

Analysis III

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

Hamburg 2004

Korrigierte und mit Skizzen versehene

Fassung vom 28. Februar 2005

Vorbemerkung

Es handelt sich bei dem vorliegenden Text um die Fortführung meiner Manuskripte *Analysis I* und *Analysis II*. Verweise auf Kapitel 1 bis 12 sind demnach im ersten Band, die auf Kapitel 13 bis 23 im zweiten Band zu suchen; ebenso beziehen sich alle mit einem „label“ [ab] versehenen Literaturangaben auf das Verzeichnis in Band 1. Weitere Literatur wird in der Regel im Text direkt angegeben. Leider fehlt, wie auch bei dem zweiten Teil, im gegenwärtigen Moment noch ein separater Index.

Hamburg, 28. Februar 2005
Oswald Riemenschneider

Inhalt

Vorbemerkung	xlvi
Inhalt	xlvi
Index [fehlt]	xlix

Teil III: Mannigfaltigkeiten und der Satz von Stokes

24 Der Satz über implizite Funktionen	501
25 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten	513
Anhang: Abstrakte Mannigfaltigkeiten	529
26 Tangentialraum und Tangentialbündel	541
Anhang: Das Tangentialbündel für abstrakte Mannigfaltigkeiten und Vektorraumbündel	554
27 Vektorfelder und Pfaffsche Formen	563
Anhang: Schnitte in Vektorraumbündeln und ihren Dualen	581
28 Der Kalkül der Differentialformen	593
Anhang: Alternierende Multilinearformen	600
29 Der Satz von Stokes	603
Anhang: Differenzierbare Teilungen der Eins	612
30 Volumenberechnungen und die klassischen Integralsätze	625
Anhang: Anwendungen des Satzes von Stokes	630

Teil IV: Höherdimensionale Integrationstheorie

31 Treppenfunktionen	637
32 Das Regel-, Darboux- und Lebesgue-Integral im \mathbb{R}^n	641
Anhang: Fortsetzungssätze für stetige Funktionen	653
33 Meßbare Mengen und Nullmengen	655
Anhang: Der Ring der Lebesgue-meßbaren Mengen	662
34 Der Banachraum L^1	665
Anhang: Ein anderer Zugang zum Lebesgue-Integral	674
35 Der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz	677
36 Der Satz von Fubini	681
37 Die Transformationsformel für mehrfache Integrale	685

Teil III: Mannigfaltigkeiten und der Satz von Stokes

24 Der Satz über implizite Funktionen

Wir wiederholen das einfache Beispiel, das uns schon in Kapitel 17 die wesentlichen Einsichten zur Formulierung des Satzes über implizite Funktionen gebracht hat.

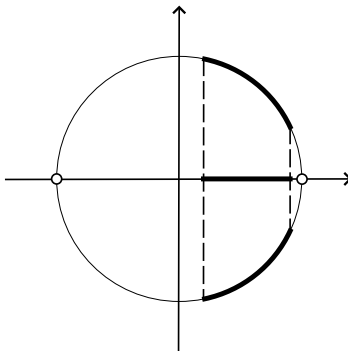
Es sei $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ und N die Nullstellenmenge von F :

$$N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0 \},$$

also der Einheitskreis. Wir stellen uns die Frage: Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $a \in I$, so daß

$$N \cap \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \}$$

der Graph einer Funktion $y = g(x)$ ist?



Figur 24.1

Die Antwort auf die Frage in dieser Allgemeinheit ist schlichtweg negativ. Es gibt kein solches a , da z. B. für $|a| < 1$ die gesuchte Funktion g „zweideutig“ sein müßte.

Die Antwort wird interessanter, wenn wir die Frage bzgl. der Menge N „lokalisieren“:

Für welche Punkte $(a, b) \in N$ gibt es Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ mit $a \in I, b \in J$, so daß

$$N \cap (I \times J)$$

der Graph einer Funktion $y = g(x), x \in I$, ist?

Die Antwort lautet jetzt: für alle $(a, b) \in N$ mit $|a| < 1$. Die Funktionen g sind in diesem Fall

$$g(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

(je nachdem ob $b > 0$ oder < 0 ist).

Offensichtlich spielt die Differenzierbarkeit bei diesem Problem eine Rolle. F ist (beliebig oft) differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

und die „Auflösbarkeit“ geht exakt schief an den Stellen $(a, b) \in N$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Wir halten also fest: Wir können im Allgemeinen nur *lokale* Aussagen in Bezug auf die Nullstellenmenge N machen. Ferner sollte man zumindest Differenzierbarkeit verlangen, da sonst, wie man sich leicht überlegt, das Problem „nicht sinnvoll gestellt“ ist.

Die einfachste Situation, in der die Funktion F nach y aufgelöst werden kann, liegt vor, wenn sie sich schreiben läßt in der Form

$$F(x, y) = y - g(x).$$

Dann ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -g'(x)$. Wir vermuten daher den folgenden

Satz 24.1 (über implizite Funktionen) *Es sei $F \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $(a, b) \in N := \{(x, y) \in U : F(x, y) = 0\}$. Ferner sei*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Quaderumgebung $I \times J \subset U$ von (a, b) und eine stetig differenzierbare Funktion $g : I \rightarrow J$ mit

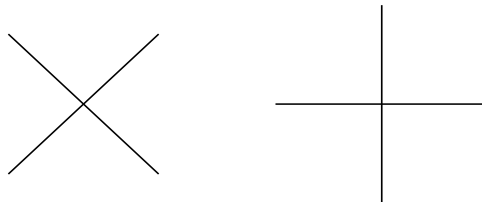
$$N \cap (I \times J) = \{(x, y) : x \in I, y = g(x)\}.$$

Bemerkung. Daß dieser Satz höchst sinnreich ist, zeigt das Beispiel der Kreisgleichung, wenn man z. B. die Rollen von x und y vertauscht.

Um unsere Vermutung zu testen, betrachten wir noch drei weitere Beispiele:

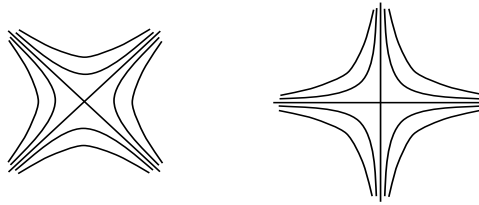
1. $F(x, y) = x^2 + y^2$. Hier ist $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = 0$. Also kann man an allen Stellen $(a, b) \neq 0$ nach x oder y auflösen? Leider nein, denn es ist nichts zum „Auflösen“ da wegen $N = \{0\}$! In der obigen Formulierung ist also ganz wichtig, daß wir überhaupt einen Punkt $(a, b) \in U$ haben mit $F(a, b) = 0$ (und $\partial F/\partial y(a, b) \neq 0$).

2. $F(x, y) = x^2 - y^2$. Hier ist wieder im Nullpunkt nichts zu machen (die Nullstellenmenge N besitzt eine „Singularität“), aber außerhalb desselben ist die Welt (lokal bzgl. N) in Ordnung. Dieses Beispiel wird noch einfacher, wenn man es um 90° dreht, wenn man also statt F die Funktion $G(x, y) = x \cdot y$ untersucht. Hier ist $\frac{\partial G}{\partial y} = x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.



Figur 24.2

3. In vielen Fällen sind wir eher an *Niveaulinien* $N_c := \{(x, y) \in U : F(x, y) = c\}$ bei festem $c \in \mathbb{R}$ anstelle der Nullstellenmenge $N = N_0$ interessiert. Selbstverständlich läßt sich die Untersuchung von Niveaulinien auf die Untersuchung von Nullstellenmengen zurückführen durch Übergang zu der Funktion $F - c$. Der Leser diskutiere die obige Vermutung an Hand der Niveaulinien der beiden Funktionen F und G im vorigen Beispiel.



Figur 24.3

Um unsere Vermutung auch auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern, orientieren wir uns an der Theorie der linearen Gleichungssysteme aus der Linearen Algebra, zumal differenzierbare Abbildungen sich lokal gut durch lineare approximieren lassen. Es sei also A eine $m \times n$ -Matrix und $v \in \mathbb{R}^n$; wir betrachten die m Gleichungen

$$Av = 0$$

und das „Nullstellengebilde“ $N := \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}$, also in der Sprache der Linearen Algebra den *Kern* der linearen Abbildung A . Sind die Zeilen von A linear abhängig, so wird N nicht „effektiv“ beschrieben. Wir können dann einige Gleichungen weglassen, bis wir (mit einem neuen m) zu der Bedingung

$$m = \text{rg } A$$

gelangen, d. h. wir können ohne Einschränkung annehmen, A besitze *maximalen* Rang $m \leq n$. Nach einer Koordinatenumbenennung können wir dann weiter erreichen, daß mit $n = m + k$ die Matrix A geschrieben werden kann in der Form $(C|D)$, wobei C eine $m \times k$ - und D eine invertierbare $m \times m$ -Matrix bezeichnet. Schreiben wir den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ dann in der Form

$$v = {}^t(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \quad \text{und setzen} \quad x = {}^t(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad y = {}^t(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$$

so gilt

$$0 = Av = Cx + Dy \quad \text{genau dann, wenn} \quad y = -D^{-1}Cx.$$

Wir können somit das Gleichungssystem $Av = 0$ (linear) nach den Variablen y_1, \dots, y_m , also durch eine lineare Abbildung in den Variablen x_1, \dots, x_k , auflösen. Insbesondere ist N (linear) k -dimensional. Nun ist aber die Matrix A offensichtlich gleich der Funktionalmatrix der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto Av \in \mathbb{R}^m.$$

Wir kommen daher zu der folgenden Vermutung, die wir schon als Satz formulieren.

Satz 24.2 (über implizite Funktionen in mehreren Veränderlichen) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n = k + m$, eine offene Menge in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ mit den Variablen $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$. Es sei $F = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung und*

$$(a, b) \in N := F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : f_j(x, y) = 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Ferner sei

$$\text{rg } DF(a, b) = m,$$

und ohne Einschränkung die Determinante der „partiellen“ Funktionalmatrix

$$D_y F := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

an der Stelle (a, b) von 0 verschieden. Dann gibt es Umgebungen $W_1 = W_1(a) \subset \mathbb{R}^k$, $W_2 = W_2(b) \subset \mathbb{R}^m$ mit $W_1 \times W_2 \subset U$ und eine C^1 -Abbildung $g: W_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g(W_1) \subset W_2$, so daß

$$N \cap (W_1 \times W_2) = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : y = g(x)\}.$$

Es gilt

$$(*) \quad Dg(x) = -((D_y F)(x, g(x)))^{-1} \cdot ((D_x F)(x, g(x)))$$

mit

$$D_x F := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Bevor wir diesen außerordentlich wichtigen Satz beweisen, fügen wir eine Folgerung aus der Formel (*) an. Die CRAMERSche Regel aus der Determinantentheorie besagt, daß man die Einträge einer inversen Matrix bis auf das Vorzeichen als Quotienten aus gewissen Unterdeterminanten und der Determinante der gegebenen Matrix bilden kann. Aus dem Bildungsgesetz für Determinanten als endliche alternierende Summe von Produkten ihrer Einträge und der Formel (*) folgt, daß die Abbildung g sogar 2-mal stetig differenzierbar ist, sofern dies auch für F richtig ist. Hieraus ergibt sich durch Induktion leicht:

Folgerung 24.3 *Ist in dem Satz über implizite Funktionen die Abbildung F sogar ℓ -mal stetig differenzierbar, $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, so auch die Abbildung g .*

Bemerkung. Die Aussage der Folgerung bleibt auch für die Kategorie der *analytischen Funktionen* bestehen, was wir hier aber nicht beweisen wollen.

Beweis (Satz 2). Wir nehmen zunächst an, wir hätten für geeignete Umgebungen W_1 und W_2 eine *stetige* Abbildung $g: W_1 \rightarrow W_2$ gefunden mit $F(x, g(x)) \equiv 0$. Erstaunlicherweise lassen sich hieraus schon wesentliche Aussagen des Satzes gewinnen. Wir zeigen als erstes, daß eine solche stetige Abbildung g notwendig *stetig differenzierbar* ist und ihre Funktionalmatrix $Dg(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs der Formel des Satzes genügt.

Wir können uns zur Untersuchung der *Differenzierbarkeit* und zum Nachweis der Formel auf die Betrachtung einer einzigen Stelle beschränken. Aus der Formel folgt dann automatisch, daß die partiellen Ableitungen *stetig* sind. Es sei also ohne Einschränkung der Punkt $(a, b) = (0, 0)$, und die Umgebungen seien Kugeln bzgl. der euklidischen Norm: $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < r_1\}$, $W_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| < r_2\}$.

Wir setzen weiter in Analogie zu der *linearen* Situation $C := \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \in M(m \times k, \mathbb{R})$ und $D := \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \in GL(m, \mathbb{R})$. Aus der Definition der Differenzierbarkeit von F im Nullpunkt folgt

$$F(x, y) = Cx + Dy + \varphi(x, y)$$

mit $\varphi(x, y) = o(\|x, y\|)$. Aus $F(x, g(x)) \equiv 0$ für $x \in W_1$ ergibt sich

$$g(x) = -D^{-1}Cx - D^{-1}\varphi(x, g(x)).$$

Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ist nach evtl. Verkleinerung von W_1 in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$:

$$(+)$$

$$\|\varphi(x, g(x))\| \leq \varepsilon(\|x\| + \|g(x)\|)$$

für hinreichend nahe bei 0 gelegene x (hierbei geht natürlich die Stetigkeit von g ein!). Somit ist (wenn $\|L\|$ die Operatornorm $\|L\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Lv\|$ einer Matrix L bezeichnet):

$$\|g(x)\| \leq \|D^{-1}C\| \cdot \|x\| + \|D^{-1}\| \cdot \varepsilon(\|x\| + \|g(x)\|).$$

Wählt man speziell $\varepsilon = 1/(2\|D^{-1}\|)$, so erhalten wir

$$\|g(x)\| \leq M\|x\|, \quad x \in W_1,$$

M eine geeignete Konstante. Dann folgt aber

$$g(x) = -D^{-1}Cx + \psi(x)$$

mit

$$\psi(x) = -D^{-1}\varphi(x, g(x)) = o(\|x\|).$$

Also ist g in 0 differenzierbar mit der Ableitung $-D^{-1}C$.

Da aus der stetigen Differenzierbarkeit von F mit $\det D_y F \neq 0$ an einer Stelle auch das Nichtverschwinden in einer ganzen Umgebung folgt, bekommen wir in einer ganzen Umgebung von (a, b) die Differenzierbarkeit von g mit

$$Dg(x) = -((D_y F)(x, g(x)))^{-1}((D_x F)(x, g(x)))$$

und damit die *stetige* Differenzierbarkeit von g .

Es bleibt also zu zeigen: Für hinreichend kleine Umgebungen W_1, W_2 gibt es zu festem $x \in W_1$ genau ein $y \in W_2$, so daß $F(x, y) = 0$, und die Abbildung $W_1 \ni x \mapsto y := g(x) \in W_2$ ist stetig.

Die *Existenz* einer solchen stetigen Abbildung g beweisen wir mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes im endlich-dimensionalen Banach-Raum $V = \mathbb{R}^m$, versehen mit der euklidischen Norm. Wir werden dazu eine ganze „Schar“ von Operatoren $\alpha_x : \bar{B} \rightarrow V, \bar{B} = \bar{B}(0, r) \subset V = \mathbb{R}^m, x \in W_1$, betrachten. Wir nehmen dazu wieder $(a, b) = (0, 0)$ an und setzen

$$\alpha_x(y) = G(x, y) := y - D^{-1}F(x, y), \quad D := (D_y F)(0).$$

Bei festem x ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann erfüllt, wenn $\alpha_x(y) = y$. Wir haben es also bei der lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Funktion wieder mit einem *Fixpunktproblem* für die Abbildungen α_x zu tun, und daher genügt zum Nachweis des ersten Teils der obigen Behauptung:

Es gibt eine kompakte Kugel $W_1 \subset \mathbb{R}^k$ mit Mittelpunkt 0 und eine positive Zahl r , so daß für alle $x \in W_1$ der Operator α_x die abgeschlossene Kugel $\bar{B} = \bar{B}(0, r)$ in sich abbildet und kontrahierend ist.

Wir beachten dazu, daß die Funktion $G(x, y)$ in einer Umgebung von $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^k \times V$ erklärt und stetig differenzierbar ist. Die notwendigen Abschätzungen gewinnen wir sodann aus dem Mittelwertsatz für \mathcal{C}^1 -Funktionen auf \mathbb{R}^m . Es ist

$$D_y G = E_n - D^{-1} \cdot D_y F$$

gleich Null in $(0, 0)$. Damit gibt es eine kompakte Kugel W_1 um 0 in \mathbb{R}^k und ein $r > 0$, so daß $G(x, y)$ auf $W_1 \times \bar{B}, \bar{B} = \bar{B}(0, r)$, erklärt ist und

$$\|D_y G\|_{W_1 \times \bar{B}} \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann:

$$\|\alpha_x(y) - \alpha_x(\tilde{y})\| \leq \frac{1}{2} \|y - \tilde{y}\|, \quad y, \tilde{y} \in \bar{B}, \quad x \in W_1.$$

Somit ist $\alpha_x : \bar{B} \rightarrow V$ an jeder Stelle $x \in W_1$ kontrahierend. Wir setzen weiter $g_0 = g_0(x) = 0$. Wegen

$$\alpha_x(g_0) = G(x, 0)$$

und der Stetigkeit von G können wir W_1 soweit verkleinern, daß

$$\|\alpha_x(g_0)\| \leq \sup_{x \in W_1} \|G(x, 0)\| < \frac{r}{2}.$$

Dann ist nach dem Banachschen Fixpunktsatz für alle $x \in W_1$ die Folge

$$g_0(x), g_1(x) = \alpha_x(g_0(x)), g_2(x) = \alpha_x(g_1(x)), \dots$$

in $B = B(0, r)$ konvergent, und zwar gegen den einzigen Fixpunkt $g(x)$ von α_x auf B . Insbesondere ist

$$\{(x, y) \in W_1 \times B : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in W_1 \times B : y = g(x)\}.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $g := g(x)$ stetig ist auf W_1 . Nun liefert aber der Banachsche Fixpunktsatz die (punktweise) Konvergenz der Folge g_j nach g mittels des Majorantenkriteriums für die Teleskopreihe $g_0 + (g_1 - g_0) + \dots + (g_j - g_{j-1}) + \dots$, und die auftretenden Konstanten sind unabhängig von $x \in W_1$. Also ist g stetig wegen des Weierstraßschen Konvergenzkriteriums. \square

Bemerkung. Man kann die „Schar“ α_x auch anders interpretieren: Jeder stetigen Funktion $h : W_1 \rightarrow \bar{B}$ wird bei den obigen Wahlen durch

$$(\alpha(h))(x) := \alpha_x(h(x)) = G(x, h(x))$$

eine neue stetige Funktion $\alpha(h) : W_1 \rightarrow \bar{B}$ zugeordnet. Dies liefert eine kontrahierende Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugel mit Radius r im Banach-Raum der stetigen Abbildungen von W_1 nach \mathbb{R}^m bzgl. der Supremumsnorm. Die gesuchte lokale stetige Lösung im Satz über implizite Funktionen ist dann nichts anderes als der (einzige) Fixpunkt des Operators α .

Zwei Anwendungen dieses bedeutenden Satzes im Falle $m = 1$ haben wir schon im Kapitel 17 aufgeführt und bewiesen. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei die erste hier noch einmal notiert, und die zweite wird sogleich auf den Fall beliebiger Dimension m des Bildraums verallgemeinert.

Folgerung 24.4 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, eine stetig differenzierbare Funktion. Dann steht der Gradient von f senkrecht auf den Höhenlinien von f . D. h. genauer: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve mit $f(\gamma(t)) = \text{const.}$, so ist $\langle \gamma'(t), \text{grad} f(\gamma(t)) \rangle = 0$.*

Der einfache *Beweis* ist eine Folgerung aus der Kettenregel (siehe Lemma 17.18). \square

Eine weitere Anwendung in Kapitel 17 betraf die Frage nach notwendigen Bedingungen für *lokale Extrema mit Nebenbedingung*. Wir wollen dieses Ergebnis hier gleich auf mehrere Nebenbedingungen verallgemeinern. Es sei $F = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine stetig differenzierbare Abbildung, und die Gradienten

$$\text{grad} f_1(a), \dots, \text{grad} f_m(a)$$

seien linear unabhängig für einen Punkt $a \in N = N(F)$. Weiter sei $h \in \mathcal{C}^1(U)$ gegeben. Man sagt, h besitze in a ein lokales Minimum (Maximum) mit der Nebenbedingung $F = 0$ oder mit Nebenbedingungen $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$, wenn es eine Umgebung $V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$h(x) \geq h(a) \quad \text{bzw.} \quad \leq h(a) \quad \text{für alle} \quad x \in N \cap V.$$

Satz 24.5 *Besitzt unter den obigen Voraussetzungen h ein lokales Extremum in a unter der Nebenbedingung $F = 0$, so gibt es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\text{grad } h(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } f_j(a).$$

Bemerkungen. 1. Man nennt die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ auch EULERSche Multiplikatoren.

2. Der nachfolgende Beweis ist völlig elementar und verläuft parallel zu dem in Kapitel 17 für $m = 1$. Wir werden diese Aussage aber später noch *geometrisch* zu interpretieren lernen und damit schneller herleiten können.

Beweis. Die vorausgesetzte Unabhängigkeit der Gradienten ist gleichbedeutend damit, daß die Funktionalmatrix DF in a maximalen Rang m besitzt. Mit der üblichen Aufspaltung der Variablen als (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^m$, $n = m + k$, können wir daher ohne Einschränkung annehmen, daß

$$M = \{ (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^{m+k} : F(x, y) = 0 \}$$

in einer geeigneten Umgebung von a mit dem Graphen einer geeigneten Abbildung $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$, übereinstimmt. Es sei ohne Einschränkung $a = 0$ und $g(0) = 0$.

Wir setzen nun $\varphi(x) := h(x, g(x))$ für $x \in W$. Nach Voraussetzung besitzt diese Funktion wegen $(x, g(x)) \in M$ ein lokales Extremum im Nullpunkt. Also müssen dort alle ihre partiellen Ableitungen nach x_1, \dots, x_k verschwinden. Dies liefert vermöge der Kettenregel die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise lauten diese Formeln:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen hat man aber auch die Identität

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Zusammen ergibt dies die Relation

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Auf der anderen Seite ist trivialerweise auch

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Setzt man nun noch $\left. \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \right|_{(0, g(0))} =: (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, so folgt offensichtlich die Behauptung. \square

Eine weitere wichtige Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist die Beantwortung der folgenden Frage: Wann läßt sich eine \mathcal{C}^ℓ -Abbildung

$$F : U \longrightarrow W, \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad W \subset \mathbb{R}^m,$$

(lokal) umkehren mit einer \mathcal{C}^ℓ -Umkehrabbildung? Hierbei sei $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Definition. Besitzt die \mathcal{C}^ℓ -Abbildung $F : U \rightarrow W$ eine \mathcal{C}^ℓ -Umkehrabbildung $F^{-1} : W \rightarrow U$, so nennt man sie auch einen \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus. Bei $\ell = 1$ sprechen wir der Einfachheit halber schlicht von einem Diffeomorphismus.

Eine *notwendige* Bedingung hatten wir hierfür schon früher abgeleitet: Ist G eine solche Umkehrabbildung nahe $b = F(a)$, $a \in U$ fest, so ist notwendig wegen der Kettenregel und $G \circ F = \text{id}_U$, $F \circ G = \text{id}_W$:

$$(DG)(b)(DF)(a) = E_n, \quad (DF)(a)(DG)(b) = E_m.$$

Wir setzen $A := (DF)(a)$, $B = (DG)(b)$; es ist also $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$ und $BA = E_n$, $AB = E_m$. Als lineare Abbildungen sind dann A und B notwendig surjektiv. Folglich muß $m \leq n$ und $n \leq m$, also $m = n$ und damit A invertierbar sein. - Wir zeigen jetzt, daß diese Bedingung auch *lokal* im differenzierbaren Fall hinreichend ist.

Satz 24.6 (Lokaler Umkehrsatz) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und die Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ℓ -mal stetig differenzierbar, $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, mit invertierbarer Funktionalmatrix $(DF)(a)$ für ein $a \in U$. Dann gibt es Umgebungen $V = V(a) \subset U$ und $W = W(b) \subset \mathbb{R}^n$, $b = F(a)$, so daß $F|_V : V \rightarrow W$ ein \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Betrachte die \mathcal{C}^ℓ -Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} U \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto & y - F(x). \end{cases}$$

Dann ist $\Phi(a, b) = b - F(a) = 0$ und

$$(D\Phi)_x(a, b) = -(DF)(a)$$

invertierbar. Also existiert lokal eine \mathcal{C}^ℓ -Abbildung $x = G(y)$ mit

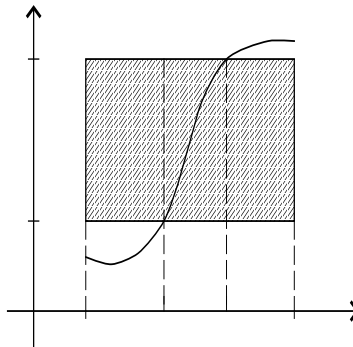
$$y - F(G(y)) = \Phi(G(y), y) \equiv 0, \quad (x, y) \in V' \times W, \quad V', W \text{ geeignet.}$$

Nun ist

$$V := V' \cap F^{-1}(W) = \{x \in V' : F(x) \in W\}$$

eine offene Umgebung von a in U , und $F|_V : V \rightarrow W$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung G . \square

Bemerkung. Den Grund für die evtl. notwendige Verkleinerung von V sieht man in dem folgenden Bild:



Figur 24.4

Folgerung 24.7 Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(DF)(a)$ invertierbar für alle $a \in U$, dann ist $F(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beweis. Es sei $b \in F(U)$ und $a \in F^{-1}(b)$. Dann gibt es offene Mengen $V = V(a)$ und $W = W(b)$, so daß $F|_V : V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $W \subset F(V) \subset F(U)$. \square

Folgerung 24.8 Ist F zusätzlich injektiv und eine C^ℓ -Abbildung, $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, so ist $F : U \rightarrow F(U)$ ein C^ℓ -Diffeomorphismus.

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt $F : U \rightarrow F(U)$ eine Umkehrabbildung G . Diese ist aber wegen des lokalen Umkehrsatzes lokal (und damit global) ℓ -mal stetig differenzierbar. \square

Beispiel (Polarkoordinaten). Wir setzen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, d. h. wir betrachten die Abbildung

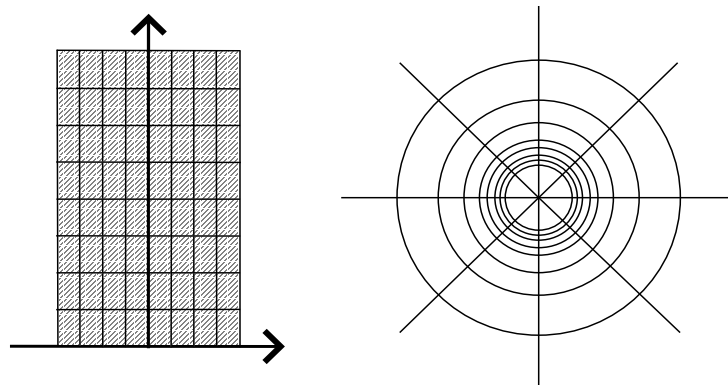
$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) & \longmapsto & (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) . \end{cases}$$

Sie ist surjektiv, aber nicht injektiv; so geht z. B. $(0, \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ auf den Nullpunkt $(0, 0)$, und ist $r > 0$, so gilt $\Phi(r, \varphi) = \Phi(r', \varphi')$ genau dann, wenn $r' = r$ und $\varphi' = \varphi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Macht man nun φ eindeutig durch die Einschränkung $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $r > 0$, so wird

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

bijektiv,



Figur 24.5

und $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \leq 0\}$ wird bijektiv. Wegen

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ist $\det(D\Phi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r > 0$, und damit ist $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \leq 0\}$ ein C^∞ -Diffeomorphismus.

Wir gehen jetzt daran, den Satz über implizite Funktionen in eine stärker geometrisch geprägte Form umzugießen und danach zu dem sogenannten *Rangatz* zu verallgemeinern.

Definition und Bemerkung. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $F = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow V$ sei eine partiell differenzierbare Abbildung. Dann heißt der Rang der Funktionalmatrix an einer Stelle $a \in U$, also

$$\text{rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = \text{rang} \frac{\partial F}{\partial x}(a) = \text{rang}(DF)(a),$$

auch der *Rang von F* an der Stelle a . Wir schreiben dafür manchmal auch kurz $\text{rg}_a F$.

Für eine *lineare Abbildung* $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ führt diese Definition nicht zu Konfusion, da ja A als Matrix aufgefaßt und mit ihrer Funktionalmatrix identifiziert werden kann.

Lemma 24.9 *Für eine stetig differenzierbare Abbildung $F : U \rightarrow V$ ist die Abbildung $\text{rg} F : U \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \text{rg}_x F$ von unten halbstetig, d. h., da \mathbb{Z} diskret ist: Für jedes $a \in U$ existiert eine Umgebung $W = W(a)$ mit $\text{rg}_x F \geq \text{rg}_a F$ für alle $x \in W$.*

Beweis. Für eine $m \times n$ -Matrix A reeller Zahlen ist $\text{rang} A \geq r$ genau dann, wenn eine $r \times r$ -Untermatrix von A existiert, deren Determinante nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit der Einträge in der Funktionalmatrix $\partial F / \partial x$ ist ihr Rang in jedem Punkt einer geeigneten Umgebung eines Punktes a größer oder gleich r , wenn er dies nur im Punkte a ist. \square

Definition. Es sei $F \in \mathcal{C}^1(U, V)$, $a \in U$, $b = F(a) \in V$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$.

- a) F heißt eine *Immersion* in a , wenn $\text{rg}_a F = n$ ist;
- b) F heißt eine *Submersion* in a , wenn $\text{rg}_a F = m$ ist.
- c) F heißt eine *Subimmersion* in a , wenn es eine Umgebung $W = W(a) \subset U$ gibt mit

$$\text{rg}_x F = r = \text{const.}, \quad x \in W.$$

Eine stetig differenzierbare Abbildung F heißt eine *Immersion* bzw. *Submersion* bzw. *Subimmersion* (schlechthin), wenn die entsprechende Eigenschaft in jedem Punkt $a \in U$ erfüllt ist.

Bemerkung. Der anschließend zu findende *Rangsatz* besagt, daß lokal eine Subimmersion stets geschrieben werden kann als die Komposition einer Submersion mit einer Immersion. Daher stammt die etwas kuriose Bezeichnung.

Lemma 24.10 *Jede Immersion bzw. Submersion ist auch eine Subimmersion.*

Beweis. a) Ist F eine Immersion in a , d. h. ist $\text{rg}_a F = n$, so ist notwendig $n \leq m$. Da $\text{rg}_x F \leq \min(m, n) = n$ ist und in einer Umgebung W von a die Abschätzung $\text{rg}_x F \geq \text{rg}_a F$ gelten muß, ist notwendig $\text{rg}_x F = n$, $x \in W$.

b) Ist $\text{rg}_a F = m$, so folgt $m \leq n$. Der Rest erledigt sich wie im Teil a). \square

Bemerkung. Aus der Linearen Algebra ist wohlbekannt, daß eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ (zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen V, W) genau dann surjektiv bzw. injektiv ist, wenn ihr Rang, also die Dimension des Bildes $A(V)$, gleich der Dimension des Bildraums W bzw. des Urbildraums V ist. Somit ist eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $F : U \rightarrow V$ genau dann in einem Punkt $a \in U$ eine Submersion bzw. eine Immersion, wenn ihr Differential $D_a F = (DF)(a)$ *surjektiv* bzw. *injektiv* ist.

Beispiel. Selbstverständlich kann der Rang einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $F : U \rightarrow V$ „springen“. Für die Funktion $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ z. B. ist $\text{rg}_0 f = 0$ und $\text{rg}_a f = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Wir werden nun eine lokale *Normalform* für Subimmersionen herleiten. Dazu ist aber i. A. sowohl im Bild- als auch im Urbildraum ein *lokaler differenzierbarer Koordinatenwechsel* notwendig. Man erinnere sich an das „Gegenstück“ im linearen Fall: Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ vom Rang r wird

nach Einführung von geeigneten linearen Koordinaten auf V und W beschrieben durch eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Einführung von linearen Koordinaten bedeutet aber die Verwendung eines Isomorphismus $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und entsprechend für W , so daß in dem nachfolgenden Diagramm die untere waagerechte Abbildung in der eben beschriebenen Normalform ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Satz 24.11 (Rangsatz) *Es sei $\operatorname{rg}_x F = \operatorname{const.} = r$ lokal um $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es lokale differenzierbare Koordinaten ξ_1, \dots, ξ_n um „ $a = 0$ “ in U und (η_1, \dots, η_m) um „ $b = F(a) = 0$ “ in V , so daß*

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0).$$

D. h. genauer: Nach evtl. Verkleinerung von U und V gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi : U' \rightarrow U$ mit $0 \in U' \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi(0) = a$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : V' \rightarrow V$ mit $0 \in V' \subset \mathbb{R}^m$ und $\Psi(0) = b$, so daß für die Zusammensetzung $\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ gilt:

$$(\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi)(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0).$$

Speziell hat man in solchen Koordinaten

a) $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots, 0)$ für eine Immersion, also wenn $r = n \leq m$,

bzw.

b) $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ für eine Submersion, also wenn $r = m \leq n$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung von vornherein $a = 0$ und $b = F(a) = 0$ annehmen. Nach Verkleinerung der Umgebungen U, V und Umbenennung der Variablen, d. h. nach Vor- bzw. Nachschaltung von linearen Isomorphismen, erfüllt

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

die Bedingung, daß für alle $x \in U$ die Untermatrix

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq r}$$

der Funktionalmatrix $D_x F$ invertierbar ist:

$$\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq r} \neq 0, \quad x \in U.$$

Betrachte nun zuerst die Abbildung

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Wegen

$$D\Phi = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq r} & * \\ \hline 0 & E_{m-r} \end{array} \right)$$

ist Φ lokal um 0 ein Diffeomorphismus. Wir verkleinern wieder entsprechend die Umgebungen.

Mit dem (lokal um den jeweiligen Ursprung zu verstehenden) Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow F & \swarrow G = F \circ \Phi^{-1} \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

folgt aus der Beschreibung von F und Φ sofort, daß G gegeben wird durch

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_r, g_{r+1}(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, g_m(\xi_1, \dots, \xi_n)),$$

und da Φ eine differenzierbare Koordinatentransformation auf U nahe 0 ist, muß wegen der Kettenregel auch $\text{rg } G = r = \text{const.}$ sein. Wir können daher wieder x statt ξ schreiben und von vornherein annehmen an, daß F schon die Gestalt

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, f_{r+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)), \quad \text{rg}_x F = r = \text{const.}$$

besitzt. Nun ist in diesem Fall

$$DF = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{\substack{j=r+1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} & \end{array} \right).$$

Wegen $\text{rg}_x F = r$ muß daher

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{für } j = r + 1, \dots, m, k = r + 1, \dots, n$$

gelten. Bei erneuter Verkleinerung der Umgebung (wähle z. B. einen geeigneten Würfel) gilt dann

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) =: h_j(x_1, \dots, x_r).$$

Nun ist $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, lokal um 0 gegeben durch

$$y = (y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m - h_m(y_1, \dots, y_r)),$$

wiederum ein Diffeomorphismus im Bildbereich, und bzgl. dieser neuen Koordinaten wird F (bei erneuter Verkleinerung der Ursprungs-Umgebung) gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

Die Abbildung $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ zerlegt sich in eine Projektion $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$ und anschließende Injektion $i : (x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Dies liefert lokal für eine Subimmersion F die Darstellung $F = (\Psi \circ i) \circ (p \circ \Phi^{-1})$, wobei offensichtlich $\Psi \circ i$ eine Immersion und $p \circ \Phi^{-1}$ eine Submersion ist. - Diese Überlegung liefert also die

Folgerung 24.12 Eine Subimmersion ist lokal stets die Zusammensetzung von einer Submersion mit einer Immersion.

Eine weitere leichte Folgerung sei zum Schluß notiert:

Folgerung 24.13 Ist F eine Submersion, so ist F eine offene Abbildung (d. h. $F(U')$ ist offen in V für alle offenen Mengen $U' \subset U$).

25 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten

Der Begriff der *Untermannigfaltigkeit* basiert auf dem Satz über implizite Funktionen und seinen Varianten. Wir führen den Begriff sofort durch eine Reihe von äquivalenten Eigenschaften ein, die wir teilweise schon früher kennengelernt haben. Im zweiten Teil dieses Kapitels klären wir den Zusammenhang mit den *parametrisierten* Objekten, die bisher ausschließlich in unser Blickfeld geraten sind (parametrisierte *Kurven*, *Flächen* und *Hyperflächen*). Es wird sich herausstellen, daß deren *Spuren* zumindest *lokal bzgl. des Parameterbereichs* Untermannigfaltigkeiten der erwarteten Dimension darstellen. Damit dies auch *global* richtig ist, muß noch eine weitere topologische Bedingung erfüllt sein.

Satz 25.1 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine (nichtleere) Teilmenge, $a \in M$ und $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) *Es gibt eine Umgebung $U_1 = U_1(a) \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $F : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $F(a) = 0$, so daß*

$$\text{rang}(DF)(x) = n - k, \quad x \in U_1,$$

und

$$M \cap U_1 = F^{-1}(0) = \{x \in U_1 : F(x) = 0\} = \{x \in U_1 : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}.$$

- ii) *Es gibt (nach Umbenennung der Variablen) eine Umgebung $U_2 = U \times V$, $U = U(a') \subset \mathbb{R}^k$, $V = V(a'') \subset \mathbb{R}^m$, $n = k + m$, $a = (a', a'')$, und eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $g : U \rightarrow V$, so daß*

$$M \cap U_2 = \text{Graph } g = \{(x, y) \in U \times V : y = g(x)\}.$$

- iii) *Es gibt eine Umgebung $U_3 = U_3(a) \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $G : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $G(a) = 0$, so daß*

$$\text{rang}(DG)(x) = n - k, \quad x \in U_3,$$

und

$$M \cap U_3 = G^{-1}(0) = \{x \in U_3 : g_1(x) = \dots = g_N(x) = 0\}.$$

- iv) *Es gibt eine Umgebung $U_4 = U_4(a) \subset \mathbb{R}^n$ und einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\Phi : U_4 \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\Phi(a) = 0$ und*

$$\Phi(M \cap U_4) = \{(x_1, \dots, x_n) \in W : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn man überall die Voraussetzung \mathcal{C}^1 durch \mathcal{C}^ℓ mit einem festen ℓ , $1 \leq \ell \leq \infty$, ersetzt.

Bemerkung. Die Bedingung i) ist, nach evtl. Verkleinerung der Umgebung U_1 , schon dann erfüllt, wenn die *Maximalitätsbedingung* für den Rang der Funktionalmatrix von F nur im Punkte a Bestand hat (siehe Kapitel 24): $\text{rang}(DF)(a) = n - k$. Sie ist also gleichbedeutend damit, daß die Abbildung F in (der Umgebung von) a eine *Submersion* ist.

Definition. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes heißt a ein *Mannigfaltigkeitspunkt* von M der Dimension k (und Klasse \mathcal{C}^ℓ). Sind die Voraussetzungen in jedem Punkt $a \in M$ erfüllt, so heißt M eine (\mathcal{C}^ℓ -) *Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n der Dimension k . Manchmal wird auch die *leere Menge* als Untermannigfaltigkeit der Dimension $-\infty$ aufgefaßt.

Bemerkung. Ist $a \in M$ ein Mannigfaltigkeitspunkt, so gibt es eine Umgebung $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$, so daß $M \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Vereinigt man alle diese Umgebungen, so sieht

man sofort *Jede Untermannigfaltigkeit M ist lokal abgeschlossen in \mathbb{R}^n , d. h. eine abgeschlossene Teilmenge (bzgl. der Relativtopologie) einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$.*

Die einfachsten *Beispiele* sind die folgenden.

1. Jede *einpunktige* (oder *endliche*) Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine (nulldimensionale) Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .
2. Jede *offene* Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .
3. Die Menge

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b)\},$$

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein nicht leeres, offenes Intervall, ist eine Untermannigfaltigkeit (der Dimension 1) von \mathbb{R}^2 , dagegen nicht die Menge

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}.$$

Beweis von Satz 1. i) \iff ii). Dies ist in der Richtung von i) nach ii) der *Satz über implizite Funktionen*. Aus der Formel

$$(Dg)(x) = -((D_y F)(x, g(x)))^{-1} ((D_x F)(x, g(x)))$$

folgt $g \in \mathcal{C}^\ell$, falls $F \in \mathcal{C}^\ell$, da nach der Cramerschen Regel und dem Bildungsgesetz von Determinanten die Einträge der Matrix $((D_y F)(x, g(x)))^{-1}$ in \mathcal{C}^ℓ liegen.

Von ii) nach i) ist wesentlich einfacher: Schreibt man die Koordinaten der Situation entsprechend als $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) =: (x, y)$, so besitzt $F(x, y) := y - g(x)$ die gewünschten Eigenschaften.

i) \implies iii). Man braucht nur $G := F$, insbesondere $N := m = n - k$ zu setzen.

iii) \implies iv). Nach dem *Rangatz* 24.11 schreibt sich G nach geeigneter lokaler \mathcal{C}^ℓ -Koordinatentransformation in der Form

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-k}, 0, \dots, 0).$$

Also wird $G^{-1}(0)$ beschrieben durch das Verschwinden von $n - k$ Koordinaten.

iv) \implies i). Setze $U_1 = U_4$ und $\Phi := (f_1, \dots, f_n)$. Dann erfüllt $F = (f_{k+1}, \dots, f_n)$ die Voraussetzungen von i). Denn wegen des Laplaceschen Entwicklungssatzes wäre $(\det \Phi) = 0$ an allen Stellen x , an denen $\text{rang}(DF)(x) < n - k$. \square

Bemerkung. Will man den etwas komplizierten Beweis des Rangatzes vermeiden, so kann man unter Verzicht auf die Charakterisierung iii) gleich von ii) nach iv) wie folgt schließen: Betrachte die Abbildung $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y - g(x))$. Es ist

$$D\Phi = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -Dg & E_m \end{pmatrix}$$

und damit $\det(D\Phi)(a) = 1$. Nach Verkleinerung von U und V bildet Φ die Umgebung $U \times V$ von a (ohne Einschränkung sei $a = 0$) auf eine Umgebung W von 0 in \mathbb{R}^n mit Variablen $(x_1, \dots, x_n, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ab, so daß $\Phi(M \cap (U \times V)) = \{x \in W : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Obwohl die anschließende Folgerung schon als Teil ii) in Satz 1 enthalten ist, soll sie noch einmal gesondert als Angabe einer großen Beispiellasse notiert werden.

Folgerung 25.2 *Es sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge, eine \mathcal{C}^ℓ -differenzierbare Abbildung. Dann ist ihr Graph*

$$\Gamma = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m : y = g(x)\}$$

eine k -dimensionale \mathcal{C}^ℓ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. \square

Ebenso einfach zeigt man mit Hilfe von irgendeiner der Standard-Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten, daß sich diese „stabil“ unter kartesischen Produkten verhalten.

Satz 25.3 *Ist M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^m und N eine solche von \mathbb{R}^n , so ist $M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{m+n} mit $\dim_{(a,b)} M \times N = \dim_a M + \dim_b N$, $(a, b) \in M \times N$. \square*

Beispiel. Wir wollen auch die Nützlichkeit der auf dem Rangsatz basierenden Charakterisierung iii) von Untermannigfaltigkeiten an einem Beispiel demonstrieren. Die drei Funktionen $f_j: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_4 - x_2 x_3. \end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst *direkt*, aber etwas mühsam, daß die gemeinsame Nullstellenmenge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

an jeder Stelle $a \in M \cap (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ eine *zweidimensionale* Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 ist. Ist nämlich z. B. $x_1 \neq 0$, so ist notwendig wegen der ersten Gleichung $x_3 = x_2^2/x_1$ und wegen der dritten Gleichung $x_4 = x_2 x_3/x_1 = x_2^3/x_1^2$. Damit ist die zweite Gleichung automatisch erfüllt. Die Menge ist also lokal um einen Punkt mit $x_1 \neq 0$ der Graph der Abbildung $x_3 = g_3(x_1, x_2) = x_2^2/x_1$, $x_4 = g_4(x_1, x_2) = x_2^3/x_1^2$. Entsprechendes ist aus Symmetriegründen (die Gleichungen bleiben invariant unter Vertauschung von x_1 mit x_4 und x_2 mit x_3) richtig an Stellen mit $x_4 \neq 0$. Ähnlich argumentiert man bei $x_2 \neq 0$ (und bei $x_3 \neq 0$); denn dann ist notwendig wegen der ersten Gleichung $x_1 \neq 0$ und wir sind wieder im ersten Fall.

