$

Bemerkung und Definition. α' und α'' sind eindeutig bestimmte Größen orientierter, auf Bogenlänge parametrisierter zweimal stetig differenzierbarer glatter Kurven. Bei Orientierungsumkehr ändert der Tangentialvektor α' sein Vorzeichen, α'' bleibt jedoch unverändert.

Die Norm $\kappa := \|\alpha''(t)\|$ heißt die (*absolute*) *Krümmung* der glatten Kurve α an der Stelle $\alpha(t)$.

Die eben eingeführten Größen transformieren sich auf einfache Weise bei euklidischen Bewegungen der Kurve.

Lemma 2.7 *Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ wie oben gegeben, und $B : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sei eine euklidische Bewegung, also von der Form*

$$B(x) = Ax + c, \quad A \in O(n, \mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt für $\tilde{\alpha} := A \circ \alpha$:

$$\tilde{\alpha}'(s) = A\alpha'(s), \quad \text{insbesondere } \|\tilde{\alpha}'(s)\| = 1, \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}''(s) = A\alpha''(s).$$

Der Beweis ist völlig elementar. □

Daß die Krümmung ein Maß für das Abweichen von dem „geradlinigen“ Verlauf einer Kurve ist, besagt der erste Teil des folgenden Lemmas.

Lemma 2.8 *Es sei α eine nach der Bogenlänge parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurve. Es gilt $\alpha'' \equiv 0$ genau dann, wenn die Spur von α ein Geradenstück ist.*

Ist α eine ebene Kurve, so ist die (absolute) Krümmung κ genau dann konstant und von Null verschieden, wenn die Spur von α ein Bogen eines Kreises mit Radius $1/\kappa$ ist.

Beweis. Wir brauchen, wenn überhaupt, nur den zweiten Teil zu behandeln. Ein Kreisbogen vom Radius $R > 0$ (und, ohne Einschränkung, mit Mittelpunkt 0) wird parametrisiert durch $\alpha(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R))$, $s \in I$. Damit ist

$$\alpha'(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R)) \quad \text{und} \quad \alpha''(s) = \frac{1}{R} (-\cos(s/R), -\sin(s/R)).$$

Also ist tatsächlich $\|\alpha'(s)\| = 1$ und $\kappa = \|\alpha''(s)\| = 1/R$.

Die Rückrichtung zeigen wir zweckmäßigerweise weiter unten. □

Bei ebenen glatten Kurven hat man eine feinere Invariante, die, wie wir anschließend sehen werden, die Kurve zusammen mit der Bogenlänge eindeutig (bis auf eigentliche euklidische Bewegung in der Ebene) bestimmt.

Definition. Es sei eine Orientierung von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gewählt. Dann gibt es zu $\alpha'(s)$ der Länge 1 einen eindeutig bestimmten Einheitsvektor $n(s)$, so daß $(\alpha'(s), n(s))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{E}^2 bildet, und eine Zahl $\kappa = \kappa(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha''(s) = \kappa(s)n(s).$$

Man nennt $\kappa_\alpha := \kappa$ die *signierte* oder *orientierte Krümmung* der Kurve α .

Lemma 2.9 *Die signierte Krümmung κ einer ebenen glatten Kurve ändert ihr Vorzeichen bei Orientierungsumkehr der Kurve. κ bleibt invariant unter eigentlichen euklidischen Bewegungen und ändert das Vorzeichen bei uneigentlichen Bewegungen.*

Bemerkungen. 1. Es wird aus dem Kontext stets hervorgehen, ob wir mit κ die signierte (nur im Fall ebener Kurven) oder die absolute Krümmung meinen.

2. Für einen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ der Länge 1 ist wegen

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = 1$$

der Vektor $v^\perp := (-v_2, v_1)$ so beschaffen, daß (v, v^\perp) ein positiv orientiertes Orthonormalsystem bildet. Identifiziert man $v \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl $v = v_1 + iv_2$, so ist v^\perp mit iv zu identifizieren.

3. Wir ordnen einer glatten ebenen, nach der Bogenlänge s parametrisierten Kurve $\alpha = \alpha(s)$ für jeden Wert s das positiv orientierte *Orthonormalsystem*

$$e_1(s) := \alpha'(s), \quad e_2(s) = e_1^\perp(s) = i\alpha'(s)$$

zu und nennen es ein *begleitendes* Koordinatensystem (da wir uns vorstellen, daß es zu jedem Wert s an der Stelle $\alpha(s)$ „angeheftet“ wird).

Wir benötigen geeignete Formeln zur Berechnung der signierten Krümmung.

Satz 2.10 *Bei beliebiger Parametrisierung $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ gilt*

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß die linke Identität gilt, wenn die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist: Dann ist nämlich $|\alpha'(t)| = 1$ und $\langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle = \langle \kappa(t)n(t), n(t) \rangle = \kappa(t)$.

Im Allgemeinfall ist $\alpha = \bar{\alpha} \circ h$, wobei $\bar{\alpha}$ die Parametrisierung nach Bogenlänge und $s = h(t)$ eine Umparametrisierung ist. Es gilt dann nach der Kettenregel und der Produktregel

$$\alpha' = (\bar{\alpha} \circ h)' = (\bar{\alpha}' \circ h) \cdot h' \quad \text{und} \quad \alpha'' = (\bar{\alpha}'' \circ h) \cdot h'^2 + (\bar{\alpha}' \circ h) \cdot h'',$$

woraus wegen $\bar{\alpha}' \perp i\bar{\alpha}'$ sofort

$$\langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle = h'^3(t) \cdot \langle \bar{\alpha}''(h(t)), i\bar{\alpha}'(h(t)) \rangle \quad \text{und} \quad |\alpha'(t)|^2 = h'^2(t) \cdot |\bar{\alpha}'(h(t))|^2$$

und damit die linke Identität in der allgemeinen Situation folgt.

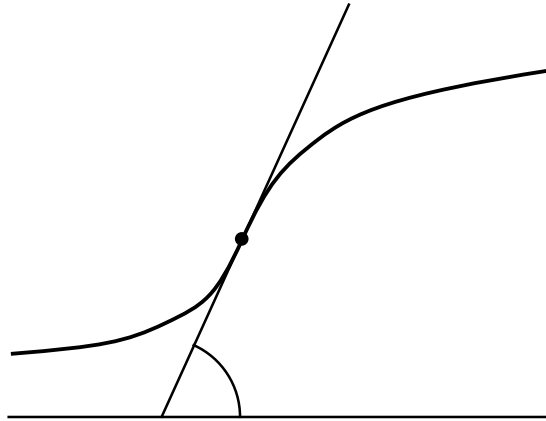
Die rechte Identität gewinnt man durch direktes Einsetzen. □

Beispiel. Der Graph einer Funktion f in einer Veränderlichen x wird kanonisch parametrisiert durch $x \mapsto (x, y = f(x))$, was so gut wie niemals die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist, außer wenn $f = \text{const.}$ Die obige Formel liefert in Übereinstimmung mit der üblichen Definition in der *Analysis*-Vorlesung den Wert

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}^3}.$$

Bemerkung. Aus der obigen Formel folgt sofort, daß die signierte Krümmung (ebenso wie die Krümmung) eine $(k - 2)$ -mal stetig differenzierbare Funktion des Parameters t ist, sofern die Kurve selbst k -mal stetig differenzierbar ist, $k \geq 2$.

Die signierte Krümmung einer ebenen Kurve läßt sich auch interpretieren als *Änderungsgeschwindigkeit* des Steigungswinkels der Tangente an die Kurve.



Figur 2.13

Satz 2.11 Bei Parametrisierung durch die Bogenlänge s ist $\kappa(s)$ die Änderungsgeschwindigkeit des Steigungswinkels $\vartheta(s)$ der Tangente an der Stelle $\alpha(s)$.

Bemerkung. Man kann selbstverständlich den Winkel ϑ auch relativ zu jeder beliebig fest vorgegebenen Geraden anstelle der willkürlich gewählten x -Achse messen.

Beweis. Bei beliebiger Parametrisierung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ kann man lokal um jeden Wert $t_0 \in I$ eine stetige reellwertige Funktion $\vartheta = \vartheta(t)$ so bestimmen, daß

$$\alpha'(t) = |\alpha'(t)| e^{i\vartheta(t)}.$$

Die Funktion ϑ ist bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

Durch Differentiation der definierenden Gleichung erhält man

$$i\vartheta' \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = i\vartheta' e^{i\vartheta} = (e^{i\vartheta})' = \left(\frac{\alpha'}{|\alpha'|} \right)' = \frac{\alpha''}{|\alpha'|} + \alpha' \cdot \left(\frac{1}{|\alpha'|} \right)'$$

Nach skalarer Multiplikation mit $i\alpha' \perp \alpha'$ folgt hieraus

$$\vartheta' |\alpha'| = \frac{\langle \alpha'', i\alpha' \rangle}{|\alpha'|} = |\alpha'|^2 \kappa, \quad \text{also} \quad \kappa(t) = \frac{\vartheta'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Diese Formel beinhaltet die Behauptung des Satzes im Spezialfall $t = s$. □

Es ist nun sehr einfach, den oben schon angekündigten „Hauptsatz der ebenen Kurventheorie“ zu beweisen: Glatte ebene \mathcal{C}^2 -Kurven sind bis auf eigentliche euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt durch ihre Krümmungsfunktion relativ zur Bogenlänge.

Satz 2.12 (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie) Es sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine (bis auf eigentliche euklidische Bewegungen eindeutig bestimmte) zweimal stetig differenzierbare Kurve

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$$

mit $\|\alpha'\| = 1$ und $\kappa_\alpha(t) = \kappa(t)$, $t \in I$. α wird explizit gegeben durch die Gleichungen

$$\alpha(t) = \left(\int \cos \vartheta(t) dt + a, \int \sin \vartheta(t) dt + b \right), \quad \vartheta(t) = \int \kappa(t) dt + \vartheta_0.$$

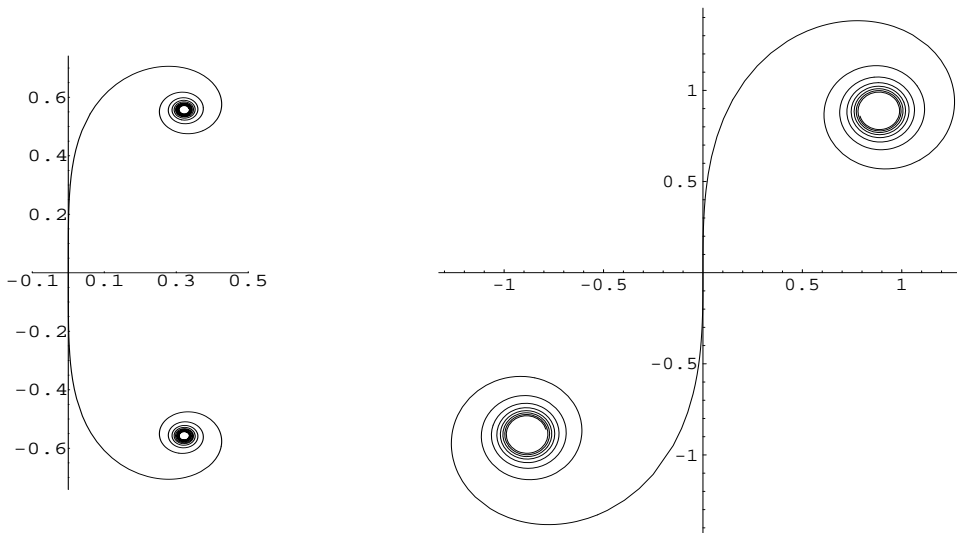
Beweis. Wir erläutern nur, inwiefern die angegebene Parametrisierung eine Lösung des Problems darstellt. Die Gesamtheit der aufgeschriebenen Lösungen hängt offensichtlich von dem Punkt $(a, b) \in \mathbb{E}^2$ und einem Winkel ϑ_0 ab. Wir werden etwas später nachweisen, daß solche Anfangsbedingungen die gesuchte Kurve exakt festlegen.