Man kann also außerhalb des Nullpunkts *lokal* stets eine geeignete unter den drei Gleichung fortlassen. Dies ist aber *global* nicht möglich. Betrachtet man z. B. nur die beiden ersten Gleichungen, so erlauben diese alle Punkte der Ebene $x_2 = x_3 = 0$ als Lösung. Diese werden aber durch die dritte Gleichung zum größten Teil (genauer: bis auf zwei Geraden) eliminiert. Läßt man die zweite Gleichung fort, so ist zumindest noch die Gerade $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ in dem Nullstellengebilde enthalten. Diese Gerade liegt aber nicht vollständig in der Nullstellenmenge der zweiten Gleichung.

Man kann den ersten Teil der vorigen Untersuchungen mit dem *Rangsatz* schneller, oder doch zumindest konzeptioneller, erledigen: Man schreibt $F := {}^t(f_1, f_2, f_3)$ und berechnet das Differential zu

$$DF = \begin{pmatrix} x_3 & -2x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_4 & -2x_3 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht (obwohl auch hierfür Fallunterscheidungen nötig sind) nachzuprüfen, daß diese Matrix an allen Stellen $x \neq 0$ in M den Rang 2 besitzt. Nach dem Rangsatz ist somit $M \setminus \{0\}$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. (Man beachte, daß $2 = 4 - 2$).

Warnung. Im Nullpunkt liegt jedoch kein Mannigfaltigkeitspunkt von M vor. Dies beweisen wir im folgenden Kapitel durch Berechnung des *Tangentialkegels* T_0M .

Man kann Satz 1 über die Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten auf die verschiedensten Weisen umformulieren. Die folgende Definition ist nur eine andere Sprechweise für den im vorigen Kapitel eingeführten Begriff der *Submersion*.

Definition. Eine C^1 -Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *regulär* im Punkte $a \in U$, U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , wenn ihr Differential $(DF)(a)$ surjektiv ist, d. h. wenn ($m \leq n$ und) $\text{rang}(DF)(a) = m$

gilt. Ein Element $c \in \mathbb{R}^m$ heißt ein *regulärer Wert* von F , wenn F in jedem Punkt $a \in F^{-1}(c)$ regulär ist (insbesondere, wenn $F^{-1}(c)$ leer ist). Im anderen Fall spricht man von *singulären Punkten* bzw. *singulären Werten*.

Bemerkung. Regularität einer Abbildung F ist eine *offene Eigenschaft*: Ist F regulär in a , so auch in einer ganzen Umgebung $U = U(a)$. Insbesondere ist dann $c = F(a)$ ein regulärer Wert von $F|_U$.

Satz 25.4 *Ist c ein regulärer Wert von F , so ist $F^{-1}(c)$ (leer oder) eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension $n - m$.*

Beispiele. 1. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine *symmetrische Matrix* und $q(x) := {}^t x A x$, $x \in \mathbb{R}^n$, die zugeordnete *quadratische Form*. Dann ist $(Dq)(a) = \text{grad } q(a) = 2 {}^t a A$ und

$$c = q(a) = {}^t a A a = \frac{1}{2} \langle \text{grad } q(a), a \rangle.$$

Somit ist $c = 0$ ein singulärer Wert und $a = 0$ ein singulärer Punkt von q , aber $c \neq 0$ ist ein regulärer Wert. Somit ist, falls nicht leer, die Menge

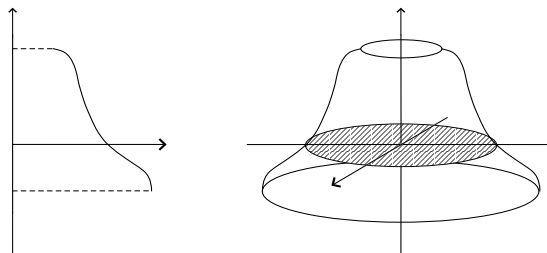
$$\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) = {}^t x A x = c\}, \quad c \neq 0,$$

eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit („Hyperfläche“). Man nennt sie auch eine (nichtsinguläre) *Quadrik*. Offensichtlich kann man dann nach Multiplikation der Matrix A mit einer geeigneten Konstanten stets $c = 1$ annehmen.

2. Es sei $C = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 , wobei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ bezeichnet mit 0 als regulärem Wert. Man sieht dann sofort, daß auch die auf einer geeigneten offenen Teilmenge V von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ definierte Funktion $g(x, y, z) := f(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ den regulären Wert 0 besitzt. Mit anderen Worten: Die „Rotationsfläche“

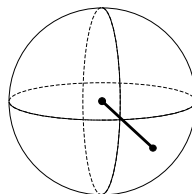
$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

von C ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .



Figur 25.1

Weitere interessante *Beispiele* sind sogenannte *Konfigurationsräume*, die vor allem in der Physik eine Rolle spielen. Die möglichen Lagen eines *Pendels* im Raum fügen sich zusammen zu der Untermannigfaltigkeit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

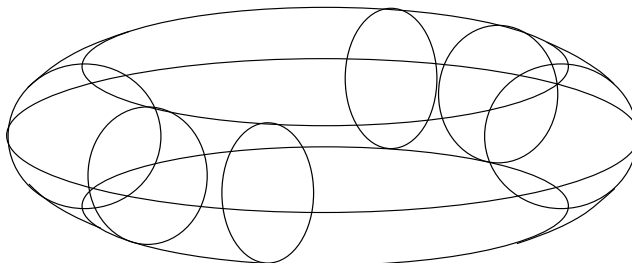


Figur 25.2

Für ein *Doppelpendel* in der *Ebene* hat man entsprechend den Konfigurationsraum

$$S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 .$$

Dieser ist zweidimensional, also keine Hyperfläche. Man kann sich aber ein geeignetes Modell im \mathbb{R}^3 verschaffen:



Figur 25.3

Die Lage eines *Stabes* der Länge $L > 0$ in \mathbb{R}^3 wird beschrieben durch seinen Anfangspunkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ und Endpunkt $y = (y_1, y_2, y_3)$, zwischen denen die Bedingung

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j)^2 = L^2$$

herrschen muß. Dies ist eine nichtsinguläre Quadrik in \mathbb{R}^6 , also ein 5-dimensionale Mannigfaltigkeit. Man kann hier aber (lokal) auch ganz andere Parameter wählen: Die Koordinaten des Anfangspunktes, (x_1, x_2, x_3) , und zwei Winkel, die die Lage des Stabes relativ zu einem kartesischen Koordinatensystem angeben. Ein anderes Modell ist somit $\mathbb{R}^3 \times S^2$. Es hängt eng mit der sogenannten *POINCARÉ-Gruppe* der euklidischen Bewegungen des \mathbb{R}^3 zusammen.

Bemerkung. Ist der Stab ohne jede Markierung, so kann man zwei Lagen desselben nicht voneinander unterscheiden, wenn die beiden Endpunkte vertauscht wurden. In diesem Fall ist der wahre Konfigurationsraum der *Quotient* des obigen nach der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x', y') = (x, y) \quad \text{oder} \quad = (y, x) .$$

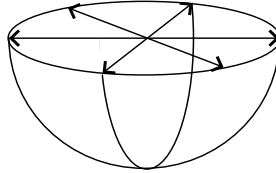
Dabei wird man i. a. aus der Kategorie der Untermannigfaltigkeiten herausgeführt. Es gibt jedoch allgemeine Sätze, die einem sagen, unter welchen Voraussetzungen der Quotient einer (Unter-)Mannigfaltigkeit nach einer Gruppenaktion wieder eine (zumindest abstrakte) *Mannigfaltigkeit* ist (siehe auch den Anhang zu diesem Kapitel). Im obigen Beispiel operiert die multiplikative Gruppe $\{\pm 1\}$. Wir überlassen dem Leser eine entsprechende Diskussion des Konfigurationsraums eines *starrten Dreiecks* im \mathbb{R}^3 mit unterscheidbaren bzw. ununterscheidbaren Ecken oder den von zwei Teilchen im \mathbb{R}^3 , die nicht zu unterscheiden sind (eine Situation, die typisch ist für die *Quantenmechanik*.)

Beispiel. Der n -dimensionale reelle *projektive Raum* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ist eine der wichtigsten abstrakten Mannigfaltigkeiten der Theoretischen Mathematik. Als Punktmenge ist sie nichts anderes als die Gesamtheit aller *Geraden* durch den Nullpunkt in \mathbb{R}^{n+1} . Jede solche Gerade schneidet die Einheitskugel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in genau zwei Punkten, die *diametral* gegenüber liegen. Man bezeichnet die auf S^n eingeschränkte Abbildung $\tau(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, auch als die *Antipodal-Abbildung*. Mit dieser ist dann

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = S^n / \tau ,$$

und diese Beschreibung kann man dazu benutzen, um den projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ mit einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeitsstruktur zu versehen.

Eine Vorstellung dieses (kompakten) Raumes kann man sich im Falle $n = 2$ verschaffen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß man ein *topologisches Modell* von $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ erhält, wenn man auf der südlichen Hemisphäre einschließlich des Äquators auf dem Äquator gegenüber liegende Punkte identifiziert.



Figur 25.4

Durch geeignete Deformation dieses Bildes kann man ein Modell konstruieren, welches in \mathbb{R}^3 liegt, aber keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist, da es Selbstdurchdringungen enthält. Man nennt dieses Modell die *Kreuzhaube*.

Bemerkung. Nach einem Satz von WHITNEY läßt sich jede abstrakte n -dimensionale Mannigfaltigkeit stets als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n+1} „realisieren“. (Zur Formulierung siehe den Anhang zum vorliegenden Kapitel). Diese *Einbettung* ist aber i. a. nicht kanonisch, worauf schon die feste *Einbettungsdimension* $2n+1$ bei gegebener Dimension n hindeutet. - Wir geben hierzu noch zwei Beispiele.

Beispiele. 1. Das kartesische Produkt $S^m \times S^n$ zweier Sphären ist per Konstruktion eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{(m+1)+(n+1)} = \mathbb{R}^{m+n+2}$. Tatsächlich aber läßt sich das Produkt stets als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{m+n+1} realisieren. Am bekanntesten ist diese Realisierung im Falle $m = n = 1$ als Oberfläche des *Volltorus*, die wir schon weiter oben skizziert haben.

2. Der zweidimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ läßt sich auf sehr schöne Weise wie folgt im \mathbb{R}^6 realisieren: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ werde definiert durch

$$f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

Man zeigt dann (z. B. mit Hilfe der Charakterisierung durch Graphen, siehe unten): Das Bild $M := f(S^2)$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^6 . Es gilt für $a, b \in S^2$ genau dann $f(a) = f(b)$, wenn $b = \pm a$.

Bemerkung. Somit „faktoriert“ die Abbildung f über die surjektive Abbildung $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ und liefert eine *differenzierbare Einbettung* der projektiven Ebene \mathbb{P}_2 in \mathbb{R}^6 , wenn man die abstrakte Mannigfaltigkeit \mathbb{P}_2 mit der kanonischen differenzierbaren Struktur versieht, die von der Projektion π herrührt. Schaltet man noch die kanonische Projektion $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ dahinter, so liefert dies tatsächlich auch eine Einbettung $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$, die in der Algebraischen Geometrie als eine *VERONESE-Einbettung* bekannt ist.

Wir beginnen mit der letzten Aussage vor der Bemerkung, die als solche nicht weiter begründet werden soll: Es ist zu zeigen, daß für $a = (x, y, z)$, $a' = (x', y', z') \in S^2$ gilt: $f(a') = f(a) \iff a' = \pm a$. Die Richtung \implies ist leicht nachzurechnen. Umgekehrt impliziert $f(a') = f(a)$ die Gleichungen

$$(x')^2 = x^2, \quad (y')^2 = y^2, \quad (z')^2 = z^2,$$

aus denen schon $x' = \pm x$, $y' = \pm y$, $z' = \pm z$ folgt. Insbesondere muß mit jeder verschwindenden Koordinate von a auch die entsprechende Koordinate von a' Null sein. Aus den drei weiteren Gleichungen

$$x'y' = xy, \quad y'z' = yz, \quad z'x' = zx$$

ergibt sich dann unmittelbar, wenn z. B. $z' = z \neq 0$, daß $y' = y$ und $x' = x$. Ist hingegen $z' = -z \neq 0$, so folgt $y' = -y$ und $x' = -x$.

Man kann nun S^2 überdecken mit 6 „Karten“⁴⁹, die durch Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach einer der Variablen entsteht. Eine solche ist z. B. gegeben durch die Parametrisierung $\varphi(x, y) := (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$, $x^2 + y^2 < 1$. Da φ den offenen Einheitskreis $D \subset \mathbb{R}^2$ injektiv auf die „echte“ obere Hemisphäre $S^2_+ := \{a \in S^2 : z > 0\}$ abbildet und S^2_+ keine antipodalen Punkte enthält, ist die Zusammensetzung $\chi := f \circ \varphi$ injektiv. Um zu beweisen, daß das Bild $M := f(S^2)$ eine (2-dimensionale) Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^6 ist, genügt der Nachweis, daß χ (und die 5 anderen Abbildungen des gleichen Typs) eine zweidimensionale *lokale Parametrisierung* von M liefert. Da wir die *Injektivität* von χ schon abgehakt haben, müssen wir also noch zeigen: $D\chi$ besitzt Rang 2 und χ ist ein Homöomorphismus von dem Einheitskreis D nach $\chi(D) \subset M$, wobei $M \subset \mathbb{R}^6$ mit der Relativtopologie zu verstehen ist. (Siehe hierzu und dem folgenden auch Satz 5 und die spätere Diskussion von *parametrisierten* Mannigfaltigkeiten).

Da χ explizit gegeben ist durch

$$S^2 \ni (x, y) \longmapsto (x^2, y^2, 1 - (x^2 + y^2), xy, y\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, x\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

berechnet sich $D\chi$ zu

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ -2x & 2y \\ y & x \\ -\frac{xy}{\sqrt{\varphi_3}} & \sqrt{\varphi_3} - \frac{y^2}{\sqrt{\varphi_3}} \\ \sqrt{\varphi_3} - \frac{x^2}{\sqrt{\varphi_3}} & \frac{xy}{\sqrt{\varphi_3}} \end{pmatrix},$$

wobei $\sqrt{\varphi_3}$ für $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ steht. Die aus der dritten und vierten Zeile gebildete Unterdeterminante verschwindet nicht an den Stellen in $D \setminus \{0\}$, und im Ursprung ist die aus den beiden letzten Zeilen gebildete Unterdeterminante gleich 1.

Am schwierigsten ist für den noch nicht topologisch Versierten die letzte Behauptung. Da die Abbildung φ die Sphäre (lokal) als Graphen der Funktion φ_3 darstellt, definiert sie einen Homöomorphismus von D auf die obere Hemisphäre S^2_+ mit der induzierten Topologie. Wir brauchen also, da die Einschränkung f_+ von f auf S^2_+ (stetig und) injektiv ist, nur noch zu zeigen, daß f_+ eine *offene* Abbildung ist, d. h. offene Mengen in der Relativtopologie von S^2_+ auf offene Teilmengen von M in der Relativtopologie abbildet (denn dann ist die Umkehrabbildung stetig). Dazu reicht aber auch die *Abgeschlossenheit* von f_+ , die man wie folgt einsieht: Es sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine *abgeschlossene* Teilmenge. Da S^2 eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^3 ist, ist auch $S^2 \cap A$ kompakt und damit das stetige Bild $f(S^2 \cap A)$ kompakt und damit abgeschlossen in \mathbb{R}^6 . Offensichtlich ist aber $f_+(S^2_+ \cap A) = f(S^2 \cap A) \cap f(S^2_+)$ und folglich $f_+(S^2_+ \cap A)$ abgeschlossen in $f(S^2_+)$.

Bemerkung. Man kann das Bild $M = f(S^2)$ auch durch Gleichungen beschreiben, aber ähnlich wie in dem früheren Beispiel nicht *global* durch 4 Gleichungen allein. Man zeigt in der *Algebraischen Geometrie*, daß das Bild von \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^6 beschrieben wird durch das Verschwinden der 6 offensichtlichen Gleichungen

$$x_4^2 - x_1x_2, \quad x_5^2 - x_2x_3, \quad x_6^2 - x_1x_3, \quad x_4x_5 - x_2x_6, \quad x_4x_6 - x_1x_5, \quad x_5x_6 - x_3x_4.$$

Dies sind genau alle erzeugenden *Relationen* zwischen den Funktionen $x_1 = x^2$, $x_2 = y^2$, $x_3 = z^2$, $x_4 = xy$, $x_5 = yz$, $x_6 = zx$, wie man auch durch systematisches Nachrechnen bei einigen Fallunterscheidungen nachrechnen kann. Hinzu kommt als erste Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, die von

⁴⁹Siehe zu diesem Begriff weiter unten.

$(x_1, \dots, x_6) \in f(S^2)$ herkommt. Als Funktionalmatrix dieser 7 Funktionen gewinnt man sofort

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & -2x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 & 0 & -2x_5 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & -2x_6 \\ 0 & -x_6 & 0 & x_5 & x_4 & -x_2 \\ -x_5 & 0 & 0 & x_6 & -x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_4 & -x_3 & x_6 & x_5 \end{pmatrix},$$

von der man sich verhältnismäßig leicht überzeugt, daß sie an allen Stellen von M den Rang 4 besitzt. Somit ist auch nach dem *Rangsatz* M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^6 .

Wir kommen nun in Ergänzung zu Satz 1 zu der *parametrischen* Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten.

Satz 25.5 *Ein Punkt $a \in M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein k -dimensionaler \mathcal{C}^ℓ -Mannigfaltigkeitspunkt von M , falls die folgende Bedingung erfüllt ist :*

- v) *Es gibt eine Umgebung $U_5 = U_5(a) \subset \mathbb{R}^n$, eine Umgebung $W = W(0) \subset \mathbb{R}^k$ und eine injektive \mathcal{C}^ℓ -Abbildung $\varphi : W \rightarrow U_5$ mit $\varphi(0) = a$, $\text{rang}(D\varphi)(t) = k$, $t \in W$, so daß*

$$M \cap U_5 = \varphi(W), \quad \text{und} \quad \varphi : W \rightarrow M \cap U_5$$

ein Homöomorphismus von W nach $M \cap U_5$ (versehen mit der Relativtopologie) ist. Insbesondere ist φ eine Immersion.

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung ii) und zeigen, daß daraus die Aussage v) folgt. Ist also $g : U \rightarrow V$ wie in ii) gegeben, so setze man $W = U$, $U_5 = U_2 = U \times V$ und (ohne Einschränkung sei $a = 0$):

$$\varphi : \begin{cases} W \rightarrow U_5 \\ t \mapsto (t, g(t)) \end{cases}.$$

Offensichtlich ist φ eine injektive \mathcal{C}^ℓ -Abbildung mit $(D\varphi) = {}^t(E_k, Dg)$; also ist $\text{rang}(D\varphi) = k$, und weiter gilt

$$\varphi(W) = \text{Graph } g = M \cap U_5.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\varphi : W \rightarrow \text{Graph } g$ ein Homöomorphismus ist: Selbstverständlich ist $\varphi : W \rightarrow U_5$ und damit auch $\varphi : W \rightarrow M \cap U_5$ stetig, und die Umkehrabbildung ist die Einschränkung der stetigen Projektion $U \times V \rightarrow U$ auf den Unterraum $M \cap U_5 \subset U_5$. Es ist zudem völlig trivial, daß ℓ -fache stetige Differenzierbarkeit von g dieselbe Eigenschaft von φ impliziert.

Für die umgekehrte Richtung sei v) vorausgesetzt. Wir schreiben dabei φ ohne Einschränkung als Zeilenvektor in der Form

$$\varphi = \left(\underbrace{\beta}_k, \underbrace{\gamma}_m \right), \quad (D\beta)(0) \text{ invertierbar.}$$

Dann ist in einer Umgebung $W_1 = W_1(0) \subset W(0)$ die Abbildung $\beta : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus von W_1 auf eine offene Umgebung $U = U(a') \subset \mathbb{R}^k$. Sei $\alpha := \beta^{-1} : U \rightarrow W_1$ gesetzt. Dann ist $\varphi \circ \alpha : U \rightarrow U_5$ eine injektive \mathcal{C}^ℓ -Abbildung mit

$$\text{rang}(D(\varphi \circ \alpha)) = \text{rang}((D\varphi) \cdot (D\alpha)) = \text{rang}(D\varphi) = k,$$

und

$$\varphi \circ \alpha : U \longrightarrow W_1 \longrightarrow \varphi(W_1) (\subset M \cap U_5)$$

ist ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\varphi(W_1)$ eine offene Teilmenge von $M \cap U_5$ und daher von der Gestalt

$$(\varphi \circ \alpha)(U) = \varphi(W_1) = M \cap U'_5, \quad U'_5 \text{ offen in } \mathbb{R}^n, \quad U'_5 \subset U_5.$$

Nun ist aber

$$(\varphi \circ \alpha)(x) = (x, g(x)), \quad g(x) = \gamma(\alpha(x))$$

und damit nach evtl. Verkleinerung von U mit hinreichend kleiner Umgebung $V = V(a'')$, so daß $U \times V \subset U_5$:

$$M \cap (U \times V) = \text{Graph } g. \quad \square$$

Bemerkungen. 1. Wir werden weiter unten zeigen, daß man in der Bedingung v) von Satz 5 nicht auf die - bei erstem Hinsehen nicht sofort einsichtige - Forderung der *Homöomorphie* verzichten kann.

2. Satz 5 ist die Grundlage dafür, daß Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n tatsächlich auch *abstrakte Mannigfaltigkeiten* im Sinne des Anhangs zu diesem Kapitel sind. Dies ist der Inhalt der folgenden Definition und des anschließenden Satzes.

Definition und Bemerkung. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^ℓ -Untermannigfaltigkeit der Dimension k , und es sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^ℓ -Abbildung der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\text{rang}(D\varphi)(t) = k, \quad t \in V,$
2. $\varphi(V) \subset M,$
3. $\varphi(V) =: U$ ist eine *offene* Teilmenge von M (versehen mit der Relativtopologie), und die Abbildung $\varphi : V \rightarrow U$ ist ein Homöomorphismus.

(Insbesondere ist dann φ eine *injektive Immersion*). Dann heißt das Tripel (V, φ, U) eine *lokale Parametrisierung* von M , und das Tripel $(U, \psi := \varphi^{-1}, V)$ heißt eine *Karte* auf M . Ein *Atlas* von M besteht aus einem System $(U_\iota, \psi_\iota, V_\iota), \iota \in I$, von Karten mit

$$\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = M.$$

Aufgrund von Satz 5 besitzt jeder Punkt $a \in M$ beliebig kleine Umgebungen $U \subset M$, die Bestandteil einer Karte sind. Insbesondere besitzt jede Untermannigfaltigkeit M einen Atlas.

Je zwei Karten in einem Atlas von M besitzen eine *differenzierbare Verträglichkeitsbedingung*. Dies ist besagt der folgende Satz, den man zur Grundlage für die Definition *abstrakter* Mannigfaltigkeiten nimmt (siehe Anhang).

Satz 25.6 Sind (U_1, ψ_1, V_1) und (U_2, ψ_2, V_2) zwei Karten der C^ℓ -Untermannigfaltigkeit M , so ist die durch $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ gegebene Abbildung

$$V_1 \supset \psi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_2(U_2 \cap U_1) \subset V_2$$

ein C^ℓ -Diffeomorphismus.

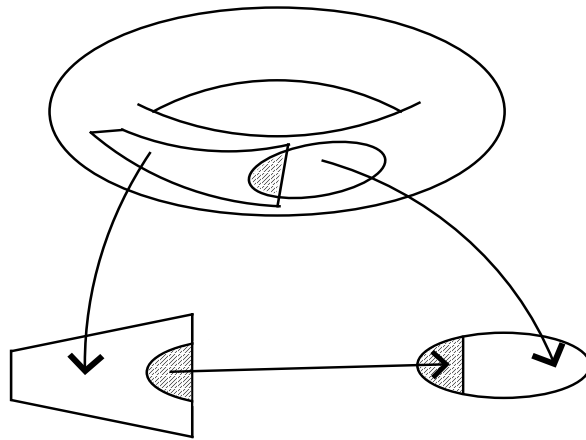
Beweis. Da nach Voraussetzung die Abbildungen ψ_1 und ψ_2 Homöomorphismen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $U_1 = U_2 =: U$. Nach Voraussetzung ist $\tau := \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ ein Homöomorphismus; es genügt zu zeigen, daß τ an jeder Stelle $t_0 \in V_1$ k -mal stetig differenzierbar ist. Da dies eine lokale Eigenschaft ist, können wir U als Umgebung des Punktes $x_0 := \psi_1^{-1}(t_0)$ noch weiter verkleinern und damit z. B. nach iv) in Satz 1 annehmen, daß es eine Umgebung

$U_4 \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und einen \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus $\Phi : U_4 \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $U = U_4 \cap M = \Phi^{-1}(E_k \cap W)$ mit der k -dimensionalen Ebene $E_k := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_{n+1} = \dots = y_n = 0\}$. Betrachte nun $\Phi \circ \varphi_1$, $\varphi_1 = \psi_1^{-1}$. Da φ_1 eine Immersion ist, ist auch $\Phi \circ \varphi_1$ eine solche, und nach Konstruktion schreibt sie sich in der Form $(\Phi \circ \varphi_1)(t) = {}^t(g_1(t), \dots, g_k(t), 0, \dots, 0)$. Damit ist die durch g_1, \dots, g_k definierte Abbildung von V_1 nach E_k lokal ein \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus. Das gleiche gilt für $\Phi \circ \varphi_2$. Wegen

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (\Phi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\Phi \circ \varphi_1)$$

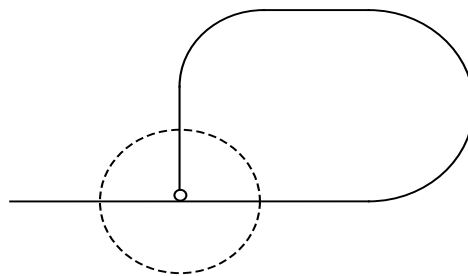
folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Das charakteristische Bild zu Satz 6 ist das folgende; es findet sich in jedem Text über Mannigfaltigkeiten.



Figur 25.5

Warnung und Beispiel. Es gibt injektive Abbildungen $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $W \subset \mathbb{R}^k$ und maximalem Rang von $D\varphi$, also *injektive Immersionen*, deren Bild keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Das Bild einer solchen Abbildung kann im eindimensionalen Fall etwa wie folgt aussehen:



Figur 25.6

Dies ist offensichtlich keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 , wie man an dem Ausschnitt in der gestrichelt gezeichneten Umgebung sehen kann. Das Beispiel zeigt, daß man in v) auf die Bedingung der Homöomorphie nicht verzichten darf.

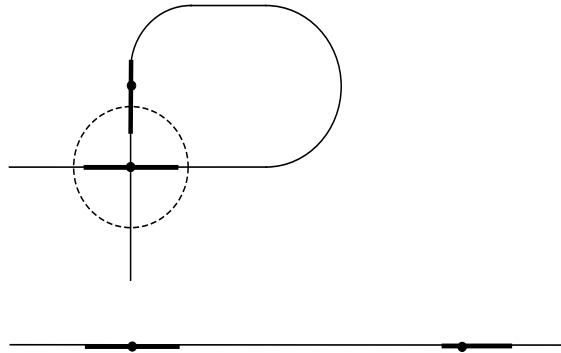
Wir wollen diesen Sachverhalt noch etwas genauer beschreiben und analysieren.

Definition. Ein Tripel $(V, \varphi, \varphi(V))$ mit einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ und einer \mathcal{C}^ℓ -Immersion $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine *regulär* (oder auch *glatt*) *parametrisierte k -dimensionale Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung und Warnung. Jede k -dimensionale Untermannigfaltigkeit M ist auch (zumindest lokal) eine glatt parametrisierte Mannigfaltigkeit. Wie wir oben gesehen haben, braucht aber für eine regulär parametrisierte Mannigfaltigkeit $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bildmenge $\varphi(V)$ keine Untermannigfaltigkeit zu sein (sogar dann nicht, wenn φ injektiv ist).

Offensichtlich folgt aber aus dem Beweis des zuvor behandelten Satzes 5 oder noch einfacher aus dem *Rangsatz*, daß dies *lokal bzgl. des Parameterraumes* richtig ist.

Satz 25.7 Sei $(V, \varphi, \varphi(V))$ eine glatt parametrisierte Mannigfaltigkeit, und es seien $a \in \varphi(V)$ und $t_0 \in V$ mit $a = \varphi(t_0)$ gegeben. Dann gibt es eine Umgebung $W = W(t_0) \subset V$, so daß $\varphi(W)$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. \square



Figur 25.7

Bemerkung. Wir fassen noch einmal mit anderen Worten, wenn auch weiterhin vermutlich verwirrend, zusammen: Ist $(V, \varphi, \varphi(V))$ eine glatt parametrisierte Mannigfaltigkeit, so ist $\varphi(V)$ genau dann eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , wenn $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ein Homöomorphismus von V auf die mit der Relativtopologie versehene Menge $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ ist. In diesem Fall ist das Tripel $(V, \varphi, \varphi(V))$ eine glatte Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit $\varphi(V)$. Für jede glatt parametrisierte Mannigfaltigkeit $(V, \varphi, \varphi(V))$ gibt es zu jedem Punkt $t_0 \in V$ eine offene Umgebung $W \subset V$, $t_0 \in W$, so daß $\varphi|_W$ ein Homöomorphismus von W nach $\varphi(W)$ ist.

Man kann auf Untermannigfaltigkeiten auch *Analysis* betreiben; d. h. genauer: Man kann auf einer solchen Mannigfaltigkeit *differenzierbare Funktionen* einführen und sogar über *differenzierbare Abbildungen* zwischen Untermannigfaltigkeiten sprechen. Wir beginnen sogleich mit einem Satz, der mehrere mögliche Definitionen auflistet.

Satz 25.8 Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der \mathcal{C}^ℓ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- i) Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine Umgebung $U := U(a) \subset \mathbb{R}^n$ und eine \mathcal{C}^ℓ -Funktion F auf U mit $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$.
- ii) Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $(V, \varphi, \varphi(V))$ von M mit $a \in \varphi(V)$, so daß $f \circ \varphi$ eine \mathcal{C}^ℓ -Funktion ist.
- ii)' Für jede lokale Parametrisierung $(V, \varphi, \varphi(V))$ von M ist $f \circ \varphi$ eine \mathcal{C}^ℓ -Funktion.

- iii) Ist $U_M := U \cap M$ und $\Phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus, so daß $U_M = \Phi^{-1}(E_k \cap W)$, so gibt es eine \mathcal{C}^ℓ -Funktion g auf $E_k \cap W$, aufgefaßt als offene Teilmenge von \mathbb{R}^k , so daß $f|_{U_M} = g \circ \Phi$.
- iii)' Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine Umgebung $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ und einen \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ wie in iii), so daß $f|_{U_M} = g \circ \Phi$ für eine Funktion $g \in \mathcal{C}^\ell(E_k \cap W)$.

Beweis. Da lokale Parametrisierungen von der Güte \mathcal{C}^ℓ sind, folgt aus i) die Aussage ii)' und daraus wiederum ii), da es stets lokale Parametrisierungen gibt. Aus ii) folgt iii), da wir im Beweis von Satz 6 gesehen haben, daß die Zusammensetzung einer lokalen Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow U_M$ mit einem \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow W$ einen \mathcal{C}^ℓ -Diffeomorphismus von V nach $E_k \cap W$ induziert. Bezeichnet man diesen mit $\Psi = \Phi \circ \varphi$, so ist $g := f \circ \Phi|_{E_k \cap W}^{-1} = (f \circ \varphi) \circ \Psi^{-1} \in \mathcal{C}^\ell(E_k \cap W)$, und es gilt $g \circ \Phi = f$. Selbstverständlich impliziert iii) die Aussage iii)' und aus dieser gewinnt man unmittelbar i) zurück: Man darf annehmen, daß W ein kartesisches Produkt von $E_k \cap W$ mit einem Würfel der Dimension $n - k$ ist. Die \mathcal{C}^ℓ -Funktion g auf $E_k \cap W$ läßt sich dann sofort als \mathcal{C}^ℓ -Funktion auf triviale Weise nach W fortsetzen durch $G(y_1, \dots, y_n) := g(y_1, \dots, y_k)$. Man braucht dann nur noch $F := G \circ \Phi$ zu setzen. \square

Definition und Bemerkung. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ℓ -mal stetig differenzierbar, wenn sie eine der äquivalenten Bedingungen von Satz 8 erfüllt. Da jede \mathcal{C}^ℓ -Untermannigfaltigkeit automatisch auch eine \mathcal{C}^λ -Untermannigfaltigkeit ist für alle $1 \leq \lambda \leq \ell$, so ist hiermit auch erklärt, wann eine Funktion λ -mal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung. Für abstrakte Mannigfaltigkeiten erklärt man die stetige Differenzierbarkeit von Funktionen durch die Eigenschaft ii) und äquivalent dazu mit ii)'. Für den Begriff der *differenzierbaren Abbildungen* zwischen (Unter-) Mannigfaltigkeiten M und N muß man in beiden Räumen in lokale Karten gehen. Wir können die Einzelheiten hierzu dem Leser überlassen. (Siehe aber auch den Anhang für weitere Details in der abstrakten Situation).

Wir kommen nun noch zu einem weiteren zentralen Begriff, der die früheren Bedingungen an reguläre Parametrisierungen auf neue Weise zusammenfaßt. Er gestattet es, die obigen Sätze auch auf differenzierbare Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten auszudehnen. Richtig interpretiert sind diese Ergebnisse auch in der Kategorie der abstrakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gültig. (Siehe dazu erneut den Anhang dieses Kapitels).

Definition. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ heißt eine *Einbettung* (von V in \mathbb{R}^n), falls $M := \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $\varphi : V \rightarrow M$ ein Homöomorphismus ist. (Insbesondere muß dann φ *injektiv* sein). Man nennt die Einbettung φ *offen* bzw. *abgeschlossen*, wenn M offen bzw. abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist.

Bemerkung. Eine Einbettung ist notwendig eine injektive Immersion (siehe unten). Die Umkehrung gilt nicht, wie unser früheres Beispiel zeigt.

Es gilt sogar genauer als oben angegeben das folgende

Lemma 25.9 *Ist $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion in $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^k$, so gibt es Umgebungen $V_1 = V_1(x_0)$, $V_2 = V_2(\varphi(x_0))$ mit $\varphi(V_1) \subset V_2$, so daß $\varphi|_{V_1}$ eine abgeschlossene Einbettung von V_1 in V_2 ist.*

Der *Beweis* ergibt sich wieder sofort aus dem *Rangatz*. \square

Satz 25.10 $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist genau dann eine Einbettung, wenn folgendes erfüllt ist :

- a) φ ist eine injektive Immersion ;

b) $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung. Eine *eigentliche* injektive Immersion ist eine abgeschlossene Einbettung. Wir überlassen den Beweis dieser Aussage dem Leser als Übungsaufgabe.

Wir beenden diesen Paragraphen mit einigen weiteren wichtigen Beispielen von Untermannigfaltigkeiten. Es handelt sich dabei durchweg um einige der *klassischen Matrizen-Gruppen*.

Beispiele. 1. Die *allgemeine lineare Gruppe* $GL(n, \mathbb{R})$ ist das Komplement der Hyperfläche $\det M = 0$ im Raum aller Matrizen $M(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ und somit eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n^2 .

2. Zur Untersuchung der *speziellen linearen Gruppe* $SL(n, \mathbb{R})$ müssen wir die Determinantenabbildung etwas genauer studieren. Für die allgemeine $n \times n$ -Matrix $X = (x_{jk})$ bezeichne X_{jk} die Untermatrix, die man aus X durch Streichen der j -ten Zeile und k -ten Spalte erhält. Der LAPLACESche *Entwicklungssatz* liefert für alle $j = 1, \dots, n$ die Formel

$$\det X = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{j+\ell} x_{j\ell} \det X_{j\ell}.$$

Beachtet man, daß die Matrix $X_{j\ell}$ keine Variable x_{jk} enthält, folgt hieraus durch Differentiation nach x_{jk} die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det X}{\partial x_{jk}} &= \sum_{\ell=1}^n (-1)^{j+\ell} \left(\frac{\partial x_{j\ell}}{\partial x_{jk}} \det X_{j\ell} + x_{j\ell} \frac{\partial \det X_{j\ell}}{\partial x_{jk}} \right) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{j+\ell} \delta_{k\ell} \det X_{j\ell} \\ &= (-1)^{j+k} \det X_{jk}. \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix X genau dann eine reguläre Stelle für die Determinantenabbildung, wenn entweder $n = 1$ oder der Rang von X mindestens gleich $n - 1 \geq 1$ ist. Also ist für $n = 1$ jeder und für $n \geq 2$ jeder von Null verschiedene Wert c regulär für die Funktion \det . Insbesondere ist für jedes $c \neq 0$ die Menge

$$\{ X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det X = c \}$$

eine reguläre Hyperfläche in $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Speziell für $c = 1$ gewinnt man hieraus die Erkenntnis, daß $SL(n, \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $n^2 - 1$ ist.

Bemerkung. Die vorigen Überlegungen ergeben für den Gradienten $\text{grad } \det X$ an einer Stelle X , ausgewertet an einer beliebigen quadratischen Matrix H , den Wert

$$(*) \quad (\text{grad } \det(X))(H) = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j+k} h_{jk} \det X_{jk}.$$

Insbesondere hat man die bemerkenswerte Formel

$$(\text{grad } \det(X))(X) = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j+k} x_{jk} \det X_{jk} = n \det X.$$

(Die andererseits aber auch wieder nicht überraschend ist, da die Determinante ein homogenes Polynom vom Grad n in ihren Einträgen ist).

Als nächstes beschäftigen wir uns mit mehreren Varianten der *orthogonalen* Gruppen.

Beispiel. Es sei

$$O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : {}^t A A = E_n \}$$

die *orthogonale Gruppe*. Offensichtlich ist $O(n)$ das Urbild von $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unter der Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} = M(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \subset M(n \times n, \mathbb{R}) \\ M \longmapsto {}^t M M, \end{cases}$$

die differenzierbar ist mit

$$((Df)(M)) \cdot H = {}^t M H + {}^t H M,$$

wie man leicht nachrechnet (siehe auch weiter unten). Ist T eine beliebige symmetrische Matrix und A orthogonal, so setze man

$$H = \frac{1}{2} A T.$$

Dann ist

$$((Df)(A)) H = \frac{1}{2} {}^t A A T + \frac{1}{2} {}^t T {}^t A A = T,$$

d. h. $(Df)(A)$ ist surjektiv. Somit ist E_n ein regulärer Wert von f und folglich

$$O(n) = f^{-1}(E_n)$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Insbesondere ist $O(1) = \{\pm 1\}$ nulldimensional, $O(2) = SO(2) \sqcup A_0 SO(2)$,

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \subset \mathbb{C}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eindimensional und $O(3)$ dreidimensional. Spezielle (dreidimensionale) Koordinaten von $O(3)$ werden *EULERSche Winkel* genannt. Allgemein kann man zeigen, daß

$$O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n)$$

mit

$$O^-(n) = \{A \in O(n) : \det A = -1\} = A_0 SO(n), \quad A_0 = \text{diag}(1, \dots, 1, -1).$$

Sowohl $SO(n)$ als auch $O^-(n)$ sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $\frac{1}{2} n(n-1)$, aber nur $SO(n)$ ist eine Gruppe.

Bemerkung. $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ sind Beispiele von sogenannten *Liegruppen* (siehe dazu das übernächste Kapitel).

Wir wollen das letzte Beispiel noch verallgemeinern. Es sei zunächst B eine beliebige $n \times n$ -Matrix und $f : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ die Abbildung

$$f(M) = {}^t M B M.$$

Wir versehen $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Variablen $(x_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$. Dann besitzt f die Komponenten

$$f_{jk} = f_{jk}(x) = \sum_r x_{rj} \left(\sum_s b_{rs} x_{sk} \right) = \sum_{r,s} b_{rs} x_{rj} x_{sk}.$$

Hieraus berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_{pq}} &= \sum_{r,s} b_{rs} \frac{\partial x_{rj}}{\partial x_{pq}} x_{sk} + \sum_{r,s} b_{rs} x_{rj} \frac{\partial x_{sk}}{\partial x_{pq}} \\ &= \sum_s b_{ps} \delta_{jq} x_{sk} + \sum_r b_{rp} x_{rj} \delta_{kq} \end{aligned}$$

und den Eintrag von $((Df)(M))H$ an der Stelle (j, k) :

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_{pq}} &= \sum_{s,p,q} b_{ps} \delta_{jq} x_{sk} h_{pq} + b_{rp} x_{rj} \delta_{kq} h_{pq} \\ &= \sum_{p,s} b_{ps} x_{sk} h_{pj} + \sum_{p,r} b_{rp} x_{rj} h_{pk} \\ &= \sum_r x_{rj} \left(\sum_p b_{rp} h_{pk} \right) + \sum_p h_{pj} \left(\sum_s b_{ps} x_{sk} \right). \end{aligned}$$

Somit haben wir die folgende Formel bewiesen:

$$((Df)(M))H = {}^t M B H + {}^t H B M.$$

Ist nun zusätzlich $B = S$ symmetrisch, so ist auch $f(M) = {}^t M S M$ symmetrisch. Man kann dann wieder f als Abbildung

$$f: M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

in den Raum der symmetrischen Matrizen betrachten. Als solche ist das Differential dann wieder surjektiv auf der Menge

$$f^{-1}(S) = \{ M \in M(n \times n, \mathbb{R}) : {}^t M S M = S \},$$

wenn S invertierbar ist.

Ist nämlich T eine beliebige symmetrische Matrix und $M \in O(S)$, so gilt für $H := \frac{1}{2} M S^{-1} T$:

$$\begin{aligned} 2((Df)(M))H &= {}^t M S M S^{-1} T + T S^{-1} {}^t M S M \\ &= S S^{-1} T + T S^{-1} S = 2T. \end{aligned}$$

Da $f^{-1}(S)$ die Matrix E_n enthält, also nicht leer ist, ergibt sich die erste Aussage in dem folgenden

Satz 25.11 *Ist S eine invertierbare symmetrische $n \times n$ -Matrix, so ist die Menge*

$$\{ M \in M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} : {}^t M S M = S \} \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Sie bildet eine Gruppe, die man mit $O(S)$ bezeichnet.

Beweis. Sind $M_1, M_2 \in O(S)$, so ist auch $M_1 M_2 \in O(S)$ wegen ${}^t(M_1 M_2) S (M_1 M_2) = {}^t M_2 ({}^t M_1 S M_1) M_2 = {}^t M_2 S M_2 = S$. Da S invertierbar ist, folgt aus der Produktformel für Determinanten sofort $\det M \neq 0$ für $M \in O(S)$. Durch Multiplikation der Gleichung ${}^t M S M = S$ von rechts mit M^{-1} und von links mit ${}^t M^{-1} = ({}^t M)^{-1}$ ergibt sich $S = {}^t(M^{-1}) S M^{-1}$, also $M^{-1} \in O(S)$. Also bildet $O(S)$ eine Gruppe. \square

Bemerkung. Ist speziell $S = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ mit p Einsen, so schreibt man auch

$$O(p, q), \quad q = n - p,$$

anstelle von $O(S)$. Insbesondere ist $O(n) = O(n, 0) = O(0, n)$ und $O(p, q) = O(q, p)$.

Bemerkung. Jede symmetrische Matrix S definiert eine *symmetrische Bilinearform*

$$\langle x, y \rangle_S := {}^t x S y \quad \text{auf } \mathbb{R}^n,$$

und umgekehrt wird jeder symmetrischen Bilinearform B auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V nach Wahl einer Basis (e_1, \dots, e_n) durch

$$s_{jk} := B(e_j, e_k)$$

eine symmetrische Matrix $S = (s_{jk})$ zugeordnet. Die Bilinearform B ist genau dann *nicht ausgeartet* in dem Sinne, daß

$$B(v, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W \implies v = 0,$$

wenn S invertierbar ist. Ist nämlich S invertierbar, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ein y , so daß $x = Sy$ und damit $\langle x, y \rangle_S = {}^t x S y = {}^t x x > 0$. Ist dagegen S nicht invertierbar, so ist $\ker S$ nichttrivial. Es gibt also einen von Null verschiedenen Vektor x mit $y = Sx = 0$, also $\langle x, x \rangle_S = {}^t x S x = 0$. Man kann dann jeder Bilinearform B auf V die Menge der B invariant lassenden Endomorphismen zuordnen:

$$\{ \alpha \in \text{End } V : B(\alpha(v), \alpha(w)) = B(v, w), \quad v, w \in V \}.$$

Wenn B nichtausgeartet ist, so ist diese Menge eine Untergruppe von $\text{Aut } V = \text{GL}(V)$. Man bezeichnet sie als *orthogonale Gruppe* zu der Bilinearform B , in Zeichen $O(V, B)$.