Offensichtlich ist die angegebene parametrisierte Kurve α aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zweimal stetig differenzierbar, da wir ausgehend von der stetigen Funktion κ in zwei Schritten Stammfunktionen bilden.

Es ist weiter $\alpha'(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$ und insbesondere $|\alpha'(t)| = 1$. Also ist t die Bogenlänge der glatten durch t parametrisierten Kurve α , und ϑ ist der Winkel zwischen der Tangente an $\alpha(t)$ an der Stelle $\alpha(t)$ und der x -Achse. Nach dem vorigen Satz ist außerdem

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{d\vartheta}{dt}(t) = \kappa(t). \quad \square$$

Beispiele. Wählt man z. B. bei festem $n \in \mathbb{N}^*$ die Funktionen $\kappa(t) = -t^n$, so erhält man die sogenannten *Klothoiden* oder *Spinnenkurven*. Die folgenden Bilder ($n = 1, 2$) wurden mit *mathematica* gemäß der Anleitungen von GRAY [17] hergestellt.



Figur 2.14

Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes der ebenen Kurventheorie läßt sich strukturell noch besser verstehen mit Hilfe der *Differentialgleichungen* für das begleitende Koordinatensystem, die wir anschließend samt einiger Folgerungen herleiten wollen. Ihr Pendant im dreidimensionalen Raum sind die FRENETSchen Gleichungen, die wir im folgenden Kapitel ohne große Umschweife gleich im n -dimensionalen Raum entwickeln werden.

Satz 2.13 Für das begleitende Koordinatensystem $(e_1(s), e_2(s))$ einer nach der Bogenlänge s parametrisierten glatten zweimal stetig differenzierbaren ebenen Kurve α gelten die folgenden Differentialgleichungen, in denen $\kappa = \kappa(s)$ die signierte Krümmung von α bezeichnet:

$$\begin{aligned} e_1'(s) &= \kappa(s) e_2(s), \\ e_2'(s) &= -\kappa(s) e_1(s). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $(e_1(s), e_2(s))$ eine Lösung dieses Gleichungssystems, $s \in I \subset \mathbb{R}$, zu vorgegebener stetiger Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für ein $s_0 \in I$ die Vektoren $e_1(s_0), e_2(s_0)$ ein positiv orientiertes

Orthonormalsystem bilden, so ist jede Stammfunktion $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ von e_1 , d. h. wenn $\alpha' = e_1$, eine nach der Bogenlänge s parametrisierte glatte zweimal stetig differenzierbare Kurve mit dem begleitenden Koordinatensystem (e_1, e_2) und der orientierten Krümmung κ .

Beweis. Die Gleichung $e_1' = \kappa e_2$ ist die definierende Gleichung für die signierte Krümmung κ . Mit $e_1 = (x', y')$ ist auch $e_2 = e_1^\perp = (-y', x')$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$e_2' = (e_1^\perp)' = (e_1')^\perp = (\kappa e_2)^\perp = \kappa (e_1^\perp)^\perp.$$

Nach Definition ist aber $(e_1^\perp)^\perp = -e_1$, woraus sich auch die zweite Differentialgleichung ergibt.

Es sei umgekehrt (e_1, e_2) eine Lösung des gegebenen Differentialgleichungs-Systems auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ sei eine Abbildung mit $\alpha' = e_1$. Wegen

$$\langle e_1, e_1 \rangle' = 2 \langle e_1, e_1' \rangle = 2 \kappa \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \langle e_2, e_2 \rangle' = -2 \kappa \langle e_1, e_2 \rangle$$

und

$$\langle e_1, e_2 \rangle' = \langle e_1', e_2 \rangle + \langle e_1, e_2' \rangle = \kappa \langle e_2, e_2 \rangle - \kappa \langle e_1, e_1 \rangle$$

erfüllen die drei Funktionen $h_{jk}(s) := \langle e_j(s), e_k(s) \rangle$ das System der folgenden drei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$h_{11}' = 2 \kappa h_{12}, \quad h_{22}' = -2 \kappa h_{12}, \quad h_{12}' = \kappa (h_{22} - h_{11})$$

mit den Anfangsbedingungen $h_{11}(s_0) = h_{22}(s_0) = 1$, $h_{12}(s_0) = 0$. Das gleiche System wird aber auch einschließlich der Anfangsbedingungen erfüllt durch die Funktionen $h_{11} = h_{22} \equiv 1$, $h_{12} \equiv 0$, so daß aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen solcher Differentialgleichungssysteme automatisch

$$\langle e_j(s), e_k(s) \rangle = \delta_{jk}$$

gilt. Insbesondere ist

$$|\alpha'| = |e_1| \equiv 1$$

und folglich die Kurve α nach der Bogenlänge parametrisiert. Aus Stetigkeitsgründen ist das Orthonormal-System $(e_1(s), e_2(s))$ für alle $s \in I$ positiv orientiert, und wegen $\alpha' = e_1$ und $e_1' = \kappa e_2$ ist per definitionem $\kappa(s)$ die signierte Krümmung der Kurve α an der Stelle $\alpha(s)$. \square

Bemerkungen. 1. Die Lage einer durch ihre Krümmungsfunktion definierte Kurve in der Ebene ist somit eindeutig bestimmt durch den „Anfangspunkt“ $\alpha(s_0)$ und die „Anfangslage“ des begleitenden (positiv orientierten) Koordinatensystems $e_1(s_0), e_2(s_0)$ und damit, wie oben schon vermerkt, bis auf eigentliche euklidische Bewegungen eindeutig festgelegt.

2. Im positiven Sinne durchlaufene Kreise mit dem Radius $R > 0$ besitzen die konstante (signierte) Krümmung $\kappa = 1/R$. Folglich ist auch umgekehrt jede Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa \neq 0$ ein Teilstück eines Kreises mit dem Radius $R = 1/|\kappa|$. Dies ist die noch fehlende Begründung für die Charakterisierung von Kreisen in Lemma 8. Selbstverständlich kann man diese Aussage auch direkt mit Satz 13 nachrechnen: Aus den Differentialgleichungen für das begleitende Koordinatensystem folgt bei konstantem κ sofort

$$e_1'' = -\kappa^2 e_1, \quad \text{also} \quad e_1 = e_1(s_0) \cdot e^{i\kappa(s-s_0)}$$

und damit

$$\alpha(s) = m_0 + \frac{e_1(s_0)}{i\kappa} e^{i\kappa(s-s_0)},$$

die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt m_0 und Radius $|e_1(s_0)|/|\kappa| = 1/|\kappa|$.

Eng verbunden mit dem Konzept der *Krümmung* ist der Begriff des *Berührkreises* oder *Schmiegekrees* an einen Punkt einer glatten ebenen \mathcal{C}^2 -Kurve: Gegeben sei ein Punkt $\alpha(s_0)$ einer glatten parametrisierten Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$; wir suchen dann einen Kreis in der Ebene, der mit der Spur von

α im Punkte $\alpha(s_0)$ möglichst *hohen Kontakt* hat. Bei geeigneter Parametrisierung β des Kreises mit $s \in I$ als Bogenlänge bedeutet dies:

$$\beta(s_0) = \alpha(s_0), \quad \beta'(s_0) = \alpha'(s_0) \quad \text{und} \quad \beta''(s_0) = \alpha''(s_0).$$

Setzen wir die Kreisgleichung in der Form

$$F(x, y) = |(x, y) - m_0|^2 - R^2 = 0$$

an und definieren wir die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f := F \circ \alpha$, so implizieren die ersten beiden Bedingungen wegen $F \circ \beta \equiv 0$ die folgenden Forderungen an die Funktion f :

$$\begin{aligned} f(s_0) &= F(\alpha(s_0)) = F(\beta(s_0)) = 0 \quad \text{und} \\ f'(s_0) &= ((DF)(\alpha(s_0)))\alpha'(s_0) = ((DF)(\beta(s_0)))\beta'(s_0) = (F \circ \beta)'(s_0) = 0. \end{aligned}$$

Mit dem entsprechenden Argument ergibt sich so auch die dritte Bestimmungsgleichung

$$f''(s_0) = 0.$$

Aus diesen drei Bedingungen kann man leicht die drei unbekannt reellen Größen $m_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ gewinnen. Als erstes ergibt sich sofort $|m_0| = R$, und wegen

$$(DF)(x, y) = 2(x - x_0, y - y_0)$$

ist notwendig $(\alpha(s_0) - m_0) \perp \alpha'(s_0)$. Um uns die weitere Rechnung zu vereinfachen, können wir nach Satz 13 ohne Einschränkung annehmen, daß $\alpha(s_0) = (0, 0)$, $\alpha'(s_0) = (1, 0)$ und damit $m_0 = (0, y_0)$ mit $y_0 \in \mathbb{R}$ und $|y_0| = R$. Es ist dann

$$f'(s) = 2[\alpha_1(s)\alpha_1'(s) + (\alpha_2(s) - y_0)\alpha_2'(s)]$$

Durch erneutes Differenzieren und Einsetzen der dritten Bedingungsgleichung erhält man hieraus

$$1 - y_0\alpha_2''(s_0) = \alpha_1(s_0)\alpha_1''(s_0) + \alpha_1'^2(s_0) + (\alpha_2(s_0) - y_0)\alpha_2''(s_0) + \alpha_2'^2(s_0) = 0.$$

Nun ist $\alpha'' = e_1' = \kappa e_2$ und daher $\alpha_2''(s_0) = \kappa(s_0)$ wegen $e_2(s_0) = (0, 1)$. Also läßt sich die Gleichung nach y_0 auflösen, sofern $\kappa(s_0) \neq 0$. - Wir fassen zusammen:

Satz 2.14 *Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine glatt parametrisierte C^2 -Kurve, und es sei $\kappa(t_0) \neq 0$ an einer Stelle $t_0 \in I$. Dann approximiert der Kreis mit Mittelpunkt*

$$\alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \frac{i\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|}$$

und Radius

$$\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$$

von allen Kreisen die Kurve α an der Stelle $\alpha(t_0)$ am besten.

Definition und Bemerkung. Der obige Kreis heißt der *Schmiegekreis* oder *Berührkreis* der ebenen Kurve α an der Stelle $\alpha(t_0)$.

Ist an einer Stelle $\kappa(t_0) = 0$, so sehen wir die dortige *Tangente* als „ausgearteten“ Schmiegekreis an.

Der Berührkreis und sein Mittelpunkt lassen sich geometrisch auf verschiedene Weisen charakterisieren. Aus der elementaren Geometrie ist bekannt, daß durch je drei paarweise verschiedene Punkte der Ebene genau ein Kreis (oder eine Gerade) geht. - Der folgende Satz ist ein Spezialfall einer allgemeineren Aussage für Raumkurven, die wir erst in dem nachfolgenden Kapitel beweisen.

Satz 2.15 Der Berührungskreis an der Stelle $\alpha(t_0)$ ist die Grenzlage bei $t_1, t_2 \rightarrow t_0$ der Kreise durch die Punkte $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \alpha(t_2)$ für je drei paarweise verschiedene Werte $t_0, t_1, t_2 \in I$.

Satz 2.16 Der Mittelpunkt des Schmiegekreeses an einer Stelle $\alpha(t_0)$ ist die Grenzlage der Schnittpunkte je zweier Normalen an den Stellen $\alpha(t)$ und $\alpha(t_0)$ bei $t \rightarrow t_0$.