Beispiel. In der *speziellen Relativitätstheorie* spielt die nichtausgeartete Bilinearform

$$B((x_1, x_2, x_3, t), (x'_1, x'_2, x'_3, t')) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 - t t'$$

eine zentrale Rolle. Die Gruppe $O(\mathbb{R}^4, B)$ heißt die *LORENTZ-Gruppe*. Sie ist identisch mit $O(3, 1)$.

Anhang: Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Wir gehen in diesem Anhang in einiger Ausführlichkeit auf den Begriff einer *abstrakten Mannigfaltigkeit* ein und übertragen einige der Resultate aus dem Haupttext auf diese Situation.

Im folgenden bezeichnet $X = (X, \mathfrak{T})$ stets einen *topologischen Raum* mit dem System \mathfrak{T} der *offenen Mengen* auf X . Hierbei ist die *Topologie* \mathfrak{T} eine Teilmenge der *Potenzmenge* von X , also eine Menge von Teilmengen von X , so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

0. $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$;
1. ist $U_\iota \in \mathfrak{T}$ für alle ι in einer *beliebigen* Indexmenge I , so ist die *Vereinigungsmenge* $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota \in \mathfrak{T}$;
2. ist $U_j \in \mathfrak{T}$ für alle j in einer *endlichen* Indexmenge J , so ist auch der *Durchschnitt* der U_j in \mathfrak{T} enthalten.

Ist $Y \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes X , so „erbt“ Y offensichtlich eine Topologie von X , indem man als offene Mengen von Y die Durchschnitte von Y mit offenen Mengen von X erklärt. Man bezeichnet diese Topologie auch als die (von X auf Y induzierte) *Relativtopologie* und nennt Y einen *topologischen Unterraum* von X .

Wir setzen grundsätzlich voraus (wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird), daß die untersuchten topologischen Räume die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1. X ist *hausdorffsch*, d. h. X erfüllt das Trennungsaxiom T_2 : Zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
2. X erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*: es existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$, so daß für alle $U \in \mathfrak{T}$ gilt:

$$U = \bigcup_{\substack{U_0 \in \mathfrak{T}_0 \\ U_0 \subset U}} U_0.$$

Standardbeispiele topologischer Räume sind der reelle Vektorraum \mathbb{R}^n mit der üblichen, von der *euklidischen Metrik* herrührenden Topologie, und Teilmengen von \mathbb{R}^n mit der Relativtopologie. Hierbei ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Kugel $B_r(x)$ mit Mittelpunkt x und Radius r gibt, die ganz in U enthalten ist. Ein abzählbares System \mathfrak{T}_0 für \mathbb{R}^n wird gegeben durch alle Kugeln $B_r(x)$ mit *rationalen* Radien r und Mittelpunkten x mit *rationalen* Koordinaten x_1, \dots, x_n .

Definition. Ein topologischer Raum X heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn er *lokal euklidisch* ist, d. h. wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x)$ und einen Homöomorphismus

$$\psi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$, $n = n(x)$, gibt. Das Tripel (U, ψ, V) heißt dann eine (n -dimensionale) *Karte* auf (oder für) X .

Bemerkung. Ich schreibe meist φ für den Umkehrhomöomorphismus $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U$ und die Karte (U, ψ, V) auch als (V, φ, U) (und nenne φ dann eine *Parametrisierung* von U).

Satz 25.12 *Es seien (U_j, ψ_j, V_j) , $V_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, zwei Karten auf X mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $n_1 = n_2$.*

Beweis. Die induzierte Abbildung

$$\mathbb{R}^{n_1} \supset V_{21} := \psi_1(U_2 \cap U_1) \xrightarrow{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2) =: V_{12} \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

ist ein Homöomorphismus. Der *Satz von der Erhaltung der Dimension* unter Homöomorphismen impliziert dann $n_1 = n_2$. Der Beweis dieses Satzes ist allerdings schwer; eine Skizze werden wir mit Hilfe

von *relativer Homologietheorie* noch später (??) liefern. (Im *differenzierbaren* Fall, der uns in diesem Text vorwiegend beschäftigen wird, ist die Aussage aufgrund der *Kettenregel* völlig banal). \square

Folgerung 25.13 Die Funktion $x \mapsto n(x)$ ist eindeutig bestimmt.

Definition. $n(x)$ heißt die *Dimension* von X in x , in Zeichen: $\dim_x X = n(x)$.

Aufgrund der lokalen Struktur topologischer Mannigfaltigkeiten besitzen ihre Punkte (beliebig kleine) offene Umgebungen, die homöomorph zu offenen Kugeln im euklidischen Raum sind. Insbesondere ergibt sich hieraus:

Folgerung 25.14 *Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal wegweise zusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend.*

Bemerkung. Die zweite Aussage bedeutet: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U , in der sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen läßt. Topologische Räume mit diesen beiden Eigenschaften besitzen eine gute *Überlagerungstheorie* (siehe z. B. das Buch von STÖCKER und ZIESCHANG [40] über *Algebraische Topologie*).

Jeder topologische Raum „zerfällt“ in seine *Wegzusammenhangskomponenten*

$$Z = Z(x_0) := \{x \in X : x \text{ läßt sich mit } x_0 \text{ durch einen stetigen Weg verbinden}\}.$$

Aufgrund des lokalen wegweisen Zusammenhangs sind solche Komponenten von topologischen Mannigfaltigkeiten *offene* Mengen, deren Komplement ebenfalls offen ist. Da sie selbst *wegzusammenhängend* und damit *zusammenhängend* im topologischen Sinne sind (d. h. nicht disjunkt zerlegbar in mehrere nichtleere offene Mengen), kann man sie im vorliegenden Fall einfach als *Zusammenhangskomponenten* bezeichnen. – Klar ist aufgrund der ersten Folgerung:

Lemma 25.15 Die Dimensionsfunktion $x \mapsto n(x)$ ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X . Insbesondere sind Zusammenhangskomponenten topologischer Mannigfaltigkeiten rein-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Wir werden i. a. nur rein-dimensionale Mannigfaltigkeiten betrachten, aber nicht notwendig nur zusammenhängende.

Die lokal euklidische Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit impliziert aber noch wesentlich mehr.

Lemma 25.16 *Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal kompakt. (D. h.: Jeder Punkt besitzt, sogar beliebig kleine, kompakte Umgebungen).*

Diese Eigenschaft kann man noch weiter ausbeuten. Lokal kompakte T_2 -Räume (nicht notwendig mit 2. Abzählbarkeits-Axiom) besitzen eine sogenannte *Einpunkt-Kompaktifizierung* $X' = X \cup \{\infty\}$. Es gilt der folgende

Satz 25.17 Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- a) X erfüllt das zweite Abzählbarkeits-Axiom ;
- b) die Kompaktifizierung $X' = X \cup \{\infty\}$ von X ist metrisierbar⁵⁰ ;

⁵⁰Dies bedeutet, daß man auf X' eine Metrik konstruieren kann, deren zugeordnete Topologie mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt.

- c) X ist metrisierbar und abzählbar im Unendlichen, d. h. $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$ mit kompakten Mengen K_j , so daß $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$.

Folgerung 25.18 *Topologische Mannigfaltigkeiten X sind metrisierbar und abzählbar im Unendlichen. Insbesondere gilt: Topologische Mannigfaltigkeiten sind parakompakt; d. h. zu jeder offenen Überdeckung von X gibt es eine lokal endliche Verfeinerung und eine untergeordnete stetige Teilung der Eins.*⁵¹

Parakompakte Räume sind erst recht (vollständig) regulär: Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jeden Punkt $x_0 \in X \setminus A$ existiert eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$, so daß $f(x_0) = 1$ und $f|_A \equiv 0$. In diesem Zusammenhang ist noch das folgende Ergebnis interessant.

Satz 25.19 (Urysohn) *Äquivalent sind die folgenden Aussagen:*

- X ist regulär und erfüllt das 2. Abzählbarkeits-Axiom;
- X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge und ist metrisierbar.

Folgerung 25.20 *Topologische Mannigfaltigkeiten besitzen höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.*

Wir kommen jetzt zu einem ganz zentralen Begriff der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Definition. Ein Atlas \mathfrak{A} auf der topologischen Mannigfaltigkeit X ist ein System von Karten $\{(U_\iota, \psi_\iota, V_\iota)\}_{\iota \in I}$ mit

$$X = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota.$$

Wir nennen den Atlas *abzählbar*, wenn die Indexmenge I (höchstens) abzählbar ist. Er heißt *hinreichend groß*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Karte $(U_\iota, \psi_\iota, V_\iota) \in \mathfrak{A}$ gibt mit $x \in U_\iota \subset U$.

Aus dem zweiten Abzählbarkeits-Axiom folgt unmittelbar:

Lemma 25.21 *Jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt hinreichend große abzählbare Atlanten.*

Man kann eine topologische Mannigfaltigkeit aus einem ihrer Atlanten durch „Zusammenkleben“ oder „Verheften“ von Karten wieder rekonstruieren. Dies soll im folgenden näher erläutert werden.

Es sei also der Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\iota, \psi_\iota, V_\iota) = (V_\iota, \varphi_\iota, U_\iota)\}_{\iota \in I}$ vorgegeben. Wir schreiben dann für zwei Indizes ι, κ :

$$V_{\kappa\iota} := \psi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa).$$

Man achte hier auf die *Reihenfolge* der Indizes, die im folgenden noch sehr wichtig wird. Man kann sich die Reihenfolge dadurch merken, daß der zweite Index den Parameterbereich angibt, in dem $V_{\kappa\iota}$ liegt:

$$V_{\kappa\iota} \subset V_\iota.$$

Entsprechend schreiben wir $U_{\kappa\iota} = U_\kappa \cap U_\iota$, wenn wir diesen Durchschnitt als Teilmenge von U_ι ansehen wollen. Wegen $U_{\iota\iota} = U_\iota$ soll auch immer $V_{\iota\iota} := V_\iota$ sein. Wir haben dann Homöomorphismen

$$\varphi_{\kappa\iota} := \varphi_\kappa^{-1} \circ \varphi_\iota = \psi_\kappa \circ \psi_\iota^{-1} : V_{\kappa\iota} \longrightarrow V_{\iota\kappa},$$

für die die folgenden Regeln gelten:

⁵¹Eine genaue Formulierung im *differenzierbaren* Fall geben wir weiter unten, zumal wir später von der Existenz differenzierbarer Teilungen der Eins mehrfach Gebrauch machen werden.

1. $\varphi_{\iota\iota} = \text{id}_{V_\iota}$;
2. $\varphi_{\iota\kappa} = \varphi_{\kappa\iota}^{-1}$;
3. $\varphi_{\lambda\kappa} \circ \varphi_{\kappa\iota} = \varphi_{\lambda\iota}$.

Definition und Bemerkung. Wir nennen ein solches System einen *abstrakten 1-Cozyklus* von Homöomorphismen. Die sogenannte *Cozykel-Bedingung 3.* gilt natürlich jeweils nur auf der Menge $V_{\kappa\iota} \cap \varphi_{\kappa\iota}^{-1}(V_{\lambda\kappa})$.

Man beachte, daß die Bedingungen 1. und 2. aus der dritten folgen. Wählt man nämlich $\iota = \kappa = \lambda$, so erhält man aus 3. auf $V_\iota = V_{\iota\iota}$:

$$\varphi_{\iota\iota} \circ \varphi_{\iota\iota} = \varphi_{\iota\iota}.$$

Da die $\varphi_{\iota\iota}$ invertierbar sind, impliziert dies $\varphi_{\iota\iota} = \text{id}$. Die Bedingung 2. folgt hieraus und aus 3., wenn man dort $\lambda = \iota$ setzt:

$$\varphi_{\iota\kappa} \circ \varphi_{\kappa\iota} = \varphi_{\iota\iota} = \text{id}.$$

Wir geben uns nun umgekehrt einen solchen 1-Cozyklus vor; also ein System $\{V_\iota\}_{\iota \in I}$ von offenen Teilmengen $V_\iota \subset \mathbb{R}^n$, zu jedem Paar $\iota, \kappa \in I$ eine (eventuell leere) offene Teilmenge $V_{\kappa\iota} \subset V_\iota$, wobei stets $V_{\iota\iota} = V_\iota$ gelten soll, und einen Homöomorphismus $\varphi_{\kappa\iota} : V_{\kappa\iota} \rightarrow V_{\iota\kappa}$, so daß die Cozykelbedingung erfüllt ist, und fragen uns, ob es eine topologische Mannigfaltigkeit gibt, die zu diesem Cozyklus gehört.

Was wir zu tun haben, ist im Prinzip klar: Wir haben für alle ι und κ die Menge V_ι mit V_κ entlang $V_{\kappa\iota}$ und $V_{\iota\kappa}$ zu „verheften“. Mathematisch exakt geht dies folgendermaßen. Es sei $\tilde{X} := \sqcup V_\iota$ die *disjunkte* mengentheoretische Vereinigung der Mengen V_ι , die man als Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times I$ auffassen kann. Versieht man I mit der *diskreten* Topologie und $\mathbb{R}^n \times I$ mit der *Produkttopologie*, so erbt \tilde{X} eine kanonische Topologie: $U \subset \tilde{X}$ ist genau dann offen, wenn alle Durchschnitte $U \cap V_\iota$ offen sind (man kann ja V_ι als Teilmenge von \tilde{X} auffassen). Auf \tilde{X} erklären wir nun eine „Verheftungsvorschrift“:

$$x_\iota \sim x_\kappa \iff x_\iota \in V_{\kappa\iota}, x_\kappa \in V_{\iota\kappa}, x_\kappa = \varphi_{\kappa\iota}(x_\iota).$$

Dies ist genau deshalb eine Äquivalenzrelation, weil die Cozykelbedingungen erfüllt sein sollen. Wir bilden nun

$$X := \tilde{X} / \sim$$

und versehen diesen Raum mit der von der kanonischen Projektion $\pi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} / \sim = X$ herstammenden *Quotiententopologie*. Per definitionem ist diese so beschaffen, daß $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn dies für $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ zutrifft. Wegen $\pi^{-1}(\pi(V_\iota)) = \bigcup_{\kappa \in I} V_{\kappa\iota}$ ist $U_\iota := \pi(V_\iota)$ eine offene

Teilmenge von X , und $\varphi := \pi|_{V_\iota} : V_\iota \rightarrow U_\iota$ ist ein Homöomorphismus. Somit wird X von den Karten $(U_\iota, \psi_\iota := \varphi_\iota^{-1}, V_\iota)$ überdeckt, und es ist sofort einzusehen, daß dieser Atlas genau zu dem vorgegebenen 1-Cozyklus zurückführt. Was jetzt aber noch nachgeprüft werden muß, sind unsere Standardvoraussetzungen *hausdorffsch* und *2. Abzählbarkeits-Axiom*. Beide sind nicht automatisch erfüllt. Die zweite ist auf jeden Fall gegeben, wenn der vorgegebene Cozyklus abzählbar ist, was wir ja ohnehin annehmen können. Für das 2. Trennungsaxiom kann man aber i. A. keine einfach nachprüfbareren Kriterien angeben. Startet man jedoch mit einer topologischen Mannigfaltigkeit X , gewinnt man aus dieser einen 1-Cozyklus und konstruiert wie eben den Raum \tilde{X} / \sim , so ist dieser auf kanonische Weise *homöomorph* zu dem ursprünglichen Raum X .

Beispiel. Wählt man $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$ und $V_{21} = V_{12} = \mathbb{R}^*$, und verheftet man diese beiden Mengen vermöge der Identität $\varphi_{21} = \varphi_{12} = \text{id}_{\mathbb{R}^*}$, so ist der entstehende Raum zwar *lokal* eine topologische Mannigfaltigkeit, aber nicht hausdorffsch.

Wir wollen jetzt abstrakte *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* einführen. Dazu sei zunächst X eine topologische Mannigfaltigkeit (mit allen unseren topologischen Zusatzbedingungen). Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei.

Definition. 1. Zwei Karten $(U_1, \psi_1, V_1), (U_2, \psi_2, V_2)$ auf X heißen *differenzierbar verträglich*, wenn der Kartenwechsel $\varphi_{21} : V_{21} \rightarrow V_{12}$ (beliebig oft) differenzierbar ist.

2. Ein Atlas \mathfrak{A} auf X heißt *differenzierbar*, wenn je zwei Karten aus \mathfrak{A} miteinander differenzierbar verträglich sind.

3. Zwei differenzierbare Atlanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} auf X heißen *differenzierbar verträglich*, wenn jede Karte aus \mathfrak{A} mit jeder Karte aus \mathfrak{B} differenzierbar verträglich ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß auch $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ein differenzierbarer Atlas ist.

Bemerkung. Differenzierbare Verträglichkeit von Karten und von Atlanten sind Äquivalenzrelationen. Wir schreiben im letzteren Fall wie immer $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

Das folgende Lemma ist eine leichte Übungsaufgabe.

Lemma 25.22 *Ist \mathfrak{A} ein differenzierbarer Atlas auf X , so ist auch*

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \{ (U, \psi, V) : (U, \psi, V) \text{ differenzierbar verträglich zu jeder Karte von } \mathfrak{A} \}$$

ein differenzierbarer Atlas, der zu \mathfrak{A} äquivalent ist und nicht mehr „erweitert“ werden kann. Es gilt ferner

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}.$$

Definition. Aus naheliegendem Grund nennt man $\tilde{\mathfrak{A}}$ einen *maximalen Atlas*.

Definition. Eine *differenzierbare Struktur* auf der topologischen Mannigfaltigkeit X ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbar verträglichen differenzierbaren Atlanten. Zusammen mit dieser Struktur heißt X eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Bemerkungen. 1. Eine differenzierbare Struktur ist schon durch die Vorgabe eines einzigen differenzierbaren Atlas bestimmt. Diesen sollte man i. A. so klein wie möglich wählen.

2. Eine differenzierbare Struktur wird stets durch einen *abzählbaren* Atlas beschrieben.

3. Zwei durch Vorgabe je eines differenzierbaren Atlanten definierte differenzierbare Strukturen (X, \mathfrak{A}) und (X, \mathfrak{B}) sind genau dann gleich, wenn $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}$.

4. Bei Bedarf gehen wir zu „größeren“ Atlanten $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ über (z. B. nehmen wir mit $(U, \psi, V) \in \mathfrak{A}$ auch einige oder alle Karten $(U', \psi|_{U'}, V' = \psi(U'))$, $U' \subset U$ beliebige offene Teilmenge, hinzu und erlauben noch zusätzliche differenzierbare Koordinatenwechsel auf V'), d. h. wir arbeiten „nur im Prinzip“ mit dem maximalen Atlas. (Siehe hierzu auch die beiden anschließenden Beispiele).

5. Wie im vorigen Kapitel beweist man, daß ein differenzierbarer Atlas zu einem abstrakten 1-Cozyklus von C^∞ -Diffeomorphismen Anlaß gibt. Umgekehrt kann man aus einem solchen 1-Cozyklus wieder die differenzierbare Mannigfaltigkeit rekonstruieren.

Beispiele. 1. $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}, \mathbb{R}^n)\} = \mathfrak{A}$ definiert eine differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n . Der dazu gehörige maximale Atlas ist riesig groß; er ist gleich

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{ (U, \psi, V) : U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } \psi : U \rightarrow V \text{ Diffeomorphismus} \}.$$

2. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \psi_i, V_i)\}$ und ist $U \subset X$ offen, so ist

$$\mathfrak{A}|_U := \{ (U_i \cap U, \psi_i|_{U_i \cap U}, \psi_i(U_i \cap U)) \}$$

ein differenzierbarer Atlas auf U . Gilt $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A}|_U \sim \mathfrak{B}|_U$. Also wird auf U in eindeutiger Weise eine differenzierbare Struktur erklärt.

3. Jede differenzierbare Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension k trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Karten erhält man lokal mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen durch Projektionen in geeignete k -dimensionale Koordinatenebenen.

Warnungen. 1. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur!

2. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten mit mehreren differenzierbaren Strukturen, sogenannte „exotische“ Strukturen. Die ersten wurden von MILNOR 1958 auf S^7 gefunden, und zwar, neben der „Standardstruktur“ von S^7 als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^8 , genau 27 weitere. Am Ende des letzten Jahrhunderts wurde gezeigt, daß von den euklidischen Räumen \mathbb{R}^n nur der \mathbb{R}^4 exotische Strukturen trägt, aber dieser sogar überabzählbar viele.

Bemerkung. Im eindimensionalen Fall ist jede (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit diffeomorph (zu diesem Begriff siehe weiter unten) zu \mathbb{R} oder zu S^1 , jeweils mit der Standardstruktur. Diese Aussage ist jedoch falsch, wenn X nicht, wie wir stets voraussetzen, das 2. Abzählbarkeits-Axiom erfüllt!

Wie kann man weitere Mannigfaltigkeiten aus gegebenen konstruieren? Es seien (X, \mathfrak{A}) , (Y, \mathfrak{B}) differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann ist ihre *Summe* oder *disjunkte Vereinigung*

$$(X + Y, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \text{ mit } X + Y := X \sqcup Y \text{ (disjunkte Vereinigung) und } \mathfrak{A} + \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$$

wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ebenso trägt das *kartesische Produkt* von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eine kanonische differenzierbare Struktur $(X \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ auf naheliegender Weise zu definieren ist. (Beachte aber, daß i. A. $\widetilde{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \neq \widetilde{\mathfrak{A}} \times \widetilde{\mathfrak{B}}$!). In diesem Fall ist $\dim_{(x,y)} X \times Y = \dim_x X + \dim_y Y$.

Bemerkung. *Untermannigfaltigkeiten* von abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren wir ebenfalls weiter unten.

Bemerkung und Beispiel. Ersetzt man „differenzierbar verträglich“ durch „ \mathcal{C}^ℓ -verträglich“, $0 \leq \ell \leq \infty$ oder $\ell = \omega$, so erhält man den Begriff der \mathcal{C}^ℓ -Mannigfaltigkeit (oder auch Mannigfaltigkeiten der Klasse \mathcal{C}^ℓ) bzw. den der reell-analytischen Mannigfaltigkeit. Ist $n = 2m$ gerade und $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$, und sind die Kartenwechsel $\mathbb{C}^m \supset V_{\kappa\ell} \rightarrow V_{i\kappa} \subset \mathbb{C}^m$ *biholomorph*, so spricht man von einer *komplex-analytischen* oder verkürzend von einer *komplexen Mannigfaltigkeit* der *komplexen Dimension* m .

Man kann leicht Beispiele von (Unter-) Mannigfaltigkeiten der Klasse \mathcal{C}^ℓ angeben, die nicht von der Klasse $\mathcal{C}^{\ell+1}$ sind. Ist z. B. $M \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung der beiden Mengen

$$\{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}, \quad \{(x, y) : x \geq 0, y = x^2\},$$

so ist einfach zu zeigen:

- M ist eine \mathcal{C}^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ;
- jeder Punkt $(x, y) \in M$ mit $x \neq 0$ ist ein \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeitspunkt von M ;
- der Punkt $(0, 0) \in M$ ist kein \mathcal{C}^ℓ -Mannigfaltigkeitspunkt, $\ell \geq 2$.

Wir müssen als nächstes über *differenzierbare Abbildungen* zwischen abstrakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten⁵² reden. Es seien also (X, \mathfrak{A}) und (Y, \mathfrak{B}) differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit hinreichend großen differenzierbaren Atlanten, und $f : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung.

Definition. f heißt *differenzierbar* in $x_0 \in X$, wenn folgendes gilt:

- f ist stetig in $x_0 \in X$;

⁵²Für den Rest dieses Kapitels bedeutet „differenzierbar“ das gleiche wie „beliebig oft differenzierbar“. Man kann aber diese Voraussetzung und damit auch das Symbol \mathcal{C}^∞ überall ersetzen durch \mathcal{C}^ℓ , $\ell \geq 1$.

- b) für alle Karten (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ von X bzw. Y mit $x_0 \in U, y_0 := f(x_0) \in \tilde{U}$ und $f(U) \subset \tilde{U}$ (solche gibt es nach a)) gilt:

$$(*) \quad \tilde{\psi} \circ f \circ \psi : V \rightarrow \tilde{V}$$

ist differenzierbar in $\psi(x_0) \in V$.

Lemma 25.23 Für die Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in X$ genügt die Existenz von zwei Karten (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ mit $x_0 \in U, y_0 := f(x_0) \in \tilde{U}, f(U) \subset \tilde{U}$ und $(*)$ in b).

Beweis. Trivial. □

Definition. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *differenzierbar*, wenn f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in X$ ist, d. h. wenn $\tilde{\psi} \circ f \circ \psi : V \rightarrow \tilde{V}$ differenzierbar ist für alle Karten (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ mit $f(U) \subset \tilde{U}$. (Insbesondere ist f natürlich stetig). Wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ für die Menge der differenzierbaren Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, speziell $\mathcal{C}^\infty(X) := \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. Selbstverständlich existiert auch $\mathcal{C}^\infty(U, Y)$ und $\mathcal{C}^\infty(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$.

Lemma 25.24 a) $\text{id}_X \in \mathcal{C}^\infty(X, X)$.

- b) Aus $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}^\infty(Y, Z)$ folgt $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(X, Z)$. □

Lemma 25.25 Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann sind äquivalent :

- a) $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$;
 b) für alle $U \subset X, \tilde{U} \subset Y$ offen mit $f(U) \subset \tilde{U}$ und $h \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ ist $h \circ f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Beweis. Die Richtung von a) nach b) ist schon gezeigt worden. Für die umgekehrte Richtung beachte man, daß man diese nur in lokalen Karten zu begründen braucht und daß

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

genau dann differenzierbar ist, wenn alle Funktionen f_1, \dots, f_n in $\mathcal{C}^\infty(U)$ liegen. Nun ist aber $f_j = \pi_j \circ f$ mit der j -ten Projektion $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, und diese ist eine \mathcal{C}^∞ -Funktion. □

Lemma 25.26 $\mathcal{C}^\infty(X)$ ist (in kanonischer Weise) eine kommutative \mathbb{R} -Algebra mit 1.

Definition. $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist und auch die Inverse $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(Y, X)$ liegt. X und Y heißen *diffeomorph*, wenn es einen Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Klar ist: Diffeomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Ferner gilt unmittelbar aufgrund der Definition von differenzierbaren Abbildungen mittels Karten:

Lemma 25.27 Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und (U, ψ, V) eine Karte, so sind $\psi : U \rightarrow V$ und $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U$ Diffeomorphismen.

Bemerkungen. Alle diese Aussagen gelten auch entsprechend für die Kategorien $\mathcal{C}^\ell, \mathcal{C}^\omega, \mathcal{O}$ (komplex-analytisch).

Satz 25.28 Die Identität $\text{id} : (X, \tilde{\mathfrak{A}}) \rightarrow (X, \tilde{\mathfrak{B}})$ zwischen derselben topologischen Mannigfaltigkeit mit evtl. verschiedenen differenzierbaren Atlanten ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Hinweis. Man interpretiere diesen Satz in Bezug auf die 28 verschiedenen Strukturen auf S^7 .

Bemerkung. Man kann eine differenzierbare Struktur auf X unter einem Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ von X auf einen topologischen Raum Y offensichtlich so „transportieren“, daß Y eine differenzierbare Struktur erhält, für die f ein Diffeomorphismus wird.

Für $f \in C^\infty(X, Y)$ und $x_0 \in X$ definieren wir nun (gemäß (*)) den Rang von f an der Stelle x_0 durch

$$\text{rg}_{x_0} f = \text{rang } D_{\psi(x_0)}(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi).$$

Es ist zu zeigen, daß diese Definition von der Wahl der Karten unabhängig ist.

Lemma 25.29 Der Rang $\text{rg}_{x_0} f$ ist unabhängig von den Karten.

Beweis. Es seien (U_1, ψ_1, V_1) und $(\tilde{U}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{V}_1)$ zwei weitere Karten wie in (*) und ohne Einschränkung $U_1 = U$, $\tilde{U}_1 = \tilde{U}$. Dann gilt

$$\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1 = (\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi}) \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi) \circ (\psi \circ \varphi_1)$$

und damit nach der Kettenregel

$$D(\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1) = D(\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi}) \circ D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi) \circ D(\psi \circ \varphi_1).$$

Daraus folgt, da die Matrizen $D(\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi})$, $D(\psi \circ \varphi_1)$ invertierbar sind, daß

$$\text{rg } D(\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1) = \text{rg } D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi)$$

(an entsprechenden Stellen). □

Bemerkung. Wir definieren im Anhang des nächsten Kapitels eine lineare Abbildung $(Df)_{x_0}$ zwischen den Tangentialräumen $T_{X, x_0} \rightarrow T_{Y, f(x_0)}$ mit $\text{rg}_{x_0} f = \text{rg } (Df)_{x_0}$. Wir schreiben deshalb auch schon jetzt

$$\text{rg}_{x_0} f =: \text{rg } (Df)_{x_0} = \text{rg}_{x_0} Df.$$

Satz 25.30 Es sei $\text{rg}_{x_0} f = \dim_{x_0} X = \dim_{f(x_0)} Y$. Dann ist f lokal um x_0 ein Diffeomorphismus.

Beweis. Dies ist eine Konsequenz des Umkehrsatzes in Verbindung mit (*). □

Lemma 25.31 Für eine feste differenzierbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist die Abbildung $\text{rg}_f : X \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \text{rg}_x f$, von unten halbstetig, d. h., da \mathbb{Z} diskret ist: Für alle $x_0 \in X$ existiert eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $\text{rg}_x f \geq \text{rg}_{x_0} f$ für alle $x \in U$.

Beweis. Für eine $m \times n$ -Matrix A reeller Zahlen ist $\text{rang } A \geq r$ genau dann, wenn eine $r \times r$ -Untermatrix von A existiert, deren Determinante nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit der Einträge in der Funktionalmatrix $D_{\psi(x)}(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi)$ ist ihr Rang in jedem Punkt einer Umgebung eines Punktes x_0 größer oder gleich r , wenn er dies nur im Punkte x_0 ist. □

Definition. Es sei $f \in C^\infty(X, Y)$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$, $m = \dim_{x_0} X$, $n = \dim_{y_0} Y$.

a) f heißt eine Immersion in x_0 , wenn $\text{rg}_{x_0} f = m$ (die Tangentialabbildung ist dann injektiv).

- b) f heißt eine *Submersion* in x_0 , wenn $\operatorname{rg}_{x_0} f = n$ (die Tangentialabbildung ist dann *surjektiv*).
- c) f heißt eine *Subimmersion* in x_0 , wenn es eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt mit

$$\operatorname{rg}_x f = r = \text{const.}, \quad x \in U.$$

Eine Abbildung f heißt eine *Immersion* bzw. *Submersion* bzw. *Subimmersion* (schlechthin), wenn die entsprechende Eigenschaft in jedem Punkt $x_0 \in X$ erfüllt ist.

Die beiden folgenden Sätze ergeben sich wortwörtlich wie schon im Haupttext.

Satz 25.32 *Jede Immersion bzw. Submersion ist auch eine Subimmersion.* □

Satz 25.33 (Rangsatz) *Es sei $\operatorname{rg}_x f = \text{const.} = r$ lokal um $x_0 \in X$. Dann gibt es lokale Koordinaten x_1, \dots, x_m um „ $x_0 = 0$ “ in X und (y_1, \dots, y_n) um „ $y_0 = f(x_0) = 0$ “ in Y , so daß*

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Speziell hat man in solchen Koordinaten

- a) $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ für eine Immersion, $m \leq n$,

bzw.

- b) $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ für eine Submersion, $m \geq n$. □

Folgerung 25.34 *Ist f eine Submersion, so ist f offen (d. h. $f(U)$ ist offen in Y für alle offenen Mengen $U \subset X$).*

Auch in abstrakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kann man von *Untermannigfaltigkeiten* sprechen.

Definition. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $Z \subset X$ eine Teilmenge (mit induzierter Relativtopologie, die dann insbesondere hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeits-Axiom erfüllt). Z heißt eine *differenzierbare Untermannigfaltigkeit* von X , wenn es für alle $x_0 \in Z$ eine Karte (U, ψ, V) von X gibt mit $x_0 \in U$, $\psi(x_0) = 0$ und

$$\psi(Z \cap U) = L \cap V, \quad L = \{x_{r+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Bemerkungen. Bei dieser Definition braucht man einen *maximalen* Atlas für X . Sonst muß man fordern, daß $\psi(Z \cap U) \subset V$ eine *Untermannigfaltigkeit* von V ist, d. h. man braucht den Begriff schon für \mathbb{R}^n . Nach unserer Definition ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, wenn es für alle $x \in Z$ eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\psi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\psi(Z \cap U) = L \cap V$. Dies ist nicht die von uns früher verwendete (Standard-) Definition; wir wissen aber, daß sie zu der üblichen äquivalent ist. Wir werden dies anschließend noch einmal (für Mannigfaltigkeiten) beweisen.

Wir beginnen mit einigen einfachen Erkenntnissen.

Lemma 25.35 *Eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ ist notwendig lokal abgeschlossen, d. h. es existiert eine offene Teilmenge $U \subset X$, so daß $Z \subset U$ und $U \setminus Z$ offen in X ist.*

Warnung. I. a. kann man nicht $U = X$ wählen, d. h. Z ist nicht notwendig abgeschlossen in X .

Lemma 25.36 Sind $Z_1 \subset X_1$, $Z_2 \subset X_2$ zwei Untermannigfaltigkeiten, so ist auch $Z_1 \times Z_2 \subset X_1 \times X_2$ eine Untermannigfaltigkeit.

Die Beweise dieser Aussagen sind elementar und werden deshalb dem Leser überlassen. Etwas schwieriger ist der Nachweis des folgenden Satzes.

Satz 25.37 Eine Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ trägt in kanonischer Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Beweis. Es seien (U_j, ψ_j, V_j) , $j = 1, 2$, zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $\psi_j(Z \cap U_j) = L_j \cap V_j$. Ohne Einschränkung sei $U_1 = U_2 = U$. Dann ist $\lambda := \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ ein Diffeomorphismus $V_1 \rightarrow V_2$ mit $\lambda(L_1 \cap V_1) = L_2 \cap V_2$. Es ist leicht einzusehen, daß dann $\lambda|_{L_1 \cap V_1} : L_1 \cap V_1 \rightarrow L_2 \cap V_2$ ein Diffeomorphismus (von niederdimensionalen Räumen) ist. Daraus folgt sofort, daß die Karten

$$(Z \cap U, \psi|_{Z \cap U}, \psi(Z \cap U) = L \cap V)$$

eine differenzierbare Struktur auf Z erklären. □

Wegen Satz 37 kann man nun auch von *differenzierbaren Abbildungen* $f : Z \rightarrow Y$ von Z in eine differenzierbare Mannigfaltigkeit Y sprechen. Da zur Charakterisierung solcher Abbildungen der Begriff der *differenzierbaren Funktion* auf Z genügt (siehe Lemma 25), ist es wichtig, Kriterien für die Differenzierbarkeit einer Funktion auf Z zu kennen. Wie im Fall von Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n gilt nun, wie man durch Betrachtung geeigneter Karten sofort sieht:

Lemma 25.38 Eine Funktion $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ ist genau dann differenzierbar, wenn f lokal um jeden Punkt $x_0 \in Z$ die Einschränkung einer differenzierbaren Funktion F auf einer offenen Umgebung von x_0 in X ist.

Den Beweis überlassen wir dem Leser, ebenso die Herleitung der beiden folgenden Aussagen.

Satz 25.39 a) Die Untermannigfaltigkeiten $Z \subset X$ mit $\dim_x Z = \dim_x X$ für alle $x \in Z$ sind genau die offenen Teilmengen von X („offene“ Untermannigfaltigkeiten).

b) Die Untermannigfaltigkeiten $Z \subset X$ mit $\dim_x Z = 0$ für alle $x \in Z$ sind die diskreten (notwendig abzählbaren) Teilmengen in X .

Satz 25.40 Es sei $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit, $Z \subset Y$ ein topologischer Unterraum. Dann gilt: $Z \subset Y$ ist eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn Z eine Untermannigfaltigkeit von X ist.

Definition. Ist X rein n -dimensional und $Z \subset X$ von der reinen Dimension $n - 1$, so heißt Z eine *Hyperfläche*.

Wir kommen nun zu einer der zentralen Definitionen für differenzierbare Abbildungen, die es gestattet, Untermannigfaltigkeiten auch auf eine andere Weise zu beschreiben, wie sie uns von Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n schon vertraut ist.

Definition. Es sei $f \in C^\infty(X, Y)$. f heißt *regulär* im Punkt $x_0 \in X$, wenn f dort eine Submersion ist. $y_0 \in Y$ heißt ein *regulärer Wert* von f , wenn f in allen Punkten $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ *regulär* ist. (Dies gilt insbesondere für $y_0 \notin f(X)$, d. h. $f^{-1}(y_0) = \emptyset$). Im anderen Fall spricht man von *singulären Stellen* bzw. Werten.

Satz 25.41 a) Es sei $y_0 \in Y$ ein regulärer Wert von $f \in C^\infty(X, Y)$. Dann ist $Z := f^{-1}(y_0)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von X mit

$$\text{codim}_{x_0}(Z, X) := \dim_{x_0} X - \dim_{x_0} Z = \dim_{y_0} Y$$

für alle $x_0 \in Z$.

b) Lokal ist jede Untermannigfaltigkeit von dieser Gestalt. (Dies ist die übliche Definition im \mathbb{R}^n).

Beweis. a) Nahe $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ gibt es Karten mit $x_0 = 0 \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$, $y_0 = 0 \in V_2 \subset \mathbb{R}^n$, so daß f gegeben wird durch

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n), \quad m \geq n.$$

Dann ist in V_1 :

$$Z = f^{-1}(y_0) = \{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)\},$$

also eine Untermannigfaltigkeit mit

$$\dim_{x_0} Z = m - n = \dim_{x_0} X - \dim_{y_0} Y.$$

b) In einer lokalen Karte V wird Z gegeben durch $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, $\dim_x X = n$. Betrachte die Projektion

$$p: \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{R}^{n-r} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto (x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

Nach Definition ist p eine Submersion, und es ist

$$p^{-1}(0) = Z \cap V. \quad \square$$

Bemerkung. Eine a) entsprechende Aussage gilt auch mutatis mutandis für *Subimmersionen* (von konstantem Rang).

Definition. $f \in C^\infty(X, Y)$ heißt eine *Einbettung* (von X in Y), falls $Z = f(X) \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und $f: X \rightarrow Z$ ein Diffeomorphismus ist. (Insbesondere muß f injektiv sein). Man nennt die Einbettung f *offen* bzw. *abgeschlossen*, wenn Z offen bzw. abgeschlossen in Y ist.

Bemerkung. Eine Einbettung ist notwendig eine injektive Immersion (siehe unten). Die Umkehrung gilt aus den uns schon bekannten Gründen nicht. - Es gilt jedoch das folgende

Lemma 25.42 Ist $f \in C^\infty(X, Y)$ eine Immersion in x_0 , so gibt es Umgebungen $U_1 = U_1(x_0)$, $U_2 = U_2(f(x_0))$ mit $f(U_1) \subset U_2$, so daß

$$f|_{U_1} \in C^\infty(U_1, U_2)$$

eine abgeschlossene Einbettung ist. □

Satz 25.43 $f \in C^\infty(X, Y)$ ist genau dann eine Einbettung von X nach Y , wenn folgendes erfüllt ist:

- a) f ist eine injektive Immersion;
- b) $f: X \rightarrow Z$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Seien umgekehrt a) und b) erfüllt. Wegen des vorstehenden Lemmas ist der Homöomorphismus $f : X \rightarrow f(X)$ lokal ein Diffeomorphismus auf eine Untermannigfaltigkeit. Also ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : X \rightarrow f(X)$ ein Diffeomorphismus. \square

Bemerkung. Eine *eigentliche* injektive Immersion ist eine abgeschlossene Einbettung (Übungsaufgabe).

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Formulierung des berühmten *Einbettungssatzes* von WHITNEY, den wir aber nicht direkt benutzen werden und daher auch nicht beweisen.

Satz 25.44 (Whitney) *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit*

$$\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X = n < \infty .$$

Dann gestattet X eine abgeschlossene Einbettung

$$f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} .$$

Bemerkung. Der Satz bleibt richtig in der reell-analytischen Kategorie (GRAUERT, MORREY; bei Grauert mit holomorphen Techniken bewiesen). Im komplex-analytischen Fall ist die entsprechende Aussage $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ immer falsch für kompakte X (außer wenn X null-dimensional ist). Sie gilt exakt für die Klasse der „Steinschen“ Mannigfaltigkeiten (so genannt nach KARL STEIN). Im kompakten Fall kann man nach Einbettungen $X \hookrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ fragen. Diese existieren für die sogenannten „projektiv-algebraischen“ Mannigfaltigkeiten X .

Aus Gründen der späteren „Zitierbarkeit“ fügen wir hier noch eine exakte Definition des Begriffes der *Teilung der Eins* an.

Definition. Es sei X eine \mathcal{C}^ℓ -Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine *der Überdeckung \mathfrak{U} untergeordnete \mathcal{C}^ℓ -Teilung der Eins* ist ein System von \mathcal{C}^ℓ -Funktionen $\eta_\iota : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $0 \leq \eta_\iota(x) \leq 1$, $x \in X$;
- ii) $\text{supp } \eta_\iota \subset\subset U_\iota$;
- iii) ist U eine beliebige Umgebung eines Punktes x_0 , so ist die Menge der $\iota \in I$ mit $U_\iota \cap U \neq \emptyset$ endlich;
- iv) an jeder Stelle $x \in X$ ist die (nach iii) endliche) Summe $\sum_{\iota \in I} \eta_\iota(x)$ gleich 1.

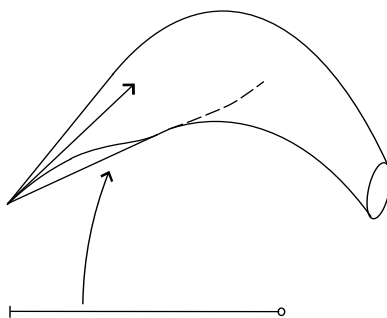
Hierbei bezeichnet $\text{supp } \eta$ den *Träger* einer Funktion η , d. h. den Abschluß der Menge der Punkte auf X , in denen η nicht verschwindet.

Bemerkung. Für parakompakte \mathcal{C}^ℓ -Mannigfaltigkeiten, $\ell \leq \infty$, existieren zu beliebigen offenen Überdeckungen stets untergeordnete \mathcal{C}^ℓ -Teilungen der Eins. Im Anhang zu Kapitel 29 werden wir dies zumindest für \mathcal{C}^∞ -Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n beweisen. Wegen der jeweiligen *Identitätssätze* ist diese Aussage für *reell-* und *komplex-analytische* Mannigfaltigkeiten selbstverständlich falsch. Als \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten besitzen sie jedoch \mathcal{C}^∞ -Teilungen der Eins, sofern sie parakompakt sind.

26 Tangentialraum und Tangentialbündel

Für einen Punkt a in einer beliebigen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ wollen wir die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an Kurven betrachten, die bei a starten und ganz in M verlaufen. Diese Überlegung führt zu der folgenden

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $a \in M$. Ein *Tangentialvektor* an M in a ist der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(0)$ eines stetig differenzierbaren „Kürvchens“ $\gamma : I_\varepsilon := [0, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$.



Figur 26.1

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in a bezeichnen wir mit $T_a M$ oder auch $T_{M,a}$.

Per definitionem ist $T_a M$ nur eine (nicht leere) Menge. Der erste Satz konstatiert eine zusätzliche Struktur auf dieser Menge, die jedoch i. A. weit davon entfernt ist, einen Vektorraum zu bilden.

Satz 26.1 Die Menge $T_a M$ aller Tangentialvektoren bildet einen Kegel mit Spitze in 0 , d. h. es ist $0 \in T_a M$, und mit $v \in T_a M$ ist auch $cv \in T_a M$ für alle $c \geq 0$.

Beweis. Die „konstante“ Kurve $\gamma(t) := a$ garantiert die erste Eigenschaft. Ist weiter $v = \gamma'(0)$, $\gamma : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$, so ist mit $c > 0$ auch $\gamma_c(t) := \gamma(ct) : I_{\varepsilon/c} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma_c(I_{\varepsilon/c}) = \gamma(I_\varepsilon) \subset M$, und mit $\gamma(0) = a$ ist auch $\gamma_c(0) = a$. Es ist ferner $\gamma'_c(t) = c\gamma'(ct)$ und folglich $\gamma'_c(0) = cv$. \square

Definition und Bemerkung. Wir nennen $T_a M$ den *Tangentialkegel* von M an der Stelle a . Man hat diesen Begriff sorgfältig zu unterscheiden von der Definition des *affinen Tangentialkegels* $a + T_a M$, bei dem man also alle Tangentialvektoren in $T_a M$ an den Punkt a „anheftet“.

Bemerkung. Ist Φ ein Diffeomorphismus einer Umgebung $U = U(a)$ eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ auf die Umgebung $V = V(b) \subset \mathbb{R}^n$ des Punktes $b = \Phi(a)$, und ist $M \subset U$ eine Teilmenge mit $a \in M$, so wird jedem Kurvenstückchen $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$ durch $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} := \Phi \circ \gamma$ ein Kurvenstückchen $\tilde{\gamma} : [0, \varepsilon) \rightarrow \Phi(M)$ mit $\tilde{\gamma}(0) = b$ zugeordnet, und aus der Kettenregel ergibt sich unmittelbar

$$\tilde{\gamma}'(0) := ((D\Phi)(a)) \cdot \gamma'(0) \quad \text{und damit} \quad ((D\Phi)(a))(T_a(M)) = T_b(\Phi(M)).$$

Insbesondere für eine invertierbare Matrix S und $a = b = 0$ ist

$$S(T_0(M)) = T_0(SM).$$

Beispiel. I. a. ist $T_a M$ kein Vektorraum. Ist z. B. $M = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$, so ist für jede Kurve $\gamma : I_\varepsilon \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = 0$:

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} \gamma(t) \geq 0, \quad t \geq 0,$$

und damit $\gamma'(0) \geq 0$, d. h. $T_0 M = \mathbb{R}_+$.

Dies ist ein Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage, die wir sofort notieren wollen.

Lemma 26.2 *Ist M selbst ein abgeschlossener Kegel mit Spitze in 0 , so ist $T_0 M = M$.*

Beweis. Ist $x \in M \setminus \{0\}$ beliebig, aber fest, so ist nach Voraussetzung die Kurve $\gamma(t) := tx$, $t \in [0, 1)$ in M enthalten und damit

$$x = \gamma'(0) \in T_0 M, \quad \text{also} \quad M \subset T_0 M.$$

Es sei umgekehrt $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit Anfangspunkt 0 . Dann ist $\gamma(t)/t$ wegen der Kegeleigenschaft von M für alle $t \in (0, \varepsilon)$ in M enthalten und folglich nach Voraussetzung der Abgeschlossenheit von M auch $\gamma'(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} \in M$. \square

Beispiel. Es sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $Q \subset \mathbb{R}^n$ die (entartete) Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^n : {}^t x S x = 0\}$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, daß es zu der symmetrischen Matrix S eine orthogonale Matrix T gibt, so daß ${}^t T S T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit den reellen Eigenwerten λ_j . Des Weiteren gibt es eine Diagonalmatrix D , so daß $D \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) D = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) =: S_0$ ist. Setzen wir also $\tilde{T} := TD$, so ist ${}^t \tilde{T} S \tilde{T} = S_0$ und nach der obigen Bemerkung

$$T_0(Q) = \tilde{T} T_0(\tilde{T}^{-1} Q).$$

Nun ist $\tilde{T}^{-1} Q = \{x = \tilde{T}^{-1} y : y \in Q\} = Q_0$, wobei $Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : {}^t x S_0 x = 0\}$. Weiter ist $T_0 Q_0 = Q_0$, und man sieht sofort, daß Q_0 genau dann ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist, wenn $r = 0$ oder $s = 0$ gilt. Daraus folgt sofort:

Der Tangentialkegel $T_0 Q = Q$ ist genau dann ein Vektorraum, wenn die quadratische Form ${}^t x S x$ semidefinit ist.

Um zu entscheiden, ob im letzten Fall die Menge Q eine Untermannigfaltigkeit ist, können wir uns auf Q_0 beschränken. Positive Semidefinitheit bedeutet hier, wie oben angegeben, $r = 0$ oder $s = 0$. Wir konzentrieren unsere weiteren Überlegungen auf die zweite Möglichkeit (im anderen Fall multipliziere man die Gleichung mit -1). Hier wird dann Q_0 beschrieben durch das Verschwinden der Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^r x_j^2$$

und ist somit die durch $x_1 = \dots = x_r = 0$ definierte $(n - r)$ -dimensionale Ebene E . Wir haben es somit tatsächlich mit einer Untermannigfaltigkeit zu tun, die allerdings durch f nicht korrekt beschrieben wird, da der Gradient von f auf E verschwindet.

Bemerkung. In dem vorigen Beispiel ist also $T_0 Q$ genau dann ein Vektorraum, wenn 0 ein Mannigfaltigkeitspunkt von Q ist. In der Tat folgt aus der Voraussetzung, daß $T_a M$ ein Vektorraum ist, i. A. nicht notwendig, daß a ein Mannigfaltigkeitspunkt der Menge M sein muß. Dies kann man sich leicht an Beispielen von nicht abgeschlossenen Kegeln wie z. B.

$$M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \neq 0\}.$$

klar machen. Hier ist offensichtlich $T_0M = \mathbb{R}^2$, aber der Ursprung ist kein Mannigfaltigkeitspunkt von M .

Die Umkehrung ist jedoch immer richtig. Dies besagt der folgende zentrale Satz über den Tangentialkegel in Mannigfaltigkeitspunkten.

Satz 26.3 *Ist a ein k -dimensionaler Mannigfaltigkeitspunkt von M , so ist T_aM ein k -dimensionaler Vektorraum. Es gilt (mit den Bezeichnungen der Sätze 25.1 und 25.5) :*

$$T_aM = \ker((DF)(a)) = \operatorname{im}((D\varphi)(0)).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen:

$$\operatorname{im}((D\varphi)(0)) \subset T_aM \subset \ker((DF)(a)),$$

denn aufgrund der Rangvoraussetzungen haben die außen stehenden Vektorräume die gleiche Dimension und stimmen daher überein.

a) Der Vektorraum $\operatorname{im}((D\varphi)(0))$ wird erzeugt von den Vektoren

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(0).$$

Sind nun $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ beliebig, so wird für hinreichend kleines ε durch

$$\gamma(t) := \varphi(c_1 t, \dots, c_k t), \quad t \in I_\varepsilon = [0, \varepsilon)$$

eine Kurve definiert, die in M enthalten ist. Somit ist

$$\sum_{\ell=1}^k c_\ell \frac{\partial\varphi}{\partial t_\ell}(0) = \gamma'(0) \in T_aM.$$

b) Es sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I_\varepsilon \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$ gegeben. Dann ist

$$f_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \equiv 0$$

für alle $j = 1, \dots, m = n - k$. Daraus folgt $\langle \operatorname{grad} f_j(a), v \rangle = 0$ für $v = \gamma'(0)$ und damit $((DF)(a))v = 0$. \square

Bemerkung. Aufgrund dieses Satzes spricht man in Mannigfaltigkeitspunkten $a \in M$ anstelle vom Tangentialkegel auch vom Tangentialraum. Entsprechend heißt $a + T_aM$ der affine Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit M im Punkte a .

Bemerkung. In den meisten Textbüchern wird der Tangentialkegel an eine Menge M an der Stelle a auf andere Weise eingeführt, und zwar als die Menge aller Tangentialvektoren an differenzierbare Kurven, die auch eine Vergangenheit haben. Man setzt also

$$\tilde{T}_aM := \{ \gamma'(0) \}$$

für alle differenzierbaren Kurven $\gamma : J_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$. Man macht sich sofort klar, daß dies für einige Beispiele dramatische Konsequenzen hat. So ist z. B. $\tilde{T}_0\mathbb{R}_+ = \{0\}$. Noch allgemeiner gilt der leicht zu beweisende

Satz 26.4 \tilde{T}_aM ist ein Doppelkegel, d. h. mit $v \in \tilde{T}_aM$ und $c \in \mathbb{R}$ ist auch $cv \in \tilde{T}_aM$. \square

Beispiel. Aufgrund dieses Satzes stellt man sehr schnell fest, daß für eine beliebige Menge M der modifizierte Tangentialkegel $\tilde{T}_a M$ der größte, in $T_a M$ enthaltene Doppelkegel ist:

$$\tilde{T}_a M = \{v \in T_a M : cv \in T_a M \text{ für alle } c \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist insbesondere $\tilde{T}_a M = T_a M$, wenn $T_a M$ ein Vektorraum ist, also insbesondere, wenn a ein Mannigfaltigkeitspunkt von M ist.

Bemerkung. Aufgrund des vorigen Beispiels werden wir Tangentialvektoren $v \in T_a M$ an Mannigfaltigkeiten M auch repräsentieren durch Ableitungen $v = \gamma'(0)$ für differenzierbare Kurven $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$.

Als nächstes berechnen wir die Tangentialräume von wichtigen Beispielen.

Beispiele. 1. Es sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $k = n - m$. Dann gibt es m linear unabhängige Linearformen ℓ_1, \dots, ℓ_m , so daß $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell_1(x) = \dots = \ell_m(x) = 0\}$. Mit $\ell_j(x) = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$ und $F = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ ist $(DF)(x) = A := (a_{jk})$ an jeder Stelle x . Es folgt

$$T_a L = \ker((DF)(a)) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\} = L.$$

Entsprechend findet man $T_a M = V$ für jeden affinen Unterraum $M = x_0 + V$, V ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

2. Hat man einen (lokalen) Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(a) = 0$ und $\Phi(M \cap U) = H \cap V$, $H = E_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{k+1} = \dots = \xi_n = 0\}$, so wird jeder Kurve $\alpha : I_\varepsilon = [0, \varepsilon) \rightarrow H$ durch 0 vermittelt $\alpha \mapsto \gamma := \Phi^{-1} \circ \alpha$ eine Kurve in M durch a zugeordnet. Wegen $\gamma'(0) = (D\Phi^{-1})(0) \cdot \alpha'(0)$ liefert dies eine injektive Abbildung

$$(D\Phi^{-1})(0) : T_0 H \longrightarrow T_a M.$$

Wegen der Beziehung $\dim T_0 H = k = \dim T_a M$ und der Identifizierung $T_0 H = H$ ist somit

$$T_a M = ((D\Phi^{-1})(0)) H.$$

Da H von den Einheitsvektoren e_1, \dots, e_k erzeugt wird, heißt dies: $T_a M$ wird von den ersten k Spalten in $(D\Phi^{-1})(0)$ erzeugt.

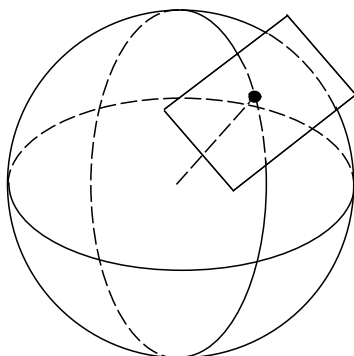
3. Für eine Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : {}^t x A x = 1\}$ ist wegen $(Df)(a) = 2 {}^t a A$, $f(x) := {}^t x A x$, der Tangentialraum

$$T_a Q = \{v \in \mathbb{R}^n : {}^t a A v = 0\}.$$

Speziell für die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$T_a S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : {}^t a v = \langle a, v \rangle = 0\}.$$

Somit ist $T_a S^{n-1}$ das orthogonale Komplement $\langle a \rangle^\perp$ des von dem Ortsvektor a erzeugten linearen Unterraums $\langle a \rangle$. In der folgenden Figur ist der affine Tangentialraum eingezeichnet.



Figur 26.2

4. Wir kommen noch einmal auf ein in Kapitel 25 behandeltes Beispiel zurück. Es sei M das gemeinsame Nullstellengebilde der drei Funktionen $f_j : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

M ist ein abgeschlossener Kegel mit Spitze in 0 , so daß der Tangentialkegel T_0M mit M übereinstimmt. Daraus folgt die dortige Feststellung, daß *der Ursprung kein Mannigfaltigkeitspunkt von M ist*, da offensichtlich M kein Untervektorraum von \mathbb{R}^4 ist. Man kommt aber auch schon mit der schwächeren Aussage $M \subset T_0M$ aus: Nach dem früher in Kapitel 25 zu diesem Beispiel Gezeigten ist für alle $x_1 \neq 0$, x_2 beliebig, der Vektor $(x_1, x_2, x_2^2/x_1, x_2^3/x_1^2) \in M \subset T_0M$ und auch, wenn man x_1 durch $-x_1$ ersetzt, $(-x_1, x_2, -x_2^2/x_1, x_2^3/x_1^2) \in T_0M$. Wäre nun $0 \in M$ ein Mannigfaltigkeitspunkt, so wäre die Summe dieser beiden Vektoren und damit auch $(0, x_2, 0, x_2^3/x_1^2)$ in T_0M enthalten. Da wir aber $x_1 \neq 0$ und x_2 beliebig wählen können, wären alle Vektoren der Form $(0, b, 0, d)$, $bd \neq 0$, in T_0M . Ganz analog erhält man $(a, 0, c, 0) \in T_0M$. Dies ist aber für den Fall, daß T_0M ein Untervektorraum von \mathbb{R}^4 ist, nur möglich, wenn die Gleichheit $T_0M = \mathbb{R}^4$ besteht, was aber absurd ist, da dann M in 0 eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sein, also eine offene Kugel um den Ursprung enthalten müßte; dies aber steht im eklatanten Widerspruch dazu, daß M außerhalb des Ursprungs eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

5. Wir berechnen nun den Tangentialraum der $(n^2 - 1)$ -dimensionalen Liegruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ an der Stelle E_n . Für die Einheitsmatrix $X = E_n$ sind die Unterdeterminanten $\det X_{jk} = \delta_{jk}$. Infolgedessen ist mit der im vorigen Kapitel bewiesenen allgemeinen Formel

$$(*) \quad (\mathrm{grad} \det(X))(H) = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j+k} h_{jk} \det X_{jk}$$

der Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ an der Stelle E_n gleich dem Vektorraum der quadratischen $n \times n$ -Matrizen $H = (h_{jk})$, für die gilt:

$$\sum_{j=1}^n h_{jj} = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j+k} \delta_{jk} h_{jk} = ((\mathrm{grad} \det)(E_n))(H) = 0.$$

Der Tangentialraum besteht also gerade aus den „spurlosen“ Matrizen:

$$T_{E_n} \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{ H \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \mathrm{spur} H = 0 \}.$$

Bemerkung. Hier ist eine alternative Begründung für Beispiel 5. Man kann für beliebige Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ leicht mit Hilfe der Jordanschen Normalform beweisen, daß

$$(+)$$

$$\det \exp A = e^{\mathrm{spur} A}.$$

(Ein Beweis hierfür wird am Ende dieser Bemerkung gegeben). Ist somit H eine Matrix mit $\mathrm{spur} H = 0$, so definiert $\gamma(t) := \exp(tH)$, $t \in \mathbb{R}$, eine Kurve in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ mit $\gamma(0) = E_n$ und $\gamma'(0) = H$. Infolgedessen ist

$$T_0 := \{ H \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \mathrm{spur} H = 0 \} \subset T_{E_n} \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$

Da $\mathrm{spur} H = 0$ eine *lineare* Bedingung darstellt, ist T_0 ein Vektorraum der gleichen Dimension $n^2 - 1$ wie $T_{E_n} \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Somit müssen beide Vektorräume übereinstimmen.

Hier noch der versprochene Beweis der Formel (+). Mit $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ergibt sich unmittelbar

$$T^{-1}(\exp A)T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{-1}A^kT = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (T^{-1}AT)^k = \exp(T^{-1}AT).$$

Wegen $\det(T^{-1}(\exp A)T) = \det \exp A$ und $\operatorname{spur}(T^{-1}(\exp A)T) = \operatorname{spur} \exp A$ können wir uns auf Matrizen A in Jordanscher Normalform beschränken. Wegen der Blockstruktur der Jordanschen Normalform genügt es dann sogar, einen einzelnen Jordanblock zu behandeln. Ist nämlich $A = A_1 \oplus A_2$, so ist $\exp(A_1 \oplus A_2) = (\exp A_1) \oplus (\exp A_2)$ und damit

$$\det(\exp(A_1 \oplus A_2)) = \det(\exp A_1) \cdot \det(\exp A_2).$$

Auf der anderen Seite ist $\operatorname{spur}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{spur} A_1 + \operatorname{spur} A_2$ und folglich

$$e^{\operatorname{spur}(A_1 \oplus A_2)} = e^{\operatorname{spur} A_1} \cdot e^{\operatorname{spur} A_2}.$$

Es sei also $A = D + N$ mit $D = \lambda E$. Wegen $DN = ND$ folgt dann

$$\det \exp A = \det \exp(D + N) = \det(\exp D \cdot \exp N) = \det \exp D \cdot \det \exp N.$$

Nun ist aber $\exp N$ eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale, also $\det \exp N = 1$. Weiter ist $\operatorname{spur} A = \operatorname{spur} D$ die n -fache Summe des Eigenwertes λ von A , und es gilt

$$\exp D = \operatorname{diag}(e^\lambda, \dots, e^\lambda).$$

Also hat man

$$\det \exp A = \det \exp D = e^\lambda \cdot \dots \cdot e^\lambda = e^{n\lambda} = e^{\operatorname{spur} A}.$$

6. Für die Gruppen $O(S)$ zu einer invertierbaren symmetrischen Matrix S haben wir für die Funktion $M \mapsto f(M) := {}^t M S M$ schon im vorigen Kapitel das Differential Df berechnet:

$$((Df)(M))H = {}^t M S H + {}^t H S M.$$

Folglich ist

$$T_M O(S) = \{H \in M(n \times n, \mathbb{R}) : {}^t M S H = -{}^t ({}^t M S H)\},$$

d. h. ${}^t M S H$ ist *schiefsymmetrisch*. Speziell besteht der Tangentialraum der *orthogonalen Gruppe* $O(n)$ an der Stelle E_n aus den schiefsymmetrischen Matrizen $H = -{}^t H$.

Bemerkung. Auch der letzte Spezialfall läßt sich auf elementarere Weise herleiten. Wir beweisen dafür einen auch für sich interessanten Satz.

Satz 26.5 *Es sei H eine reelle $n \times n$ -Matrix. Genau dann ist H schiefsymmetrisch, wenn für jede Lösung $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $Y' = HY$ die euklidische Norm $\|\Phi(x)\|$ konstant ist.*

Beweis. a). Wir zeigen gleich noch allgemeiner: Ist H schiefsymmetrisch, so ist das Skalarprodukt $\langle \Phi_1(x), \Phi_2(x) \rangle$ für zwei beliebige Lösungen stets konstant. Der Beweis ist denkbar einfach:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle' &= \langle \Phi_1', \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_1, \Phi_2' \rangle = \langle H \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_1, H \Phi_2 \rangle \\ &= {}^t (H \Phi_1) \Phi_2 + {}^t \Phi_1 H \Phi_2 = {}^t \Phi_1 ({}^t H + H) \Phi_2 = 0. \end{aligned}$$

b) Ist umgekehrt die euklidische Norm für jede Lösung konstant, so bleibt wegen der *Polarisierungsformel* $2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \|\Phi_1 + \Phi_2\|^2 - \|\Phi_1\|^2 - \|\Phi_2\|^2$ auch das Skalarprodukt von je zwei Lösungen konstant. Damit ist notwendig ${}^t \Phi_1 ({}^t H + H) \Phi_2 = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle' = 0$ für je zwei Lösungen. Wählt man nun zu beliebigen $j, k = 1, \dots, n$ die beiden Lösungen so, daß $\Phi_1(0) = e_j$, $\Phi_2(0) = e_k$, so impliziert diese Bedingung das Verschwinden des Eintrags der Matrix ${}^t H + H$ an der Stelle j, k . \square

Bemerkung. Da die Spalten der Matrix $\exp(Hx)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems $Y' = HY$ bilden, das an der Stelle $x = 0$ die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^n als Anfangswerte hat,

bilden ihre Spalten also unter der Voraussetzung von Teil b) für alle x ein *Orthonormal-System*, d. h. es gilt:

$${}^t(e^{Hx})e^{Hx} = E_n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt unmittelbar, daß ${}^t(e^{Hx}) = \exp({}^tHx)$. Durch Differentiation der vorstehenden Identität ergibt sich dann

$${}^tH \exp({}^tHx) \exp(Hx) + \exp({}^tHx) H \exp(Hx) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzt man hierin $x = 0$, so folgt ${}^tH + H = 0$, womit die Aussage des zweiten Teils erneut hergeleitet wurde.

Insbesondere nimmt also für eine *schiefsymmetrische* Matrix $H \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(Hx)$ Werte in der *orthogonalen* Gruppe $O(n, \mathbb{R}) \subset M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ an (und sogar in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$). Sie kann daher aufgefaßt werden als eine *Kurve* in $SO(n, \mathbb{R})$ durch das neutrale Element E_n , die überdies *differenzierbar* ist mit der Ableitung $H \exp(Hx)$. Insbesondere ist ihre Ableitung an der Stelle E_n gleich der Matrix $H \in M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, so daß alle diese Matrizen *Tangentialvektoren* von $SO(n, \mathbb{R})$ im Punkte E_n sind. Da die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$ eine *Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^{n^2} der Dimension $n(n-1)/2$ ist und damit insbesondere in E_n einen *Tangentialraum* der gleichen Dimension besitzt und die schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen ebenfalls einen Vektorraum dieser Dimension bilden, so folgt erneut, daß der Tangentialraum der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$ im neutralen Element E_n in natürlicher Weise mit dem Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen identifiziert werden kann.

7. Ein weiterer Spezialfall von Beispiel 6 ist die Gruppe $O(p, q)$ der Matrizen $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $n = p + q$, die der Bedingung

$${}^tMIM = I, \quad I = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q),$$

genügen. Dies sind genau diejenigen, welche die quadratische Form $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$ invariant lassen.

Nach Beispiel 6 ist

$$T_{E_n} O(p, q) = \{H \in M(n \times n, \mathbb{R}) : IH + {}^tHI = 0\}.$$

Schreibt man H selbst in Blockform $\begin{pmatrix} B & C \\ F & G \end{pmatrix}$, so führt die Bedingung ${}^tHI = -IH$ unmittelbar zu ${}^tB = -B$, ${}^tG = -G$ und $F = {}^tC$. Also sind B und G schiefsymmetrisch, und die linke untere Matrix ist durch die obere rechte Matrix völlig bestimmt. Dies liefert insgesamt

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq$$

freie Parameter, und diese Zahl ist tatsächlich gleich

$$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}.$$

Speziell für $p = 3$, $q = 1$ ergibt sich $\dim O(3, 1) = 3 \cdot 4/2 = 6$ und $H = (h_{jk})$ liegt genau dann in $T_E O(3, 1)$, wenn

$$H = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ -h_{12} & 0 & h_{23} & h_{24} \\ -h_{13} & -h_{23} & 0 & h_{34} \\ h_{14} & h_{24} & h_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $O(3, 1)$ ist die berühmte LORENTZ-Gruppe der Speziellen Relativitätstheorie.

Wir fassen einen Teil der obigen Überlegungen zu der speziellen orthogonalen Gruppe noch einmal zusammen in dem

Lemma 26.6 Die Exponentialabbildung von Matrizen bildet $T_E O(n)$ surjektiv auf $SO(n)$ ab.

Beweis. $H \in T_{E_n} O(n)$ ist schiefsymmetrisch; damit vertauschen H und ${}^t H$, und es ist

$$\exp H \cdot {}^t(\exp H) = \exp(H + {}^t H) = \exp 0_n = E_n .$$

Also ist $\exp H \in O(n)$. Ist nun H mit ${}^t H = -H$ beliebig vorgegeben, so geht die Kurve $\alpha : t \mapsto (tH)$, $t \in [0, 1]$, in $T_E O(n)$ in die Kurve $\gamma : t \mapsto \exp(tH)$ in $O(n)$ über. Es ist aber

$$\alpha'(0) = H, \quad \gamma'(t) = H \exp(tH) \quad \text{und} \quad \gamma'(0) = H e^0 = H .$$

Aus Stetigkeitsgründen ist wegen $\det A = \pm 1$ für $A \in O(n)$ die Determinante $\det \gamma(t) = \det \gamma(0) = 1$, also insbesondere

$$\exp H \in SO(n) .$$

Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß auch tatsächlich jede spezielle orthogonale Matrix A in der Form $A = \exp H$, H schiefsymmetrisch, geschrieben werden kann. \square

Dies ist tatsächlich kein isoliertes Resultat. Wenn man beachtet, daß die Zusammenhangskomponente des Einselementes E_n in der orthogonalen Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ gerade die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$ ist, so ordnet sich das Lemma dem folgenden allgemeinen Satz unter, den wir an dieser Stelle aber nicht weiter erläutern wollen⁵³.

Satz 26.7 Ist G eine beliebige Liegruppe, so ist auch die Zusammenhangskomponente G_e des neutralen Elements e eine Liegruppe, und es gibt eine (durch weitere Forderungen eindeutig festgelegte) surjektive Abbildung

$$\exp : T_e G \longrightarrow G_e .$$

Der Untermannigfaltigkeitsbegriff läßt sich auf den von glatten Hyperflächen zurückführen. Hierbei ist eine glatte Hyperfläche H in einem Vektorraum \mathbb{R}^n eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es ist dann (lokal) $H \cap U = \{f = 0\}$ mit $\text{grad } f(x) \neq 0$, $x \in U$. Man sagt, m glatte Hyperflächen H_1, \dots, H_m schneiden sich transversal in a , falls

$$\dim(T_a H_1 \cap \dots \cap T_a H_m) = n - m .$$

Anstelle von $H_1 \cap \dots \cap H_m$ schreibt man dann übrigens auch

$$H_1 \bar{\cap} \dots \bar{\cap} H_m \quad \text{im Punkte } a .$$

Bemerkung. Wird die glatte Hyperebene H_j durch das Verschwinden der Funktion f_j beschrieben, $j = 1, \dots, m$, so wird $T_a H_1 \cap \dots \cap T_a H_m$ beschrieben durch das gemeinsame Verschwinden der Gradienten dieser Funktionen an der Stelle a . Da das Verschwinden eines Gradienten aber eine lineare Bedingung darstellt und nach Standardresultaten der Linearen Algebra die Dimension des sukzessiven Durchschnitts der Tangentialräume $T_a H_j$ jeweils höchstens um 1 sinken kann, ist die Bedingung

$$H_1 \bar{\cap} \dots \bar{\cap} H_m \quad \text{im Punkte } a$$

gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit der Gradienten $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_m(a)$.

Dies impliziert sofort den folgenden

⁵³Zum Begriff der Lie-Gruppe siehe mein Manuskript *Differentialgeometrie II*.

Satz 26.8 Die Teilmenge $M \neq \emptyset$ von \mathbb{R}^n ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $a \in M$ eine Umgebung $U = U(a)$ und in U glatte Hyperflächen H_1, \dots, H_m , $m = n - k$, gibt, so daß gilt:

$$M \cap U(a) = H_1 \bar{\cap} \dots \bar{\cap} H_m. \quad \square$$

Als unmittelbare Konsequenz hieraus erhält man weiter die

Folgerung 26.9 M_1 und M_2 seien Hyperflächen im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Ist dann $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ und $T_a M_1 \neq T_a M_2$ für alle $a \in M_1 \cap M_2$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine $(n - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Nach der bekannten *Dimensionsformel* aus der *Linearen Algebra* gilt für alle $a \in M_1 \cap M_2$:

$$\dim(T_a M_1 + T_a M_2) + \dim(T_a M_1 \cap T_a M_2) = \dim T_a M_1 + \dim T_a M_2.$$

Da $T_a M_1$ und $T_a M_2$ aber verschieden und beide von der Dimension $n - 1$ sind, muß ihre Summe \mathbb{R}^n ergeben. Somit folgt

$$\dim(T_a M_1 \cap T_a M_2) = 2(n - 1) - n = n - 2,$$

und dies bedeutet gerade, daß sich M_1 und M_2 in a transversal schneiden. □

Wir führen jetzt noch den Begriff des *Normalenraumes* $N_a M$ an der Stelle a für Mannigfaltigkeiten M im *euklidischen* \mathbb{R}^n ein, $a \in M$. Da jeder Tangentialraum $T_a M$ ein linearer Unterraum von \mathbb{R}^n ist, können wir seinen „Senkrechttraum“ betrachten und somit definieren:

$$N_a M := (T_a M)^\perp.$$

Jeder Vektor $n \in N_a M$ heißt ein *Normalenvektor* an M im Punkte a . Im Allgemeinfall ist $\dim N_a M = m = n - k$, $k = \dim_a M$. Ist $M \cap U = \{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\}$, $\text{rang}(DF)(a) = m = n - k$, so wird offenbar $N_a M$ erzeugt von den Vektoren

$$\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_{n-k}(a).$$

Bemerkung. Ist M eine in a glatte *Hyperfläche*, so gibt es einen (bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmten) Normalenvektor

$$n \in N_a M \quad \text{mit} \quad \|n\| = 1.$$

Selbstverständlich ist n in diesem Fall ein Erzeuger des *eindimensionalen* Normalenraumes $N_a M$.

Diese Überlegungen führen zu einem wirklich *konzeptionellen* Verständnis des Satzes über *Extrema mit Nebenbedingungen*.

Satz 26.10 Die differenzierbare Funktion h nehme auf der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M = \{f_1 = \dots = f_m = 0\}$ in a ein lokales Extremum an. Dann ist notwendig

$$\text{grad } h(a) \in N_a M.$$

Mit anderen Worten:

$$\text{grad } h(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } f_j(a)$$

mit geeigneten Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Man bezeichnet diesen Sachverhalt auch als *Multiplikatorregel von LAGRANGE*. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ heißen auch *LAGRANGESche Multiplikatoren*.

Beweis (von Satz 9). Sei v ein Tangentialvektor von M an der Stelle a , also $v = \gamma'(0)$ für eine Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = a$. Dann nimmt $h \circ \gamma$ in 0 ein lokales Extremum an. Es folgt

$$0 = (h \circ \gamma)'(0) = \langle \text{grad } h(a), \gamma'(0) \rangle = \langle \text{grad } h(a), v \rangle.$$

Also steht $\text{grad } h(a)$ senkrecht auf jedem Tangentialvektor $v \in T_a M$, und damit ist nach Definition $\text{grad } h(a) \in N_a M$. Da der Normalenraum von M an der Stelle a von den Vektoren $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_m(a)$ erzeugt wird, folgt die Behauptung. \square

Wir können mit dieser Begriffsbildung sofort auch ein früheres Ergebnis über das „Senkrechtstehen“ des Verbindungsvektors eines Punktes im euklidischen Raum zu dem Punkt minimalen Abstandes auf einem affinen Unterraum verallgemeinern zu dem folgenden

Lemma 26.11 *Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen \mathbb{R}^n und x_0 ein Punkt außerhalb von M . Weiter sei $a \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von x_0 . Dann steht die Gerade durch x_0 und a senkrecht auf dem affinen Tangentialraum von M im Punkte a .*

Beweis. Das Quadrat der Abstandsfunktion $\Delta(x) := \|x - x_0\|^2$ ist beliebig oft differenzierbar. Nach Voraussetzung ist $a \in M$ eine Extremalstelle von Δ unter der Nebenbedingung $x \in M$. Nach dem Satz von den Lagrange-Multiplikatoren impliziert dies, daß der Gradient von Δ in a im Normalenraum von M an dieser Stelle liegt, also senkrecht auf dem Tangentialraum $T_a M$ steht. Nun ist aber $\text{grad } \Delta(a) = 2(a - x_0)$, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir wollen zum Abschluß dieses Kapitels die *Gesamtheit* aller Tangentialräume $T_x M$, $x \in M$, einer Untermannigfaltigkeit M mit einer *Mannigfaltigkeitsstruktur* versehen. Man kann diese Tangentialräume „disjunkt“ nebeneinanderlegen auf die folgende Weise:

$$T_M := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in M, v \in T_x M \subset \mathbb{R}^n\}.$$

(Mengentheoretisch ist dies nichts anderes als die disjunkte Vereinigung

$$\bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

aller Tangentialräume).

Definition und Bemerkung. Wir nennen T_M das *Tangentialbündel* von M . Die Bezeichnung „Bündel“ werden wir erst zu einem späteren Zeitpunkt rechtfertigen (können). Wie viele andere Autoren schreiben wir gelegentlich auch TM oder $T(M)$ für T_M und $(TM)_x$ oder $T_{M,x}$ für den Tangentialraum $T_x M$ an der Stelle $x \in M$.

Wir beweisen dazu einen wichtigen und entscheidenden Satz (den wir später für abstrakte Mannigfaltigkeiten wesentlich verallgemeinern werden).

Satz 26.12 *Ist M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension k , so ist T_M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der Dimension $2k$. Bezeichnet $\pi: T_M \rightarrow M$ die kanonische Projektion*

$$T_M \ni (x, v) \mapsto x \in M,$$

so gilt:

- a) $\pi^{-1}(x) = T_x M$, die Faser besitzt also eine kanonische Vektorraumstruktur,

- b) π ist eine surjektive Submersion,
 c) zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine Umgebung $U = U(x_0) \subset M$ und ein Diffeomorphismus χ_U , der das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) \\ p = \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

kommutativ macht („lokale Trivialisierung“), und die Faserabbildung

$$\chi_{U,x} : \mathbb{R}^k \cong p^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x) = T_x M$$

ist ein (linearer) Isomorphismus für alle $x \in U$.

Beweis. Es sei ohne Einschränkung M (lokal) ein Graph:

$$M = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_\ell = f_\ell(x_1, \dots, x_k), \ell = k+1, \dots, n \}.$$

Dann ist

$$T_x M = \{ v \in \mathbb{R}^n : v = ((DF)(x)) w, w \in \mathbb{R}^k \},$$

wobei

$$F(x_1, \dots, x_k) = {}^t(x_1, \dots, x_k, f_{k+1}(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$$

und damit

$$(DF)(x) = \left(\begin{array}{c|c} E_k & \\ \hline \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} \right)_{\substack{\ell=k+1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} & \end{array} \right),$$

so daß also $v = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_x M$ genau dann, wenn

$$(*) \quad \xi_j = \eta_j, j = 1, \dots, k, \quad \xi_\ell = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k) \cdot \eta_j, \ell = k+1, \dots, n.$$

Somit wird T_M (lokal) beschrieben durch die Menge

$$\{ (x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x_\ell - f_\ell(x_1, \dots, x_k) = 0, \xi_\ell - \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k) \xi_j = 0, \ell = k+1, \dots, n \}.$$

Da die zugehörige Funktionalmatrix wie folgt aussieht:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} * & E_{n-k} & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & * & E_{n-k} \end{array} \right)$$

und somit offensichtlich den Rang $2n - 2k$ besitzt, ist $T_M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2k$.

Eine (lokale) Trivialisierung bekommt man in der vorigen Situation sehr einfach durch

$$M \times \mathbb{R}^k \ni (x, w) \longmapsto (x, v) \in T_M \subset M \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $w = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ und $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ durch die Formel (*) gegeben wird. Die restlichen Aussagen sind unproblematisch. \square

Bemerkung und Warnung. Die obige Formulierung ist nur in der C^∞ - und der analytischen Kategorie vollständig korrekt. Ist die Untermannigfaltigkeit M allerdings von der Klasse C^ℓ , $\ell \in \mathbb{N}^*$, so zeigt der vorstehende Beweis, daß im Allgemeinen das Tangentialbündel von M nur von der Klasse $C^{\ell-1}$ ist, da in die beschreibenden Gleichungen von T_M auch die partiellen Ableitungen der M beschreibenden Gleichungen eingehen. Es braucht also z. B. das Tangentialbündel nur eine *topologische Mannigfaltigkeit* zu sein, wenn M *einmal* stetig differenzierbar ist.

Man kann dieses Ergebnis auch mit den beiden anderen Erscheinungsformen des Tangentialraums einsehen. Wir illustrieren dies zunächst am Fall eines „Flachmachers“. Das folgende Beispiel ist offensichtlich.

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ linear und k -dimensional. Dann ist $T_x M = M$ für alle $x \in M$, so daß $T_M = M \times M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ trivial ist.

Wir betrachten nun allgemeiner zwei Untermannigfaltigkeiten $M_1 \subset U_1$, $M_2 \subset U_2$ im \mathbb{R}^n , die unter einem Diffeomorphismus $\Phi \in C^\infty(U_1, U_2)$ aufeinander abgebildet werden: $\Phi(M_1) = M_2$. Ist φ_1 eine (lokale) Parametrisierung von M_1 , so ist $\varphi_2 := \Phi \circ \varphi_1$ eine Parametrisierung von M_2 . Aus der obigen Beschreibung der Tangentialbündel von M_1 und M_2 und der Kettenregel ergibt sich dann sofort der folgende Satz.

Satz 26.13 *Die Abbildung*

$$\begin{cases} U_1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_2 \times \mathbb{R}^n \\ (x, \xi) \longmapsto (\Phi(x), ((D\Phi)(x))\xi) \end{cases}$$

induziert einen Diffeomorphismus von T_{M_1} nach T_{M_2} , so daß das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{M_1} & \xrightarrow{\sim} & T_{M_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \end{array}$$

kommutativ ist.

Wendet man diesen Satz auf einen (lokalen) *Flachmacher* Φ (siehe Satz 25.1, iv) einer Untermannigfaltigkeit M an und verwendet man die Bemerkung in dem vorstehenden Beispiel, so ergibt sich erneut die lokale Trivialität des Tangentialbündels einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Wir wollen das Tangentialbündel T_M zu einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ auch noch mit einem geeigneten *Atlas* beschreiben. Dies gibt uns sofort die Möglichkeit an die Hand, das Tangentialbündel ebenfalls für abstrakte Mannigfaltigkeiten (auf *rein formale* Weise) einzuführen (siehe dazu den Anhang zu diesem Kapitel). Selbstverständlich werden wir uns nicht mit einer solchen formalen Beschreibung zufriedengeben, sondern diese auf einem konzeptionellen Hintergrund beleuchten.

Es sei also (U, ψ, V) eine Karte auf der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ auffaßbar als differenzierbare Abbildung von $V \subset \mathbb{R}^k$ nach \mathbb{R}^n . Man sieht dann leicht, daß die Abbildung

$$V \times \mathbb{R}^k \ni (x, v) \longmapsto \Phi(x, v) := (\varphi(x), ((D\varphi)(x)) \cdot v) \in T_X$$

einen *Diffeomorphismus* von $V \times \mathbb{R}^k$ nach $T_{M|U} := \pi^{-1}(U)$ liefert, der auf den jeweiligen Fasern ein linearer Isomorphismus ist. Durchläuft dann (V, φ, U) einen *Atlas* von M , so bilden die Tripel

$(V \times \mathbb{R}^k, \Phi, T_{M|U})$ einen Atlas von T_M . Es ist nun außerordentlich einfach, den (abstrakten) 1-Cozyklus zu diesem Atlas zu berechnen: Sind $(V_\iota, \varphi_\iota, U_\iota)$ und $(V_\kappa, \varphi_\kappa, U_\kappa)$ zwei Karten von M , und ist $\varphi_{\kappa\iota} = \varphi_\kappa^{-1} \circ \varphi_\iota$ der entsprechende Kartenwechsel auf $V_{\kappa\iota}$, so wird offensichtlich der entsprechende Kartenwechsel

$$(+) \quad V_{\kappa\iota} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow V_{\iota\kappa} \times \mathbb{R}^k$$

auf T_M gegeben durch

$$(++) \quad (x_\iota, v_\iota) \longmapsto (x_\kappa, v_\kappa) = \Phi_{\kappa\iota}(x_\iota, v_\iota) := (\varphi_{\kappa\iota}(x_\iota), ((D\varphi_{\kappa\iota})(x_\iota)) \cdot v_\iota).$$

Anhang: Das Tangentialbündel für abstrakte Mannigfaltigkeiten und Vektorraumbündel

Wie oben im Hauptteil des Kapitels schon angedeutet, kann man vermittels (+) und (++) aus einem abstrakten 1-Cozyklus $\{\varphi_{\kappa\iota}\}$ zu einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X einen abstrakten 1-Cozyklus zu einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit $\{\Phi_{\kappa\iota}\}$ gewinnen. Der hieraus konstruierte topologische Raum, den wir mit T_X bezeichnen wollen, erfüllt tatsächlich, wie man sich einfach überlegt, das Hausdorffsche Trennungs-Axiom und das 2. Abzählbarkeits-Axiom - schlicht deshalb, weil dies für den 1-Cozyklus $\{\varphi_{\kappa\iota}\}$ der Fall ist (dieser verklebt sich ja zu der vorgegebenen Mannigfaltigkeit X ; siehe hierzu auch das folgende Kapitel). Außerdem hat man eine kanonische differenzierbare Projektion $\pi : T_X \rightarrow X$, die alle Eigenschaften der entsprechenden Abbildung im Falle von Untermannigfaltigkeiten besitzt (siehe Satz 12). Selbstverständlich hängt das so konstruierte *Tangentialbündel* T_X von der Vorgabe des Cozyklus $\{\varphi_{\kappa\iota}\}$ ab. Wählt man einen anderen solchen Zyklus, so ist das entsprechende Tangentialbündel nur *diffeomorph* zu T_X über X (siehe zu diesem Begriff den Anhang von Kapitel 25). Dieses Phänomen liegt aber in der Natur der Sache, da ja auch die abstrakte Mannigfaltigkeit X nur „bis auf Diffeomorphie“ durch den Cozyklus $\{\varphi_{\kappa\iota}\}$ bestimmt ist.

Was an dieser Konstruktion letztlich unbefriedigend ist, ist die (vermeintliche) Tatsache, daß der *Tangentialraum* $T_x X := T_{X,x} := \pi^{-1}(x)$ von X an der Stelle x keinerlei konzeptionelle Bedeutung zu haben scheint. Bei genauerem Hinschauen sieht man jedoch mehr. Wie im Fall der Untermannigfaltigkeiten betrachten wir zu fest vorgegebenem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbare Kurven $\alpha : I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$. Differenzierbarkeit bedeutet nach unserer früheren Definition nichts anderes, als daß bezüglich jeder Karte (U, ψ, V) mit $x_0 \in U$ und - ohne Einschränkung - $\psi(x_0) = 0$ die Komposition $\tilde{\alpha} := \psi \circ \alpha$ differenzierbar ist (die Komposition existiert natürlich, wenn man $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählt). In der Menge dieser Kurven führen wir dann eine Relation ein durch

$$\alpha_1 \sim_{x_0} \alpha_2 \iff \tilde{\alpha}'_1(0) = \tilde{\alpha}'_2(0).$$

Man sieht unmittelbar, daß diese Definition von der gewählten Karte unabhängig ist und tatsächlich eine Äquivalenzrelation liefert. Wir nennen dann die Menge der Äquivalenzklassen den *Tangentialraum* T_{X,x_0} von X an der Stelle x_0 . Wählt man aus einer Äquivalenzklasse eine Kurve α aus, so ist der Wert $\tilde{\alpha}'(0) \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim_{x_0} X$, nur von der Klasse abhängig; auf diese Weise erhält man eine Bijektion

$$(\tilde{D}\psi)_{x_0} : T_{X,x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die sich unter Koordinatentransformation gut verhält: Aus der Beziehung

$$(\psi_\kappa \circ \alpha) = (\varphi_\kappa^{-1} \circ \varphi_\iota) \circ (\psi_\iota \circ \alpha)$$

folgt sofort

$$(\times) \quad (\tilde{D}\psi_\kappa)_{x_0} = (D\varphi_{\kappa\iota})_0 \circ (\tilde{D}\psi_\iota)_{x_0}.$$

Die bedeutet insbesondere: Man kann vermöge $(\tilde{D}\psi)_{x_0}$ die Vektorraum-Struktur von \mathbb{R}^n nach T_{X,x_0} liften, und diese Struktur ist unabhängig von der ausgewählten Karte.