Beweis. Es sei wieder ohne Einschränkung $t = s$ die Bogenlänge, $\alpha(t_0) = (0, 0)$, $\alpha'(t_0) = e_1 = (1, 0)$ und damit $e_2(t_0) = (0, 1) = e_2$. In einem Nachbarwert $t \neq t_0$ ist der Normalenvektor an die Kurve gleich $e_2(t) = i \alpha'(t)$, so daß der gesuchte Schnittpunkt der Normalen die Koordinaten $(0, S_t)$ besitzt mit

$$S_t = \alpha_2(t) + \sigma_t \alpha'_1(t),$$

wobei σ_t so zu bestimmen ist, daß $\alpha_1(t) - \sigma_t \alpha'_2(t) = 0$. Somit ist, $t \neq t_0$ nahe t_0 und $\kappa(t_0) \neq 0$ vorausgesetzt,

$$S_t = \alpha_2(t) + \alpha'_1(t) \frac{\alpha_1(t)}{\alpha'_2(t)}.$$

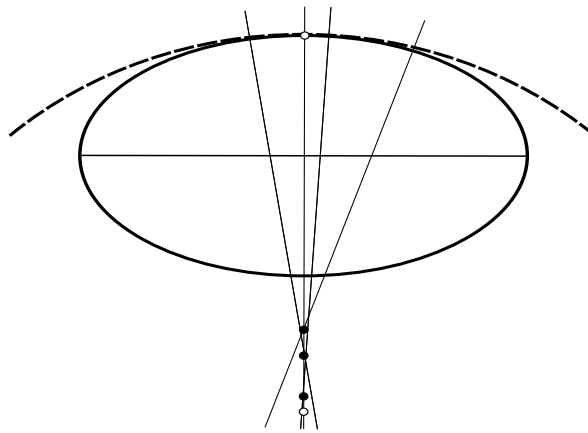
Wegen $\alpha''_2(t) = \kappa(t) \alpha'_1(t)$ und dem Satz von DE L'HOSPITAL ist aber

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha_1(t)}{\alpha'_2(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha'_1(t)}{\alpha''_2(t)} = \frac{1}{\kappa(t_0)}$$

und damit, wie erwartet und verlangt,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_t = \frac{1}{\kappa(t_0)}. \quad \square$$

Wir illustrieren den letzten Satz am Beispiel der Bestimmung des Schmiegekreeses an der „maximalen“ Stelle einer achsenparallelen Ellipse.



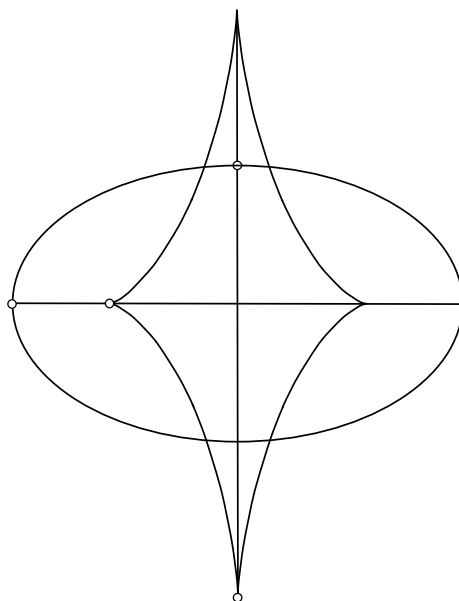
Figur 2.15

Es dürfte nun interessant sein, für eine beliebige glatte ebene Kurve die „Gesamtheit“ ihrer Berührungskreise, also insbesondere die „Kurve“ der Mittelpunkte dieser Kreise zu untersuchen.

Definition. Die *Evolute*⁶ einer glatten ebenen Kurve ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller ihrer Schmiegekreeses.

Die vollständige Evolute der oben behandelten Ellipse sieht wie folgt aus:

⁶ *curva evoluta* (lat.) = abgewickelte Linie.



Figur 2.16

Man sieht insbesondere, daß die Evolute einer glatten Kurve nicht notwendig glatt zu sein braucht. Im obigen Beispiel ist die Evolute eine sogenannte *Asteroide*, die genau 4 Singularitäten besitzt an den Stellen, wo die Krümmung der Ellipse extreme, also insbesondere stationäre Werte annimmt.

Bemerkungen und Definition. Die Verhältnisse in diesem Beispiel sind nicht zufällig. Die Evolute einer glatten \mathcal{C}^3 -Kurve besitzt stets an den Stellen, an denen die Krümmung der Kurve stationär wird, eine Singularität, und zwar genauer eine *Spitze* (auch „Rückkehrpunkt“ genannt).

Die Stellen, an denen die Krümmung einer glatten \mathcal{C}^3 -Kurve stationär wird, heißen in der klassischen Literatur auch *Scheitelpunkte* oder kurz *Scheitel* der Kurve.

Ein berühmter Satz der „globalen Kurventheorie“ besagt, daß jede geschlossene ebene Kurve mindestens 4 Scheitel besitzt („Vierscheitelsatz“; siehe Kapitel 4).

Zur analytischen Behandlung der Evolute einer gegebenen Kurve benötigen wir explizite Formeln. Diese lassen sich aufgrund der schon geleisteten Arbeit leicht aufstellen.

Satz 2.17 *Es sei $\alpha = \alpha(t)$, $t \in I$, eine beliebige glatte Parametrisierung einer \mathcal{C}^2 -Kurve mit $\kappa(t) \neq 0$. Dann ist*

$$\text{ev}_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \frac{i\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \alpha(t) + \frac{|\alpha'(t)|^2}{\langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle} i\alpha'(t)$$

eine Parametrisierung der Evolute von α .

Bei einer Parametertransformation h ist

$$\text{ev}_{\alpha \circ h} = \text{ev}_\alpha \circ h,$$

so daß die Evolute einer parametrisierten Kurve, wie zu erwarten, nur von ihrer Äquivalenzklasse abhängig ist.

Den (einfachen) *Beweis* überlassen wir dem Leser. □

Wir haben früher schon die *Evolvente* einer Kurve eingeführt. Diese steht zur Evolute in der gleichen Beziehung wie die Integration zur Differentiation bei Funktionen: *Die Evolute der Evolvente*

einer Kurve ist die Kurve selbst. Dies soll im folgenden nachgerechnet und an Beispielen exemplarisch verdeutlicht werden. - Wir wiederholen zunächst die Definition einer Evolvente.

Definition. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine nach der Bogenlänge $s \in I$ parametrisierte glatte Kurve. Dann heißt jede Kurve mit der Parametrisierung

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s), \quad c \in \mathbb{R} \text{ fest},$$

eine (Faden-) Evolvente von α .

Bemerkung. Ist speziell $I = [0, b]$ und $c = b$ (und zusätzlich vielleicht die Spur von α konvex), dann kann man sich einen Faden der Länge b auf die Spur von α gelegt denken, den man sukzessive von $\alpha(b)$ ausgehend in der tangentialen Richtung von der Spur abwickelt.

Von diesem Bild ausgehend ist zu erwarten, daß der Mittelpunkt des Krümmungskreises der Evolvente auf der ursprünglichen Kurve liegt. Es gilt tatsächlich der folgende

Satz 2.18 *Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine glatte, nach der Bogenlänge $s \in I$ parametrisierte Kurve und $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ die parametrisierte Evolvente, so gilt für die Krümmung von β :*

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\text{sign } \kappa_\alpha(s)}{|c - s|}, \quad s \in I \setminus \{c\}.$$

Für die Evolute ev_β der Evolvente β von α gilt $\text{ev}_\beta = \alpha$.

Bemerkung. Der letzte Teil des Satzes begründet die Bezeichnung *curva evoluta* (siehe Fußnote 6).

Beweis. Da die Evolvente im Allgemeinen nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, ist die Berechnung ihrer Krümmung etwas kompliziert, aber elementar. Aus $\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s)$ ergibt sich

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + (c - s)\alpha''(s) - \alpha'(s) = (c - s)\alpha''(s).$$

Da α selbst nach der Bogenlänge parametrisiert angenommen wird, ist weiter

$$\alpha''(s) = \kappa(s)(i\alpha'(s)) \quad \text{mit} \quad \kappa(s) = \kappa_\alpha(s)$$

und damit

$$\beta'(s) = (c - s)\kappa(s)(i\alpha'(s)).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= -\kappa(s)(i\alpha'(s)) + (c - s)\kappa'(s)(i\alpha'(s)) + (c - s)\kappa(s)(i\alpha''(s)) \\ &= (-\kappa(s) + (c - s)\kappa'(s))(i\alpha'(s)) - (c - s)\kappa^2(s)\alpha'(s). \end{aligned}$$

Da $i\beta'$ nach der obigen Formel ein Vielfaches von α' ist, gewinnt man hieraus

$$\langle \beta''(s), i\beta'(s) \rangle = \langle (c - s)\kappa^2(s)\alpha'(s), (c - s)\kappa(s)\alpha'(s) \rangle = (c - s)^2\kappa^3(s)$$

und schließlich

$$\kappa_\beta(s) = \frac{(c - s)^2\kappa^3(s)}{|(c - s)^3\kappa^3(s)|} = \frac{\text{sign } \kappa(s)}{|c - s|}.$$

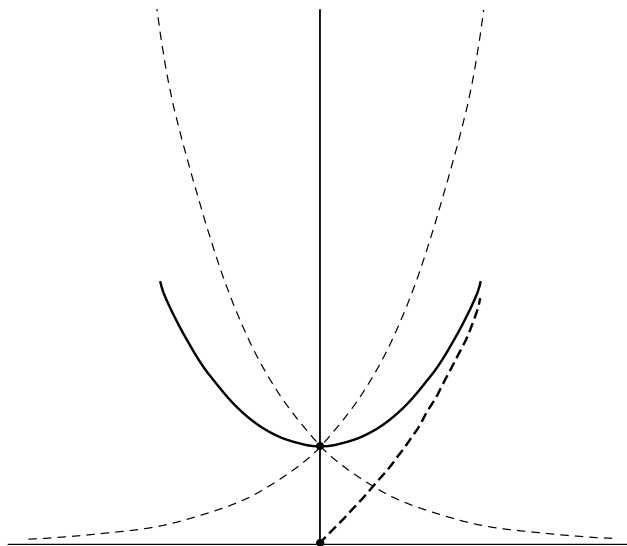
Ist γ die Parametrisierung der Evolute von β , also $\gamma(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa_\beta(s)} \frac{i\beta'(s)}{|\beta'(s)|}$, so liefert das soeben abgeleitete Ergebnis die zweite Behauptung:

$$\gamma(s) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s) - \frac{|c - s|}{\text{sign } \kappa(s)} \frac{(c - s)\kappa(s)\alpha'(s)}{|(c - s)\kappa(s)\alpha'(s)|} = \alpha(s). \quad \square$$

Beispiel. Die Traktrix ist (eine) Evolvente der *Kettenlinie*. [In der folgenden Skizze sind Teile der Graphen der Funktionen e^x , e^{-x} , der *Kettenlinie*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

und von $\sinh x$ eingezeichnet].



Figur 2.17

Dies läßt sich in der Tat sehr einfach nachrechnen. Wir machen uns das Leben etwas schwerer und berechnen umgekehrt die Evolvente der *Traktrix* mit der früher schon hergeleiteten Parametrisierung $\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$, $0 < t < \pi$. Es folgt

$$\alpha'(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t \right), \quad \alpha''(t) = \left(-\sin t, -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right).$$

Da hier t nicht die Bogenlänge ist, muß man die Gleichung der *Evolvente* für eine allgemeine glatte Parametrisierung α benutzen. Sie lautet, wie wir früher nachgewiesen haben,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle} (i\alpha'(t)).$$

Nach leichter Rechnung findet man

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \quad \text{und} \quad \langle \alpha''(t), i\alpha'(t) \rangle = 1 - \sin^2 t - \cos^2 t \left(1 + \frac{1}{\sin^2 t} \right) = -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

Damit ergibt sich für die Evolvente β der Traktrix:

$$\beta(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) - \left(\sin t - \frac{1}{\sin t}, \cos t \right) = \left(\frac{1}{\sin t}, \log \tan \frac{t}{2} \right).$$

Setzt man $x = \frac{1}{\sin t}$, $y = \log \tan \frac{t}{2}$, so erhält man

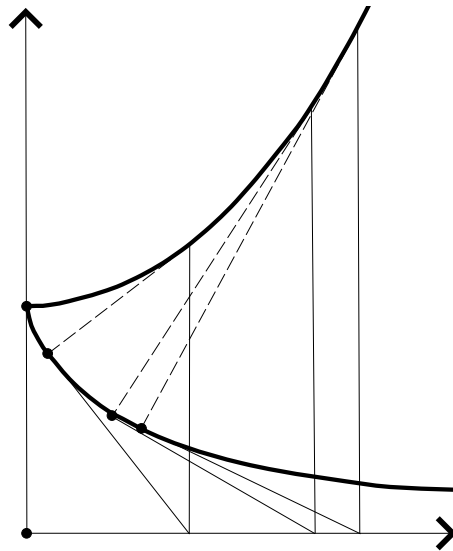
$$e^y + e^{-y} = \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{2}{\sin t} = 2x,$$

also

$$x = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) = \cosh y.$$

□

Mit anderen Worten: Die Evolute der Traktrix ist die Kettenlinie.



Figur 2.18

Als weiteres *Beispiel* wollen wir uns noch einmal die *Zykloide* hernehmen und mit Hilfe ihrer Evoluteigenschaft nachweisen, daß sie nicht nur die *Tautochrone*, sondern auch die *Brachistochrone* ist, also die Kurve „schnellsten Rutschens“. Wegen Lemma 1 und Satz 18 ist die Zykloide ihre eigene Evolute. Dies bedeutet in Figur 9, daß die Verbindungsstrecke von der „oberen“ Zykloide zu der „unteren“ entlang einer Tangente, also der Krümmungsradius der unteren Zykloide, von der x -Achse halbiert wird, eine Eigenschaft, die tatsächlich *charakteristisch* für die Zykloide ist.

Wir werden zeigen, daß für jede beliebige andere Kurve der Weg zwischen zwei Punkten auf „infinitesimal benachbarten“ Krümmungsradien mehr Zeit beansprucht als die Zykloide (siehe BRIESKORN - KNÖRRER, pp. 35–36). Dazu vergleichen wir die infinitesimalen Zeiten dt und $d\tau$ für den Weg von P nach P' bzw. Q nach Q' . Die Geschwindigkeit eines Massepunktes in P ist $\sqrt{2gp} \sin \alpha$ und $\sqrt{2gq} \sin \alpha$, wenn α den Winkel zwischen der x -Achse und dem Krümmungsradius und $p = PM = MO$, $q = QM$ bezeichnet. Für die zu durchlaufenden Distanzen gilt

$$PP' = 2p d\alpha \quad \text{und} \quad QQ' = QQ' \cos \varphi = (q + p) d\alpha.$$

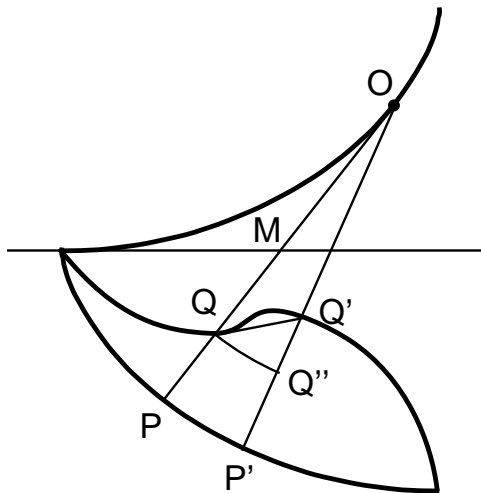
Also ist

$$dt = \frac{2p d\alpha}{\sqrt{2gp} \sin \alpha} \quad \text{und} \quad d\tau = \frac{(q + p) d\alpha}{\sqrt{2gq} \sin \alpha \cdot \cos \varphi}$$

mit dem Winkel $\varphi = \angle Q'QQ''$. Nun ist aber

$$\frac{q+p}{\sqrt{q}} = \frac{(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2}{\sqrt{q}} + 2\sqrt{p} \geq 2\sqrt{p},$$

also $d\tau \geq dt$, und Gleichheit gilt nur, wenn $\sqrt{q} - \sqrt{p} = 0$, d. h. wenn $p = q$ und damit $P = Q$.



Figur 2.19

Das *Brachistochronen-Problem* ist historisch gesehen der Auslöser für die Entwicklung der *Variationsrechnung* gewesen. Es ist daher mehr als angemessen, daß wir dieses Kapitel mit einigen Anwendungen der Variationsrechnung auf die Bestimmung ebener Kurven beschließen.

In der einfachsten Form sucht man in der Variationsrechnung unter allen (zweimal stetig) differenzierbaren Kurven

$$\alpha : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit fest vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ eine Kurve, für die das *Wirkungsintegral*

$$\int_a^b L(t, \alpha(t), \alpha'(t)) dt$$

stationär wird. Hierbei ist $L = L(t, q, p)$, die sogenannte *LAGRANGE-Funktion*, zweimal stetig differenzierbar in den Variablen $t \in I$, $q, p \in \mathbb{R}^n$. Man nennt die Komponenten q_j von q verallgemeinerte *Ortskoordinaten* und entsprechend die p_j verallgemeinerte *Geschwindigkeiten* oder besser *Impulse*. - Die Variationsrechnung liefert nun eine notwendige Bedingung für eine Lösung α dieses Problems in Form eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Komponenten der unbekanntenen Abbildung α .

Satz 2.19 (EULER - LAGRANGE) Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stationäre Lösung des Wirkungsintegrals zu der Lagrange-Funktion $L(t, p, q)$, so sind notwendig die folgenden Differentialgleichungen erfüllt :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

oder in Kurzform :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

Beispiel (Gerade als kürzeste Verbindung im euklidischen Raum). Hier ist die Lagrange-Funktion zu wählen als

$$L(t, q, p) = \left(\sum_{j=1}^n p_j^2 \right)^{1/2},$$

(und wir müssen uns auf *glatte* Lösungen beschränken, da sonst L auf einer Kurve Null werden und damit die Differenzierbarkeitsbedingung verloren gehen kann - Wir wollen nicht weiter diskutieren, warum der Satz von Euler-Lagrange auch unter dieser Voraussetzung noch Bestand hat). Auf jeden Fall ist dann

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial p_j} = \frac{p_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n p_j^2}}.$$

Die Differentialgleichungen lauten damit

$$\frac{d}{dt} \frac{\alpha'_j(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k'^2}} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\alpha'_j(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k'^2}} = \text{const.} =: c_j.$$

Der Vektor $c := (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ hat dann notwendig die Länge 1, und es ist

$$\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| \cdot c \quad \text{und} \quad c = \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}.$$

Hieraus deduziert man sofort, daß α die übliche Parametrisierung der Strecke von x_0 nach x_1 sein muß.

Bemerkungen. 1. Diese (verkürzte) Diskussion ist insofern „Literatur-typisch“, als sie sich über die eigentlichen Voraussetzungen des Satzes von Euler-Lagrange hinwegsetzt und nicht weiter nachprüft, inwiefern die gefundene Strecke nun tatsächlich eine Lösung des betrachteten Problems ist.

2. Selbstverständlich kann man den behaupteten Sachverhalt leicht elementar-analytisch/geometrisch begründen: Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{E}^n$ der Länge 1 folgt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\langle x_1 - x_0, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt$$

wegen $\langle \alpha(t), v \rangle' = \langle \alpha'(t), v \rangle$ und $\alpha(a) = x_0$, $\alpha(b) = x_1$. Als Konsequenz aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gewinnt man ferner die Ungleichung

$$\langle \alpha'(t), v \rangle \leq \|\alpha'(t)\| \cdot \|v\| = \|\alpha'(t)\|$$

und damit

$$\int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Setzt man jetzt noch

$$v := \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|},$$

so folgt

$$\|x_1 - x_0\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Beachtet man, daß $\|x_1 - x_0\|$ die Länge der Strecke von x_0 nach x_1 darstellt und $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ die Länge der Kurve α ist, so können wir also festhalten:

Die *Strecke* von x_0 nach x_1 ist eine *kürzeste* Verbindung unter allen stetig differenzierbar parametrisierten Kurven von x_0 nach x_1 .

Daß sie die kürzeste Verbindung ist, folgt erst mit dem folgenden Zusatzargument: Jede andere Kurve muß einen Punkt x_2 enthalten, der nicht auf der Verbindungsstrecke von x_0 nach x_1 liegt. Damit ist die Länge dieser Kurve gleich der Summe der beiden Teilbögen von x_0 nach x_2 und von x_2 nach x_1 , also nach dem vorher Bewiesenen größer oder gleich

$$\|x_0 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| > \|x_1 - x_0\|.$$

3. Die Strecke ist selbstverständlich auch die kürzeste Verbindung, wenn man zur Konkurrenz sogar alle *rektifizierbaren* Kurven zwischen x_0 und x_1 zuläßt.

Beispiel (Kettenlinie). In dieser Aufgabenstellung geht es darum, für einen endlichen Kurvenbogen $y = f(x)$, $x \in I$, fest vorgegebener Länge ℓ die y -Koordinate des *Schwerpunkts*, also das Wirkungsintegral S zu der Lagrange-Funktion

$$L = L(q, p) := q\sqrt{1 + p^2}$$

mit $t = x$, $q = y = f(x)$, $p = f'(x)$, unter der *Nebenbedingung*

$$\int_a^b \sqrt{1 + p^2(x)} dx = \ell$$

zu minimieren. Bei solchen Variationsproblemen zu einer Lagrange-Funktion L mit einer Nebenbedingung, die ebenfalls durch ein Wirkungsintegral zu einer Lagrange-Funktion L_0 ausgedrückt werden kann, hat man bekanntlich eine „verallgemeinerte“ Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} := L - \lambda L_0$$

mit einem noch zu bestimmenden sogenannten EULERSchen *Multiplikator* λ anzusetzen, für diese die Euler-Lagrange-Gleichungen bei unbestimmtem λ zu lösen und dann λ so zu bestimmen, daß die Nebenbedingung erfüllt wird.

In unserem konkreten Beispiel der *Kettenlinie* ist also

$$\tilde{L} = (q - \lambda)\sqrt{1 + p^2}.$$

Da \tilde{L} nicht explizit von der Variablen x abhängt, sieht man wie im Beweis des *Energieerhaltungssatzes* (siehe z. B. *Analysis II*, Anhang zu Kapitel 21), daß

$$\frac{d}{dx} \left(\tilde{L} - p \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{L} - p \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} = \text{const.}$$

Auf der anderen Seite ist

$$p \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} = \frac{(q - \lambda)p^2}{\sqrt{1 + p^2}},$$

so daß wir als notwendige Bedingung für eine Lösung $y = f(x)$ dieses Variationsproblems die Differentialgleichung

$$y - \lambda = C\sqrt{1 + y'^2}$$

erhalten. Da der Multiplikator λ den Graphen der Lösung nur in y -Richtung verschiebt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 0$ setzen. Ferner dürfen wir den trivialen Fall $C = 0$ ausschließen und finden die explizite Form

$$(Cy)'^2 = y^2 - C^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \frac{dx}{C}.$$

Eine Stammfunktion der linken Seite in der rechten Identität ist $\ln(y + \sqrt{y^2 - C^2})$, so daß hieraus nach Exponieren die Beziehung

$$y + \sqrt{y^2 - C^2} = D \exp(x/C), \quad D > 0,$$

folgt. Nach Quadrieren und erneutem Einsetzen dieser Formel ergibt sich

$$2y = (D \exp(2x/C) + C^2/D) \exp(-x/C).$$

Nimmt man jetzt $C > 0$ an (der negative Fall führt zu keinem sinnvollen Ergebnis) und wählt man $a \in \mathbb{R}$ so, daß $C/D = \exp(x_0/C)$, so führt dies endlich zu

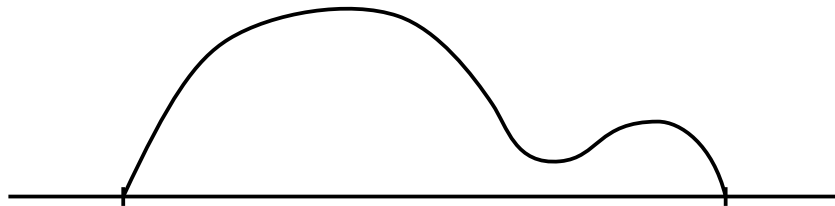
$$y = C \cosh((x - x_0)/C),$$

also tatsächlich zu der Gleichung einer (verschobenen) *Kettenlinie*.