Betrachte nun

$$T_X := \bigsqcup_{x \in X} T_{X,x}$$

zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : T_X \rightarrow X$. Auf

$$\bigsqcup_{x_0 \in U} T_{X,x_0} = \pi^{-1}(U)$$

bekommt man durch $(\tilde{D}\psi)_{x_0}$, $x_0 \in U$, eine Bijektion nach $U \times \mathbb{R}^n$, und im Durchschnitt zweier solcher Karten $U_\iota \times \mathbb{R}^n$ und $U_\kappa \times \mathbb{R}^n$ verkleben sich diese auf die „richtige“ (insbesondere differenzierbare) Weise:

$$U_{\kappa\iota} \times \mathbb{R}^n \ni (x, v_\iota) \longmapsto (x, (D\varphi_{\kappa\iota})_{\psi_\iota(x)} \cdot v_\iota) \in U_{\iota\kappa} \times \mathbb{R}^n.$$

Damit kann man, unabhängig von der gewählten Kartenüberdeckung, T_X mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen, so daß π differenzierbar und T_X bzgl. π lokal trivial wird und jeder Kartenwechsel die gewünschte Form besitzt. T_X kann daher zu Recht als das Tangentialbündel von X bezeichnet werden. Selbstverständlich ist es im Falle einer Untermannigfaltigkeit „isomorph“ zu dem klassischen Tangentialbündel.

Hat man speziell eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ als Mannigfaltigkeit vorliegen, so gewinnt man mit der Karte (V, id, V) die *kanonische* Isomorphie

$$(\tilde{D}\text{id})_x : T_{V,x} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an jeder Stelle $x \in V$. Die Zusammensetzung von $(\tilde{D}\psi)_x : T_{X,x} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Inversen zu $(\tilde{D}\text{id})_{\psi(x)} : T_{V,\psi(x)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als das *Differential* von ψ an der Stelle x :

$$(D\psi)_x := (\tilde{D}\text{id})_{\psi(x)}^{-1} \circ (\tilde{D}\psi)_x : T_{X,x} \longrightarrow T_{V,\psi(x)} .$$

Dieser lineare Isomorphismus ist *mengentheoretisch* denkbar einfach zu beschreiben: Ist der Vektor $v \in T_{X,x}$ die Restklasse zu einer differenzierbaren Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$, so ist sein Bild in $T_{V,\psi(x)}$ die entsprechende Restklasse der Kurve $\psi \circ \alpha$.

Die letzte Bemerkung erlaubt es uns, auch das *Differential einer differenzierbaren Abbildung* $f : X \rightarrow Y$ im Punkte $x \in X$ zu erklären, indem man von der Kurve α zu der Kurve $f \circ \alpha$ übergeht. Dies liefert dann eine kanonische Abbildung

$$(Df)_x : T_{X,x} \longrightarrow T_{Y,f(x)} .$$

Wählt man wie oben Karten um x und $y = f(x)$, so ist $(Df)_x$ natürlich die Zusammensetzung der Differentiale $(D\psi)_x$, $(D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi))_{\psi(x)}$ und $(D\tilde{\varphi})_{\tilde{\psi}(y)}$. Die hierdurch vermöge des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} T_{X,x} & \xrightarrow{(Df)_x} & T_{Y,y} \\ (\tilde{D}\psi)_x \downarrow & & \downarrow (\tilde{D}\tilde{\psi})_y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

induzierte Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist nichts anderes als das *klassische Differential* $(D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi))_{\psi(x)}$. Insbesondere ist das Differential eine *lineare* Abbildung. Außerdem folgt hieraus, daß Df , aufgefaßt als Abbildung $T_X \rightarrow T_Y$, *differenzierbar* ist. - Wir fassen zusammen:

Satz 26.14 *Zu jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt es eine wohlbestimmte differenzierbare Abbildung $Df : T_X \rightarrow T_Y$, die in jedem Punkt $x \in X$ mit dem (linearen) Differential $(Df)_x : T_{X,x} \rightarrow T_{Y,f(x)}$ übereinstimmt. Insbesondere ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} T_X & \xrightarrow{Df} & T_Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutativ.

Bemerkungen. 1. Mit unseren vorigen Ausführungen kann man sich leicht davon überzeugen, daß das so definierte Differential in allen Fällen, in denen schon ein *klassisches* Differential vermittelt der Funktionalmatrix erklärt ist, mit diesem auf natürliche Weise identifiziert werden kann.

2. Ist $\alpha : I := (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x_0$, so ist der durch α definierte Tangentialvektor in $T_{x_0}X$ nichts anderes als das Bild

$$(D\alpha)_0(v_0),$$

wobei $v_0 \in T_{I,0}$ der durch den Weg $\gamma(t) := t$ bestimmte Einheitsvektor ist.

Das (Aufstellen und) Beweisen der naheliegenden Rechenregeln wie $D \text{id}_X = \text{id}_{T_X}$ und z. B. der Kettenregel

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df$$

überlassen wir dem Leser. Satz 13 ist damit nur ein Spezialfall des vorstehenden Satzes.

Wir machen das Beispiel des Tangentialbündels zur Grundlage einer weitreichenden Verallgemeinerung.

Definition. Es seien E und X differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $\pi : E \rightarrow X$ sei eine differenzierbare Abbildung. Das Tripel (E, π, X) heißt ein (differenzierbares) *Faserbündel*, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$, eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit F und einen Diffeomorphismus $\chi_U : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ gibt, so daß das folgende Standarddiagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) \\ p = \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

Bemerkungen. 1. Die Fasern $E_x = \pi^{-1}(x)$ sind unter χ_U^{-1} diffeomorph zu der Untermannigfaltigkeit $\{x\} \times F \subset U \times F$, also selbst Untermannigfaltigkeiten, die für alle $x \in U$ diffeomorph zu F sind (daher bekommt F keinen Index x_0). Es ist leicht zu sehen, daß diese Aussage über jeder Zusammenhangskomponente von X richtig bleibt; auf einer solchen hat (E, π, X) an jeder Stelle den gleichen „Fasertyp“ F (bis auf Diffeomorphie). Wollen wir das auf ganz X verlangen, auch wenn X nicht zusammenhängend ist, so schreiben wir den Fasertyp mit in die Definition, bezeichnen das Bündel also durch ein Quadrupel $(E, \pi, X; F)$ anstelle des Tripels (E, π, X) .

2. π ist (lokal) eine Projektion und surjektiv. Insbesondere ist π eine Submersion. Es gilt für $e \in E$ mit $\chi_U^{-1}(e) = (x, v)$, daß

$$\dim_e E = \dim_x X + \dim_v F.$$

Beispiel. Das sogenannte *triviale* Faserbündel über X mit Faser F ist gegeben durch das kartesische Produkt $E = X \times F$, zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi := \text{pr}_1 : E = X \times F \rightarrow X$. Insbesondere macht die Identität $\text{id} : E := X \rightarrow X$ die Mannigfaltigkeit X zu einem Bündel über sich selbst (mit einpunktigem Fasertyp).

Bemerkung. Ersetzt man in der obigen Definition überall den Begriff der *Differenzierbarkeit* durch *C^k -differenzierbar*, so gelangt man zur Definition von *C^k -Bündeln* über einer C^k -Mannigfaltigkeit X . Insbesondere sind hierdurch auch *reell-analytische* und *komplex-analytische Bündel* erklärt.

Die für unsere Belange interessanteste Beispielklasse ist die der *Vektorraumbündel*:

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ heißt ein (reelles) *Vektor(raum)bündel* vom Rang r , wenn F und alle E_x reelle Vektorräume der Dimension r und alle Abbildungen

$$\chi_{U,x} := \chi_U|_{\{x\} \times F} : F \cong \{x\} \times F \rightarrow E_x$$

linear(e Isomorphismen) sind. Ist der Rang $r = 1$, so spricht man auch von einem *Geradenbündel* (oder *Linienbündel*). Entsprechend definiert man *komplexe* Vektorbündel.

Der ganz andere Spezialfall einer Überlagerung hat ein *topologisches* Interesse. Wir kommen hierauf noch am Ende dieses Kapitels zurück.

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ mit nulldimensionalem (also diskretem, abzählbarem) Fasertyp F heißt eine (*unbegrenzte, unverzweigte*) Überlagerung von X (mit der Blätterzahl $\text{card } F$). In diesem Fall ist (lokal um $x_0 \in X$):

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\iota \in F} U_\iota, \quad \pi|_{U_\iota} : U_\iota \longrightarrow U \quad \text{Diffeomorphismen.}$$

Man nennt dann ein solches U eine *gleichmäßig überlagerte* Umgebung.

Definition. Ein (differenzierbarer) *Morphismus* von Faserbündeln $(E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$ ist ein Paar (f, g) von differenzierbaren Abbildungen $f : X \rightarrow X', g : E \rightarrow E'$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

kommutiert. Dies bedeutet, daß g die Faser E_x über einem Punkt $x \in X$ in die Faser $E'_{x'}$ über dem Bildpunkt $x' = f(x)$ von x unter f abbildet. Ist insbesondere $X = X'$ und $f = \text{id}$, so spricht man auch von *X-Morphismen* oder *Morphismen über X*. Es ist klar, was *Isomorphismen* in der *Kategorie* der Faserbündel sind. Die lokale Trivialität eines Faserbündels $(E, \pi, X; F)$ kann man dann auch folgendermaßen beschreiben: Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung $U \subset X$, so daß das eingeschränkte Bündel $E|_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ über U isomorph zu dem trivialen Bündel $U \times F \rightarrow U$ ist.

Hat man Vektorbündel vorliegen, so spricht man von einem *Vektorbündel-Homomorphismus*, wenn die induzierten Faserabbildungen $g_x = g|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{x'}$ linear sind. In diesem Falle ist (f, g) genau dann ein *Vektorbündel-Isomorphismus*, wenn f ein Diffeomorphismus ist und alle Faserabbildungen g_x lineare Isomorphismen sind. - Wir führen noch die folgende Notation ein.

Definition. Die Menge aller *X-Homomorphismen* $E \rightarrow E'$ von Vektorbündeln E, E' über X wird mit

$$\text{Hom}_X(E, E')$$

bezeichnet. Sie trägt die kanonische Struktur eines $C^\infty(X, \mathbb{R})$ -Moduls.

Außerdem ist auch die folgende Sprechweise nützlich.

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ heißt *trivialisierbar*, wenn es einen *X-Isomorphismus* nach $(X \times F, \text{pr}_1, X; F)$ besitzt. Ist insbesondere das Tangentialbündel T_X einer Mannigfaltigkeit X trivialisierbar, so heißt die Mannigfaltigkeit X *parallelisierbar*. Dies besagt (siehe das nächste Kapitel), daß es $n = \dim X$ *Vektorfelder* auf ganz X gibt, die an jeder Stelle $x \in X$ linear unabhängig sind, also in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums $T_{X,x}$ bilden.

Beispiel. Die Sphären S^1 und S^3 sind parallelisierbar (Übungsaufgabe). Dies ist sonst nur noch für die Sphäre der Dimension 7 (und der Dimension 0) richtig⁵⁴; die Sphären *gerader* Dimension tragen nicht einmal globale Vektorfelder ohne Nullstellen, wie der berühmte *Satz vom stetig gekämmten Igel* aussagt.

Wir wollen jetzt Bündel vermöge geeigneter 1-Cozyklen beschreiben und durch *Verkleben* wieder rekonstruieren. Ist $(E, \pi, X; F)$ ein Faserbündel, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ von X , so daß für alle j eine *Trivialisierung*

⁵⁴Den wundersamen Grund für diese Tatsache findet man z. B. in dem Artikel *Divisionsalgebren und Topologie* von F. HIRZEBRUCH, der als Kapitel 11 auf den Seiten 233–252 in dem Springer-Lehrbuch EBBINGHAUS ET AL.: *Zahlen*, dritte verbesserte Auflage, enthalten ist.

$$\begin{array}{ccc}
 U_j \times F & \xrightarrow{\chi_j} & \pi^{-1}(U_j) \\
 \text{pr}_1 \searrow & & \nearrow \pi \\
 & & U_j
 \end{array}$$

existiert. Sind $j, k \in I$ gegeben, so schreiben wir wie im Anhang zu Kapitel 25 $U_{kj} = U_k \cap U_j$ als Teilmenge von U_j , also entsprechend $U_{jk} \subset U_k$ etc. Wir haben dann einen Bündelisomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 U_{kj} \times F & \xrightarrow{\chi_{kj}} & U_{jk} \times F \\
 \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 U_j \supset U_{kj} & \xrightarrow{\text{id}} & U_{jk} \subset U_k
 \end{array}$$

wobei $\chi_{kj} = \chi_k^{-1} \circ \chi_j$ ein Diffeomorphismus von der Gestalt

$$\chi_{kj}(x, v) = (x, \theta_{kj}(x, v))$$

ist. Die χ_{kj} heißen auch *Übergangs- oder Transformations-Diffeomorphismen* zu dem Faserbündel E und der trivialisierenden Überdeckung \mathfrak{U} . Aufgrund der Konstruktion ist unmittelbar klar, daß χ_{jj} die Identität auf $U_j \times F$ ist, weiter $\chi_{jk} = \chi_{kj}^{-1}$ gilt und auf dreifachen Durchschnitten die *Cozykel-Bedingung*

$$\chi_{\ell k} \circ \chi_{kj} = \chi_{\ell j}$$

erfüllt ist. Wie im Anhang zu Kapitel 25 sieht man sofort, daß die Cozykel-Bedingung die beiden ersten Aussagen impliziert.

Definition. Man nennt 1-Cozyklen vom obigen Typ auch *1-Cozyklen auf der Mannigfaltigkeit X mit Werten in der Gruppe $\text{Diff}(F)$* .

Der Grund für diese Bezeichnung ist der folgende: Bei festem $x \in U_{kj}$ muß die Abbildung $v \mapsto \theta_{kj}(x, v)$ ein Diffeomorphismus der Faser $F \cong \{x\} \times F$ sein. Wir fassen daher θ_{kj} als Abbildung

$$\theta_{kj} : U_{kj} \longrightarrow \text{Diff}(F)$$

in die Gruppe $\text{Diff}(F)$ der Diffeomorphismen von F auf. Wir nennen eine beliebige Abbildung von dieser Art eine durch U_{kj} *differenzierbar parametrisierte* Familie von Diffeomorphismen von F , wenn umgekehrt die mit Hilfe von θ_{kj} wie oben *definierte* Abbildung χ_{kj} einen Diffeomorphismus auf $U_{kj} \times F$ darstellt.

Bemerkung. Da die χ_{kj} eindeutig durch die θ_{kj} bestimmt sind und umgekehrt, nennt man auch das System der letzteren einen 1-Cozyklus mit Werten in $\text{Diff}(F)$. Die Cozykel-Bedingung ist in dieser Terminologie allerdings etwas komplizierter. Sie lautet

$$\theta_{\ell k}(x, \theta_{kj}(x, v)) = \theta_{\ell j}(x, v) .$$

Die ersten beiden Bedingungen lauten $\theta_{jj}(x, v) = v$ und $\theta_{jk}(x, v) = \theta_{kj}^{-1}(x, v)$.

Liegt speziell ein (reelles) *Vektorbündel* vor, so ist θ_{kj} notwendig von der Form

$$\theta_{kj}(x, v) = A_{kj}(x) \cdot v ,$$

wobei $A_{kj}(x)$ für alle $x \in U_{kj}$ eine (reelle) invertierbare $r \times r$ -Matrix bezeichnet; hierbei ist $r = \text{rang } E$. Man nennt die A_{kj} die *Übergangsmatrizen* des Bündels E zur vorgegebenen trivialisierenden Überdeckung \mathfrak{U} . Damit diese Familie von linearen Isomorphismen *differenzierbar* parametrisiert ist, müssen selbstverständlich die Einträge der Matrix $A_{kj}(x)$ differenzierbare Funktionen auf U_{kj} sein. Wir

sprechen in diesem Fall von einem (differenzierbaren) 1–Cozyklus mit Werten in der Gruppe $GL(r, \mathbb{R})$. Die Cozykel–Bedingungen lauten in diesem Fall explizit:

$$A_{jj}(x) = E_r, \quad A_{jk}(x) = (A_{kj}(x))^{-1}, \quad A_{\ell k}(x) \cdot A_{kj}(x) = A_{\ell j}(x).$$

Beispiel. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathfrak{A} = \{(V_j, \varphi_j, U_j)\}$, so bilden die (unter ψ_j gelifteten) Funktional–Matrizen $D\varphi_{kj}$, also genauer die Matrizen $D\varphi_{kj}(\psi_j(x))$, einen solchen 1–Cozyklus. Er kommt selbstverständlich von dem *Tangentialbündel* T_X her. Man rechnet aber sofort nach, daß auch die Matrizen ${}^t(D\varphi_{kj})^{-1}$ einen differenzierbaren 1–Cozyklus mit Werten in $GL(r, \mathbb{R})$ bilden. Dieser gibt Anlaß zu dem sogenannten *Cotangentialbündel*.

Bevor wir den genauen Zusammenhang zwischen Bündeln und 1–Cozyklen klären, wollen wir die vorstehenden Begriffe noch weiter spezialisieren. Fixieren wir eine feste Untergruppe G von $\text{Diff}(F)$, so ist offensichtlich, wie ein Cozyklus mit Werten in G zu erklären ist. Wir nennen ein Faserbündel $E \rightarrow X$ ein G –*Bündel* oder ein Bündel mit *Strukturgruppe* G , wenn E bzgl. einer trivialisierenden Überdeckung zu einem 1–Cozyklus mit Werten in G führt. Wir schreiben dann gelegentlich auch $(E, \pi, X; F, G)$. Im Falle von Vektorraumbündeln hat man sich hierbei auf Untergruppen von $GL(r, \mathbb{R})$ wie z. B. $SL(r, \mathbb{R})$ oder $O(r, \mathbb{R})$ etc. zu beschränken. Ein weiterer wichtiger Fall ist der einer *Liegruppe* G (siehe mein Manuskript *Differentialgeometrie II*). G ist selbst eine Mannigfaltigkeit, und durch Multiplikation (von links) operiert G auf sich selbst, wodurch G als Untergruppe von $\text{Diff}(G)$ aufgefaßt werden kann. Ein Faserbündel mit Faser G und Strukturgruppe G wird ein G –*Prinzipalbündel* genannt. Jedes (reelle) Vektorraumbündel vom Rang r gibt Anlaß zu einem $GL(r, \mathbb{R})$ –Prinzipalbündel.

Wir wollen nun umgekehrt aus einem 1–Cozyklus auf X mit Werten in $G \subset \text{Diff}(F)$ ein G –Faserbündel mit Faser F konstruieren. Genauer beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 26.15 *Es sei $\{\chi_{kj}\}$ ein 1–Cozyklus auf der Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ von X mit Werten in $\text{Diff}(F)$. Dann gibt es auf X ein Faserbündel mit Faser F , das bzgl. \mathfrak{U} trivialisierbar ist und die vorgegebenen Übergangs–Diffeomorphismen besitzt.*

Beweis. Wir werden der Bequemlichkeit halber annehmen, daß die Überdeckungselemente $U_j \in \mathfrak{U}$ schon zu einem Atlas (U_j, ψ_j, V_j) von X gehören. Wir gewinnen dann einen *abstrakten* 1–Cozyklus $\tilde{\chi}_{kj}$ zu den Mengen $V_{kj} \times F$ durch

$$\tilde{\chi}_{kj}(x_j, v) := (\varphi_{kj}(x_j), \theta_{kj}(\varphi_j(x_j), v)).$$

Durch Verheften wie im Anhang zu Kapitel 25 gewinnt man hieraus einen lokal–euklidischen Raum E zusammen mit einer kanonischen Projektion $\pi : E \rightarrow X$, so daß E lokal ein Produkt mit F und π dort die Projektion auf den ersten Faktor ist. Da nach Voraussetzung X und F hausdorffsch sind und dem zweiten Abzählbarkeits–Axiom genügen, ist dies, wie man leicht sieht, auch für E der Fall. Wir überlassen dem Leser die Einzelheiten des Nachweises, daß dieses Bündel die geforderten Eigenschaften besitzt. □

Was passiert nun, wenn man die beiden oben beschriebenen Konstruktionen hintereinander durchführt? Startet man zuerst mit einer trivialisierenden Überdeckung zu E und assoziiert hierzu (bei fest gewählten lokalen Trivialisierungen) einen 1–Cozyklus, so ist das aus dem Cozyklus gewonnene Bündel offensichtlich (nur) X –isomorph zu E . Auf der anderen Seite gewinnen wir aus dem Bündel zu einem 1–Cozyklus diesen auch nicht notwendig zurück, da die lokalen Trivialisierungen nicht „gottgegeben“ sind. Wir müssen also etwas genauer studieren, wie sich der einem Bündel zugeordnete 1–Cozyklus ändert, wenn man zwar die trivialisierende Überdeckung beibehält, die lokalen Trivialisierungen aber beliebig wählt.

Satz 26.16 *Zwei Cozyklen $\{\chi_{kj}\}$ und $\{\tilde{\chi}_{kj}\}$ auf der Mannigfaltigkeit X bzgl. der offenen Überdeckung \mathfrak{U} definieren genau dann das gleiche Faserbündel (bis auf Isomorphie über X), wenn es Diffeomorphismen η_j von $U_j \times F$ in sich über U_j gibt, so daß*

$$\tilde{\chi}_{kj} = \eta_k^{-1} \circ \chi_{kj} \circ \eta_j.$$

Beweis. Es seien $\chi_j : U_j \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ und $\tilde{\chi}_j : U_j \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ die zwei Systeme von lokalen Trivialisierungen. Man setzt dann $\eta_j := \chi_j^{-1} \circ \tilde{\chi}_j$ und bekommt

$$\tilde{\chi}_{kj} = \tilde{\chi}_k^{-1} \circ \tilde{\chi}_j = \eta_k^{-1} \circ (\chi_k^{-1} \circ \chi_j) \circ \eta_j = \eta_k^{-1} \circ \chi_{kj} \circ \eta_j .$$

Die umgekehrte Richtung folgt entsprechend. \square

Definition. Unter der Voraussetzung des vorstehenden Satzes sagt man, daß die 1-Cozyklen $\{\chi_{kj}\}$ und $\{\tilde{\chi}_{kj}\}$ (zueinander) *cohomolog* sind. Haben die beiden Cozyklen Werte in der Untergruppe $G \subset \text{Diff}(F)$, so heißen sie *G-cohomolog*, wenn die η_j so gewählt werden können, daß ihre Einschränkungen auf die Fasern F Elemente von G sind. Cohomologie und G -Cohomologie sind selbstredend Äquivalenzrelationen. Die Menge der Äquivalenzklassen von 1-Cozyklen nach dieser Äquivalenz heißt die *1. Cohomologiemenge* von X zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in $\text{Diff}(F)$ bzw. in G . Wir bezeichnen sie mit

$$H^1(\mathfrak{U}, \text{Diff}(F)) \quad \text{bzw.} \quad H^1(\mathfrak{U}, G) .$$

Bemerkung. I. a. sind diese Cohomologiemengen keine Gruppen. Dies ist jedoch dann richtig, wenn die Gruppe G *abelsch* ist. In diesem Fall lassen sich auch leicht die *höheren* Cohomologiegruppen erklären. Die Menge $H^1(\mathfrak{U}, G)$ besitzt aber immer ein ausgezeichnetes Element.

Aufgrund unserer obigen Überlegungen ist das folgende Ergebnis ohne weitere Erläuterungen einseitig.

Satz 26.17 *Die Menge der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X mit trivialisierender Überdeckung \mathfrak{U} steht in eindeutiger Korrespondenz zu der ersten Cohomologiemenge $H^1(\mathfrak{U}, G)$. Hierbei entspricht das triviale Bündel genau dem ausgezeichneten Element der Cohomologiemenge. Mit anderen Worten: Ein Bündel ist (global) trivialisierbar, also isomorph zu dem trivialen Bündel, wenn in geeigneter Überdeckung $\chi_{kj} = \eta_k^{-1} \circ \eta_j$ gilt.*

Wir müssen uns jetzt noch von der Bindung an die spezielle trivialisierende Überdeckung \mathfrak{U} lösen. Hierzu bemerkt man folgendes: Ist \mathfrak{W} eine *Verfeinerung* von \mathfrak{U} , so induziert jeder Cozyklus auf \mathfrak{U} einen solchen auf \mathfrak{W} (sogar unabhängig von der Verfeinerungsabbildung), und man kann leicht zeigen, daß die zugehörigen Faserbündel bis auf Isomorphie gleich sind. Da überdies je zwei Überdeckungen von X eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, genügt es zur Entscheidung über die Isomorphie von Bündeln eine gemeinsame trivialisierende Überdeckung zu betrachten. Diese Überlegungen führen zu der Konstruktion einer kanonischen Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, G)$$

und der Einführung der Cohomologiemenge von X als *direkten Limes* über alle diese Mengen:

$$H^1(X, G) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, G) .$$

Entsprechend zu dem obigen Satz hat man das folgende endgültige Resultat zur Beschreibung der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X .

Satz 26.18 *Die Menge der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X steht in eindeutiger Korrespondenz zu der ersten Cohomologiemenge $H^1(X, G)$.*

Bemerkung. Führt man z. B. das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit durch den üblichen 1-Cozyklus zu einem Atlas ein, so sind im Prinzip all die vorstehenden Überlegungen notwendig, um einzusehen, daß dieses Bündel von der speziellen Wahl des Atlases unabhängig ist.

Wir kommen nun nochmals zu den *Homomorphismen* in der Kategorie der Faserbündel zurück. Insbesondere wollen wir auch diese durch Übergangsbedingungen beschreiben.

Es sei also (f, g) ein Morphismus $(E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$ von Faserbündeln. Da $f : X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung ist, findet man trivialisierende Überdeckungen $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ auf X für E und $\mathfrak{U}' = \{U'_\iota\}_{\iota \in I}$ auf X' für E' so, daß $f(U_j) \subset U'_\iota$, $\iota = \iota(j)$. Mit den Trivialisierungen

$$\chi_j : U_j \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_j), \quad \chi'_\iota : U'_\iota \times F' \longrightarrow \pi'^{-1}(U'_\iota)$$

gewinnt man kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_j \times F & \xrightarrow{g_{\iota j}} & U'_\iota \times F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_j & \xrightarrow{f} & U'_\iota \end{array}$$

mit $g_{\iota j} := \chi'^{-1}_\iota \circ g \circ \chi_j$. Wir schreiben $g_{\iota j}(x, \xi) = (f(x), G_{\iota j}(x, \xi))$ mit geeigneten differenzierbaren Abbildungen

$$G_{\iota j} : U_j \times F \longrightarrow F'.$$

Im Falle von Vektorbündeln ist $G_{\iota j}(x, \xi) = G_{\iota j}(x) \cdot \xi$ mit differenzierbaren Matrizen $G_{\iota j}(x)$, $x \in U_j$.

Nehmen wir nun an, daß entsprechend $f(U_k) \subset U'_\kappa$, so daß auch $f(U_k \cap U_j) \subset U'_\kappa \cap U'_\iota$. Nach Definition ist auf dem Durchschnitt

$$g_{\kappa k} = \chi'^{-1}_\kappa \circ g \circ \chi_k = (\chi'^{-1}_\kappa \circ \chi'_\iota) \circ g_{\iota j} \circ (\chi_j^{-1} \circ \chi_k) = \chi'_{\kappa \iota} \circ g_{\iota j} \circ \chi_{jk},$$

und dies impliziert nach kurzer Rechnung

$$G_{\kappa k}(x, \xi) = \theta'_{\kappa \iota}(f(x), G_{\iota j}(x, \theta_{jk}(x, \xi)))$$

oder, im Fall von Vektorbündeln,

$$G_{\kappa k}(x) = A'_{\kappa \iota}(f(x)) \cdot G_{\iota j}(x) \cdot A_{jk}(x).$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so definiert das System der $G_{\iota j}$ zusammen mit f einen Bündelhomomorphismus $E \rightarrow E'$.

Bemerkung. Ist $f = \text{id} : X \rightarrow X$, so kann man natürlich $\iota = j$ und $\kappa = k$ wählen und vereinfacht $G_{\iota j} = G_j$ etc. schreiben. Für Vektorbündel E, E' reduziert sich die obige Bedingung dann auf

$$G_k(x) = A'_{kj}(x) \cdot G_j(x) \cdot A_{jk}(x)$$

mit $s \times r$ -Matrizen G_j auf U_j , wobei $r = \text{rang } E$, $s = \text{rang } E'$.

Man kann tatsächlich die allgemeine Situation von Morphismen über stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow X'$ auf den Spezialfall $f = \text{id}$ zurückführen. Ist nämlich $f : X \rightarrow X'$ eine differenzierbare Abbildung und $E' \rightarrow X'$ ein Bündel, so erklärt man die *Liftung* $f^*E' \rightarrow X$ durch das *Faserprodukt*⁵⁵

$$f^*E' := E' \times_{X'} X = \{(e', x) : e' \in E'_{f(x)}\} \subset E' \times X$$

zusammen mit der Projektion nach X . Man hat einen kanonischen Bündelhomomorphismus von f^*E' nach E' :

⁵⁵Sind $g_j : Y_j \rightarrow Y$, $j = 1, 2$, Abbildungen, so bezeichnet man als Faserprodukt $Y_1 \times_Y Y_2$ die Teilmenge des kartesischen Produkts $Y_1 \times Y_2$, die aus allen Punkten (y_1, y_2) mit $g_1(y_1) = g_2(y_2)$ besteht. In der topologischen Situation versteht man $Y_1 \times_Y Y_2$ mit der Relativtopologie bzgl. der Produkttopologie auf $Y_1 \times Y_2$.

$$\begin{array}{ccc}
 f^*E' & \longrightarrow & E' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Wird das Bündel $E' \rightarrow X'$ bzgl. \mathcal{U}' durch den 1-Cozyklus $\theta'_{kj} = \theta'_{kj}(x', \xi)$ gegeben, so wird f^*E' definiert durch

$$\theta_{kj}(x, \xi) := \theta'_{kj}(f(x), \xi), \quad x \in U_j := f^{-1}(U'_j).$$

Unsere Ableitung der Übergangsbedingungen liefert dann sofort den folgenden

Satz 26.19 *Die Bündelhomomorphismen*

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g} & E' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & X'
 \end{array}$$

entsprechen eineindeutig den X -Morphismen $E \rightarrow f^*E'$.

Beweis. Trivial. □

Ist speziell $i : X \hookrightarrow X'$ eine Untermannigfaltigkeit, so kann man i^*E' als *Einschränkung* $E'|_X$ interpretieren. Wir fassen aufgrund des vorstehenden Satzes auch manchmal das Differential einer differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow X'$ als X -Morphismus $T_X \rightarrow f^*T_{X'}$ auf.

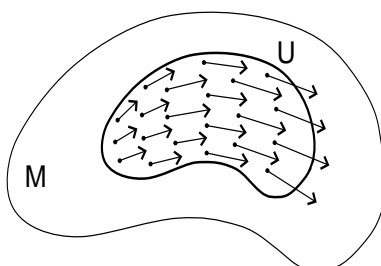
27 Vektorfelder und Pfaffsche Formen

In diesem Kapitel wollen wir als zentralen geometrischen Begriff den des *Vektorfeldes* oder genauer *Tangentialvektorfeldes* auf einer (abstrakten oder Unter-) Mannigfaltigkeit M einführen. Die hierzu *dualen* Objekte sind die PFAFFSchen *Formen* oder *1-Formen*, die die geeigneten Integranden für *Kurvenintegrale* sind. Um unsere Betrachtungen nicht unnötig mit Ballast zu überfrachten, werden wir im Allgemeinen nur Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞ behandeln und Vektorfelder der gleichen Differenzierbarkeitsstufe.

Anschaulich soll ein (differenzierbares) *Vektorfeld* v auf (einem offenen Teil U) einer Mannigfaltigkeit M nichts anderes bedeuten als eine Zuordnung

$$U \ni x \mapsto v(x) \in T_{M,x},$$

die mit dem Punkt $x \in U$ *differenzierbar variiert*.



Figur 27.1

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil von \mathbb{R}^n , aufgefaßt als Mannigfaltigkeit, so ist das Tangentialbündel von U trivial: $T_U = U \times \mathbb{R}^n$, und die obige noch vage Voraussetzung der „Differenzierbarkeit“ ist dahingehend zu interpretieren, daß mit $v(x) \in T_{U,x} = \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$U \ni x \mapsto (x, v(x)) \in U \times \mathbb{R}^n$$

differenzierbar ist, was aber mit der Differenzierbarkeit der Abbildung $U \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$ und damit mit unserer früheren Definition eines differenzierbaren Vektorfeldes in U übereinstimmt.

Im allgemeinen Fall einer *beliebigen* Mannigfaltigkeit M trägt das Tangentialbündel T_M selbst die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so daß wir von einer differenzierbaren Abbildung

$$v : U \rightarrow T_M$$

sprechen können. Daß mit $x \in U$ der Tangentialvektor $v(x)$ in $T_{M,x}$ liegen soll, läßt sich umformulieren in die Bedingung

$$\pi \circ v = \text{id}_U$$

mit der kanonischen Projektion $\pi : T_M \rightarrow M$. - Wir geben folglich die

Definition. Ein (differenzierbares) *Vektorfeld* v auf einem offenen Teil U der Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung

$$v : U \rightarrow T_M \quad \text{mit} \quad (\pi \circ v)(x) = x \quad \text{für alle } x \in U.$$

Bemerkungen. 1. Die Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes ist eine *lokale* Eigenschaft. Da aber lokal das Tangentialbündel *trivialisierbar* ist, sind wir zurück bei der einfachen Situation $U \subset \mathbb{R}^n$.

2. Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^α mit $\alpha < \infty$, so ist das Tangentialbündel

immer noch von der Klasse $\mathcal{C}^{\alpha-1}$. Man kann deshalb noch von Vektorfeldern der Differenzierbarkeitsklasse $\beta \leq \alpha - 1$ sprechen. Insbesondere ist es auch bei einer \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit sinnvoll, von stetigen, 1-mal stetig differenzierbaren Vektorfeldern etc. zu sprechen.

Die obige Definition verschärfen wir also zu der folgenden.

Definition. Es sei U ein offener Teil einer \mathcal{C}^α -Mannigfaltigkeit M , wobei $1 \leq \alpha \leq \infty$. Ein Vektorfeld der Klasse \mathcal{C}^β , $\beta \leq \alpha - 1$, ist eine \mathcal{C}^β -Abbildung $v : U \rightarrow T_M$ mit $\pi \circ v = \text{id}_U$, d. h. jedem $x \in U$ ist ein Tangentialvektor $v(x) \in T_{M,x}$ zugeordnet, und diese Zuordnung ist in Abhängigkeit von x β -mal stetig differenzierbar.

Bemerkung. Dieses Konzept gibt uns z. B. die Möglichkeit an die Hand, den Begriff des Systems gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern: Es sei M eine Mannigfaltigkeit, und v sei ein fest vorgegebenes Vektorfeld auf M . Man sucht dann, die (maximalen) Integralkurven von v zu bestimmen, also alle parametrisierten Kurven $\alpha : I \rightarrow M$ mit $v(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ für $t \in I \subset \mathbb{R}$. - Offensichtlich ist dieses Problem für den Spezialfall $M = U \subset \mathbb{R}^n$ gleichwertig zu der Aufgabe, ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen.

Ist $U \subset M$ eine offene Menge, so bezeichnen wir die Gesamtheit aller β -mal stetig differenzierbaren Vektorfelder mit

$$\mathcal{C}^\beta(U, T_M).$$

Man spricht auch von dem Raum der β -mal stetig differenzierbaren Schnitte im Tangentialbündel über U (siehe zu dieser Bezeichnung auch den Anhang dieses Kapitels). Ferner schreiben wir $\mathcal{C}^\beta(U)$ für die Algebra der β -mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf U .

Satz 27.1 $\mathcal{C}^\beta(U, T_M)$ ist in kanonischer Weise ein $\mathcal{C}^\beta(U)$ -Modul für alle offenen Teilmengen $U \subset M$. Ist die Mannigfaltigkeit M von der Dimension k und ist $x \in M$ ein fester Punkt, so gibt es beliebig kleine Umgebungen $U = U(x) \subset M$, so daß $\mathcal{C}^\beta(U, T_M)$ ein freier Modul über $\mathcal{C}^\beta(U)$ vom Rang k ist.

Beweis. Da $T_{M,x}$ für alle $x \in M$ ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, kann man mit Vektorfeldern $v, v_1, v_2 \in \mathcal{C}^\beta(U, T_M)$ und einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\beta(U)$ punktweise

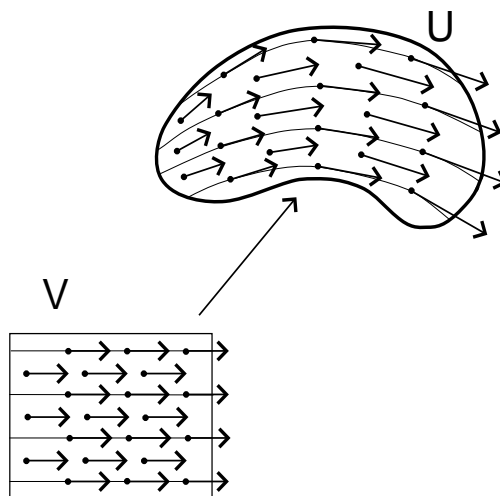
$$(v_1 + v_2)(x) := v_1(x) + v_2(x) \quad \text{und} \quad (fv)(x) := f(x) \cdot v(x)$$

bilden. Es ist nur zu zeigen, daß $v_1 + v_2, fv \in \mathcal{C}^\beta(U, T_M)$. Dies ist aber eine lokale Eigenschaft, so daß wir ohne Einschränkung annehmen können, daß U durch $\varphi : V \rightarrow U$ parametrisiert wird, wobei insbesondere $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\text{rang}(D\varphi)(t) = k$ für alle $t \in V$ ist.

Offensichtlich genügt es dann zu zeigen: Es gibt Vektorfelder $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^\beta(U, T_M)$, so daß die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^\beta(U) \oplus \dots \oplus \mathcal{C}^\beta(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\beta(U, T_M) \\ (a_1, \dots, a_k) \longmapsto \sum_{j=1}^k a_j v_j \end{array} \right.$$

wohldefiniert und ein $\mathcal{C}^\beta(U)$ -Modul-Isomorphismus ist. Eine solche lokale Basis von Vektorfeldern erhält man aber offensichtlich durch die Bilder der „kanonischen“ Basiselemente $t \mapsto (t, e_j)$, $t \in V$, $j = 1, \dots, k$, unter dem Differential $D : (T_{\mathbb{R}^k})|_V = V \times \mathbb{R}^k \rightarrow (T_M)|_U$. \square



Figur 27.2

Bemerkungen. 1. Es existiert stets das triviale Vektorfeld $0 : M \hookrightarrow T_M$, das jedem Punkt x in M den Nullvektor in $T_{M,x}$ zuordnet. Man bezeichnet dieses Vektorfeld auch als *Nullschnitt* in dem Tangentialbündel.

2. Die letzte Behauptung in Satz 1 ist im Falle $M = \mathbb{R}^k$ richtig für *alle* offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^k$, insbesondere für $U = \mathbb{R}^k$.

3. Für beliebige Mannigfaltigkeiten M ist die Aussage jedoch i. A. nur *lokal* erfüllt oder, genauer, für jede offene Menge U , über der das Tangentialbündel *trivialisierbar* ist, d. h. für die eine Bündel-Isomorphie $T_{M|U} \cong U \times \mathbb{R}^k$ besteht.

4. Die letzte Bedingung ist sogar *gleichwertig* mit der in Rede stehenden Aussage, denn ist die letztere erfüllt, so gibt es $k = \dim M$ Vektorfelder, die an jeder Stelle $x \in M$ linear unabhängig sind, und diese geben offensichtlich Anlaß zu einer Trivialisierung $T_{M|U} \cong U \times \mathbb{R}^k$.

Definition. Eine Mannigfaltigkeit M heißt *parallelisierbar*, wenn ihr Tangentialbündel T_M trivialisierbar ist, wenn es also, nach der Bemerkung zuvor, $k = \dim M$ Vektorfelder auf M gibt, die an jeder Stelle $x \in M$ linear unabhängig sind.

Beispiel. Das Tangentialbündel von S^2 ist nicht trivial(isierbar), also die Mannigfaltigkeit S^2 nicht parallelisierbar. Dies liegt daran, daß jedes Vektorfeld auf der zweidimensionalen Sphäre S^2 mindestens eine Nullstelle besitzt. Dies ist eine Aussage, die auch als *Satz vom stetig gekämmten Igel* („*Ein stetig gekämmter Igel besitzt mindestens einen Glatzpunkt*“) in der Literatur zitiert wird. Einen Beweis im differenzierbaren Fall bringen wir am Ende der Vorlesung mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Wir wollen noch das *Transformationsverhalten* der „Koordinatendarstellungen“ von Vektorfeldern kurz behandeln (für eine wesentlich allgemeinere Diskussion im Rahmen von Vektorraumbündeln siehe den Anhang zu diesem Kapitel). Man beachte hierzu, daß in der physikalischen Literatur diese und entsprechende Regeln zur Definition von *Vektorfeldern*, *Differentialformen* und *Tensoren* Verwendung finden. Es werde $M \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n$ parametrisiert sowohl durch eine Abbildung φ auf einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ mit Variablen (s_1, \dots, s_k) als auch durch $\psi : W \rightarrow M \cap \Omega$ mit $W \subset \mathbb{R}^k$ und Variablen t_1, \dots, t_k . Dann entspricht dem k -tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \bigoplus \mathcal{C}^\beta(V)$ das Vektorfeld

$$v = \sum_{j=1}^k a_j v_j, \quad \text{wobei} \quad v_j(x) = \left(x, \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_j}(s), \dots, \frac{\partial \varphi_k}{\partial s_j}(s) \right), \quad x = \varphi(s).$$

Entsprechend gehört zu $(b_1, \dots, b_k) \in \bigoplus \mathcal{C}^\beta(W)$ das Vektorfeld

$$w = \sum_{j=1}^k b_j w_j, \quad \text{wobei} \quad w_j(x) = \left(x, \frac{\partial \psi_1}{\partial t_j}(t), \dots, \frac{\partial \psi_k}{\partial t_j}(t) \right), \quad x = \psi(t).$$

Welches ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_j und den b_j , wenn sie das gleiche Vektorfeld $v = w$ auf $M \cap \Omega$ beschreiben? Dieser folgt einfach aus der Kettenregel: Es ist $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s) =: \tau(s)$, folglich $\psi \circ \tau = \varphi$ und damit $(D\psi)(D\tau) = D\varphi$, also

$$\frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial s_j}(s) = \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial t_\ell}(t) \cdot \frac{\partial \tau_\ell}{\partial s_j}(s), \quad t = \tau(s).$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial s_j}(s) = \sum_{\ell=1}^k \left(\sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial \tau_\ell}{\partial s_j}(s) \right) \cdot \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial t_\ell}(t).$$

Also bestimmen sich die Koeffizienten (b_1, \dots, b_k) durch die Gleichungen

$$b_\ell \circ \tau = \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial \tau_\ell}{\partial s_j}, \quad \ell = 1, \dots, k,$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \circ \tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial \tau_1}{\partial s_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tau_k}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial \tau_k}{\partial s_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Grundlegend für die Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten sind nun die dazu *dualen* Objekte, also Operatoren, die auf Tangentialvektoren wirken.

Definition. Es sei M eine Mannigfaltigkeit (der Dimension k), und $a \in M$ sei ein fester Punkt. Dann heißt der Dualraum

$$T_{M,a}^* := (T_a(M))^*$$

zum Tangentialraum $T_{M,a} = T_a(M)$ der *Cotangentialraum* von M an der Stelle a .

Bemerkung. Das *Cotangentialbündel* T_M^* definiert man als Menge als die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{x \in M} T_{M,x}^*$. Diese kann, wie wir weiter unten zeigen werden, tatsächlich mit der Struktur eines Vektorraumbündels versehen werden. Ist allgemeiner $E \rightarrow M$ ein Vektorraumbündel, so gibt es stets ein wohlbestimmtes *duales* Bündel $E^* \rightarrow M$. Es lassen sich sogar alle invarianten Operationen der linearen Algebra auf Bündel übertragen. Z. B. gibt es zu $E, F \rightarrow M$ stets ein Bündel $E \oplus F \rightarrow M$ und ein Bündel $E \otimes F \rightarrow M$, außerdem äußere Potenzen $\Lambda^k E$, etc. So sind die Tensoren der Physik nichts anderes als Schnitte in den Bündeln

$$(\Lambda^r T_M) \otimes (\Lambda^s T_M^*).$$

Die uns zunächst interessierenden *1-Formen* oder *PAFFSche Formen* sind Schnitte in dem Cotangentialbündel T_M^* ; die über M integrierbaren Objekte sind die *k-Formen*, und dies sind Schnitte in $\Lambda^k(T_M^*)$, $k = \dim M$.