Beispiel (Isoperimetrisches Problem). Dieses Problem, auch Problem der DIDO genannt, sucht unter allen einfach geschlossenen Kurven in der Ebene von gegebener Länge ℓ diejenige, die den größten Flächeninhalt umschließt (siehe dazu auch Kapitel 4). Der sagenhaften Entstehungsgeschichte KARTHAGOS entspricht mehr die folgende Variante: Unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f: I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b) = 0$ und festgelegter Bogenlänge ℓ bestimme man diejenige, für die der Flächeninhalt

$$\int_a^b f(x) dx$$

maximal ist.



Figur 2.20

Hier ist also $t = q = x$ und $L = L(x) = q$. Wir müssen also die Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = q - \lambda \sqrt{1 + p^2}$$

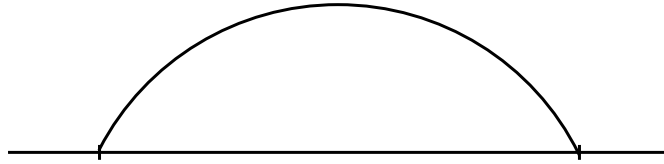
betrachten. Dies führt dann zu der Differentialgleichung

$$1 - \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = 0$$

und (bei $\lambda \neq 0$) zu

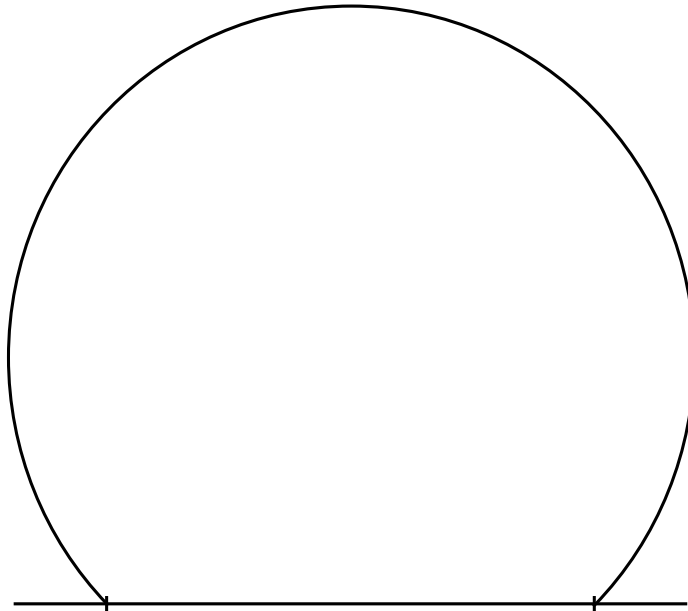
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2}} \right) = \lambda^{-1}.$$

Dies bedeutet aber, daß die Krümmung der Funktion f konstant sein, ihr Graph also Teil eines Kreises sein muß.



Figur 2.21

Bemerkung. Das Problem hat keine Lösung, wenn die vorgegebene Länge ℓ kleiner als der Abstand $b - a$ ist. Aber auch, wenn ℓ zu groß ist, gibt es keine Lösung im Raum der *Funktionen*, die wir oben ausgewählt hatten, denn dann sollte eine Lösung wie folgt aussehen:



Figur 2.22

Man kann das Argument aber derart verfeinern, daß es auch in dieser Situation noch verwendbar ist.

3 Die allgemeinen Frenetschen Formeln und die Theorie der Raumkurven

Ist die glatte, 2-mal stetig differenzierbare Kurve $x = x(s) = \alpha(s) \in \mathbb{E}^n$ nach der Bogenlänge s parametrisiert, so folgt nach Differentiation der Identität

$$\langle x', x' \rangle = \|x'\|^2 = 1$$

nach s :

$$0 = \langle x', x' \rangle' = 2 \langle x', x'' \rangle.$$

Also ist $\langle x', x'' \rangle = 0$, d. h. der Vektor x'' steht senkrecht auf dem Tangentialvektor x' : $x'' \perp x'$.

Man kann also die zweite Ableitung $x''(s)$ deuten als die *Änderungsgeschwindigkeit* $e_1'(s)$ des *Tangenteneinheitsvektors* $e_1 := x'$ bei Durchlaufung der Kurve mit *gleichförmiger Bahngeschwindigkeit* $t = s$. Ist diese Änderung groß, so ändert also die Kurve ihre Richtung stark und umgekehrt. - Dies alles haben wir schon in Kapitel 2 eingesehen (siehe Satz 2.6). Wir wiederholen hier die dort gegebene

Definition. Man nennt die nicht negative Größe

$$\kappa(s) := \|x''(s)\|$$

die (*absolute*) *Krümmung* der Kurve $x : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ im Punkte $x(s)$, $s \in I$.

Bemerkung. Die absolute Krümmung ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geradlinigen Verlauf, da $\kappa(s) \equiv 0$ äquivalent zu $x''(s) \equiv 0$ und damit kennzeichnend für die Geraden ist (siehe Lemma 2.8).

Es ist wünschenswert, auch für eine beliebige glatte Parametrisierung $x(t) = \alpha(t)$ im Besitz einer Formel für die absolute Krümmung $\kappa_\alpha(t)$ zu sein (siehe auch den ebenen Fall in Satz 2.10 und den dortigen Beweis). Im Allgemeinfall ist $\alpha = \bar{\alpha} \circ h$, wobei $\bar{\alpha}$ die Parametrisierung nach Bogenlänge bezeichnet und $s = h(t)$ eine glatte Umparametrisierung ist, d. h. insbesondere, daß überall $h' > 0$ oder $h' < 0$ gilt. Es folgt dann aus der Kettenregel und der Produktregel:

$$\alpha' = (\bar{\alpha} \circ h)' = (\bar{\alpha}' \circ h) \cdot h' \quad \text{und} \quad \alpha'' = (\bar{\alpha}'' \circ h) \cdot h'^2 + (\bar{\alpha}' \circ h) \cdot h'',$$

woraus sich wegen der Beziehungen $\|\bar{\alpha}'\| = 1$ und $\bar{\alpha}' \perp \bar{\alpha}''$ neben $\|\alpha'\|^2 = h'^2$ sofort die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = h'(t) h''(t) \quad \text{und} \quad \|\alpha''(t)\|^2 = h'^4(t) \cdot \kappa_{\bar{\alpha}}^2(h(t)) + h''^2(t).$$

Es folgt

$$(\kappa \circ h)^2(t) = \frac{\|\alpha''(t)\|^2 - h''^2(t)}{h'^4(t)} = \frac{\|\alpha''(t)\|^2 - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle^2}{\|\alpha'(t)\|^2}}{\|\alpha'(t)\|^4}$$

und damit das folgende Ergebnis, das bei Parametrisierung nach der Bogenlänge mit unserer Definition offenbar übereinstimmt. (Man beachte, daß man wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die reelle Wurzel aus der rechten Seite ziehen kann).

Lemma 3.1 *Bei einer beliebigen glatten Parametrisierung $\alpha = \alpha(t)$ einer Kurve in \mathbb{E}^n gilt für die absolute Krümmung $\kappa = \kappa_\alpha(t)$ an der Stelle $\alpha(t)$:*

$$\kappa^2 = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \cdot \|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{\|\alpha'(t)\|^6}.$$

Setzen wir zusätzlich $x'' \neq 0$ voraus, so kann man wegen $x' \neq 0$ die Einheitsvektoren

$$e_1 = x' , \quad e_2 = \frac{x''}{\|x''\|}$$

definieren und dieses Vektorpaar – zumindest im dreidimensionalen Raum – zu einem *positiv orientierten, orthonormierten Dreibein* durch

$$e_3 = e_1 \times e_2 , \quad \text{also} \quad e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s) ,$$

ergänzen. Es gilt also an jeder Stelle s :

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, 2, 3 .$$

Die Vektoren $e_2(s)$ und $e_3(s)$ stehen insbesondere senkrecht auf der *Tangentenrichtung* der Kurve im Punkte $x(s)$, deren Einheitsvektor $e_1(s)$ ist. Die $e_i(s)$ heißen auch die *Einheitsvektoren der Tangente* ($i = 1$), der *Hauptnormale* ($i = 2$) bzw. der *Binormale* ($i = 3$). Im Kurvenpunkt $x(s)$ angetragen heißen sie das *begleitende Koordinatensystem* oder das *begleitende Dreibein* der Kurve.

Bemerkungen. 1. Das begleitende Dreibein ist nur definiert in den Kurvenpunkten mit $x''(s) \neq 0$. Nach Definition gilt im Falle einer glatten, nach Bogenlänge parametrisierten Kurve stets

$$e_1' = x'' = \|x''\| e_2 = \kappa e_2 .$$

2. Verschwindet der Vektor x'' nur in diskreten Kurvenpunkten, so beschränken wir uns bei den weiteren Untersuchungen auf die dazwischen liegenden Kurvenstücke.

Für eine *ebene Kurve* haben wir als „natürlichen“ Parameter (neben der Bogenlänge s) die *orientierte Krümmung* eingeführt. Diese reicht als Funktion von s zur Festlegung der Kurve (bis auf euklidische Bewegungen). Bei *Raumkurven* können wir uns ihr Entstehen so vorstellen, daß man erst einen Draht in der Ebene geeignet biegt und dann jeweils in Kurvenrichtung „verdreh“.

Um diese „Drehgröße“ definieren zu können, beweisen wir, daß auch die Vektoren e_3' und e_2 linear abhängig sind: Es ist nach Voraussetzung $\langle e_3, e_3 \rangle = 1$, und daraus folgt wie oben $\langle e_3', e_3 \rangle = 0$. Differenziert man außerdem die Beziehung $\langle e_3, e_1 \rangle = 0$, so folgt:

$$0 = \langle e_3, e_1' \rangle + \langle e_3', e_1 \rangle = \langle e_3, \kappa e_2 \rangle + \langle e_3', e_1 \rangle = \langle e_3', e_1 \rangle .$$

Da die $(e_i)_{i=1,2,3}$ linear unabhängig sind, existieren Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$e_3' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 .$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit e_1 bzw. e_3 , so folgt natürlich $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Daraus ergibt sich, wie behauptet

$$e_3' = \lambda_2 e_2 .$$

Definition und Bemerkungen. Man definiert $\tau := -\lambda_2$ und nennt $\tau = \tau(s)$ die *Torsion* (oder auch *Windung*) der Kurve im Punkte $x(s)$. Nach Definition gilt also:

$$e_3' = -\tau e_2 .$$

Eine Interpretation der Torsion gewinnt man somit aus dem Umstand, daß der Vektor e_3 senkrecht auf der Ebene steht, die von e_1 und e_2 , also auch von x' und x'' aufgespannt wird. Nach der vorigen Formel dreht sich diese Ebene entlang der e_1 -Achse in Richtung $-e_2$, wenn τ positiv ist. Mit anderen Worten, diese Ebene dreht sich im Uhrzeigersinn, wenn τ positiv ist („rechtsgewundene“ oder „weinandige“ Kurve), und entgegen dem Uhrzeigersinn („linksgewundene“ oder „hopfenwendige“ Kurve), wenn τ negativ ist.