Wir wollen ein wenig formaler vorgehen und geben daher die

Definition. Eine 1-Form (PFAFFSche Form, Differentialform der Ordnung 1) ω auf M ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $x \in M$ eine Linearform $\omega(x) \in T_{M,x}^*$ zuordnet. ω heißt β -mal stetig differenzierbar, in Zeichen

$$\omega \in \mathcal{C}^\beta(M, T_M^*),$$

wenn diese Zuordnung in folgendem Sinne β -mal stetig mit x variiert: Ist $U \subset M$ eine beliebige offene Menge und $v \in \mathcal{C}^\beta(U, T_M)$ ein beliebiges Vektorfeld, so ist die Abbildung

$$x \longmapsto \langle \omega(x), v(x) \rangle$$

eine β -mal stetig differenzierbare Funktion auf U . Hierbei bezeichnet $\langle \omega(x), v(x) \rangle$ den Wert der Linearform $\omega(x) \in T_{M,x}^*$ auf dem Vektor $v(x) \in T_{M,x}$.

Für die Belange in der vorliegenden Vorlesung reicht es aus, die Pfaffschen Formen nur für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ zu definieren und dann auf die Untermannigfaltigkeit $M \subset U \subset \mathbb{R}^n$ „einzuschränken“. Dies liefert in der Tat, jedenfalls lokal, die gleichen Resultate. - Wir geben nun ein erstes, aber sehr bedeutsames Beispiel.

Beispiel. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion aus $\mathcal{C}^\alpha(U)$, $\alpha \geq 1$. Definiere dann für $x \in U$ und $v \in T_{\mathbb{R}^n,x}$:

$$\langle (df)(x), v \rangle := \langle \text{grad } f(x), v(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j, \quad v = v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x)).$$

$(df)(x)$ ist für alle $x \in U$ eine Linearform auf $T_{\mathbb{R}^n,x}$, also ein Element von $T_{\mathbb{R}^n,x}^*$. Ist v ein Vektorfeld der Klasse \mathcal{C}^β , d. h. sind $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\beta(U)$, so ist offensichtlich

$$x \longmapsto \langle (df)(x), v(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j(x) \in \mathcal{C}^\gamma(U), \quad \gamma = \min(\beta, \alpha - 1).$$

Also ist df eine Differentialform 1. Ordnung auf U (von der Klasse $\alpha - 1$).

Definition. df heißt das *totale Differential* oder kurz das *Differential* der Funktion f .

Bemerkung. Das Differential df läßt sich sogar für Funktionen f auf abstrakten Mannigfaltigkeiten M definieren; denn ist im obigen Fall $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\lambda(0) = x$, $\lambda'(0) = v$, so gilt nach der Kettenregel

$$\left. \frac{d}{dt} (f \circ \lambda) \right|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \lambda_j}{\partial t}(0) = \langle (df)(x), v \rangle,$$

und die linke Seite ergibt auch bei abstrakten Mannigfaltigkeiten einen Sinn und kann somit dort als Definition für das Differential df dienen.

Nach der Definition von 1-Formen (der Klasse β) ist es klar, daß solche addiert und mit Funktionen der Klasse \mathcal{C}^β multipliziert werden können. Also ist auch $\mathcal{C}^\beta(M, T_M^*)$ ein $\mathcal{C}^\beta(M)$ -Modul. Wie im Fall der Tangentialfelder ist dieser frei vom Rang k , wenn M von der Dimension k ist und M so klein gewählt wird, daß es von einer einzigen Karte überdeckt wird. Grundlegend für diesen Sachverhalt ist der folgende Satz.

Satz 27.2 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist $\mathcal{C}^\beta(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ ein freier $\mathcal{C}^\beta(U)$ -Modul vom Rang n . Eine Basis dieses Moduls wird gegeben durch die totalen Differentiale der Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n . M. a. W. : Zu jeder Pfaffschen Form $\omega \in \mathcal{C}^\beta(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\beta(U)$, so daß*

$$\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$$

Insbesondere gilt für das totale Differential einer Funktion f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{C}^\beta(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ und sei (unter Mißbrauch der Schreibweise) e_j das Vektorfeld, das jedem $x \in U$ den Einheitsvektor e_j zuordnet. Natürlich ist $e_j \in \mathcal{C}^\beta(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ für alle β . Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$f_j(x) := \langle \omega(x), e_j(x) \rangle = \langle \omega(x), e_j \rangle$$

von der Klasse \mathcal{C}^β . Es genügt also zu zeigen, daß mit

$$\sigma := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

für alle $x \in U$ gilt: $\sigma(x) = \omega(x)$, d. h. $\langle \sigma(x), e_j \rangle = \langle \omega(x), e_j \rangle = f_j(x)$ für alle j . Nun ist aber

$$\langle dx_i(x), e_j \rangle = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_\ell}(x) \cdot \delta_{j\ell} = \sum_{\ell=1}^n \delta_{i\ell} \delta_{j\ell} = \delta_{ij}$$

und damit

$$\langle \sigma(x), e_j \rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x) \delta_{ij} = f_j(x) .$$

Wir sehen also, daß sich jede 1-Form in der gewünschten Form schreiben läßt:

$$(*) \quad \omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n .$$

Wir müssen noch zeigen, daß diese Darstellung eindeutig ist. D. h.: Gilt in $(*)$ $\omega = 0$, so ist notwendig $f_j = 0$ für alle j . Für $\omega = 0$ gilt aber, wie wir oben gesehen haben, für alle j und alle $x \in U$:

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \delta_{ij} = \langle \omega(x), e_j \rangle = 0 . \quad \square$$

Pfaffsche Formen sind die geeigneten *Integranden für Kurvenintegrale*: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\omega \in \mathcal{C}^0(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ eine zumindest *stetige* 1-Form, so wirkt für jede stetig differenzierbare parametrisierte Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ die Linearform $\omega(\alpha(t))$ auf den Tangentialvektor $\alpha'(t)$; wir gewinnen somit eine Abbildung

$$[a, b] \ni t \mapsto \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle ,$$

die sich mit den Darstellungen

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j \quad \text{und} \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

auch schreibt in der Form

$$[a, b] \ni t \mapsto \sum_{j=1}^n f_j(\alpha(t)) \alpha'_j(t) .$$

Insbesondere ist diese Funktion nach Voraussetzung *stetig* auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und damit *integrierbar*.

Definition. Wir schreiben

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$$

und nennen diesen Wert das *Integral über ω längs der orientierten parametrisierten Kurve α* .

In der Tat ist diese Definition *unabhängig von der orientierten Parametrisierung* der Spur $\alpha([a, b])$. Ist nämlich

$$[c, d] \xrightarrow{\varphi} [a, b]$$

eine orientierte Umparametrisierung und $\beta := \alpha \circ \varphi$, so gewinnt man aus der Substitutionsformel in einer Veränderlichen mit $t = \varphi(s)$ sofort

$$\begin{aligned} \int_c^d \langle \omega(\beta(s)), \beta'(s) \rangle ds &= \int_c^d \langle \omega(\alpha \circ \varphi(s)), (\alpha \circ \varphi)'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle \omega(\alpha(\varphi(s))), \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle ds \\ &= \int_c^d \langle \omega(\alpha(\varphi(s))), \alpha'(\varphi(s)) \rangle \cdot \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Bemerkungen. 1. Der gleiche Beweis zeigt, daß bei *Umkehr der Orientierung* von α das Kurvenintegral sein Vorzeichen wechselt.

2. Mit früheren Überlegungen gewinnt man auch sofort die *Standardabschätzung* für solche Integrale in der folgenden Form:

$$\left| \int_{\alpha} \omega \right| \leq \sup \|f\|_{\alpha([a,b])} \cdot L(\alpha),$$

wobei die Form $\omega = \sum f_j dx_j$ mit dem Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n)$ identifiziert wird,

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

die *euklidische Länge* der Spur $\alpha([a, b])$ ist und $\sup \|f\|_{\alpha([a,b])}$ die Supremumsnorm von f auf dieser Spur bezeichnet, also

$$\sup \|f\|_{\alpha([a,b])} := \sup_{t \in [a,b]} \|f(\alpha(t))\|.$$

Ferner gilt die folgende Verschärfung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Satz 27.3 *Ist die Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenso wie der Kurve $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ einmal stetig differenzierbar, so gilt mit $\alpha(a) = x_0$, $\alpha(b) = x_1$:*

$$\int_{\alpha} dF = F(x_1) - F(x_0).$$

Beweis.

$$\int_{\alpha} dF = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_j}(\alpha(t)) \alpha'_j(t) dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) \right) dt = F \circ \alpha \Big|_a^b = F(x_1) - F(x_0). \quad \square$$

Bemerkung. Die vorige Aussage bleibt auch bestehen, wenn die parametrisierte Kurve α nur *stückweise* stetig differenzierbar ist.

Wir wollen uns jetzt noch fragen: Gegeben sei eine 1-Form ω auf der offenen Menge Teilmenge U des \mathbb{R}^n . Wann gilt

$$\omega = dF$$

mit einer C^1 -Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$? F heißt unter dieser Voraussetzung eine *Stammfunktion* von ω auf U . Man beachte, daß die Gleichung $dF = \omega$ in Wahrheit ein *System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* darstellt; man sucht eine Funktion F auf U , deren partielle Ableitungen vorgegeben sind:

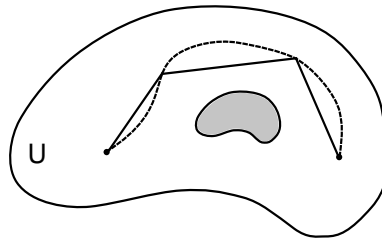
$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j, \quad \text{wenn } \omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

Und zweitens: Wieviele Stammfunktionen gibt es, wenn überhaupt, zu gegebenem ω ?

Die zweite Frage ist sehr einfach zu beantworten: Offensichtlich ist $dG = 0$, wenn $G = \text{const.}$, also $dF = d(F + c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Hat U mehrere Zusammenhangskomponenten, so kann man diese Konstanten auf allen Komponenten verschieden wählen. - Dies ist aber die einzige Freiheit, die Stammfunktionen von 1-Formen besitzen. Es gilt nämlich

Satz 27.4 *Ist U ein Gebiet im \mathbb{R}^n und besitzt die 1-Form ω eine Stammfunktion F , so ist jede andere Stammfunktion von der Form $F + c$.*

Beweis. Mit $\omega = dF = dG$ ist $dH = 0$ für $H = G - F$. Es ist also zu zeigen, daß $H = \text{const.}$ Wähle dazu $x_0 \in U$ fest, $x \in U$ beliebig. Dann gibt es eine *stetige* Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ mit $\alpha(a) = x_0$, $\alpha(b) = x$. Mit einem einfachen *Kompaktheitsargument* beweist man unter Ausnutzung der Tatsache, daß jeder Punkt $x \in U$ eine konvexe Umgebung besitzt, die in U enthalten ist, daß man α sogar *stückweise affin*, insbesondere also *stückweise stetig differenzierbar* wählen kann.



Figur 27.3

Dann folgt

$$0 = \int_{\alpha} dH = H(x) - H(x_0) \quad \text{also} \quad H(x) \equiv H(x_0) = \text{const.} \quad \square$$

Eine erste Antwort auf die zuvor gestellte Frage nach der Existenz von Stammfunktionen gibt der folgende Satz.

Satz 27.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die stetige 1-Form ω besitzt genau dann eine Stammfunktion auf U , wenn*

$$\int_{\alpha} \omega = 0$$

ist für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven α in U .

Beweis. a) Ist $\omega = dF$ und $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ eine parametrisierte Kurve, die geschlossen ist, d. h. $\alpha(a) = \alpha(b) = x_0$, so ist nach Satz 3

$$\int_{\alpha} \omega = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

(Hierbei ist α als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Ist α nur stückweise stetig differenzierbar, so muß man etwas genauer argumentieren).

b) Wähle $x_0 \in U$ fest und zu $x \in U$ irgendeine stückweise stetig differenzierbare parametrisierte Kurve $\alpha = \alpha_z$ mit $\alpha(a) = x_0$, $\alpha(b) = x$. Die Funktion

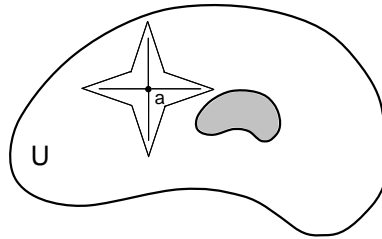
$$(*) \quad F(x) := \int_{\alpha} \omega$$

ist dann nach Voraussetzung unabhängig von der speziellen Auswahl der Kurve α . Wir müssen zeigen: $dF = \omega$, d. h.

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = f_j(x) \quad \text{für alle } x \in U \quad \text{und alle } j = 1, \dots, n,$$

wenn $\omega = \sum f_j dx_j$.

Wechselt man von dem Punkt x_0 zu einem anderen, z. B. zu x_1 , so unterscheiden sich die beiden nach (*) gebildeten Funktionen um eine additive Konstante, nämlich durch das Integral über ω längs einer Kurve von x_0 nach x_1 in U . Um also die Formel (**) an einer beliebigen Stelle $a \in U$ nachzuweisen, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $a = x_0$ ist. Ist dann $|h|$ hinreichend klein, so ist $a + h e_j \in U$ für alle $j = 1, \dots, n$.



Figur 27.4

Wegen der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals über ω ist dann

$$F(a + h e_j) - F(a) = \int_{\beta} \omega,$$

wobei $\beta(t) = a + t h e_j$, $0 \leq t \leq 1$, die Parametrisierung der Strecke von a nach $a + h e_j$ bezeichnet. Nun ist $\beta'(t) = h e_j$ und folglich

$$\int_{\beta} \omega = \int_0^1 \langle \omega(\beta(t)), h e_j \rangle dt = h \int_0^1 f_j(a + t h e_j) dt.$$

Hieraus folgt die behauptete Identität:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\beta} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_j(a + t h e_j) dt = f_j(a). \quad \square$$

Für stetig differenzierbare 1-Formen ω können wir jetzt leicht eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion herleiten, die rein differenzierbarer (und damit insbesondere lokaler) Natur ist. Da die Koeffizienten f_j nach Voraussetzung stetig differenzierbar sind und für eine Stammfunktion F die Beziehung $\partial F / \partial x_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt, ist notwendig F zweimal stetig differenzierbar, und man hat Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen von F . Dies führt zu den Bedingungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \text{für alle } j, k.$$

Definition. Die stetig differenzierbare 1-Form $\omega = \sum f_j dx_j$ heißt *geschlossen*, wenn die Bedingungen

$$(+)$$

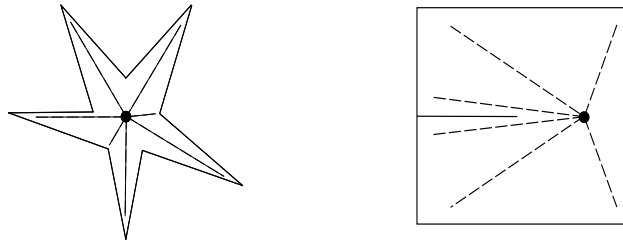
$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

für alle $j \neq k$ gelten.

In „topologisch einfachen“ Situationen sind diese Bedingungen auch hinreichend. Dies besagt der erste Spezialfall des sogenannten POINCARÉschen *Lemmas*. Dazu erinnern wir an eine frühere

Definition und Bemerkung. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so daß für alle $x \in U$ die Strecke von x_0 nach x ganz in U verläuft. Wir sagen dann auch genauer, U sei *sternförmig* mit *Zentrum* x_0 .

Man beachte, daß jede *konvexe* Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig mit jedem Punkt $x_0 \in U$ als Zentrum ist.



Figur 27.5

Satz 27.6 Die offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig. Dann besitzt eine stetig differenzierbare 1-Form $\omega \in \mathcal{C}^1(U, T_{\mathbb{R}^n}^*)$ genau dann eine Stammfunktion, wenn ω geschlossen ist.

Folgerung 27.7 Geschlossene stetig differenzierbare 1-Formen auf beliebigen Gebieten $U \subset \mathbb{R}^n$ besitzen lokal Stammfunktionen.

Bemerkung. Im nächsten Kapitel werden wir diese Aussage auf Formen *beliebigen Grades* verallgemeinern. Wir werden sehen, daß wir jeder q -Form ω auf kanonische Weise eine $(q + 1)$ -Form $d\omega$ zuordnen können, ihr sogenanntes *Differential*. Die Bedingungen (+) besagen dann gerade, daß für die vorgegebene 1-Form ω das Differential $d\omega$ verschwindet. Dies führt zu dem Begriff einer *geschlossenen* Differentialform von höherem Grad. Das allgemeine Lemma von Poincaré besagt, daß jede geschlossene q -Form ω auf einem sternförmigen Gebiet U des \mathbb{R}^n *exakt*, also von der Form $\omega = d\eta$ mit einer $(q - 1)$ -Form η auf U ist.

Beweis (Satz 6). Die Notwendigkeit der Bedingung der „Geschlossenheit“ von ω haben wir schon eingesehen. Setzen wir nun also voraus, daß das Gebiet U sternförmig sei und ω geschlossen ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß das Zentrum von U der Ursprung $z_0 = 0$ ist. Wir setzen dann

$$F(x) := \sum_{k=1}^n x_k \left(\int_0^1 f_k(tx) dt \right).$$

Dies ist natürlich nichts anderes als das Integral über ω entlang der Strecke vom Ursprung zum Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$. Nach der Produktregel und den Vertauschungssätzen von Differentiation und Integration deduziert man aus dieser Darstellung sofort unter Benutzung der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 f_j(tx) dt + \sum_{k=1}^n x_k \left(\int_0^1 t \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(tx) dt \right) \\ &= \int_0^1 \left(f_j(tx) + \sum_{k=1}^n t x_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(tx) \right) dt. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist bei festem $x \in U$:

$$\frac{d}{dt} (t f_j(tx)) = f_j(tx) + t \frac{d}{dt} f_j(tx) = f_j(tx) + t \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} (tx).$$

Damit wird

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} (x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_j(tx)) dt = (t f_j(tx)) \Big|_0^1 = f_j(x). \quad \square$$

Bemerkung. Satz 6 läßt eine andere mathematisch–physikalische Deutung zu. Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *Potential* eines Vektorfeldes $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn

$$\text{grad } F = v, \quad \text{d. h., wenn} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = v_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

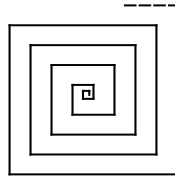
Der vorige Satz kann dann auch folgendermaßen interpretiert werden:

Satz 27.8 Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf einer sternförmigen offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \text{für alle } j \neq k.$$

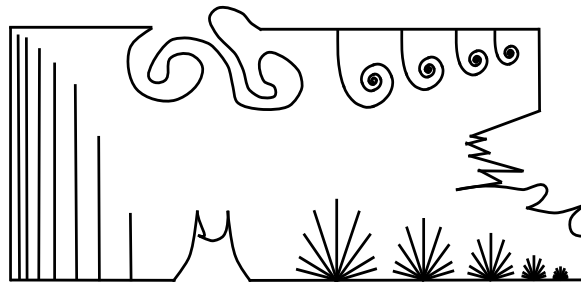
Sternförmige Gebiete in \mathbb{R}^n besitzen eine topologische Eigenschaft, die für die Existenzaussagen für Stammfunktionen und Potentiale schon ausreicht: Man kann in ihnen jede geschlossene Kurve auf einen Punkt „stetig zusammenziehen“ oder, wie man auch sagt, jede geschlossene Kurve ist *nullhomotop*. Solche Gebiete nennt man auch *einfach zusammenhängend*.

Z. B. ist das Außengebiet einer (endlichen oder unendlichen) Spirale in \mathbb{R}^2 ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das aber nicht sternförmig ist.



Figur 27.6

Noch abenteuerlicher muten Beispiele der folgenden Art an:



Figur 27.7

Bemerkung. Selbstverständlich gibt es auch nicht einfach zusammenhängende Gebiete wie z. B. $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Es ist schlechterdings nicht möglich, die 1-Sphäre S^1 innerhalb von \mathbb{C}^* stetig auf einen Punkt zusammenzuziehen.

Wir wollen dies alles jetzt noch ein wenig genauer ausführen. Dazu muß zuerst der Begriff der „Homotopie“ von Kurven erklärt werden. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und $\alpha_0, \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow U$ seien zwei (parametrisierte) Kurven in U mit gleichem Anfangspunkt $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$ und gleichem Endpunkt $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = x_1$.

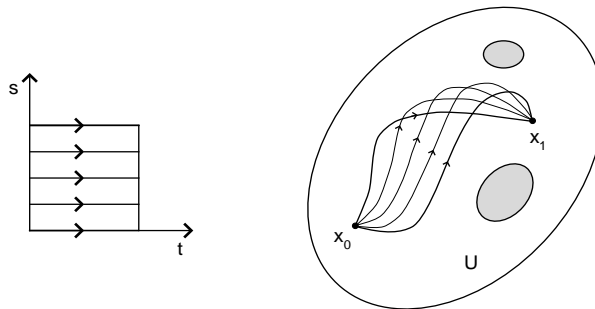
Definition. Die Kurven α_0, α_1 heißen *homotop* (zueinander) in U , in Zeichen $\alpha_0 \simeq_U \alpha_1$, falls eine stetige Abbildung

$$A : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow U$$

existiert mit

- i) $A(0, t) = \alpha_0(t)$, $A(1, t) = \alpha_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$;
- ii) $A(s, 0) = x_0$, $A(s, 1) = x_1$ für alle $s \in [0, 1]$.

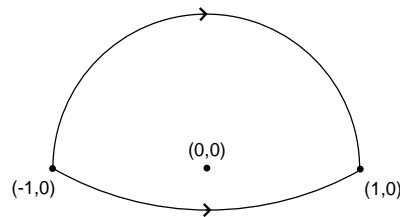
Man nennt die Abbildung A dann auch eine *Homotopie* zwischen den Kurven α_0 und α_1 ; sie wird aus diesem Grunde auch oft mit dem Symbol H belegt.



Figur 27.8

Bei festem s ist also $A_s(t) := A(s, t)$ die Parametrisierung einer Kurve von x_0 nach x_1 in U , und es ist $A_0 = \alpha_0$, $A_1 = \alpha_1$. Wir können somit die Abbildung A interpretieren als eine *stetige „Schar“* von Kurven in dem Gebiet U , welche α_0 mit α_1 verbindet.

Bemerkung. Diese Definition hängt natürlich ganz wesentlich von dem Gebiet U ab! So sind die beiden folgenden Kurven homotop zueinander in \mathbb{R}^2 , nicht aber in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn in jeder stetigen Familie von Kurven, die die beiden Kurven verbindet, muß mindestens eine den Nullpunkt treffen.



Figur 27.9

Bemerkung. Eine Homotopie in \mathbb{R}^2 zwischen den beiden Kurven wird z. B. gegeben durch

$$A(s, t) := (1 - s)\alpha_0(t) + s\alpha_1(t).$$

Mit demselben Argument zeigt man, daß je zwei Kurven in \mathbb{R}^n mit gleichem Anfangs- und Endpunkt zueinander homotop sind.

Wir wollen hier nur schnell die *einfachsten Grundtatsachen* aus der Homotopie-Theorie zusammentragen. (Siehe hierzu auch den Anhang zu Kapitel 30. Weiteres Material findet man in Kapitel 15 meines Manuskripts *Funktionentheorie I*).

Lemma 27.9 *Homotopie von Kurven mit gleichen Endpunkten ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Es ist klar, daß $\alpha_0 \simeq_U \alpha_0$; man braucht dazu nur $A(s, t) = \alpha_0(t)$ zu wählen. Ebenso sieht man durch Übergang von $A(s, t)$ zu $A(1 - s, t)$, daß aus $\alpha_0 \simeq_U \alpha_1$ auch $\alpha_1 \simeq_U \alpha_0$ folgt. Es sei schließlich $\alpha_0 \simeq_U \alpha_1$ und $\alpha_1 \simeq_U \alpha_2$ mit den konkreten Homotopien $A_0, A_1 : I \times I \rightarrow U$. Dann liefert

$$A(s, t) := \begin{cases} A_0(2s, t), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ A_1(2s - 1, t), & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von α_0 und α_2 . □

Dies rechtfertigt erst die Sprechweise, daß zwei (parametrisierte) Kurven *zueinander* homotop sind. In Wahrheit ist Homotopie sogar eine Eigenschaft von *Klassen* von parametrisierten Kurven unter der Äquivalenzrelation der *orientierten Umparametrisierung*. Aufgrund des soeben bewiesenen Lemmas brauchen wir dazu nur das folgende Lemma zu zeigen.

Lemma 27.10 *Ist $\varphi : I \rightarrow I$ eine streng monoton wachsende stetige surjektive Abbildung und $\alpha : I \rightarrow U$ eine stetige Kurve in U , so ist $\alpha \circ \varphi \simeq_U \alpha$.*

Beweis. Eine konkrete Homotopie wird gegeben durch

$$A(s, t) := \alpha((1 - s)\varphi(t) + st). \quad \square$$

Die zentrale Aussage, die sämtliche weiter oben bewiesenen Tatsachen bei sternförmigen Gebieten verallgemeinert, ist der folgende

Satz 27.11 *Es sei ω eine stetig differenzierbare geschlossene 1-Form auf der offenen Menge U , und α_0, α_1 seine zwei stückweise stetig differenzierbar parametrisierte Kurven in U , die in U zueinander homotop sind: $\alpha_0 \simeq_U \alpha_1$. Dann ist*

$$\int_{\alpha_0} \omega = \int_{\alpha_1} \omega.$$

Bemerkungen. 1. Die Geschlossenheit der Form ω kann, wie der Beweis zeigt, ersetzt werden durch die Bedingung, daß ω lokal um jeden Punkt von U eine Stammfunktion besitzt (was gleichwertig dazu ist, daß lokal um jeden Punkt Integrale längs geschlossener Kurven verschwinden).

2. Man beachte, daß die Kurven α_0 und α_1 zwar als (stückweise) stetig differenzierbar vorausgesetzt werden, die Homotopie A aber weiterhin nur *stetig* sein soll. Damit ist a priori nicht gesichert, daß das Integral der Form ω längs der „Zwischenkurven“ $A_s, s \in (0, 1)$, überhaupt existiert.

3. In der *Funktionentheorie* spielt dieses Ergebnis in der Gestalt des *Monodromiesatzes* eine ganz entscheidende Rolle. Siehe z. B. *loc. cit.*

Beweis. Es sei $A : I \times I \rightarrow U, I := [0, 1]$, eine Homotopie zwischen den beiden vorgegebenen Kurven. Dann ist A gleichmäßig stetig, und das Bild von $I \times I$ unter A ist kompakt. Infolgedessen existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß

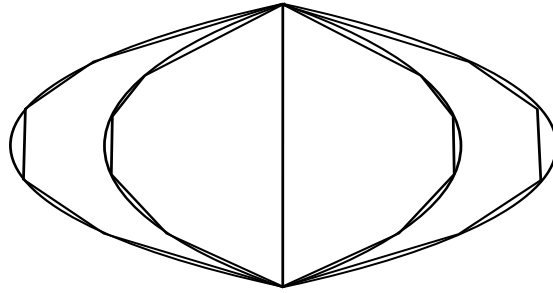
$$\|A(s, t) - y\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } s, t \in I \times I, \quad y \notin U,$$

und weiter gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|A(s, t) - A(s', t')\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } (s, t), (s', t') \in I \times I \quad \text{mit } \|(s, t) - (s', t')\| < \delta.$$

Wähle nun eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ des Intervalls I so fein, daß $|t_j - t_{j-1}| < \delta$. Für festes $s \in I$ bezeichnen wir ferner mit γ_s den *Polygonzug* zu den Punkten

$$A(s, t_0), A(s, t_1), \dots, A(s, t_m).$$



Figur 27.10

Die folgenden zwei Aussagen beweisen dann offensichtlich den Satz:

$$(i) \quad \int_{\alpha_0} \omega = \int_{\gamma_0} \omega, \quad \int_{\alpha_1} \omega = \int_{\gamma_1} \omega;$$

$$(ii) \quad \int_{\gamma_u} \omega = \int_{\gamma_v} \omega, \quad |u - v| < \delta.$$

Zu (i): Es sei B_j die offene Kugel um $a_j = A(0, t_j) = \alpha_0(t_j) = \gamma_0(t_j)$ mit Radius ε . Wegen der Wahl von ε folgt sofort $B_j \subset U$. Es ist weiter

$$\alpha_0([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j \quad \text{und} \quad \gamma_0([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j.$$

Auf B_j besitzt aber ω eine Stammfunktion. Also ist

$$\int_{\alpha_0|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega = \int_{\gamma_0|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega \quad \text{und damit} \quad \int_{\alpha_0} \omega = \int_{\gamma_0} \omega.$$

Entsprechendes gilt für α_1 .

Zu (ii): Bei festem $u \in [0, 1]$ bezeichne B_j jetzt die offene Kugel mit Mittelpunkt $A(u, t_j) = \gamma_u(t_j)$ und Radius ε . Wieder ist $B_j \subset U$. Sei F_j eine Stammfunktion von ω auf B_j . Da $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ und zusammenhängend ist, so folgt

$$F_{j+1} = F_j + c_j \quad \text{in } B_j \cap B_{j+1}$$

mit einer Konstanten c_j . Ist aber $v \in [0, 1]$ und $|u - v| < \delta$, so liegen auch die Punkte $\gamma_v(t_{j-1})$ und $\gamma_v(t_j) \in B_j$, also auch ihre Verbindungsstrecke, so daß

$$\int_{\gamma_v|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega = F_j(\gamma_v(t_j)) - F_j(\gamma_v(t_{j-1})).$$

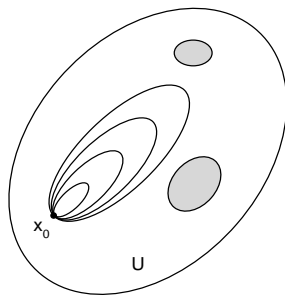
Damit ist schließlich

$$\int_{\gamma_v} \omega = \sum_{j=1}^m (F_j(\gamma_v(t_j)) - F_j(\gamma_v(t_{j-1}))) = F_m(x_1) - F_0(x_0) - \sum_{j=1}^{m-1} c_j$$

unabhängig von v nahe bei u . □

Das *stetige Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve auf einen Punkt* wird nun wie folgt eingeführt.

Definition. Ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ eine *geschlossene Kurve*, d. h. $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1) = x_1$, so heißt α *nullhomotop*, falls α in U homotop zu der *konstanten Kurve* $\beta(t) := x_0$ ist, die wir auch manchmal mit $[x_0]$ bezeichnen. Man schreibt dann auch $\alpha \simeq_U 0$ oder genauer $\alpha \simeq_U [x_0]$.



Figur 27.11

Als Folgerung aus Satz 11 können wir nun sofort ohne weitere Begründung notieren:

Folgerung 27.12 *Ist ω eine geschlossene stetig differenzierbare 1-Form auf U und ist die stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve α nullhomotop in U , so gilt*

$$\int_{\alpha} \omega = 0 .$$

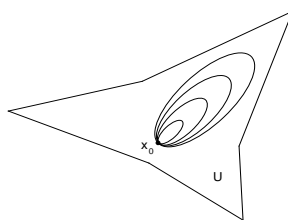
Gebiete, in denen jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, verdienen somit besondere Beachtung und einen exklusiven Namen.

Definition. Die offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *einfach zusammenhängendes Gebiet*, wenn

- 1) U zusammenhängend ist,
- 2) es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so daß jede geschlossene Kurve in U mit Anfangs- und Endpunkt x_0 nullhomotop ist.

Beispiel. U sei eine sternförmige offene Menge mit Zentrum x_0 (also z. B. eine konvexe Menge). Dann ist U einfach zusammenhängend. Man kontrahiere längs der Stern-Strahlen, bilde also

$$A(s, t) = s x_0 + (1 - s) \alpha(t) .$$



Figur 27.12

Satz 27.13 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und ω sei eine stetig differenzierbare geschlossene 1-Form auf U . Dann gilt*

$$\int_{\alpha} \omega = 0$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven α in U . Insbesondere besitzt ω auf U eine Stammfunktion.

Beweis. α habe den Anfangs- und Endpunkt x_1 . Ist dann $x_0 \in U$ der Punkt, bzgl. dessen der einfache Zusammenhang erklärt ist, so wähle man eine stückweise stetig differenzierbare Verbindung γ von x_0 nach x_1 und dann die geschlossene Kurve β mit Anfangs- und Endpunkt x_0 , die man durch Zusammensetzung von γ , α und γ^{-1} erhält. Da sich die Integrale längs γ und γ^{-1} wegheben, ist

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega.$$

Die rechte Seite ist aber Null wegen Folgerung 12.

Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5. □

Beispiel. Wir benutzen den vorstehenden Satz, um ohne jegliche Heranziehung von anschaulichen Argumenten zu belegen, daß das Gebiet $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Wir führen dazu mit der üblichen Zerlegung $z = x + iy$ komplexer Zahlen auf \mathbb{C}^* die *komplexwertige* 1-Form

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{dz}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} (dx + idy) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} (dx + idy) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right) + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \end{aligned}$$

ein. Sie schreibt sich in offensichtlicher Weise in der Form $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ mit *reellwertigen* 1-Formen ω_1 und ω_2 . Für das Integral von ω längs eines beliebigen Kreisrandes $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $r > 0$ fest, $0 \leq t \leq 2\pi$, ergibt sich mit leichter Rechnung der aus der Funktionentheorie wohlvertraute und dort ständig auftretende Wert

$$\int_{\alpha} \omega = 2\pi i.$$

Damit ist aber

$$\int_{\alpha} \omega_2 = \int_{\alpha} \operatorname{Im} \omega = \operatorname{Im} \int_{\alpha} \omega = 2\pi$$

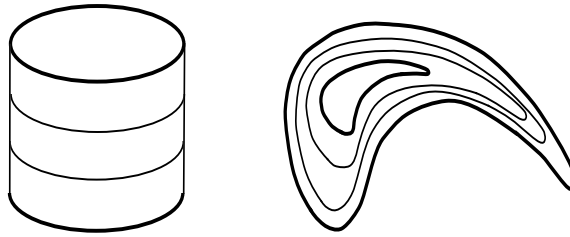
im Widerspruch zu der leicht nachzurechnenden Tatsache, daß die Form ω_2 *geschlossen* ist.

Bemerkung. Satz 13 deutet darauf hin, daß die Definition des einfachen Zusammenhangs eines Gebietes $U \subset \mathbb{R}^n$ unabhängig von der Wahl des Punktes x_0 ist. Mit anderen Worten: Es ist zu vermuten, daß jede geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet U auf jeden seiner Punkte stetig in U zusammengezogen werden kann. Dies ist in der Tat richtig. Eine kurze Überlegung zeigt, daß man dafür nur nachzuweisen hat, daß für eine beliebige Kurve γ in U mit Anfangspunkt x_0 die Zusammensetzung mit der inversen Kurve γ^{-1} nullhomotop ist. Dies ist eine leichte Übungsaufgabe und sei deshalb dem Leser überlassen.

Bei Folgerung 12 ist die Festlegung auf einen Anfangspunkt völlig unbefriedigend, denn i. A. besitzt eine geschlossene Kurve keinen *ausgezeichneten* Anfangspunkt. Man sollte daher, was offensichtlich möglich ist, geschlossene Kurven besser durch die 1-Sphäre S^1 parametrisieren: $\alpha : S^1 \rightarrow U$ stetig.

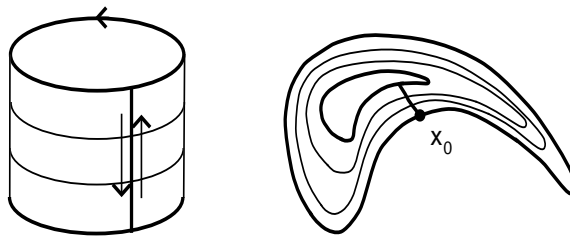
Definition und Bemerkung. Die geschlossenen Kurven $\alpha_0, \alpha_1 : S^1 \rightarrow U$ heißen *frei homotop* in U , falls es eine stetige Abbildung $A : I \times S^1 \rightarrow U$, $I = [0, 1]$, gibt mit $A(0, t) = \alpha_0(t)$, $A(1, t) = \alpha_1(t)$.

Hierdurch wird selbstverständlich wieder eine Äquivalenzrelation auf geschlossenen Kurven in U erklärt.



Figur 27.13

Wir überlassen den Beweis der beiden folgenden Sätze dem/der Leser/in. Entscheidend hierzu ist der Nachweis, daß man aus zwei frei homotopen Kurven α_0 und α_1 auf die folgende Weise *homotope* Kurven konstruieren kann: Man zeichnet einen Punkt $t_0 \in S^1$ aus, z. B. $t_0 = 1$, und betrachtet die Einschränkung der Homotopie A auf das „Intervall“ $I \times \{t_0\}$. Diese beschreibt eine stetig parametrisierte Kurve γ in U mit $\gamma(s) \in A_s(S^1)$; γ zeichnet also für jeden Parameterwert s einen Punkt auf der Zwischenkurve A_s aus. Man kann dann leicht zeigen, daß mit $x_0 := \gamma(0)$ die geschlossene Kurve α_0 bzgl. x_0 homotop ist zu der geschlossenen Kurve mit Anfangspunkt x_0 , die man erhält, wenn man erst γ folgt, dann von $\gamma(1)$ startend mit α_1 einmal um S^1 „herumläuft“ und dann mit der inversen Kurve zu γ zu x_0 zurückkehrt. Wie im Beweis des Monodromiesatzes sieht man, daß es für die Anwendung desselben auf die Berechnung von Integralen unerheblich ist, daß die Kurve γ im Allgemeinen nur stetig und nicht stückweise stetig differenzierbar ist.



Figur 27.14

Als Konsequenz erhält man:

Satz 27.14 Sind die geschlossenen Kurven α_0 und α_1 frei homotop zueinander in dem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt für jede geschlossene 1-Form ω auf U , daß

$$\int_{\alpha_0} \omega = \int_{\alpha_1} \omega.$$

Satz 27.15 Für ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- i) U ist einfach zusammenhängend ;
- ii) es gibt einen Punkt $x_0 \in U$, so daß jede geschlossene Kurve in U frei homotop in U zu der konstanten Kurve $[x_0]$ ist ;
- iii) jede geschlossene Kurve in U ist frei homotop in U zu einer konstanten Kurve.

Homotopie von Kurven kann man natürlich in *Mannigfaltigkeiten*, ja ganz allgemein in *topologischen Räumen* X erklären. Auf diese Weise kommt man zu einer topologischen Invarianten, der *Fundamentalgruppe*. Es sei hierzu X ein *wegweise zusammenhängender* topologischer Raum, und der Punkt $x_0 \in X$ werde fest gewählt. Dann definiert man $L(X, x_0)$ als die Menge aller geschlossenen Kurven in X mit

Anfangspunkt x_0 (mit festem Parameterintervall $I = [0, 1]$). Da geschlossene Kurven im Englischen auch als *loops* bezeichnet werden, heißt $L(X, x_0)$ oft in der deutschen Literatur unter Verhöhnung der Sprache der „Loopraum“. Dieser besitzt eine Verknüpfung, nämlich die weiter oben schon mehrfach erwähnte *Zusammensetzung* $\alpha * \beta$ zweier Kurven α und β , die man wie folgt erklärt:

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1) & , \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Definition ist also so getroffen, daß man in $\alpha * \beta$ erst α folgt und anschließend β .

Es ist leicht zu sehen, daß die Homotopierelation \simeq_{x_0} auf $L(X, x_0)$ eine Äquivalenzrelation ist, die mit der Zusammensetzung verträglich ist: Ist $\alpha_0 \simeq_{x_0} \alpha_1$, $\beta_0 \simeq_{x_0} \beta_1$, so ist auch $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_{x_0} \alpha_1 * \beta_1$. Infolgedessen induziert die Verknüpfung von loops auf dem Quotientenraum

$$\pi_1(X, x_0) := L(X, x_0) / \simeq_{x_0}$$

der *Homotopie-Klassen* $[\alpha]$ von loops $\alpha : S^1 \rightarrow X$ eine Verknüpfung, die wir ebenfalls mit $*$ bezeichnen. Die Homotopieklasse der konstanten Kurve $\alpha : S^1 \rightarrow \{x_0\}$ ist von beiden Seiten neutral, und es ist genauso einfach nachzurechnen, daß die Klasse der zu α *inversen* Kurve $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$ bzgl. der Verknüpfung $*$ invers zu der Klasse von α ist. Da auch das *Assoziativgesetz* keine besonderen Anstrengungen erfordert, können wir festhalten:

Satz 27.16 Die Menge $\pi_1(X, x_0)$ ist mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe.

Definition und Bemerkung. Mit dieser Gruppenstruktur heißt $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe* oder *1. Homotopie-Gruppe* von X zum Aufpunkt x_0 . Sie ist im wesentlichen unabhängig von der Wahl des Punktes x_0 . Geht man zu einem anderen Punkt $x_1 \in X$ über und wählt man eine Kurve γ , die x_0 mit x_1 verbindet, so kann man jedem loop $\alpha \in L(X, x_0)$ die geschlossene Kurve $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \in L(X, x_1)$ zuordnen. Diese Abbildung induziert einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$. Man spricht daher oft auch von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$.

Beispiele 1. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

2. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ für alle n .

3. $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$ für alle $n \geq 3$.

4. $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

5. $\pi_1(\infty)$ ist nicht abelsch. Hierbei ist das Symbol ∞ als Abkürzung für den topologischen Unterraum $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ oder } (x + 1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ anzusehen.

Beachtet man, daß sich jede Homotopieklasse in einer offenen Menge des \mathbb{R}^n durch einen Polygonzug, also eine stückweise affine und damit erst recht stückweise differenzierbare geschlossene Kurve repräsentieren läßt, so können einige unserer obigen Überlegungen zu Integralen über geschlossene 1-Formen längs geschlossener Kurven in Gebieten $U \subset \mathbb{R}^n$ wie folgt auf eine etwas künstlich erscheinende, dennoch sehr prägnante Weise zusammengefaßt werden.

Satz 27.17 Das Integral faktorisiert zu einer wohldefinierten Abbildung

$$\int : \pi_1(U) \times \text{dRh}^1(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $\text{dRh}^1(U)$ den Quotientenvektorraum der geschlossenen 1-Formen ω auf U nach dem Untervektorraum der 1-Formen mit Stammfunktion, die sogenannte 1. de Rham'sche Cohomologiegruppe von U , bezeichnet:

$$\text{dRh}^1(U) := \{1\text{-Formen } \omega \text{ auf } U \text{ mit } d\omega = 0\} / \{\omega = dF\}.$$

Ist speziell U einfach zusammenhängend, d. h. $\pi_1(U, x_0) = 0$ für ein und damit für alle $x_0 \in U$, so verschwinden alle diese Integrale, und es ist $\text{dRh}^1(U) = 0$.

Anhang: Schnitte in Vektorraumbündeln und ihren Dualen

Wenn man sich ein Bündel bildlich als eine *Garbe von Getreidehalmen* vorstellt und dazu die Tätigkeit eines (vermutlich nicht sehr erfahrenen) *Schnitters*, so versteht man vielleicht den mathematischen Inhalt der folgenden Definition.

Definition. Ein (beliebiger, stetiger, differenzierbarer) *Schnitt* in dem Faserbündel (E, π, X) über der offenen Menge $U \subset X$ ist eine (beliebige, stetige, differenzierbare) Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$, d. h. $s(x) \in E_x$ für alle $x \in U$. Oder in anderen Worten: s ist ein U -Morphismus

$$(U, \text{id}, U) \longrightarrow (\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U).$$

Wir schreiben $\Gamma(U, E)$ oder $H^0(U, E)$ für die Menge aller dieser Schnitte über U (oder genauer

$$\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E)) \quad \text{oder} \quad H^0(U, \mathcal{C}^\kappa(E)),$$

wenn wir Schnitte der Differenzierbarkeitsordnung \mathcal{C}^κ untersuchen wollen. Selbstverständlich darf die Differenzierbarkeitsordnung der Schnitte nicht größer als die des betrachteten Bündels sein).

Bemerkung. Das Symbol $H^0(U, E)$ soll darauf hindeuten, daß es sich hier tatsächlich um eine *cohomologische* Begriffsbildung handelt (siehe Anhang zu Kapitel 26). Das Zeichen $\mathcal{C}^\kappa(E)$ ist dann zu deuten als die *Garbe der Keime von \mathcal{C}^κ -Schnitten in dem Faserbündel E* . All dies wird aber im folgenden keine Rolle spielen und soll daher auch nicht weiter kommentiert werden.

Ist das gegebene Bündel über der Menge U *trivialisierbar*, so kann man leicht die Schnitte über U bestimmen. Da dort „im wesentlichen“ das Bündel E gleich dem Produkt $U \times F$ mit der typischen Faser F ist, sind Schnitte nichts anderes als (hinreichend oft differenzierbare) Abbildungen $U \rightarrow F$. Insbesondere sind die *konstanten* Abbildungen von U nach F solche Schnitte.

Warnung. Obwohl es also *lokal* zumindest so viele Schnitte wie Elemente in F gibt, braucht es über beliebigen offenen Mengen von X , insbesondere über X selbst, *keine* (stetigen) Schnitte in dem gegebenen Bündel zu geben. Dies sieht man z. B. an der zweifachen Überlagerung von \mathbb{C}^* durch sich selbst. Man mache sich klar, daß die Existenz eines stetigen Schnittes in dieser Überlagerung zur Folge hätte, daß die Quadratwurzel \sqrt{z} auf ganz \mathbb{C}^* als eindeutige Funktion erklärt werden könnte. Im Beispiel der universellen Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ würde die Existenz eines globalen stetigen Schnittes die Existenz des *Logarithmus* auf ganz \mathbb{C}^* als eindeutige holomorphe Funktion nach sich ziehen.

Wir wollen zunächst die Bemerkungen vor der gerade ausgesprochenen Warnung noch etwas präzisieren und vervollständigen. Liegt über der Menge $U \subset X$ eine Trivialisierung

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) = E|_U \\ p = \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

vor, so korrespondiert zu jedem Schnitt s in E über U in eineindeutiger Weise der Schnitt

$$\chi_U^{-1} \circ s : U \longrightarrow U \times F.$$

Ein solcher besitzt aber notwendigerweise die Form

$$x \longmapsto (x, s_U(x)),$$

wobei $s_U : U \rightarrow F$ eine beliebige differenzierbare Abbildung (der richtigen Differenzierbarkeitsordnung) ist. Infolgedessen gibt es eine (durch die vorgegebene Trivialisierung eindeutig bestimmte) Bijektion von $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ nach $\mathcal{C}^\kappa(U, F)$.

Wir interessieren uns weiter für die Frage, wie sich die eben hergeleitete Darstellung der Schnitte mittels lokaler Trivialisierungen bei einem Übergang zu einer anderen Trivialisierung transformiert. In Ermangelung weiterer geeigneter lateinischer Symbole schreiben wir die Elemente einer beliebigen trivialisierenden Überdeckung von X zu dem Bündel E jetzt mit griechischen Indizes als U_α und die korrespondierenden 1-Cozyklen mit $\chi_{\beta\alpha}$ bzw. $\theta_{\beta\alpha}$. Wir schreiben ferner s_α anstelle von s_{U_α} . Wegen $\chi_{\beta\alpha} = \chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gewinnt man sofort die folgende Beziehung

$$(x, s_\beta(x)) = (\chi_\beta^{-1} \circ s)(x) = (\chi_{\beta\alpha} \circ (\chi_\alpha^{-1} \circ s))(x) = \chi_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x)) = (x, \theta_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x)))$$

und damit den folgenden

Satz 27.18 Ein System von Abbildungen $s_\alpha \in \mathcal{C}^\kappa(U_\alpha, F)$ bestimmt genau dann einen Schnitt in dem Faserbündel E mit Faser F bzgl. einer gegebenen trivialisierenden Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ mit zugeordnetem 1-Cozyklus $\{\theta_{\beta\alpha}\}$, wenn auf jedem Durchschnitt $U_\alpha \cap U_\beta$ die Bedingung

$$s_\beta(x) = \theta_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x))$$

erfüllt ist.

Für Vektorraumbündel besitzt die Menge $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ der Schnitte wesentlich mehr Struktur. In diesem Fall hat man lokal die Situation $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$, und ein Schnitt über U in E wird nach den obigen Überlegungen repräsentiert durch eine \mathcal{C}^κ -Abbildung $s_U : U \rightarrow \mathbb{R}^r$, d. h. durch ein r -tupel (v_U^1, \dots, v_U^r) von \mathcal{C}^κ -Funktionen v_U^j , $j = 1, \dots, r$, auf $U \subset X$. Die Übergangsbedingungen lauten in diesem Fall einfach

$$(*) \quad {}^t(v_\beta^1(x), \dots, v_\beta^r(x)) = A_{\beta\alpha}(x) \cdot {}^t(v_\alpha^1(x), \dots, v_\alpha^r(x)), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Hieraus leitet man sofort ab, daß die faserweise Addition von Schnitten und ihre Multiplikation mit differenzierbaren Funktionen $f \in \mathcal{C}^\kappa(U)$ lokal (und, wie man leicht sieht, auch auf beliebigen offenen Mengen $U \subset X$) wieder zu Schnitten in E mit der entsprechenden Differenzierbarkeitsordnung führt. - Mit diesen Überlegungen gewinnt man den ersten Teil des folgenden Satzes.

Satz 27.19 Sei (E, π, X) ein \mathcal{C}^κ -Vektorraumbündel. Dann ist $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ ein $\mathcal{C}^\kappa(U)$ -Modul. Jeder Punkt $x_0 \in X$ besitzt (beliebig kleine) Umgebungen $U = U(x_0)$, so daß $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ ein freier $\mathcal{C}^\kappa(U)$ -Modul vom Rang $r = \text{rang } E$ ist.

Beweis. Man wähle eine trivialisierende Umgebung U von x_0 . Ist dann e_1, \dots, e_r die kanonische Basis von \mathbb{R}^r und identifiziert man die e_j mit den „konstanten“ Schnitten $e_j(x) := (x, e_j)$, $j = 1, \dots, r$, in $U \times \mathbb{R}^r$ über U , so schreibt sich für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ der Schnitt $\chi_U^{-1} \circ s$ in dem trivialen Bündel $U \times \mathbb{R}^r$ eindeutig in der Form

$$\chi_U^{-1} \circ s(x) = v^1(x) e_1 + \dots + v^r(x) e_r, \quad v^j \in \mathcal{C}^\kappa(U).$$

Setzt man jetzt noch $e_j^U := \chi_U \circ e_j$, so bekommt man die gewünschte eindeutige Darstellung

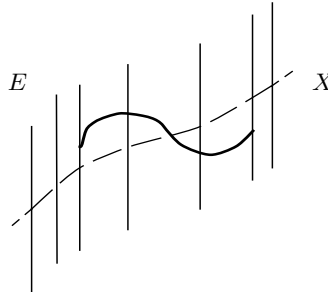
$$s(x) = v^1(x) e_1^U(x) + \dots + v^r(x) e_r^U(x), \quad v^j \in \mathcal{C}^\kappa(U). \quad \square$$

Bemerkung. Aufgrund des vorstehenden Satzes ist für Vektorraumbündel der Raum der Schnitte $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ ein Modul (so daß wir auch von dem Schnittmodul sprechen) und somit insbesondere niemals leer, da er das Nullelement als sogenannten „Nullschnitt“, also angesichts der einführenden Bemerkungen den „Traum aller Schnitter“ enthalten muß.

Man kann für den Nullschnitt noch etwas mehr aussagen.

Folgerung 27.20 Die durch den Nullschnitt 0 vermöge $0(x) := 0_x \in E_x$ definierte Abbildung $0 : X \rightarrow E$ ist eine abgeschlossene Einbettung von X in E .

Bemerkung. Man illustriert daher Vektorraumbündel (und Schnitte in ihnen) oft in der Form



Figur 27.15

Definition. Eine Basis $e_1^U, \dots, e_r^U \in \Gamma(U, \mathcal{C}^k(E))$ wie im Beweis des obigen Satzes heißt eine *lokale Basis* des Vektorraumbündels E (im Englischen ein *frame* oder ein *répère* im Französischen).

Bemerkung. Die Transformationsformel (*) für Schnitte in einem Vektorraumbündel ist nur eine andere Manifestation für den durch die gleich aussehende Formel

$$(\times) \quad {}^t(v_\beta^1, \dots, v_\beta^r) = A_{\beta\alpha}(x) \cdot {}^t(v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r)$$

beschriebenen *Koordinatenwechsel* für die Faserkoordinaten $v_\alpha = (v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r)$ auf $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, der sich also *direkt*, oder, wie man auch sagt, *kovariant* mit der Matrix $A_{\beta\alpha}$ vollzieht. Dies ist genauer wie folgt zu verstehen: Besitzt ein Vektor $v \in E_x$ die Koordinaten $v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r$ bzgl. der Basis $e_1^\alpha(x), \dots, e_r^\alpha(x)$ von E_x , so hat er die durch (\times) gegebenen Koordinaten $v_\beta^1, \dots, v_\beta^r$ bzgl. der Basis $e_1^\beta(x), \dots, e_r^\beta(x)$.

Durch Einsetzen der Koordinaten $(\delta_{j1}, \dots, \delta_{jr})$ für e_j^α in der Basis $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ gewinnt man aus (\times) die *Basiswechsel-Formel*

$$(\times\times) \quad e_j^\alpha = \sum_{k=1}^r A_{\beta\alpha}^{kj} e_k^\beta,$$

wobei selbstverständlich mit $A_{\beta\alpha}^{kj}$ der Eintrag in der k -ten Zeile und j -ten Spalte von der Matrix $A_{\beta\alpha}$ gemeint ist. Man bezeichnet nun in der Linearen Algebra als *Basiswechsel-Matrix* von einer ersten zu einer zweiten Basis die quadratische Matrix, in deren *Spalten* die Koordinaten der Basiselemente des zweiten Systems in Bezug auf das erste System stehen. Wir müssen also zur Bestimmung dieser Basiswechsel-Matrix in unserem Fall die Rolle von α und β vertauschen. Beachtet man außerdem noch, daß $A_{\beta\alpha}^{-1} = A_{\alpha\beta}$, so lautet die Formel ($\times\times$) auch

$$e_k^\beta = \sum_{j=1}^r (A_{\beta\alpha}^{-1})^{jk} e_j^\alpha.$$

Mit anderen Worten: Die Basiswechsel-Matrix (von Koordinaten auf U_α zu Koordinaten auf U_β) wird durch die *inverse* Matrix $A_{\beta\alpha}^{-1}$ gegeben.

Nach den bisherigen Erläuterungen kennt man ein Bündel in Bezug auf eine vorgegebene Trivialisierung, wenn man die Transformationsregeln (*) seiner Schnitte kennt. Genauer kann man sagen (siehe hierzu auch Satz 26.15):

Satz 27.21 *Es sei X eine Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung, $\mathcal{F}(U_\alpha)$, $U_\alpha \in \mathfrak{U}$, ein System von freien $\mathcal{C}^\kappa(U_\alpha)$ -Moduln vom Rang r mit ausgezeichneten Basen e_j^α und dem Transformationsverhalten $(\times \times)$. Dann gibt es genau ein Vektorraumbündel E vom Rang r mit den vorgeschriebenen Schnitten auf den Mengen U_α :*

$$\Gamma(U_\alpha, E) \cong \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Im Falle des *Tangentialbündels* einer Mannigfaltigkeit X der Dimension n ist

$$A_{\beta\alpha}(x) = \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \circ \psi_\alpha(x) \right), \quad x_\beta = x_\beta(x_\alpha) = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$$

mit lokalen Koordinaten $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ auf V_α . Um Schnitte in dem Tangentialbündel *analytisch* zu interpretieren, ordnen wir einem solchen über einer offenen Menge U eine *Derivation* zu.

Definition. Eine *Derivation* auf $\mathcal{C}^\kappa(U)$ ist eine Abbildung von $\mathcal{C}^\kappa(U)$ in sich, die \mathbb{R} -linear ist und der *LEIBNIZ-Regel* genügt:

$$\vartheta(fg) = f(\vartheta g) + g(\vartheta f), \quad f, g \in \mathcal{C}^\kappa(U).$$

Es ist offensichtlich, daß der Raum der Derivationen $\text{Der}(U)$ für eine offene Menge $U \subset X$ einen $\mathcal{C}^\kappa(U)$ -Modul bildet. Ebenso einleuchtend ist (siehe auch die erläuternden Bemerkungen weiter unten), daß für eine Karte $(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ der Modul $\text{Der}(U_\alpha)$ der Derivationen auf U_α zu dem Modul der Derivationen $\text{Der}(V_\alpha)$ auf V_α isomorph ist. - Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den \mathcal{C}^∞ -Fall.

Satz 27.22 *Der Modul $\text{Der}(V_\alpha)$ über dem Ring $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$ ist frei vom Rang n und besitzt als Basis die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}.$$

Jede *Derivation* $\vartheta \in \text{Der}(V_\alpha)$ schreibt sich daher eindeutig in der Form

$$\vartheta = v_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + v_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n},$$

wobei $v_\alpha^j = \vartheta(x_\alpha^j) \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$.

Den *Beweis* verschieben wir auf das Ende dieses Anhangs. □

Dieses Ergebnis überträgt sich unmittelbar auf den Modul $\text{Der}(U_\alpha)$. Die oben schon angesprochene Isomorphie $\text{Der}(V_\alpha) \cong \text{Der}(U_\alpha)$ erhält man offensichtlich dadurch, daß man für jede *Derivation* $\vartheta \in \text{Der}(V_\alpha)$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ definiert:

$$\vartheta(f) := (\vartheta(f \circ \varphi_\alpha)) \circ \psi_\alpha.$$

Insbesondere ist dann für $\vartheta := \partial/\partial x_\alpha^j$ und $f := \psi_\alpha^k \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$:

$$\frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} (\psi_\alpha^k \circ \varphi_\alpha) \right) \circ \psi_\alpha = \left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j} \right) \circ \psi_\alpha = \delta_{kj}.$$

In diesem Sinne schreiben wir jede *Derivation* $\vartheta \in \text{Der}(U_\alpha)$ ab jetzt in der Form

$$\vartheta = v_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + v_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$$

mit den Funktionen $v_\alpha^j := \vartheta(\psi_\alpha^j) \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$.

Bemerkung. Wir identifizieren also die von den Koordinaten $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ bestimmten kanonischen Basiselemente e_j^α des Tangentialbündels mit den Elementen $\partial/\partial x_\alpha^j$, die wir auch des öfteren mit dem Symbol $\partial_{x_\alpha^j}$ bezeichnen (oder, noch kürzer, mit ∂_j , wenn wir keine Veranlassung sehen, die Karte U_α gesondert hervorzuheben).

Um sicherzustellen, daß diese lokale Identifikation auch *global* sinnvoll ist, müssen wir die Transformationsformel für Derivationen berechnen. Wir leiten dazu die Basiswechsel-Formel ab.

Satz 27.23 Die Basiswechsel-Formel für Derivationen lautet

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta^k},$$

oder in verkürzter, aber besonders einprägsamer Gestalt :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}.$$

Bemerkung. Die Formel erinnert nicht nur an die Kettenregel, sondern ist schlichtweg eine andere Interpretation derselben, wie wir anschließend für den noch nicht so erfahrenen Leser herleiten werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß auf der rechten Seite die Koeffizienten Funktionen in den x_α zu sein scheinen, obwohl wir es dort ja mit Derivationen zu tun haben, die auf Funktionen in den x_β wirken. Dies ist tatsächlich auch nicht der Fall; der Eindruck entspringt nur der saloppen Schreibweise. Trotzdem ist festzuhalten, daß die Koeffizienten der Funktionalmatrizen der Koordinatentransformationen auf der Mannigfaltigkeit „verkehrtherum“ eingehen. Man drückt dies auch so aus, daß sich der Basiswechsel im Tangentialbündel *kontravariant* vollzieht.

Beweis (von Satz 23). Die in Rede stehende Formel ist zu verstehen als eine Identität für die Wirkung einer Derivation auf eine Funktion $f \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$. Nach den Vorbemerkungen lautet sie exakt

$$\frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha)}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial(f \circ \varphi_\beta)}{\partial x_\beta^k} \circ \psi_\beta \right).$$

Multiplizieren wir hier von rechts mit $\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}$, setzen $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha$ und $f_\beta := f \circ \varphi_\beta$ und beachten $\varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$, $f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$, $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$, so wird die vorherige Formel zur Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} (f_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x_\beta^k} \circ \varphi_{\beta\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j}.$$

Durch Umkehrung der Argumentationskette ergibt sich die Behauptung. \square

Das soeben abgeleitete Transformationsverhalten für Derivationen ist identisch mit der *Basiswechsel-Formel* ($\times\times$) im Falle des Tangentialbündels. - Wir erhalten somit als

Korollar 27.24 Der Schnittmodul $\Gamma(U, T_X)$ läßt sich in kanonischer Weise mit dem Modul der Derivationen auf $C^\infty(U)$ identifizieren.

Bemerkung. Selbstverständlich fassen wir Schnitte im Tangentialbündel auch als *Vektorfelder* auf der Mannigfaltigkeit X auf. Ihre Interpretation als *Derivationen* ist dann auf die folgende Weise zu verstehen: Ist $\gamma : I \rightarrow X$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, eine Kurve in X mit Tangentialvektor v an der Stelle $x = \gamma(0)$ und f differenzierbar in einer Umgebung von x , so ist der Wert $(f \circ \gamma)'(0)$ nach der Kettenregel nur von v und dem Differential $(Df)_x$ abhängig. Wir schreiben ihn in der Form

$$\langle v, (Df)_x \rangle.$$

Ist nun v ein Vektorfeld auf U , so variiert $v(x)$ differenzierbar mit $x \in U$, und für eine differenzierbare Funktion f auf U ist

$$x \longmapsto \langle v(x), (Df)_x \rangle$$

wieder eine C^∞ -Funktion. In Abhängigkeit von f stellt diese Zuordnung tatsächlich eine Derivation dar. Daß dieser Prozeß genau unser oben geschildertes Verfahren in lokalen Karten darstellt, sieht man an einer kleinen Rechnung (erneut unter Verwendung der Kettenregel): Schreibt man $v(x) = (v^1(x), \dots, v^n(x))$, so liefert die Anwendung dieser Definition auf die Koordinatenfunktion x^j und eine Kurve γ mit $\gamma'(0) = (v^1(x), \dots, v^n(x))$, daß

$$\langle v(x), (Dx^j)_x \rangle = (x^j \circ \gamma)'(0) = v^j(x).$$

Definition. Man nennt aus naheliegenden Gründen den Wert von $\langle v(x), (Df)_x \rangle$ auch die *Richtungs-Ableitung* von f an der Stelle x in Richtung $v(x)$; in Zeichen

$$\partial_v f(x) := \langle v(x), (Df)_x \rangle.$$

Man findet in der Literatur für ∂_v auch den Namen „LIE-Ableitung“ und die sich daraus ergebende Bezeichnung L_v .

Bemerkung. In der differentialgeometrischen Standardliteratur werden Vektorfelder oft mit dem Großbuchstaben X bezeichnet (was nur deshalb möglich ist, weil Mannigfaltigkeiten meist das Symbol M erhalten). Entsprechend heißen die lokalen Vektorfelder dann X_j^α , und die Lie-Ableitung in Richtung X wird mit L_X notiert. Da wir konsequent bei X als Zeichen für eine Mannigfaltigkeit bleiben wollen, können wir diesem Brauch hier nicht folgen.

Wir wollen im zweiten Teil dieses Anhangs auf algebraische Weise aus gegebenen Vektorbündeln neue konstruieren. Wir nutzen dazu Satz 26.15 im vorangehenden Kapitel und Satz 21 oben aus.

Es seien E_1 und E_2 Vektorraumbündel über X ; wir setzen zunächst *mengentheoretisch*

$$\tilde{E} := \bigsqcup_{x \in X} (E_{1x} \oplus E_{2x}) \xrightarrow{\pi} X.$$

Wir können für (differenzierbare) Schnitte $s_j \in \Gamma(U, E_j)$ einen (mengentheoretischen) Schnitt $s_1 \oplus s_2$ definieren durch

$$(s_1 \oplus s_2)(x) = s_1(x) \oplus s_2(x).$$

Tatsächlich ist $\pi_U \circ (s_1 \oplus s_2) = \text{id}_U$.

Satz 27.25 *Es gibt genau eine Vektorraumbündelstruktur auf (\tilde{E}, π, X) , für die alle wie oben gebildeten Abbildungen $(s_1 \oplus s_2)$ differenzierbare Schnitte sind. Als Mannigfaltigkeit ist \tilde{E} das Faserprodukt*

$$\tilde{E} = E_1 \times_X E_2 \subset E_1 \times E_2.$$

Werden E_1 und E_2 bzgl. \mathfrak{A} gegeben durch die 1-Cozyklen $A_{\beta\alpha}^{(1)}$ und $A_{\beta\alpha}^{(2)}$, so wird \tilde{E} beschrieben durch

$$A_{\beta\alpha}^{(1)} \oplus A_{\beta\alpha}^{(2)} := \begin{pmatrix} A_{\beta\alpha}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Leichte Übungsaufgabe. □

Definition. Man schreibt $\tilde{E} = E_1 \oplus E_2$ und nennt $E_1 \oplus E_2$ die *direkte Summe* oder die *WHITNEY-Summe* der Bündel E_1 und E_2 .

Wir wollen eine etwas kompliziertere Konstruktion in größerer Genauigkeit durchführen. Es seien wieder zwei Vektorraumbündel E_1 und E_2 gegeben mit beschreibenden 1-Cozyklen $A_{\beta\alpha} := A_{\beta\alpha}^{(1)}$ und $B_{\beta\alpha} := A_{\beta\alpha}^{(2)}$. Wir wollen eine Vektorbündelstruktur auf

$$\text{Hom}(E_1, E_2) = \bigsqcup_{x \in X} \text{Hom}(E_{1x}, E_{2x}) \longrightarrow X$$

so einführen, daß $\varphi \in \Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2))$ genau dann gilt, wenn für alle $s \in \Gamma(U, E_1)$ durch

$$(\varphi(s))(x) := \varphi_x(s(x))$$

ein differenzierbarer Schnitt in E_2 definiert wird.

Es sei $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ eine trivialisierende Überdeckung für E_1 und E_2 mit lokalen Basen $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ bzw. $f_1^\alpha, \dots, f_s^\alpha$. Offensichtlich wird das gesuchte Bündel über U_α durch $U_\alpha \times \mathbb{R}^{s \times r}$ trivialisiert, da $\text{Hom}(E_{1x}, E_{2x})$ die Dimension rs besitzt und man eine trivialisierende Basis angeben kann:

$$\lambda_{\ell j}^\alpha : \lambda_{\ell j}^\alpha(e_k^\alpha) = \delta_{jk} f_\ell^\alpha, \quad k = 1, \dots, r.$$

Wir brauchen jetzt nur noch die *Transformationsformel* auszurechnen. Dazu bezeichnen wir die Koordinaten auf $U_\alpha \times \mathbb{R}^{s \times r}$ mit $u_\alpha^{\ell j}$ und fordern, daß

$$\sum_{\ell, j} u_\alpha^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\alpha = \sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Ferner haben wir die Basiswechsel-Formel zur Verfügung:

$$e_k^\alpha = \sum_j A_{\beta\alpha}^{jk} e_j^\beta,$$

und entsprechend für die lokalen Basen von E_2 . Hieraus folgt bei festem k :

$$\begin{aligned} \sum_\ell u_\beta^{\ell k} f_\ell^\beta &= \sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \delta_{jk} f_\ell^\beta = \left(\sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\beta \right) (e_k^\beta) = \left(\sum_{m, j} u_\alpha^{mj} \lambda_{mj}^\alpha \right) \left(\sum_n A_{\alpha\beta}^{nk} e_n^\alpha \right) \\ &= \sum_{j, m, n} u_\alpha^{mj} A_{\alpha\beta}^{nk} \lambda_{mj}^\alpha (e_n^\alpha) = \sum_{j, m} u_\alpha^{mj} A_{\alpha\beta}^{jk} f_m^\alpha = \sum_\ell \left(\sum_{j, m} A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m} u_\alpha^{mj} \right) f_\ell^\beta, \end{aligned}$$

also

$$(+)$$

$$u_\beta^{\ell k} = \sum_{j, m} A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m} u_\alpha^{mj}.$$

Mit anderen Worten: Schreibt man die $u_\alpha^{\ell j}$ in eine $s \times r$ -Matrix u_α , so schreibt sich der Koordinatenwechsel in der bekannten Weise als

$$u_\beta = B_{\beta\alpha} \cdot u_\alpha \cdot A_{\alpha\beta}.$$

Damit transformieren sich Schnitte in dem Homomorphismenbündel, also Elemente in $\Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2))$, wie U -Homomorphismen von E_1 nach E_2 ; mit den Bezeichnungen im Anhang zu Kapitel 26 heißt dies also:

Folgerung 27.26 Für jede offene Menge $U \subset X$ existieren kanonische Isomorphismen von \mathcal{C}^∞ -Moduln

$$\Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2)) \cong \text{Hom}_U(E_1, E_2).$$

Wir wollen die Transformationsformel für das Homomorphismenbündel noch auf eine andere Weise interpretieren, indem wir sie in der Form

$$u_\beta^{\ell k} = \sum_{m, j} c_{mj}^{\ell k} u_\alpha^{mj}, \quad c_{mj}^{\ell k} := A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m},$$

schreiben, wobei ℓk und $m j$ jeweils als *ein* Index anzusehen ist, der die Menge $\{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, r\}$ durchläuft.

Man definiert nun das **KRONECKER-Produkt** $C := B \otimes A$ zweier quadratischer Matrizen $A = (a_{j,k})$ der Größe $r \times r$ bzw. $B = (b_{m,\ell})$ der Größe $s \times s$ durch

$$C = (c_{\ell k, m j}) , \quad \text{wobei} \quad c_{\ell k, m j} = b_{\ell, m} \cdot a_{k, j} , \quad 1 \leq j, k \leq r, 1 \leq m, \ell \leq s .$$

In unserem Fall ist aber

$$c_{m j}^{\ell k} = B_{\beta\alpha}^{\ell m} ({}^t A_{\beta\alpha}^{-1})^{k j} ,$$

und damit haben wir die *Übergangsmatrizen* für das Homomorphismenbündel $\text{Hom}(E_1, E_2)$ gefunden.

Lemma 27.27 *Werden die Vektorbündel E_1, E_2 auf der Mannigfaltigkeit X durch die 1-Cozyklen $A_{\beta\alpha}$ bzw. $B_{\beta\alpha}$ beschrieben, so wird das Bündel $\text{Hom}(E_1, E_2)$ gegeben durch die Kronecker-Produkte*

$$B_{\beta\alpha} \otimes {}^t A_{\beta\alpha}^{-1} .$$

Eine wichtige Sonderrolle spielt der Fall, daß $E_1 = E$ ein beliebiges und E_2 das triviale Geradenbündel $X \times \mathbb{R}$ ist. Das Homomorphismenbündel $\text{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$ besitzt als Fasern die Dualräume E_x^* der Vektorräume E_x . Man schreibt dann auch

$$E^* := \text{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$$

und nennt E^* das *duale Bündel* zu E . Die Schnitte $\sigma \in \Gamma(U, E^*)$ sind differenzierbar mit $x \in U$ variierende *Linearformen* auf den Fasern E_x von E . Sie sind insbesondere so beschaffen, daß für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, E)$ die Funktion

$$x \longmapsto \sigma(s(x)) \text{ differenzierbar von der Klasse } \mathcal{C}^k \text{ ist .}$$

Wird E definiert durch den 1-Cozyklus $(A_{\beta\alpha})$, so wird das duale Bündel E^* beschrieben durch die *kontragredienten* Matrizen $({}^t A_{\beta\alpha}^{-1})$. Man beachte, daß im Allgemeinen die Matrizen $(A_{\beta\alpha}^{-1})$ keinen 1-Cozyklus bilden! Besitzt E eine lokale Basis e_1, \dots, e_r , so besitzt E^* die duale Basis $e^1 := e_1^*, \dots, e^r := e_r^*$, die durch die Eigenschaft $e^k(e_j(x)) = \delta_{jk}$ definiert ist.

Warnung. Die Bezeichnung e_1^*, \dots, e_r^* für die duale Basis zu der Basis e_1, \dots, e_r ist weitverbreitet, aber außerordentlich mißverständlich, da sie suggeriert, daß der Vektor e_j^* ausschließlich von dem Vektor e_j abhängt. Dies ist jedoch nicht der Fall: Wählt man z. B. in \mathbb{R}^2 die Standardbasis $e_1 = {}^t(1, 0)$, $e_2 = {}^t(0, 1)$, so ist $e_1^* = (1, 0)$, $e_2^* = (0, 1)$; wählt man dagegen die Basis $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, so rechnet man unmittelbar nach, daß $f_1^* = e_1^* - e_2^*$, $f_2^* = e_2^*$. D. h.: Obwohl $e_1 = f_1$ ist, ist $e_1^* \neq f_1^*$. Man müßte daher statt des Symbols e_j^* so etwas wie $(e_1, \dots, e_r)_j^*$ schreiben, was zwar korrekt, aber viel zu umständlich wäre. Wir folgen daher dem allgemeinen (Miß-) Brauch, weisen aber ausdrücklich darauf hin, daß es absolut keinen Sinn macht, von *dem zu einem Vektor dualen Vektor* zu sprechen. Insbesondere besitzt ein Schnitt s in E im Allgemeinen keinen wohldefinierten *dualen* Schnitt s^* in E^* .

Um dem Leser den Überblick zu erleichtern, wird in der folgenden Tabelle das Transformationsverhalten in dem Bündel E und seinem dualen Bündel E^* aufgelistet. Hierbei ist wie immer $\{A_{\beta\alpha}\}$ ein definierender 1-Cozyklus für E .

	E	E^*
Koordinatenwechsel	$A_{\beta\alpha}$	${}^t A_{\beta\alpha}^{-1}$
Basiswechsel	$A_{\beta\alpha}^{-1}$	${}^t A_{\beta\alpha}$

Ist speziell $E = T_X$ das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit mit der lokalen Basis

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n},$$

so bezeichnet man die *duale Basis* in dem *Cotangentialbündel* T_X^* mit $dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n$. Schnitte in T_X^* sind also sogenannte *PFaffsche Formen* $\sum f_j dx_\alpha^j$, die sich wegen der generellen Eigenschaften des dualen Bündels mit der kontragredienten Matrix transformieren:

$$\sum f_j^\beta dx_\beta^j = \sum f_j^\alpha dx_\alpha^j \iff {}^t f^\beta = {}^t A_{\beta\alpha}^{-1} {}^t f^\alpha$$

mit der Matrix

$$A_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \end{pmatrix}.$$

Da auch der Basiswechsel in T_X^* kontragredient zu dem in T_X verläuft, gewinnen wir sofort aus der Formel in Satz 23 die Basiswechsel-Formel:

$$dx_\alpha^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^k} dx_\beta^k,$$

oder präziser:

$$dx_\alpha^j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^k} \circ \psi_\beta(x) \right) dx_\beta^k.$$

Bemerkung. Man sieht, daß hier die (vermeintlichen) Schwierigkeiten beim Tangentialbündel nicht auftreten. Die Koeffizienten auf der rechten Seite sind, wie man es vermuten würde, Funktionen in den Variablen x_β . Mit anderen Worten: Der Basiswechsel im Cotangentialbündel geschieht im Gegensatz zu den Verhältnissen im Tangentialbündel mit der Funktionalmatrix des Koordinatenwechsels, ist also, wie man sagt, *kovariant*.

Die Bezeichnung dx_α^j und die Basiswechsel-Formel für Pfaffsche Formen haben nicht nur eine formale, sondern tatsächlich eine *konzeptionelle* Bedeutung. Es sei $f \in C^\infty(U)$ gegeben. Dann können wir f einen Schnitt df über U im Cotangentialbündel zuordnen durch die Vorschrift:

$$(df)(v(x)) = \langle v(x), (Df)_x \rangle,$$

d. h. wir drehen jetzt den Spieß herum und interpretieren die Wirkung eines Vektorfelds auf die Funktion f als Wirkung von f auf das Vektorfeld. In einer Karte $U = U_\alpha$ bedeutet dies:

$$df \left(\sum_{j=1}^n v_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) = \sum_{j=1}^n v_\alpha^j \frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha^j}.$$

Speziell ist dadurch dx_α^j definiert auf U_α , die $dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n$ bilden tatsächlich eine duale Basis zu $\partial/\partial x_\alpha^1, \dots, \partial/\partial x_\alpha^n$, und lokal gilt

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha^j} dx_\alpha^j.$$

Insbesondere ergibt sich die Basiswechsel-Formel mit $f(x_\alpha) = x_\beta^k(x_\alpha)$.

Bemerkungen. 1. In diesem Sinne können wir das *Differential* Df und die *Pfaffsche Form* df identifizieren, auch wenn sie a priori verschiedene konzeptionelle Bedeutung haben. Diese Identifikation wird durch die Identifikation des Tangentialraums von \mathbb{R} mit \mathbb{R} selbst ermöglicht.

2. Um Konsistenz der Transformations-Formeln mit der üblichen *EINSTEINSCHEN Summationskonvention* zu erzielen, braucht man nur den Index j in dx^j als *oberen*, den Index k in $\partial/\partial x^k$ aber als *unteren*

Index aufzufassen (und entsprechend in $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$). Wir werden jedoch weitgehend Summen ausschreiben und die Einstein-Konvention nur als „guiding principle“ für die Anordnung der Indizes heranziehen.

Wir beschließen dieses Kapitel mit einem eher harmlos wirkenden Resultat, dessen Bedeutung aber nicht unterschätzt werden darf. Es ist nur eines unter vielen anderen Ergebnissen ähnlichen Inhalts, deren Beweis stets demselben Muster folgt.

Satz 27.28 *Es besteht ein kanonischer Vektorraumbündel-Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E^{**}$.*

Beweis. Die Fasern des Bündels E^{**} sind nach Konstruktion die *Bidualen* der Fasern E_x von E : $(E^{**})_x = (E_x)^{**}$. Nun gibt es eine *kanonische*, also nicht von Koordinaten abhängige lineare Abbildung $E_x \rightarrow (E_x)^{**}$, die jedem $v \in E_x$ die lineare Abbildung $\lambda_v : (E_x)^* \rightarrow \mathbb{K}$ zuordnet, die durch $\lambda_v(\alpha) := \alpha(v)$, $\alpha \in (E_x)^*$, definiert ist. Diese Abbildung ist *injektiv* (und, da die beiden beteiligten Vektorräume dieselbe Dimension r besitzen, sogar ein *Isomorphismus*): Ist nämlich $\lambda_v(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in (E_x)^*$, so ist nach Definition

$$\alpha(v) = 0 \text{ für alle } \alpha \in V^* .$$

Dies impliziert $v = 0$ und damit $\lambda_v = 0$. - Da der Übergang von E nach E^* bzgl. einer trivialisierenden Überdeckung den Transformationsmatrizen von E die kontragredienten Matrizen zuordnet und dieser Prozeß nach zweimaliger Anwendung zur Ausgangsmatrix zurückführt, wird die eben *halmweise* definierte kanonische Abbildung $E \rightarrow E^{**}$ lokal durch die Identität repräsentiert und ist somit insbesondere differenzierbar, also ein X -Isomorphismus. \square

Bemerkung. Lokal ist selbstverständlich auch $E|_U \cong E^*|_U$. Dieser Isomorphismus ist jedoch im Allgemeinen *nicht* kanonisch (siehe die Warnung auf p. 588 Mitte) und kann daher auch nicht zu einem Isomorphismus $E \rightarrow E^*$ fortgesetzt werden. Insofern verstellt einem das ausschließliche Studieren des Basisraums \mathbb{R}^n , auf dem man globale Koordinaten hat und deshalb auch einen solchen Isomorphismus für das Tangentialbündel und sein Dual, das Cotangentialbündel, herstellen kann, den Blick auf die wahren Zusammenhänge. Allerdings gibt es Mannigfaltigkeiten mit *zusätzlicher* Struktur, wie z. B. Riemannsche oder allgemeiner Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, auf denen man aus ähnlichen Gründen das Tangential- und Cotangentialbündel identifizieren kann (siehe mein Manuskript *Differentialgeometrie II*).

Wir wollen zum Schluß noch den Beweis von Satz 22 nachtragen. Dazu benötigen wir das sogenannte *Lemma* von HADAMARD. Um dieses zu verstehen und zu formulieren, erinnern wir zunächst an die Definition der (totalen) *Differenzierbarkeit*.

Definition. Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, heißt in $x_0 \in V$ *differenzierbar*, wenn es in x_0 stetige Funktionen $\Delta_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in V$ gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x^j - x_0^j) .$$

Bemerkung. Für $n \geq 2$ sind die Funktionen Δ_j ziemlich willkürlich wählbar. Allerdings sind ihre *Funktionswerte* an der Stelle x_0 , wenn f in x_0 differenzierbar ist, *eindeutig* bestimmt, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \Delta_j(x_0) .$$

Das *Lemma* von HADAMARD besagt, daß die Funktionen Δ_j im Falle einer C^∞ -Funktion f (lokal) ebenfalls als unendlich oft differenzierbare Funktionen gewählt werden können. (Im analytischen Fall folgt dies sehr einfach aus der Potenzreihenentwicklung).

Lemma 27.29 (Hadamard) Für $f \in C^\infty(V)$ und $x_0 \in V$ gibt es eine Umgebung $V_0 \ni x_0$, $V_0 \subset V$, und eine Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x^j - x_0^j)$$

mit beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\Delta_j : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Man wähle für V_0 eine in V enthaltene Kugel mit Mittelpunkt x_0 , und zu jedem Punkt $x \in V_0$ die Verbindungsstrecke

$$\gamma(t) := x_0 + t(x - x_0) \in V_0, \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g := f \circ \gamma$ beliebig oft differenzierbar auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 g'(t) dt = \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x_j - x_0^j)$$

mit den $C^\infty(V_0)$ -Funktionen

$$\Delta_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(t)) dt. \quad \square$$

Der *Beweis* von Satz 22 ist damit nicht mehr allzu schwer. Wir führen ihn auf zwei weitere Lemmata zurück. Zunächst ist klar, daß auf $V \subset \mathbb{R}^n$ die Derivationen $\partial_j = \partial / \partial x^j$ unabhängig sind, da aus

$$\vartheta = \sum_{j=1}^n v^j(x) \partial_j = 0$$

durch Anwendung auf die Koordinatenfunktion x^k sofort $v^k = 0$ folgt. Für eine beliebige Derivation ϑ setzt man

$$\tilde{\vartheta} := \vartheta - \sum_{j=1}^n \vartheta(x^j) \partial_j.$$

Dann ist $\tilde{\vartheta}(x^j) = 0$ für alle j , und es genügt, das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma 27.30 Ist für eine Derivation ϑ auf $V \subset \mathbb{R}^n$ der Wert auf allen Koordinatenfunktionen x^j gleich Null, so verschwindet ϑ .

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jede Funktion $f \in C^\infty(V)$ von ϑ annulliert wird. M. a. W. : Wir müssen beweisen, daß

$$(\vartheta(f))(x_0) = 0$$

für beliebiges $x_0 \in V$, wobei wir noch $f(x_0) = 0$ voraussetzen dürfen. Nun ist für jede beliebige Derivation nach der Leibniz-Regel

$$\vartheta(1) = \vartheta(1 \cdot 1) = 2\vartheta(1) = 0$$

und damit $\vartheta(c) = 0$ für alle konstanten Funktionen c . Somit ist nach Voraussetzung $\vartheta(x^j - x_0^j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, und damit für jede Funktion \tilde{f} , die sich wie im Hadamardschen Lemma auf ganz V bei fest gewähltem Punkt x_0 darstellen läßt,

$$\vartheta(\tilde{f})(x) = \sum_{j=1}^n \vartheta(\tilde{\Delta}_j(x)) (x^j - x_0^j)$$

und damit $\vartheta(\tilde{f})(x_0) = 0$.

Nun gilt die Darstellung von f bzgl. des Hadamardschen Lemmas aber nur in einer Umgebung $W = W(x_0)$. Durch Multiplikation mit einer \mathcal{C}^∞ -Funktion $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer Umgebung W_0 von x_0 identisch 1 ist, außerhalb W aber identisch verschwindet, erhält man eine \mathcal{C}^∞ -Funktion \tilde{f} auf ganz V , auf der nach den bisherigen Überlegungen $\vartheta\tilde{f}$ an der Stelle x_0 verschwindet, und die mit f zumindest in der Umgebung W_0 von x_0 übereinstimmt.

Der Beweis kann dann zu einem guten Ende geführt werden, wenn wir zeigen können, daß Derivationen ϑ lokale Operatoren sind, d. h. folgendes gilt.

Lemma 27.31 *Ist ϑ eine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty(V)$ und f identisch Null auf einer offenen Teilmenge $W \subset V$, so ist $(\vartheta f)(x) = 0$ für $x \in W$.*

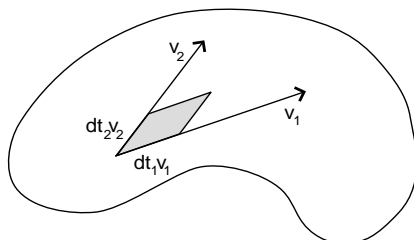
Beweis. Wähle zu $x_0 \in W$ wie oben eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer Umgebung W_0 von x_0 identisch 1 ist und außerhalb W identisch verschwindet. Wegen der Leibniz-Regel ist dann

$$\eta\vartheta(f) + f\vartheta(\eta) = \vartheta(\eta f) = \vartheta(0) = 0$$

und folglich $(\vartheta(f))(x_0) = 0$. □

28 Der Kalkül der Differentialformen

Das Konzept der *Differentialformen* stellt eine Verallgemeinerung der 1-Formen dar; bei Übergang zu Mannigfaltigkeiten der Dimension k muß man alternierende k -Formen betrachten. Zum Beispiel bestimmen zwei infinitesimale Tangentialvektoren ein infinitesimales Flächenstück, und eine alternierende 2-Form ordnet diesem einen *orientierten* und *gewichteten* infinitesimalen Flächeninhalt zu, den man durch Integration „aufaddieren“ kann.



Figur 28.1

Definition und Bemerkung. Eine *alternierende Differentialform* der *Ordnung* oder vom *Grad* k , kurz eine k -Form, auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Zuordnung

$$\omega : x \mapsto \omega(x) \in \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n, x}^*$$

die stetig differenzierbar mit x variiert. D. h. sind (lokal) k stetig differenzierbare Vektorfelder $v_1(x), \dots, v_k(x)$ gegeben, so ist die Funktion

$$x \mapsto \omega(x)(v_1(x), \dots, v_k(x))$$

stets stetig differenzierbar. Statt stetig differenzierbarer Differentialformen benötigen wir gelegentlich auch Differentialformen der Differenzierbarkeitsklasse \mathcal{C}^β , $\beta \geq 1$.

Eine kurze Einführung in die Theorie der alternierenden Multilinearformen auf endlich dimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen findet man im Anhang zu dem vorliegenden Kapitel.

Es ist sofort klar:

Lemma 28.1 *Jede Differentialform ω der Ordnung k auf U (von der Klasse \mathcal{C}^β) besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad f_{i_1 \dots i_k} \in \mathcal{C}^\beta(U).$$

Bemerkung. Bezeichnen wir wie in dem vorangehenden Kapitel mit dx_i das Differential der i -ten Koordinatenfunktion, so ist dieses (an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$) *dual* zu der Derivation $\partial/\partial x_i$, aufgefaßt als das Vektorfeld, das jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den i -ten Einheitsvektor e_i zuordnet. Das Differential dx_i operiert damit auf einem beliebigen Vektorfeld $v = v(x) = {}^t(v^1(x), \dots, v^n(x))$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, durch

$$(dx_i)(v(x)) = v^i(x), \quad x \in U.$$

Das Dachprodukt $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ ist dann die wohlbestimmte alternierende multilineare Abbildung, die den k stetig differenzierbaren Vektorfeldern

$$v_1(x) = \begin{pmatrix} v_1^1(x) \\ \vdots \\ v_1^n(x) \end{pmatrix}, \dots, v_k(x) = \begin{pmatrix} v_k^1(x) \\ \vdots \\ v_k^n(x) \end{pmatrix}$$

an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ den Wert der Determinante der $k \times k$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} v_1^{i_1}(x) & \cdots & v_k^{i_1}(x) \\ v_1^{i_2}(x) & \cdots & v_k^{i_2}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_k}(x) & \cdots & v_k^{i_k}(x) \end{pmatrix}$$

zuordnet.

Somit ist die Auswertung einer alternierenden Differentialform vom Grad k auf k Vektoren im \mathbb{R}^n nichts anderes als eine Linearkombination aller $k \times k$ -Unterdeterminanten der durch die Koordinaten der Vektoren gegebenen $n \times k$ -Matrix.