Warnung. Man beachte, daß viele Autoren die Größe λ_2 selbst als Torsion bezeichnen, also das andere Vorzeichen wählen.

Bemerkung. Die Torsion ist auch ein Maß für die Abweichung der Kurve vom ebenen Verlauf; denn $\tau(s) \equiv 0$ ist kennzeichnend für glatte ebene Kurven mit $x'' \neq 0$:

a) Ist $\tau(s) \equiv 0$, dann folgt $e_3'(s) = -\tau(s)e_2(s) \equiv 0$, so daß $e_3 = c = \text{const.}$ Es ist dann

$$\langle x, c \rangle' = \langle x', c \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0.$$

Daraus ergibt sich $\langle x, c \rangle \equiv d$. Sei $x_0 := d \cdot c$, dann folgt

$$\langle x - x_0, c \rangle = \langle x, c \rangle - \langle x_0, c \rangle = \langle x, c \rangle - d \cdot \|c\|^2 = \langle x, c \rangle - d = 0.$$

Also liegt $x = x(s)$ in der Ebene $\langle y - x_0, c \rangle = 0$.

b) Es liege umgekehrt $x = x(s)$ in der Ebene $\langle y - x_0, c \rangle = 0$. Dann folgt sofort $\langle x, c \rangle = \langle x_0, c \rangle$ und daraus durch Differentiation $0 = \langle x, c \rangle' = \langle x', c \rangle = \langle e_1, c \rangle$, und wegen $0 = \langle x', c \rangle' = \langle x'', c \rangle = \kappa \langle e_2, c \rangle$ ergibt sich $\langle e_2, c \rangle = 0$ mit $\kappa \neq 0$, so daß $c = \lambda e_3$ sein muß und damit $e_3 = \text{const.}$ Aus $0 = e_3' = -\tau e_2$, $e_2 \neq 0$, ergibt sich schließlich $\tau(s) \equiv 0$.

Bemerkung. Der Hauptsatz der Kurventheorie, den wir im Anhang für Kurven in \mathbb{E}^n beweisen werden, enthält die Aussage, daß Raumkurven (bis auf euklidische Bewegungen) völlig bestimmt sind durch die absolute Krümmung und die Torsion als Funktion der Bogenlänge s .

Wir wollen schließlich auch noch e_2' als Linearkombination des begleitenden Dreibeins $(e_i)_{i=1,2,3}$ darstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned} e_2' &= (e_3 \times e_1)' = e_3' \times e_1 + e_3 \times e_1' \\ &= -\tau e_2 \times e_1 + e_3 \times (\kappa e_2) = -\tau e_2 \times e_1 + \kappa e_3 \times e_2 \\ &= -\kappa e_1 + \tau e_3. \end{aligned}$$

Satz 3.2 (Frenetsche Formeln) Für das begleitende Dreibein $(e_i)_{i=1,2,3}$ einer glatten Raumkurve $x = x(s)$ mit nicht verschwindender zweiter Ableitung bestehen die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} e_1' &= \kappa e_2 \\ e_2' &= -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e_3' &= -\tau e_2 \end{aligned}.$$

Bemerkung. Dies sind die sogenannten FRENETSchen *Formeln*. Sie beherrschen die gesamte Theorie der Raumkurven. Man beachte die formale Analogie zu den Formeln in Satz 2.13 für den Fall der ebenen Kurven.

Beweis. Wir wollen noch eine andere Herleitung dieser Formeln geben, die sich fast wörtlich auf den Fall beliebiger Kurven $x : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ übertragen läßt. Wegen der linearen Unabhängigkeit der e_j muß gelten:

$$e_k' = \sum_{j=1}^3 a_{kj} e_j, \quad k = 1, 2, 3.$$

Durch skalare Multiplikation mit e_i folgt:

$$\langle e_k', e_i \rangle = \sum_{j=1}^3 a_{kj} \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^3 a_{kj} \delta_{ji} = a_{ki}.$$

Aus $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$ folgt weiter

$$0 = \langle e_i, e_k \rangle' = \langle e_i', e_k \rangle + \langle e_i, e_k' \rangle = a_{ik} + a_{ki}.$$

Dies bedeutet, daß die Matrix der a_{ik} *schiefsymmetrisch* ist; insbesondere ist $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Da nach Konstruktion auch $a_{13} = 0$ sein muß, ergeben sich die FRENETSchen Formeln erneut mit $a_{12} = -a_{21} =: \kappa$, $a_{23} = -a_{32} =: \tau$. \square

Ebenso, wie sich die absolute Krümmung $\kappa(s)$ durch die zweite Ableitung von $x(s)$ ausdrücken läßt (bzw. durch die Ableitungen von erster und zweiter Ordnung, wenn wir nicht nach der Bogenlänge parametrisieren), kann auch die Torsion mit einer einfachen Formel aus den Ableitungen erster bis dritter Ordnung berechnet werden.

Satz 3.3 Wird die Raumkurve $x : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ nach der Bogenlänge s parametrisiert, so gilt für die Torsion :

$$\tau = \frac{\det(x', x'', x''')}{\|x''\|^2} = \frac{\langle x' \times x'', x''' \rangle}{\|x''\|^2}.$$

Bei einer beliebig glatt parametrisierten Raumkurve $x = \alpha(t)$ kann die Torsion berechnet werden vermöge der Gleichung

$$\tau = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

Beweis. Mit den Frenetschen Gleichungen ist

$$0 = \langle e_2, e_3 \rangle' = \langle e_2', e_3 \rangle + \langle e_2, e_3' \rangle = \langle e_2', e_3 \rangle - \tau.$$

Daraus folgt mit

$$e_2' = \left(\frac{x''}{\|x''\|} \right)' = \frac{\|x''\| x''' - \|x''\|' x''}{\|x''\|^2} \quad \text{und} \quad e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{x' \times x''}{\|x''\|}$$

sofort

$$\tau = \left\langle \frac{x'''}{\|x''\|}, \frac{x' \times x''}{\|x''\|} \right\rangle = \frac{\langle x' \times x'', x''' \rangle}{\|x''\|^2}.$$

Es sei weiter $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(s)$ die Parametrisierung der Kurve nach Bogenlänge, und $\alpha := \bar{\alpha} \circ h$ sei eine beliebige glatte Parametrisierung, insbesondere also $h'(t) > 0$ für alle $t \in I$. Es ist dann leicht nachzurechnen, daß an jeder Stelle $t \in I$ für alle $k \geq 1$ die Äquivalenz

$$\alpha^{(k)} \equiv (\bar{\alpha}^{(k)} \circ h) (h')^k$$

gilt modulo dem Untervektorraum, der von den Ableitungen $\bar{\alpha}', \bar{\alpha}'', \dots, \bar{\alpha}^{(k-1)}$ erzeugt wird (siehe auch weiter unten). Daraus folgt unmittelbar

$$\langle \bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}'', \bar{\alpha}''' \rangle \circ h = \det(\bar{\alpha}', \bar{\alpha}'', \bar{\alpha}''') \circ h = (h')^6 \det(\alpha', \alpha'', \alpha''')$$

und entsprechend

$$(\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}'') \circ h = (h')^3 (\alpha' \times \alpha''),$$

woraus sofort mit dem ersten Teil die Behauptung folgt, da $\|\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}''\| = \|\bar{\alpha}''\|$. \square

Beispiel. Wir wollen für das Beispiel der *Schraubenlinie* die Krümmung und Torsion berechnen: Die Schraubenlinie wird in der Bogenlänge gegeben durch die Parametrisierung

$$x_1 = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_2 = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_3 = \frac{b s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Daraus folgt z. B.

$$x_1'' = \frac{-a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_2'' = \frac{-a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_3'' = 0$$

und

$$\kappa = \|x''\| = (x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2)^{1/2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\det(x', x'', x''')}{\|x''\|^2} \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \det \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}^3} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}^3} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}^5} = \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Die Schraubenlinie besitzt also die Eigenschaft, daß ihre Krümmung und Torsion konstant sind.

Bemerkung. Die FRENETSchen Formeln lassen sich offensichtlich auch in der folgenden Form schreiben:

$$e_i' = (\tau e_1 + \kappa e_3) \times e_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mit dem sogenannten DARBOUTSche Vektor

$$\delta = \tau e_1 + \kappa e_3$$

gewinnt man dann eine *kinematische Deutung* der Frenetschen Gleichungen: Durchläuft ein Punkt $x(s)$ die Kurve mit dem Zeitparameter s , so bewegt sich das Dreiein e_1, e_2, e_3 nach den Frenetschen Formeln. Diese Bewegung läßt sich als momentane Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\delta = \tau e_1 + \kappa e_3$ auffassen. Die Richtung des Vektors δ gibt die momentane Drehachse an (mit dem Anteil τe_1 in *Tangentialrichtung*), seine Länge $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ die skalare Winkelgeschwindigkeit.

Bevor wir uns weiteren konkreten Untersuchungen des lokalen Verlaufs einer *Raumkurve* zuwenden, fragen wir, unter welchen Umständen man das obige Konstruktionsverfahren auf die Existenz eines *begleitenden n -Beins* bei Kurven im \mathbb{E}^n ausdehnen kann. - Dazu scheint die folgende Definition die richtige Verallgemeinerung zu sein.

Definition. Wir nennen eine parametrisierte Kurve $\alpha : I \rightarrow E^n$ *voll regulär* oder auch eine *FRENET-Kurve*, wenn sie n -mal stetig differenzierbar ist und wenn für jedes $t \in I$ die $(n - 1)$ Vektoren

$$v_1(t) = \alpha'(t), v_2(t) = \alpha''(t), \dots, v_{n-1}(t) = \alpha^{(n-1)}(t)$$

linear unabhängig sind.

Bemerkung. Voll reguläre Kurven sind automatisch *glatt*. Für *ebene Kurven* stimmen insbesondere beide Konzepte überein. Eine nach Bogenlänge parametrisierte glatte Raumkurve ist genau dann voll regulär, wenn ihre Krümmung nirgends verschwindet.

Wir wollen zeigen, daß der Begriff einer parametrisierten Frenet-Kurve von der (glatten) Parametrisierung unabhängig ist. - Dazu beweisen wir das weiter oben schon zur Berechnung der Torsion verwendete Lemma.

Lemma 3.4 *Es seien α und $\tilde{\alpha} := \alpha \circ h$ glatte, ℓ -mal stetig differenzierbare Parametrisierung einer Kurve in \mathbb{E}^n , insbesondere also $h'(t) > 0$ oder < 0 für alle $t \in I$. Dann gilt an jeder Stelle $t \in I$ und für alle k mit $1 \leq k \leq \ell$ die Äquivalenz*

$$\tilde{\alpha}^{(k)} \equiv (\alpha^{(k)} \circ h) (h')^k$$

modulo dem Untervektorraum, der von den Ableitungen $\alpha' \circ h, \alpha'' \circ h, \dots, \alpha^{(k-1)} \circ h$ erzeugt wird.

Beweis. Wir führen Induktion nach k . Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig wegen $\tilde{\alpha}' = (\alpha' \circ h) h'$. Ist dann die Aussage für ein beliebiges k schon bewiesen, also

$$\tilde{\alpha}^{(k)} = (\alpha^{(k)} \circ h) (h')^k + \lambda_1 (\alpha' \circ h) + \dots + \lambda_{k-1} (\alpha^{(k-1)} \circ h)$$

mit (nach erweiterter Induktionsvoraussetzung) hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, so ergibt sich die Behauptung nach erneutem Differenzieren mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel. \square

Folgerung 3.5 *Volle Regularität einer parametrisierten Kurve ist von der glatten Parametrisierung unabhängig. Genauer gilt: Ist $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ und $\tilde{v}_j = \tilde{\alpha}^{(j)}$, $v_j = \alpha^{(j)}$, $j = 1, \dots, n-1$, so gilt*

$$\text{span}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k) \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n-1.$$

Ist h' positiv, so sind diese Basen sogar jeweils gleich orientiert.

Beweis. Nach dem zuvor bewiesenen Lemma ist die Darstellungsmatrix der Vektoren $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ in der Basis v_1, \dots, v_k eine obere Dreiecksmatrix mit den Potenzen von h' in der Hauptdiagonalen. \square

Satz 3.6 *Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine voll regulär parametrisierte C^n -Kurve. Dann gibt es eindeutig bestimmte $(n-j)$ -mal stetig differenzierbare Vektorfelder*

$$e_j : I \longrightarrow E^n, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

mit

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}, \quad \text{span}(e_1(s), \dots, e_k(s)) = \text{span}(v_1(s), \dots, v_k(s))$$

für $1 \leq k \leq n-1$. Die Basen sind für alle k gleich orientiert.

Definition und Bemerkung. Mit den Vektorfeldern e_1, \dots, e_{n-1} bildet man

$$e_n := e_1 \times \dots \times e_{n-1}.$$

Das System (e_1, \dots, e_n) ist dann für alle $t \in I$ eine positiv orientierte *Orthonormal-Basis* von \mathbb{E}^n . Man beachte, daß auch e_n zumindest noch einmal stetig differenzierbar ist. Man nennt (e_1, \dots, e_n) wieder das *begleitende Koordinatensystem* oder auch das *FRENETSche n -Bein* der gegebenen Frenet-Kurve. Es ist notwendig $e_1 = \alpha'$, wenn die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist, und dann ist $e_2 = \kappa^{-1} \alpha'' = \kappa_1^{-1} e_1'$, also $e_1' = \kappa_1 e_2$, $\kappa_1 = \|\alpha''\| > 0$.

Beweis von Satz 6. Nach der obigen Folgerung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Kurve durch die Bogenlänge s parametrisiert ist. Wie in der vorigen Bemerkung festgehalten, haben wir dann keine andere Wahl, als $e_1 := v_1 = \alpha'$ zu setzen. Haben wir e_1, \dots, e_j schon konstruiert, so gehen wir weiter nach dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren vor. Da der Vektor v_{j+1} linear unabhängig von den v_1, \dots, v_j ist, so ist er auch unabhängig von den Vektoren e_1, \dots, e_j . Also ist der Vektor

$$\tilde{v}_{j+1} := v_{j+1} - \sum_{\ell=1}^j \langle v_{j+1}, e_\ell \rangle e_\ell$$

von Null verschieden und steht senkrecht auf allen e_k , $k = 1, \dots, j$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist das Vektorfeld \tilde{v}_{j+1} mindestens $(n - j - 1)$ -mal stetig differenzierbar. Das gilt dann auch für das normierte Vektorfeld

$$e_{j+1} := \frac{\tilde{v}_{j+1}}{\|\tilde{v}_{j+1}\|}.$$

Die „Orientierungs-Aussage“ folgt erneut daraus, daß die Basiswechselmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträge in der Hauptdiagonalen ist. \square

Satz 3.7 Für das begleitende Koordinatensystem e_1, \dots, e_n einer Frenet-Kurve gelten die Frenetschen Gleichungen in der folgenden Form :

$$e'_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} e_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hierbei ist die Matrix (a_{jk}) schiefsymmetrisch, es gilt $a_{jk} = 0$ für $k > j + 1$. Sie muß also von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & -\kappa_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sein. Ferner ist $\kappa_1 > 0, \dots, \kappa_{n-2} > 0$ für $n \geq 3$.

Definition und Bemerkung. Man nennt $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ die (verallgemeinerten oder FRENET-) Krümmungen der voll regulären Kurve α . Für $n = 2$ ist κ_1 nichts anderes als die (orientierte) Krümmung der ebenen glatten Kurve α , für $n = 3$ ist κ_1 die absolute Krümmung und κ_2 die Torsion.

Beweis von Satz 7. Es ist $e_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_j)$ und damit die Ableitung $e'_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_{j+1}) = \text{span}(e_1, \dots, e_{j+1})$. Daraus folgt $a_{jk} = 0$, $k > j + 1$. Ferner ist nach Konstruktion $e_j = a_j v_j +$ weitere Terme mit $a_j > 0$, so daß $e'_j = a_j v'_j + \dots = a_j v_{j+1} + \dots = \kappa_j e_{j+1} + \dots$ ist und damit $\kappa_j > 0$, $j \leq n - 2$. Wie im Spezialfall $n = 3$ folgt die *Schiefsymmetrie* der Matrix (a_{jk}) aus

$$0 = \langle e_j, e_k \rangle' = \langle e'_j, e_k \rangle + \langle e_j, e'_k \rangle = \sum_{\ell} a_{j\ell} \langle e_\ell, e_k \rangle + \sum_{\ell} a_{k\ell} \langle e_j, e_\ell \rangle = a_{jk} + a_{kj}. \quad \square$$

Wir wollen in den kommenden Abschnitten dieses Kapitels den Kurvenverlauf einer *Raumkurve* in der Umgebung eines festen Punktes $s = s_0$ näher untersuchen. Setzen wir ausnahmsweise *viermalige* stetige Differenzierbarkeit voraus, so lautet die Taylor-Entwicklung:

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!} x''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!} x'''(s_0) + o((s - s_0)^3).$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_0 = 0$, $x(s_0) = 0$. Dann ist

$$x(s) = s \cdot x'(0) + \frac{s^2}{2} x''(0) + \frac{s^3}{6} x'''(0) + o(s^3).$$

Nun ist

$$x'(0) = e_1(0) =: e_1, \quad x''(0) = \kappa(0) \cdot e_2(0) =: \kappa e_2$$

und

$$x''' = (\kappa e_2)' = \kappa' e_2 + \kappa e'_2 = \kappa' e_2 + \kappa(-\kappa e_1 + \tau e_3).$$

Daraus folgt $x(s) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ mit

$$\begin{aligned}x_1 &= s - \frac{\kappa^2}{6} s^3 + o(s^3), \\x_2 &= \frac{\kappa}{2} s^2 + \frac{\kappa'}{6} s^3 + o(s^3), \\x_3 &= \frac{\kappa\tau}{6} s^3 + o(s^3).\end{aligned}$$

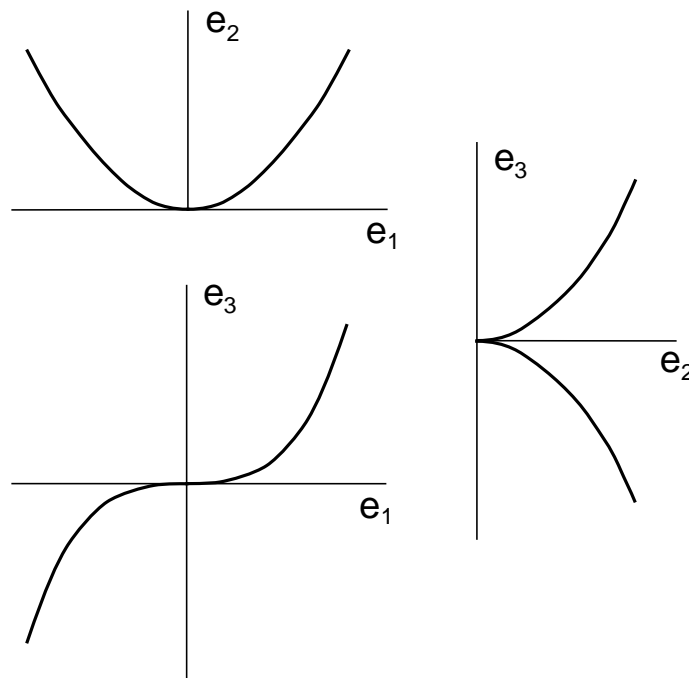
Die Kurve berührt also die sogenannte *Schmiegeebene* (aufgespannt von e_1 und e_2) von zweiter Ordnung, die *rektifizierende Ebene* (aufgespannt von e_3 und e_1) von erster Ordnung und die *Normalebene* (aufgespannt von e_2 und e_3) von nullter Ordnung.

Man kann sich nun für die *Risse* der Kurve in den einzelnen Ebenen interessieren. Man erhält sie - in geeigneter Näherung -, wenn man jeweils aus einem Paar der Näherungsgleichungen

$$x_1 = s, \quad x_2 = \frac{\kappa}{2} s^2, \quad x_3 = \frac{\kappa\tau}{6} s^3$$

den Parameter s eliminiert. Man bekommt auf diese Weise

$x_2 = \frac{\kappa}{2} x_1^2$	Riß in der <i>Schmiegeebene</i> :	Parabel
$x_3 = \frac{\kappa\tau}{6} x_1^3$	Riß in der <i>rektifizierenden Ebene</i> :	kubische Parabel
$x_3^2 = \frac{2\tau^2}{9\kappa} x_2^3$	Riß in der <i>Normalebene</i> :	Neilsche Parabel.



Figur 3.1

Offensichtlich besitzt die Kurve die gleiche Krümmung wie ihre näherungsweise Projektion in die Schmiegebene. Dies ist sogar streng richtig.

Satz 3.8 Die Krümmung $\kappa(s) \neq 0$ einer FRENET-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ stimmt überein mit der Krümmung der ebenen Kurve $\pi \circ \alpha$ an der Stelle s ist, wobei π die orthogonale Projektion von α auf ihre Schmiegebene bei s bezeichnet.

Beweis. Es sei ohne Einschränkung die betrachtete Stelle $s = 0$ und (im üblichen kartesischen Koordinatensystem e_1, e_2, e_3) $e_j(0) = e_j$, $j = 1, 2, 3$. Wir schreiben $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, so daß die Projektion in die Schmiegebene bei $s = 0$ gegeben wird durch $\beta(s) := \pi \circ \alpha(s) = (x(s), y(s))$. Weiter ist nahe bei 0:

$$x(s) = s + o(s^2), \quad y(s) = \frac{\kappa}{2} s^2 + o(s^2).$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$x'(s) = 1 + o(s), \quad x''(s) = o(1), \quad y'(s) = \kappa s + o(s), \quad y''(s) = \kappa + o(1)$$

und damit

$$\kappa_{\beta}(s) = \frac{x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}^3} \longrightarrow \kappa = \kappa(0). \quad \square$$

Daß die Bezeichnung *Schmiegebene* eine starke inhaltliche Bedeutung hat, geht aus dem folgenden Satz hervor.

Satz 3.9 Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung $\kappa(s) \neq 0$, $s \in I$. Dann gilt:

a) Die Schmiegebene bei s ist die Grenzlage der Ebene durch die drei Punkte

$$\alpha(s), \quad \alpha(s + h_1), \quad \alpha(s + h_2) \quad \text{bei } h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

b) Die Grenzlage des Kreises durch

$$\alpha(s), \alpha(s + h_1), \alpha(s + h_2) \quad \text{bei } h_1, h_2 \rightarrow 0$$

ist ein Kreis in der Schmiegebene bei s , dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, die $e_2(s)$ enthält, und dessen Radius gleich dem Krümmungsradius $1/\kappa(s)$ ist.

Beweis. a) Wir skizzieren einen (verhältnismäßig eleganten) Beweis des ersten Teiles. (Siehe hierzu auch die Lösungshinweise bei DO CARMO).

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\alpha(0) = 0$ und das begleitende Dreibein im Punkte $s = 0$ das Koordinatensystem ist. Für feste von 0 verschiedene Werte $h_1 \neq h_2$ sei $\mathbf{n} = \mathbf{n}(h_1, h_2)$ der auf die Länge 1 normierte Normalenvektor $\lambda(\alpha(h_1) \times \alpha(h_2))$ auf die durch $0, \alpha(h_1), \alpha(h_2)$ bestimmte Ebene. Wir haben den Grenzwert von \mathbf{n} bei $h_1, h_2 \rightarrow 0$ zu bestimmen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$F(s, h_1, h_2) := \langle \mathbf{n}, \alpha(s) \rangle.$$

Nach Voraussetzung ist

$$F(0, h_1, h_2) = F(h_1, h_1, h_2) = F(h_2, h_1, h_2) = 0.$$

Bei festem h_1, h_2 besitzt also die Funktion $F_{12}(s) := F(s, h_1, h_2)$ die drei (verschiedenen) Nullstellen $0, h_1, h_2$. Nach dem Satz von Rolle besitzt dann die Ableitung F'_{12} mindestens eine Nullstelle θ_{12} (in

jedem der beiden möglichen Teilintervalle). Damit besitzt aber auch die zweite Ableitung F''_{12} eine Nullstelle ϑ_{12} in dem betrachteten Intervall. Insbesondere ist

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \theta_{12} = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \vartheta_{12} = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} F'_{12}(0) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} F'_{12}(s) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} F'_{12}(\theta_{12}) = 0$$

und entsprechend

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} F''_{12}(0) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} F''_{12}(\vartheta_{12}) = 0.$$

Setzt man andererseits die Koeffizienten des Grenzwerts des Normalenvektors bei $h_1 = h_2 = 0$ mit a, b, c an, so ist, wie man mit Hilfe der Frenetschen Gleichungen sofort nachrechnet, für $F(s) := \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} F_{12}(s)$:

$$F'(0) = a \quad \text{und} \quad F''(0) = \kappa b.$$

Da nach Voraussetzung $\kappa = \kappa(0) \neq 0$ ist, ergibt sich mit dem zuvor Bewiesenen also $a = b = 0$.

b) Es sei $m := m(h_1, h_2) = \sum_{i=1}^3 m_i v_i$ der Mittelpunkt des Kreises durch $\alpha(0)$, $\alpha(h_1)$ und $\alpha(h_2)$ in den lokalen Koordinaten des FRENETSchen Dreibeins um $\alpha(0) := 0$. Definiere für $\sigma \in I$:

$$F(\sigma) := \|m - \alpha(\sigma)\|^2 - \|m\|^2 = -2 \langle m, \alpha(\sigma) \rangle + \|\alpha(\sigma)\|^2.$$

Nach Konstruktion ist $F(0) = F(h_1) = F(h_2) = 0$. Durch Betrachtung der lokalen kanonischen Form von α um 0 erhalten wir weiter $F'(0) = -2m_1$ und $F''(s) = -2\kappa m_2 + 2$.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $s_1 \in [0, h_1]$, $s_2 \in [0, h_2]$ mit

$$F'(s_i) = \frac{F(0) - F(h_i)}{h_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Mit $h_1, h_2 \rightarrow 0$ folgt $\lim_{\sigma \rightarrow 0} F'(\sigma) = F'(0) = 0$, also $m_1 = 0$. Analog ist $F''(0) = 0$ und $m_2 = 1/\kappa$. Nach Teil a) ist $m_3 = 0$, da der Grenzkreis für $h_1, h_2 \rightarrow 0$ in der Schmiegeebene liegt. \square

Wir wollen ferner eine Kugel, die sogenannte *Schmiegekugel*, zu bestimmen suchen, die von einer Raumkurve in einem festen Punkt von möglichst hoher Ordnung berührt wird.

Sei $(x - m)^2 - r^2 = 0$ die Gleichung einer Kugelfläche mit dem Mittelpunktvektor m und dem Radius $r > 0$. Soll sich die Kurve $x = \alpha(s)$ dieser Kugel im Punkte $\alpha(s_0)$ von möglichst hoher Ordnung anschmiegen, so muß die Funktion

$$f(s) := (\alpha(s) - m)^2$$

für $s = s_0$ gleich r^2 sein, und es müssen möglichst viele ihrer Ableitungen an dieser Stelle verschwinden. Man erhält unter Verwendung der FRENETSchen Formeln:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2 \langle \alpha(s) - m, e_1 \rangle \\ f''(s) &= 2 \kappa \langle \alpha(s) - m, e_2 \rangle + 2 \\ f'''(s) &= 2 \langle \alpha(s) - m, -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa \tau e_3 \rangle. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\alpha(s) - m = \beta(s) e_1 + \gamma(s) e_2 + \delta(s) e_3$$

an, so folgt mit $\beta := \beta(s_0)$ u. s. w.:

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (\alpha(s_0) - m)^2 = r^2$$

und

$$0 = f'(s_0) = 2 \langle \alpha(s_0) - m, e_1 \rangle = 2\beta.$$

Daraus folgt $\beta = 0$ und $\gamma^2 + \delta^2 = r^2$, so daß

$$0 = f''(s_0) = 2\kappa \langle \alpha(s_0) - m, e_2 \rangle + 2 = 2\kappa \langle \gamma e_2 + \delta e_3, e_2 \rangle + 2 = 2\kappa\gamma + 2,$$

so daß $\gamma = -\frac{1}{\kappa}$ ist. Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} 0 &= f'''(s_0) = 2 \langle \alpha(s_0) - m, -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa\tau e_3 \rangle \\ &= 2 \left\langle -\frac{1}{\kappa} e_2 + \delta e_3, -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa\tau e_3 \right\rangle = 2 \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} + \delta\kappa\tau \right). \end{aligned}$$

Mit $\tau(s_0) \neq 0$ bekommt man dann schließlich $\delta = -\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$. Die Schmiegekugel ist also für $\tau(s_0) \neq 0$ eindeutig bestimmt; sie hat den Mittelpunkt

$$m = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa} e_2 - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} e_3$$

und den Radius

$$r = (\gamma^2 + \delta^2)^{1/2} = \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\kappa^4\tau^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 + \frac{\kappa'^2}{\kappa^2\tau^2}}.$$

Als typische Anwendung dieser Überlegungen beweisen wir den folgenden Satz über die Charakterisierung von *sphärischen* Kurven, also von Kurven, die per definitionem auf einer Kugeloberfläche liegen.

Satz 3.10 *Sphärische Kurven sind gekennzeichnet durch die Bedingung*

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)'$$

Beweis. Aus der Formel $m = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} e_2 - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} e_3$ folgt durch Differentiation nach s :

$$\begin{aligned} m' &= \alpha' + \frac{1}{\kappa} e_2' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} e_2 - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} e_3' - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' e_3 \\ &= e_1 - e_1 + \frac{\tau}{\kappa} e_3 - \frac{\kappa'}{\kappa^2} e_2 + \frac{\kappa'}{\kappa^2} e_2 - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' e_3 \\ &= \left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' \right] e_3. \end{aligned}$$

a) Sei $\alpha = \alpha(s)$ eine sphärische Kurve. Dann ist die Kugel, auf der $\alpha(s)$ liegt, in allen Punkten der Kurve eine Schmiegekugel, so daß $m = \text{const.}$ sein muß. Dann ist aber

$$0 = m' = \left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' \right] e_3,$$

und es folgt $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)'$.

b) Sei umgekehrt $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)'$. Dann ist $m = \text{const.}$, und es folgt

$$(r^2)' = -2 \frac{\kappa'}{\kappa^3} + 2 \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' = -2 \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \right] = 0. \quad \square$$

Den restlichen Abschnitt dieses Kapitels widmen wir dem Beweis des *Hauptsatzes der Kurventheorie*.

Satz 3.11 (Hauptsatz der Kurventheorie) *Es seien $\kappa_1 > 0, \dots, \kappa_{n-2} > 0, \kappa_{n-1}$ vorgegebene Funktionen auf dem Intervall I ; die Funktion κ_j sei $(n-j)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gibt es (bis auf euklidische Bewegungen genau) eine nach der Bogenlänge $s \in I$ parametrisierte Kurve mit den vorgegebenen verallgemeinerten Krümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$.*

Um den Hauptsatz beweisen zu können, benötigen wir einen Satz aus der Theorie der Systeme von gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, den wir hier nur zitieren wollen (zum Beweis siehe z. B. *Analysis II*, Satz 22.2).

Satz 3.12 *Es seien $c_{jk}(s)$, $1 \leq j, k \leq N$, N^2 stetige Funktionen über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und es seien $s_0 \in I$ und (x_1^0, \dots, x_N^0) ein Punkt aus dem \mathbb{R}^N . Dann gibt es genau ein N -Tupel von Funktionen $(x_1(s), \dots, x_N(s))$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Alle $x_j(s)$ sind über dem Intervall I differenzierbar mit

$$x_j' = \sum_{k=1}^n c_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, N.$$

2. $x_j(s_0) = x_j^0$, $j = 1, \dots, N$.

Beweis des Hauptsatzes. Die Frenetschen Gleichungen stellen ein System von $N = n^2$ linearen Differentialgleichungen für die Gesamtheit der Komponenten der Abbildungen $e_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dar, die man bei festem $s_0 \in I$ nach Vorgabe von $e_1(s_0), \dots, e_n(s_0) \in \mathbb{R}^n$ (dies sind N Bedingungen!) eindeutig lösen kann. Damit dieses Lösungssystem überhaupt das begleitende n -Bein einer glatten Kurve ist, muß diese Anfangsvorgabe ein positiv orientiertes Orthonormalsystem in \mathbb{E}^n sein und für alle $s \in I$ bleiben. - Es ist also als erstes zu zeigen:

(*) Ist $(e_1(s_0), \dots, e_n(s_0))$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem, so auch $(e_1(s), \dots, e_n(s))$ für alle s .

Der Beweis von (*) benutzt die Eindeutigkeitsaussage in dem Existenzsatz für lineare Differentialgleichungssysteme. Man setzt

$$h_{jk}(s) := \langle e_j(s), e_k(s) \rangle.$$

Dann gilt

$$h_{jk}' = \langle e_j'(s), e_k(s) \rangle + \langle e_j(s), e_k'(s) \rangle = \sum_{\ell} (a_{j\ell}(s) h_{\ell k}(s) + a_{k\ell}(s) h_{\ell j}(s)).$$

Dieses lineare Differentialgleichungssystem in den unbekanntenen Funktionen h_{jk} besitzt aber wegen der Schiefsymmetrie der Matrix (a_{jk}) und der vorgegebenen Anfangsbedingungen auch die Lösung $h_{jk}(s) \equiv \delta_{jk}$, muß also mit dieser identisch sein: Es gilt somit $\langle e_j(s), e_k(s) \rangle \equiv \delta_{jk}$. Die Matrix mit den $e_j(s)$ als Spalten ist dann orthogonal; insbesondere ist ihre Determinante $\det(e_1(s), \dots, e_n(s)) = \pm 1$. Da diese Funktion stetig und an der Stelle s_0 gleich 1 ist, muß sie identisch 1 sein. - Wir können damit konstatieren:

Das System $(e_1(s), \dots, e_n(s))$ ist das begleitende Koordinatensystem für die voll reguläre Kurve $x(s) = \int e_1(s) ds$, die automatisch die „richtigen“ verallgemeinerten Krümmungen besitzt.

Die Eindeutigkeitsaussage folgt unmittelbar daraus, daß mit jeder Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch $Ax + c$ eine Lösung ist, wenn $A \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}^n$, und daß jedes positiv orientierte Orthonormalsystem von einer Stelle in \mathbb{E}^n in jedes andere an einer anderen Stelle durch genau eine solche eigentliche euklidische Bewegung transformiert werden kann. \square