Wir bezeichnen im folgenden die Gesamtheit dieser Differentialformen vom Grad k auf $U \subset \mathbb{R}^n$ von der Differentierbarkeitsgüte β mit

$$\mathcal{C}^\beta(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*).$$

Diese Menge ist ein *freier* $\mathcal{C}^\beta(U)$ -Modul vom Rang $\binom{n}{k}$. Außerdem liefert das Dach-Produkt (siehe Anhang) eine kanonische Abbildung

$$\mathcal{C}^\beta(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*) \times \mathcal{C}^\beta(U, \bigwedge^\ell T_{\mathbb{R}^n}^*) \xrightarrow{\wedge} \mathcal{C}^\beta(U, \bigwedge^{k+\ell} T_{\mathbb{R}^n}^*).$$

Beispiel. Man kann das Dach-Produkt zweier Differentialformen rein formal mit den Rechenregeln $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ bestimmen. Z. B. ergibt sich für

$$\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 \quad \text{und} \quad \sigma = dx_2 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

sofort

$$\omega \wedge \sigma = (x_1 + x_2 + x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

da z. B.

$$dx_3 \wedge (dx_2 \wedge dx_3) = -dx_3 \wedge (dx_3 \wedge dx_2) = (dx_3 \wedge dx_3) \wedge dx_2 = 0$$

und

$$dx_3 \wedge (dx_1 \wedge dx_2) = (dx_3 \wedge dx_1) \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge (dx_3 \wedge dx_2) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Wir werden nun als nächstes das *totale Differential* von k -Formen bilden: Ist ω in kanonischer Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

vorgegeben, so setzt man (in nicht kanonischer Form)

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Damit wird eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d: \mathcal{C}^\beta(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*) \longrightarrow \mathcal{C}^{\beta-1}(U, \bigwedge^{k+1} T_{\mathbb{R}^n}^*)$$

definiert. Speziell ist das Differential eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d: \mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge^{k+1} T_{\mathbb{R}^n}^*).$$

Bemerkung. Eine konzeptionellere Einführung des Differentials findet man in meinem Manuskript *Differentialgeometrie II*.

Um das Differential einer k -Form zu berechnen, braucht sie nicht in Standard-Form vorzuliegen. Es gilt nämlich der folgende

Satz 28.2 i) $d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ii) $d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$, ω eine k -Form.

iii) Ist ω zweimal stetig differenzierbar, so gilt $d^2\omega := d(d\omega) = 0$.

Beweis. Wir benutzen die sogenannte *Multiindexschreibweise*: Für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ setzen wir $I := (i_1, \dots, i_k)$, $|I| = k$ (und nicht wie früher $|I| = \sum i_k$). Wir schreiben weiter

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{und} \quad \omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I, \quad \sigma = \sum_{|J|=\ell} g_J dx_J.$$

Die Aussage i) ist trivialerweise richtig. Die Aussage ii) erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d\left(\sum_{I,J} f_I g_J dx_I \wedge dx_J\right) = \sum_{I,J} d(f_I g_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \quad (\text{wegen i)}) \\ &= \sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \left(\sum_I df_I \wedge dx_I\right) \wedge \left(\sum_J g_J dx_J\right) + (-1)^k \left(\sum_I f_I dx_I\right) \wedge \left(\sum_J dg_J \wedge dx_J\right) \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

Dies ist natürlich eine Verallgemeinerung der *Produkt-Regel* falls $k = \ell = 0$.

iii) Man berechnet zunächst $d^2 f$ für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f . Mit

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

ist

$$d(df) = \sum_{\ell < j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\ell} \right) \right\} dx_\ell \wedge dx_j = 0.$$

Nun ist weiter $d(dx_I) = (d1) \wedge dx_I = 0$ und folglich im Allgemeinform

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d^2\left(\sum_I f_I dx_I\right) = d\left(\sum_I df_I \wedge dx_I\right) = \sum d(df_I \wedge dx_I) \\ &= \sum d^2 f_I \wedge dx_I \pm \sum df_I \wedge d^2 x_I = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel. Für Pfaffsche Formen $\omega = \sum f_j dx_j$ berechnet sich das Differential in kanonischer Form zu

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_j df_j \wedge dx_j = \sum_j \left(\sum_\ell \frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} dx_\ell \right) \wedge dx_j = \sum_{j,\ell} \frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_j = \sum_{j \neq \ell} \frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_j \\ &= \sum_{\ell < j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} - \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} \right) dx_\ell \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Beispiel und Definition. Jede $(n - 1)$ -Form läßt sich eindeutig schreiben als

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei wie üblich das Dach über einem Ausdruck bedeutet, daß dieser fortzulassen ist. Unter dieser Voraussetzung berechnet man unmittelbar

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Bekanntlich heißt der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes (f_1, \dots, f_n) .

Nach dem vorletzten Beispiel ist das Vektorfeld (f_1, \dots, f_n) in dem früher eingeführten Sinne *geschlossen*, also

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} = \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} \quad \text{für alle } \ell, j ,$$

genau dann, wenn für die zugeordnete 1-Form $\omega = \sum f_j dx_j$ das Differential $d\omega = 0$ ist. - Wir können also verallgemeinernd definieren:

Definition und Bemerkung. Eine stetig differenzierbare k -Form ω heißt *geschlossen*, wenn

$$d\omega = 0 .$$

Offensichtlich ist jede n -Form auf offenen Teilen $U \subset \mathbb{R}^n$ geschlossen.

Eine k -Form ω heißt *exakt* oder *total*, wenn es eine $(k-1)$ -Form η gibt mit $d\eta = \omega$. Ist die Form ω selbst stetig differenzierbar, so ist ω dann auch geschlossen wegen $d\omega = d^2\eta = 0$.

Die Umkehrung gilt zumindest lokal.

Satz 28.3 (Poincarésches Lemma) *Es sei U ein sternförmiges Gebiet in \mathbb{R}^n , und es sei eine geschlossene Form $\omega \in \mathcal{C}^\alpha(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*)$ vorgegeben mit $k \geq 1$, $\alpha \geq 1$. Dann existiert eine Form $\eta \in \mathcal{C}^{\alpha+1}(U, \bigwedge^{k-1} T_{\mathbb{R}^n}^*)$ mit $d\eta = \omega$.*

Der *Beweis* benötigt den „Rücktransport“ von k -Formen unter stetig differenzierbaren Abbildungen. Wir wollen daher an dieser Stelle diesen wichtigen Begriff einführen, der auch für die Definition des Integrals von k -Formen auf k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten von zentraler Bedeutung ist.

Definition. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \rightarrow U$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung. Wir bezeichnen die Variablen in U mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und in V mit $t = (t_1, \dots, t_m)$. Mit

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge^k T_{\mathbb{R}^n}^*)$$

ist dann

$$\Phi^* \omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (f_{i_1, \dots, i_k} \circ \Phi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

eine wohlbestimmte k -Form auf V , die manchmal auch mit $\omega \circ \Phi$ bezeichnet wird.

Bemerkung. Diese Definition hat einen konzeptionellen Hintergrund: Sind w_1, \dots, w_k Tangentialvektoren an der Stelle $t \in V$, so ist es naheliegend, die Form $\omega(\Phi(t))$ auf die Tangentialvektoren $v_1 := ((D\Phi)(t))w_1, \dots, v_k := ((D\Phi)(t))w_k$ anzuwenden. Dies ist exakt die Bedeutung von

$$((\Phi^* \omega)(t))(w_1, \dots, w_k) ,$$

wie man leicht nachprüft. (Siehe auch loc. cit.).

Beispiele. 1. Ist ω die 1-Form $\sum_{i=1}^n f_i dx_i$, so ist $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_m)$ und $dx_i = d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j$ und folglich

$$\Phi^*\omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{j=1}^m g_j dt_j$$

mit den Koeffizienten $g_j = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \Phi) \cdot (\partial \varphi_i / \partial t_j)$. - Also ist

$$(g_1, \dots, g_m) = ((f_1, \dots, f_n) \circ \Phi) \cdot (D\Phi) = ((f_1, \dots, f_n) \circ \Phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

oder, als Spaltenvektoren geschrieben:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} = {}^t(D\Phi) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \circ \Phi \\ \vdots \\ f_n \circ \Phi \end{pmatrix}.$$

Wenn Φ ein *Diffeomorphismus* ist, so schreibt sich diese Transformationsformel in der Form

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \circ \Phi = {}^t(D\Phi^{-1}) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Das Transformationsverhalten von 1-Formen ist somit *kontragredient* zu dem von Vektorfeldern. (Siehe auch den Anhang zu Kapitel 27).

2. Ist ω eine m -Form, so ist offensichtlich

$$d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_m} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})}{\partial(t_1, \dots, t_m)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m,$$

so daß

$$\Phi^*\omega = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})}{\partial(t_1, \dots, t_m)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m.$$

3. Ist speziell $k = m = n$, also $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, so ist

$$\Phi^*\omega = (f \circ \Phi) \cdot (\det(D\Phi)) \cdot dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m.$$

Diese Formel steht im engen Kontext mit der *Transformationsformel* für mehrfache Integrale und ist die Grundlage für die Definition des Integrals auf Mannigfaltigkeiten.

Weitere wichtige Eigenschaften für den Rücktransport von Differentialformen (auch „Liften“ genannt) fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 28.4 *Es sei $\Phi : V \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen :*

- i) $\Phi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\Phi^*\omega_1 + \mu\Phi^*\omega_2$.
 ii) $\Phi^*(\omega \wedge \sigma) = (\Phi^*\omega) \wedge (\Phi^*\sigma)$.
 iii) Ist ω stetig differenzierbar, so ist $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$.
 iv) Ist $\Psi : W \rightarrow V$ eine weitere differenzierbare Abbildung, so ist $(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^*(\Phi^*\omega)$.

Beweis. Die Aussagen i) und ii) folgen direkt aus der Definition.

Zu iii): Sei zunächst $\omega = f$ eine 0-Form, also eine Funktion. Dann ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} d(\Phi^*f) &= d(f \circ \Phi) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi \right) d\varphi_i \\ &= \Phi^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \Phi^*(df). \end{aligned}$$

Ist nun allgemein $\omega = \sum_I f_I dx_I$, so setzen wir zur Abkürzung $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$ und bekommen mit den Teilen i) und ii) das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d\Phi^* \left(\sum_I f_I dx_I \right) = d \left(\sum_I (f_I \circ \Phi) d\varphi_I \right) = \sum_I d(f_I \circ \Phi) \wedge d\varphi_I \\ &= \sum_I d(\Phi^*f_I) \wedge \Phi^*dx_I = \sum_I \Phi^*(df_I) \wedge \Phi^*dx_I = \Phi^* \left(\sum_I df_I \wedge dx_I \right) \\ &= \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

Zu iv): Sei $\tilde{\Psi} = \Phi \circ \Psi$; für die Komponenten $\tilde{\psi}_i = \varphi_i \circ \Psi$ dieser zusammengesetzten Abbildung ist dann nach iii) $d\tilde{\psi}_i = d(\varphi_i \circ \Psi) = d(\Psi^*\varphi_i) = \Psi^*(d\varphi_i)$, so daß

$$\begin{aligned} \Psi^*(\Phi^*\omega) &= \Psi^* \left(\sum_I (f_I \circ \Phi) d\varphi_I \right) = \sum_I (f_I \circ \tilde{\Psi}) \Psi^*(d\varphi_I) = \sum_I (f_I \circ \tilde{\Psi}) d\tilde{\psi}_i \\ &= \tilde{\Psi}^* \left(\sum_I f_I dx_I \right) = \tilde{\Psi}^*\omega = (\Phi \circ \Psi)^*\omega, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Für den Beweis des *Poincaréschen Lemmas* (Satz 3) müssen wir noch einen Hilfssatz bereitstellen.

Lemma 28.5 *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offene Teilmengen mit $U \times [0, 1] \subset V$. Dann gibt es zu jeder geschlossenen k -Form σ auf V eine $(k-1)$ -Form η auf U , so daß*

$$d\eta = \alpha_1^*\sigma - \alpha_0^*\sigma,$$

wobei $\alpha_0, \alpha_1 : U \rightarrow V$ die Einbettungen

$$\alpha_0(x) := (x, 0), \quad \alpha_1(x) := (x, 1)$$

bezeichnen.

Beweis. Mit $\sigma = \sum_{|I|=k} f_I dx_I + dt \wedge \sum_{|J|=k-1} g_J dx_J$ ist

$$\alpha_1^*\sigma = \sum_{|I|=k} f_I(x, 1) dx_I \quad \text{und} \quad \alpha_0^*\sigma = \sum_{|I|=k} f_I(x, 0) dx_I.$$

Das Differential $d\sigma$ ist von der Form $dt \wedge \tau$ plus einer weiteren Form, die kein Differential dt enthält. Wegen $d\sigma = 0$ ist dann notwendig $\tau = 0$. Mit einer leichten Rechnung führt dies zu der Identität

$$\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t} dx_I = \sum_J \sum_i \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J.$$

Man integriert nun die beiden Seiten dieser Gleichung über t von 0 bis 1. Wegen

$$\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x, t) dt = f_I(x, 1) - f_I(x, 0) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 g_J(x, t) dt$$

erhält man dadurch $\alpha_1^* \sigma - \alpha_0^* \sigma = d\eta$ mit der $(k-1)$ -Form

$$\eta := \sum_{|J|=k-1} \left(\int_0^1 g_J(x, t) dt \right) dx_J. \quad \square$$

Wir beweisen schließlich Satz 3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß das Zentrum des sternförmigen Gebietes $U \subset \mathbb{R}^n$ der Ursprung 0 ist. Betrachten wir dann die differenzierbare Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \Phi(x, t) := tx$$

und $V := \Phi^{-1}(U)$, so ist wie in dem zuvor bewiesenen Lemma $U \times [0, 1] \subset V$. Die Form $\sigma := \Phi^* \omega$ ist mit ω geschlossen; infolgedessen gibt es eine Form η auf U mit

$$d\eta = \alpha_1^* \sigma - \alpha_0^* \sigma = (\Phi \circ \alpha_1)^* \omega - (\Phi \circ \alpha_0)^* \omega.$$

Nun ist aber $(\Phi \circ \alpha_0)(x) = 0$ und $(\Phi \circ \alpha_1)(x) = x = \text{id}(x)$ und deshalb $d\eta = \omega$. □

Anhang: Alternierende Multilinearformen

Wir erinnern in diesem Anhang kurz an Begriffe und Ergebnisse der *multilinearen Algebra*, die zum Verständnis des Konzepts der *alternierenden Differentialformen* beitragen können. Es sei dazu ein n -dimensionaler reeller Vektorraum V vorgegeben.

Definition. Eine *alternierende k -Form* auf V ist eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu \tilde{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$
 $= \lambda \omega(\dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots) + \mu \omega(\dots, v_{i-1}, \tilde{v}_i, v_{i+1}, \dots)$
 für alle $v_1, \dots, v_i, \tilde{v}_i, \dots, v_k \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- ii) $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn Indizes $i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$.

Bemerkung. Die Bedingung i) besagt nichts anderes, als daß die Abbildung ω in jedem Eintrag v_i \mathbb{R} -linear ist, oder in anderen Worten: ω ist *multilinear*. Die Bedingung ii) ist gleichwertig zu

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$$

für $i \neq j$, also zu dem, was man normalerweise als *alternierende* Eigenschaft bezeichnet.

Man kann solche Abbildungen addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, so daß sie einen Vektorraum bilden. Wir bezeichnen diesen mit $\bigwedge^k V^*$. Da für $k = 1$ die zweite Bedingung leer ist, ist insbesondere

$$\bigwedge^1 V^* = V^*,$$

also der *Dualraum* der *Linearformen* auf V . Ferner ist, wie man sofort sieht (vgl. auch weiter unten),

$$\bigwedge^k V^* = 0,$$

wenn $k > n$. Man setzt im Allgemeinen noch

$$\bigwedge^0 V^* := \mathbb{R}.$$

Bemerkung. In der linearen Algebra führt man diesen Vektorraum als *Dualraum* eines Vektorraums $\bigwedge^k V$ ein, der durch die folgende *universelle Eigenschaft* bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Es existiert eine multilineare, alternierende Abbildung $V \times \cdots \times V \rightarrow \bigwedge^k V$ und zu jeder multilinearen alternierenden Abbildung $V \times \cdots \times V \rightarrow W$ in einen Vektorraum W genau eine *lineare Abbildung* $\bigwedge^k V \rightarrow W$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \xrightarrow{\quad} & \bigwedge^k V \\ & \searrow & \swarrow \\ & & W \end{array}$$

Es existiert dann auch der Vektorraum $\bigwedge^k(V^*)$, der selbstverständlich von dem Vektorraum $(\bigwedge^k V)^*$ zu unterscheiden ist. Es ist aber leicht zu sehen, daß für einen endlich dimensionalen Vektorraum V eine kanonische Isomorphie

$$\bigwedge^k(V^*) \cong (\bigwedge^k V)^*$$

besteht. Damit wird unsere a priori zweideutige Bezeichnung $\bigwedge^k V^*$ gerechtfertigt.

Mit vorgegebenen *Linearformen* $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ kann man vermöge einer geeigneten *Determinantenbildung* Elemente in $\bigwedge^k V^*$ erklären durch das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt* $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$, das definiert ist durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det(\varphi_j(v_\ell))_{1 \leq j, \ell \leq k} = \det(\langle \varphi_j, v_\ell \rangle).$$

Da die Determinante einer $k \times k$ -Matrix in den Spalten multilinear und alternierend ist und die φ_j nach Voraussetzung Linearformen sind, sieht man unmittelbar, daß die Abbildung

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

multilinear und alternierend, also tatsächlich ein Element von $\bigwedge^k V^*$ ist.

Determinanten sind aber auch multilinear und alternierend in den *Zeilen* einer quadratischen Matrix. Dies liefert einfache Eigenschaften des Dachproduktes von Linearformen.

Lemma 28.6 *Für das äußere Produkt von Linearformen gelten die folgenden Rechenregeln :*

1. $\varphi_1 \wedge \dots \wedge (\lambda \varphi_i + \mu \tilde{\varphi}_i) \wedge \dots \wedge \varphi_k = \lambda \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i \wedge \dots \wedge \varphi_k + \mu \varphi_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\varphi}_i \wedge \dots \wedge \varphi_k$.
2. $\varphi_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\pi(k)} = \text{sign } \pi \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$, $\pi \in \mathfrak{S}_k$.

Ist nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine *Basis* von V^* , so sind nach den soeben formulierten Regeln die Elemente

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \in \bigwedge^k V^*, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

nicht linear unabhängig (jedenfalls wenn $k \geq 2$). Man kann aber erwarten, daß dies der Fall ist für die *streng geordneten* k -Tupel

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

und daß das System

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

sogar eine *Basis* von $\bigwedge^k V^*$ darstellt. - Dies ist in der Tat richtig.

Lemma 28.7 *Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis des dualen Vektorraums V^* , so bilden die Elemente*

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

eine *Basis* von $\bigwedge^k V^*$. Insbesondere ist

$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \bigwedge^k V^* = 0 \quad \text{für } k > n.$$

Beweis. Wir können annehmen, daß die vorgegebene Basis von V^* die *Dualbasis* zu einer Basis v_1, \dots, v_n von V ist: $\varphi_j(v_k) = \delta_{jk}$. Nun ist aber offensichtlich eine *multilineare* Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

in Verallgemeinerung eines einfachen Sachverhalts bei *linearen Abbildungen* eindeutig bestimmt durch die (beliebig vorgebbaren) Bilder $a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ der k -Tupel $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ unter ω . Bei *alternierenden* Multilinearformen ω sind zusätzlich noch die Bedingungen

$$a_{\pi(i_1), \dots, \pi(i_k)} = (\text{sign } \pi) a_{i_1, \dots, i_k} \quad \text{für } \pi \in \mathfrak{S}_k$$

zu erfüllen. Da auch die alternierende Form

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$$

exakt diese Bedingungen erfüllt, stimmt sie mit ω überein. \square

Als Übungsaufgabe zu Determinanten überlassen wir dem/der Leser/in den Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma 28.8 Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ und $\psi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_j$, so gilt

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n = \det(a_{ij}) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n.$$

Schließlich hat man noch das folgende Lemma, aus dem folgt, daß man den Vektorraum

$$\bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V^*$$

mit der Struktur einer (nicht kommutativen) \mathbb{R} -Algebra versehen kann. Man nennt diese auch die *äußere Algebra* über dem Vektorraum V^* .

Lemma 28.9 Es gibt für alle k, ℓ eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\begin{cases} \bigwedge^k V^* \times \bigwedge^\ell V^* & \longrightarrow \bigwedge^{k+\ell} V^* \\ (\omega, \sigma) & \longmapsto \omega \wedge \sigma \end{cases}$$

mit den folgenden Eigenschaften :

- $\omega \wedge \sigma$ ist \mathbb{R} -linear in beiden Faktoren.
- Ist $\omega = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$, $\sigma = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_\ell$ mit $\varphi_\kappa, \psi_\lambda \in V^*$, so ist

$$\omega \wedge \sigma = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_\ell.$$

Für $k = 0$ oder $\ell = 0$ ist $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a \omega$.

Für Formen $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\sigma \in \bigwedge^\ell V^*$ gilt die Vertauschungsregel

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{k\ell} \sigma \wedge \omega.$$

Das Produkt ist assoziativ : $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.

Beweis. Man wählt eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von V^* , schreibt (in eindeutiger Weise)

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad \sigma = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n} b_{j_1 \dots j_\ell} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_\ell}$$

und multipliziert gemäß der Bedingungen a) und b) aus. Der Rest ist pures Nachrechnen. \square

Bemerkung. Man rechnet verhältnismäßig einfach nach, wie das Produkt $\omega \wedge \sigma$ auf $k + \ell$ Vektoren $v_1, \dots, v_{k+\ell}$ wirkt. Es ist

$$(\omega \wedge \sigma)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\ell)}).$$

29 Der Satz von Stokes

Der *Satz von Stokes* ist eine grandiose Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, auf dem sein Beweis letztendlich (in einer Fassung mit Parametern) beruht. Er beinhaltet als Spezialfälle alle bekannten *Integralsätze* wie den Satz von GAUSS und den „klassischen“ Satz von STOKES, aber auch den in der Theorie der *harmonischen Funktionen* unverzichtbaren Satz von GREEN. Diese Sätze besitzen physikalische Anwendungen und Interpretationen, die auch dem „Nur“-Mathematiker das Verstehen erleichtern sollten.

Die Zurückführung auf den eindimensionalen Spezialfall ist technisch ein wenig anspruchsvoll, aber nicht wirklich schwer. Größere Schwierigkeiten bereitet dem Anfänger eher das Verständnis der *Konzepte*, die benötigt werden, um den Satz in seiner allgemeinen Form überhaupt formulieren zu können. Dazu gehört vor allem die Einführung eines *Integralbegriffs* für geeignete Objekte auf Mannigfaltigkeiten. Es wird sich herausstellen, daß wir insbesondere k -dimensionale (stetige) *Differentialformen* über *kompakte* Teile von k -dimensionalen (*orientierten*) Untermannigfaltigkeiten M des \mathbb{R}^n integrieren können (müssen).

Da wir es also mit *stetigen* Objekten auf *kompakten* Mengen zu tun haben werden, benötigen wir nicht unbedingt ein anspruchsvolles Integral und verwenden einfacherweise die Riemannsche Theorie.

Zur Erinnerung: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-meßbar*, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A Riemann-integrierbar ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß A beschränkt und der Rand ∂A eine (kompakte) Nullmenge im Sinne von Jordan-Riemann (und damit auch im Sinne von Lebesgue ist): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Quader Q_1, \dots, Q_N , so daß

$$\partial A \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \text{Vol}_n Q_j \leq \varepsilon .$$

Ist die Funktion f stetig in einer Umgebung von \bar{A} , so existiert dann automatisch

$$\int_A f(x) d^n x$$

im Riemanschen Sinne.

Es sei nun M eine (k -dimensionale) Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Definition. Die Menge $A \subset M$ heißt *Jordan-meßbar*, wenn eine endliche Zerlegung $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$, existiert und es Karten $\varphi_j : V_j \rightarrow U_j = \Omega_j \cap M$, $j = 1, \dots, N$, von M gibt, so daß

$$\bar{A}_j \subset U_j \quad \text{und} \quad \varphi_j^{-1}(A_j) \subset V_j \quad \text{Jordan-meßbar in } \mathbb{R}^k \text{ ist .}$$

Bemerkung. Da endliche Vereinigungen, Durchschnitte und Differenzen von Jordan-meßbaren Mengen wieder Jordan-meßbar sind, ist diese Definition unabhängig von der Zerlegung und den Parametrisierungen.

Wir wollen nun versuchsweise ein Integral für eine alternierende k -Form ω , die auf einer Umgebung von M (oder auch nur auf M) definiert sei, im Falle $A \subset U$, $\varphi : V \rightarrow U = \Omega \cap M$ eine Karte, einführen durch

$$\int_A \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega ,$$

wobei mit

$$\varphi^* \omega = a(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$$

gesetzt wird:

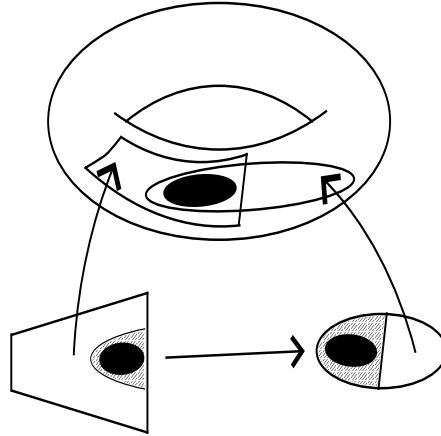
$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} a(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k := \int_{\varphi^{-1}(A)} a(t) dt_1, \dots, dt_k .$$

Man beachte hierbei, daß die Funktion $a(t)$ stetig ist auf V , wenn M mindestens von der Differenzierbarkeitsgüte \mathcal{C}^1 und die Form ω stetig ist, so daß also das rechts stehende Integral existiert.

Um die Eindeutigkeit einer solchen Definition zu ergründen, nehmen wir an, wir hätten zwei Karten:

$$\varphi : V \longrightarrow U, \quad \psi : V' \longrightarrow W$$

mit $A \subset U \cap W$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U = W$.



Figur 29.1

Dann muß, damit unsere Definition sinnvoll ist, gelten:

$$(+)$$

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_{\psi^{-1}(A)} \psi^* \omega .$$

Nun ist aber mit $\tau := \varphi^{-1} \circ \psi$ und $B := \varphi^{-1}(A)$ nach der Transformationsformel für mehrfache Integrale (siehe Kapitel 37) wegen $\tau^{-1}(B) = \psi^{-1}(A)$:

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_B a(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_{\psi^{-1}(A)} a(\tau(s)) |(\det D\tau)(s)| ds_1 \wedge \dots \wedge ds_k ,$$

und des weiteren gilt nach den Rechenregeln für das Liften von Differentialformen:

$$\psi^* \omega = \tau^*(\varphi^* \omega) = a(\tau(s)) ((\det D\tau)(s)) ds_1 \wedge \dots \wedge ds_k .$$

Folglich gilt (+) sicher dann, wenn $\det(D\tau)(s) > 0$ für alle s gilt. - Dies führt zu folgender Definition:

Definition. Eine Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n heißt *orientierbar*, falls es einen Atlas $\mathfrak{A} = \{(V_\iota, \varphi_\iota, U_\iota)\}_{\iota \in I}$ von M gibt, so daß alle Koordinatenwechsel $\varphi_\kappa^{-1} \circ \varphi_\iota$ *positive* Funktionaldeterminante besitzen. Man sagt dann auch, die Karten dieses Atlases seien miteinander *orientiert verträglich*.

Die Gesamtheit aller mit \mathfrak{A} *orientiert verträglichen* Karten heißt dann eine *orientierte* differenzierbare Struktur auf M .

Bemerkung. Eine Karte $(V, \varphi, U = \Omega \cap M)$ auf der Mannigfaltigkeit M liefert einen Vektorraum-Isomorphismus $D\varphi : T_{V,t} \rightarrow T_{M,\varphi(t)}$ und damit eine Orientierung auf $T_{M,x}$, $x = \varphi(t)$, vermöge der natürlichen Orientierung auf $T_{V,t} \cong \mathbb{R}^k$. Besitzt M eine orientierbare Struktur, so ist diese Orientierung unabhängig von der Karte des vorgegebenen orientierten Atlases.

Bemerkung. Ist die (Unter-) Mannigfaltigkeit M orientierbar (und zusammenhängend), so besitzt M genau zwei (miteinander nicht orientiert verträgliche) orientierbare Strukturen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\text{opp}} \\ (V, \varphi, U) &\longmapsto (S(V), \varphi \circ S, U), \end{aligned}$$

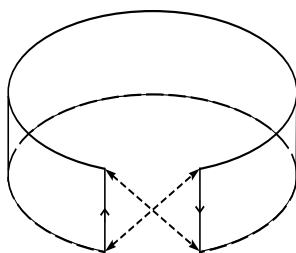
wobei S die Spiegelung $(t_1, \dots, t_k) \mapsto (-t_1, t_2, \dots, t_k)$ bezeichnet (selbstverständlich ist hierbei $k \geq 1$).

Orientierbar sind z. B. Ebenen, Sphären, etc. Man deutet die Wahl einer Orientierung auf M durch ein Symbol wie (M, σ) an. Die entgegengesetzte Orientierung wird dann mit $(M, -\sigma)$ bezeichnet.

Bemerkungen. 1. Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension k ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige k -Form auf M ohne Nullstellen gibt.

2. Eine Untermannigfaltigkeit M des (euklidischen) \mathbb{R}^n von der Dimension $n - 1$ ist genau dann orientierbar, wenn es auf M ein stetiges *Normalenfeld* gibt, also eine stetige Abbildung $\nu : M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, so daß für alle $x \in M$ der Vektor $\nu(x)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{M,x} \subset \mathbb{R}^n$ steht. Lokal läßt sich ein solches Normalenfeld stets wählen.

Die letzte Bedingung führt zu der Einsicht, daß es nicht orientierbare Flächen in \mathbb{R}^3 gibt wie z. B. das MÖBIUS-Band:



Figur 29.2

Ist nun $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$ eine Jordan-meßbare Menge auf der orientierten Mannigfaltigkeit (M, σ) , so ist

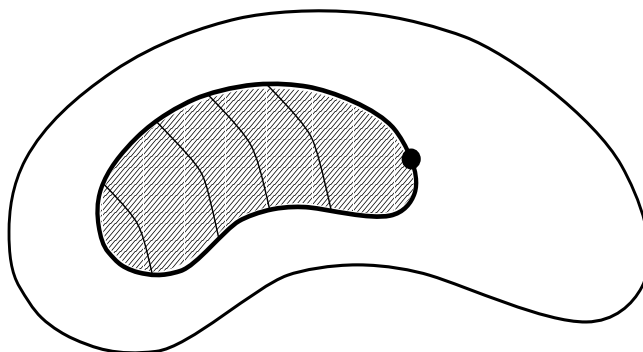
$$\int_{(A, \sigma)} \omega := \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega$$

wohldefiniert (und unabhängig von der Zerlegung), und es gilt

$$\int_{(A, -\sigma)} \omega = - \int_{(A, \sigma)} \omega .$$

Bemerkung. Eine geometrische Interpretation dieses Integral-Begriffes erläutern wir in dem folgenden Kapitel.

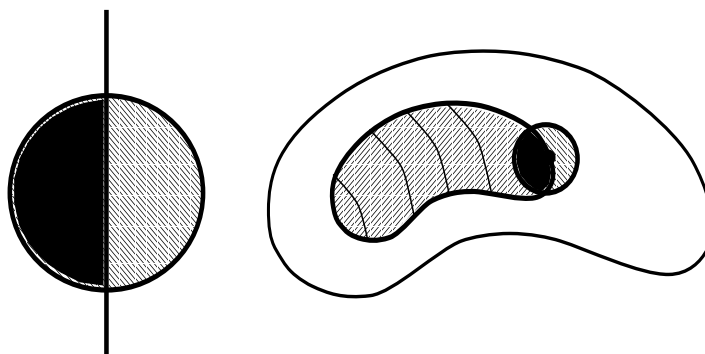
Zur Formulierung des Stokesschen Satzes benötigen wir noch den Begriff der Jordan-meßbaren Teilmenge $A \subset M$ mit glattem Rand ∂A . Hierbei ist ∂A natürlich der Rand bezüglich des topologischen Raumes M (nicht bzgl. \mathbb{R}^n !), d. h. $x \in \partial A \Leftrightarrow$ für alle $\Omega = \Omega(x)$ offen in \mathbb{R}^n ist $\Omega \cap A \neq \emptyset$ und $\Omega \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$.



Figur 29.3

Definition. $A \subset M$ sei eine kompakte Teilmenge der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt der Rand ∂A von A *glatt*, falls für alle $x \in \partial A$ eine Karte $\varphi : V \rightarrow U$ von M existiert mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $x \in \varphi(V) = U$,
- ii) $\varphi(H \cap V) = A \cap \varphi(V)$,
- iii) $\varphi(\partial H \cap V) = \partial A \cap U$ (hierbei ist H der abgeschlossene Halbraum $\{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$).



Figur 29.4

Bemerkung. Ist $\partial A = \emptyset$, also z. B. $A = M$ und M selbst kompakt, so ist die Voraussetzung „kompakter Rand“ für A automatisch erfüllt. Beispiel: $A = M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Beispiel. In $M = \mathbb{R}^n$ besitzt die kompakte Einheitskugel $A := B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ den glatten Rand $\partial A = S^{n-1}$.

Im folgenden wird gezeigt:

Satz 29.1 Die Teilmenge $A \subset M$ sei kompakt und besitze einen glatten Rand. Dann trägt ∂A die kanonische Struktur einer $(k-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von M . Ist M zusätzlich orientiert, so „erbt“ auch ∂A eine kanonische Orientierung.

Beweis. Es sei $(V, \varphi, U = \Omega \cap M)$ eine Karte von M nahe $x \in \partial A$ wie in der oben stehenden Definition. Die Menge $W := \partial H \cap V$ ist, aufgefaßt als Teilmenge von $\partial H = \mathbb{R}^{k-1}$, offen. Man definiere dann weiter

$$\tilde{\varphi}(s_1, \dots, s_{k-1}) := \varphi(0, s_1, \dots, s_{k-1})$$

für $(s_1, \dots, s_{k-1}) \in W \subset \mathbb{R}^{k-1}$. Dann ist

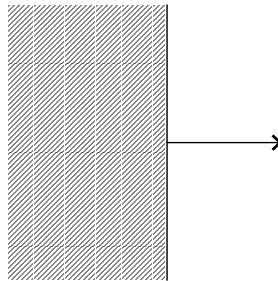
$$\tilde{\varphi}(W) = \varphi(\partial H \cap V) = \partial A \cap U = \partial A \cap \Omega,$$

und außerdem ist $\tilde{\varphi}$ injektiv. Wegen der Kettenregel ist

$$(D\tilde{\varphi})(s) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(t_2, \dots, t_k)}(0, s),$$

hat also den Rang $k - 1$. Damit ist die Mannigfaltigkeitseigenschaft von ∂A nachgewiesen.

Ist M sogar orientiert, so werden wir zeigen, daß der soeben mittels eines orientierten Atlases von M konstruierte Atlas $\{(W, \tilde{\varphi}, \partial A \cap U)\}$ von ∂A dann ebenfalls orientiert ist. Wir wählen für $\partial H = \{t_1 = 0\}$, $H = \{t_1 \leq 0\}$ stets die durch die Reihenfolge t_2, \dots, t_k gegebene Orientierung von ∂H und nennen diese die von \mathbb{R}^k auf ∂H induzierte Orientierung bezüglich der „äußeren Normalen“. Diese Bezeichnung stammt her von der Situation im Parameterraum, wo der Einheitsvektor e_1 den äußere Normalenvektor an den Halbraum H darstellt:

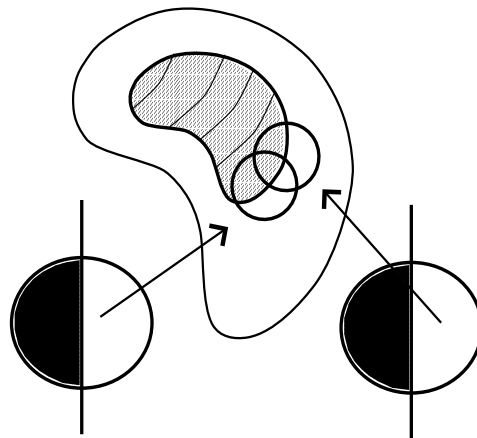


Figur 29.5

Die Orientierung auf $\partial H = \mathbb{R}^{k-1}$ wird festgelegt durch die Einheitsvektoren e_2, \dots, e_k in ebendieser Reihenfolge, so daß der äußere Normalenvektor e_1 in seiner Richtung durch die Bedingung festgelegt ist, daß er zusammen mit der Wahl der Orientierung von ∂H die Standard-Orientierung von \mathbb{R}^k ergibt:

$$\left(\underbrace{e_1}_{\text{Normalenvektor}}, \underbrace{e_2, \dots, e_k}_{\text{Orientierung von } \partial H} \right) = \underbrace{(e_1, \dots, e_k)}_{\text{Standard-Orientierung von } \mathbb{R}^k}$$

Wir müssen jetzt noch zeigen: Sind die Karten φ, ψ orientiert verträglich, so auch die Karten $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$.



Figur 29.6

Betrachte dazu $\sigma := \psi^{-1} \circ \varphi$. Nach Voraussetzung ist:

- i) $\sigma(0, t_2, \dots, t_k) \in \partial H$;
- ii) $\sigma(t_1, t_2, \dots, t_k) \in H$ für $t_1 \leq 0$; genauer $\sigma(H \cap V) = H \cap V'$;
- iii) $\det(D\sigma) > 0$.

Schreibt man $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, so liefert die erste Bedingung $\sigma_1(0, t_2, \dots, t_k) \equiv 0$ und damit

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t_\kappa}(t) = 0 \quad \text{für } \kappa = 2, \dots, k, t \in \partial H \cap V.$$

Aus ii) folgt

$$\sigma_1(h, t_2, \dots, t_k) < 0 \quad \text{für } h < 0$$

und damit

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t_1}(t) \geq 0 \quad \text{für } t \in \partial H \cap V.$$

Damit gilt für alle $t \in \partial H \cap V$, wenn man $t = (0, s)$, $s = (s_1, \dots, s_{k-1})$ und $\tilde{\sigma} := \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ setzt:

$$0 < \det(D\sigma)(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t_1}(t) & 0 \\ \hline * & (D\tilde{\sigma})(s) \\ * & \\ * & \end{array} \right).$$

Daraus folgt aber, wie gewünscht, $\det(D\tilde{\sigma})(s) > 0$ für alle $s \in W := \partial H \cap V \subset \mathbb{R}^{k-1}$. □

Wir können jetzt endlich den Satz von Stokes formulieren.

Satz 29.2 (Stokes) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ sei eine kompakte, Jordan-meßbare Teilmenge mit glattem Rand ∂A , der bzgl. der äußeren Normalen orientiert sei. ω sei eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form in einer offenen Umgebung Ω von A (in \mathbb{R}^n). Dann gilt*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Im ersten Schritt des *Beweises* erledigen wir die *lokale* Situation, in die als wesentliche Ingredienz nur der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eingeht. Von der Theorie der mehrfachen Integrale benötigen wir ausschließlich den Satz von Fubini.

Lemma 29.3 *Es sei*

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j(t) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k$$

eine $(k-1)$ -Form auf \mathbb{R}^k , die außerhalb eines kompakten Quaders Q verschwindet, d. h. für deren Koeffizienten f_j gilt, daß ihre Träger in Q enthalten sind. Dann ist mit $H := \{t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \leq 0\}$ die Integralformel in der Form

$$\int_{H \cap Q} d\omega = \int_{\partial H \cap Q} \omega$$

erfüllt.

Beweis. Wir beginnen mit dem Integral über den Rand ∂H . Da dieser durch t_2, \dots, t_k bei festem $t_1 = 0$ parametrisiert wird, haben alle Summanden bis auf den ersten verschwindendes Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\partial H \cap Q} \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j(t) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k \right) &= \int_{\partial H \cap Q} f_1(t) dt_2 \wedge \dots \wedge dt_k \\ &= \int_{Q'} f_1(0, t_2, \dots, t_k) dt_2 \dots dt_k, \end{aligned}$$

wobei $Q' := \partial H \cap Q$ als Quader in $\partial H \cong \mathbb{R}^{k-1}$ aufzufassen ist. Weiter ist, wie man sofort nachrechnet,

$$d\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} df_j \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial t_j} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Fixiert man alle Variablen t_i außer t_j , so besitzt $\partial f_j / \partial t_j$ die Stammfunktion f_j , so daß mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 = f_1(0, t_2, \dots, t_k) \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial f_j}{\partial t_j} dt_j = 0, \quad j \geq 2.$$

Nach dem Satz von Fubini ist dann

$$\begin{aligned} \int_{H \cap Q} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k &= \left(\int \left(\int \dots \left(\int \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 \right) \dots dt_{k-1} \right) dt_k \right) \\ &= \int_{Q'} f_1(0, t_2, \dots, t_k) dt_2 \dots dt_k \end{aligned}$$

und entsprechend für $j \geq 2$

$$\int_{H \cap Q} \frac{\partial f_j}{\partial t_j} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = 0 \quad \square$$

Zur Vervollständigung des Beweises der Stokesschen Formel benötigen wir noch ein wichtiges technisches Hilfsmittel, dessen Beweis wir an dieser Stelle übergehen. (Siehe aber den Anhang zum vorliegenden Kapitel).

Satz 29.4 (Existenz differenzierbarer Teilungen der Eins) *Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Familie $(\eta_\iota)_{\iota \in I}$ stetig (sogar beliebig oft) differenzierbarer Funktionen*

$$\eta_\iota : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften :

- i) Für den Durchmesser des Trägers von η_ι gilt $\text{diam}(\text{supp}(\eta_\iota)) < \varepsilon$.
- ii) Ist K kompakt, so ist $\{\iota \in I : K \cap \text{supp} \eta_\iota\}$ endlich.
- iii) $\sum_{\iota \in I} \eta_\iota(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Erinnert sei auch (siehe z. B. Teil II, Kapitel 15) an das sogenannte LEBESGUESCHE *Lemma*:

Lemma 29.5 *Die Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt, und $\mathfrak{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ sei eine offene Überdeckung von K . Dann existiert eine Zahl $\lambda > 0$, so daß für alle $A \subset K$ mit $\text{diam}(A) < \lambda$ gilt: Es existiert $\iota \in I$ mit $A \subset U_\iota$.*

Hieraus folgt unmittelbar das

Korollar 29.6 Zu $A \subset M$ wie in Satz 2 gibt es eine endliche Familie von Karten $(V_\iota, \varphi_\iota, U_\iota)$, $U_\iota = \Omega_\iota \cap M$, $\Omega_\iota \subset \mathbb{R}^n$ offen, und stetig differenzierbare Funktionen $\eta_\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, so daß

$$A \subset \bigcup \Omega_\iota, \quad \overline{\text{supp } \eta_\iota} \subset \Omega_\iota, \quad \sum_{\iota \in I} \eta_\iota(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in A.$$

Wir kommen nun zur Beendigung des *Beweises* des Satzes von Stokes. Es genügt, den Satz für die Formen $\eta_\iota \omega$ zu beweisen, denn dann ist wegen der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \omega &= \int_{\partial A} \left(\sum_{\iota \in I} \eta_\iota \right) \omega = \int_{\partial A} \sum_{\iota \in I} \eta_\iota \omega = \sum_{\iota \in I} \int_{\partial A} \eta_\iota \omega \\ &= \sum_{\iota \in I} \int_A d(\eta_\iota \omega) = \int_A \sum_{\iota \in I} d(\eta_\iota \omega) = \int_A d \left(\sum_{\iota \in I} \eta_\iota \omega \right) = \int_A d\omega. \end{aligned}$$

Für Formen, deren Träger kompakt in einer Karte enthalten ist, haben wir die Aussage aber im Prinzip schon in Lemma 3 gezeigt: Sei nämlich $\varphi : V \rightarrow U = \Omega \cap M$ eine Karte, ω eine $(k-1)$ -Form auf Ω und $\text{supp}(\omega) \subset \Omega$, (d. h. alle Koeffizienten von ω besitzen einen Träger, der relativ kompakt in Ω enthalten ist), so besitzt die geliftete Form

$$\tilde{\omega} := \varphi^* \omega$$

einen Träger mit $\overline{\text{supp } \tilde{\omega}} \subset V$. Setzt man also

$$\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j(t_1, \dots, t_k) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k,$$

so liegt der Träger der Koeffizienten f_j relativ kompakt in V , und man kann $\tilde{\omega}$ als eine auf ganz \mathbb{R}^k erklärte Form ansehen. Ferner ist

$$d\tilde{\omega} = d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Wegen der Definition des Integrals gilt dann

$$\int_A d\omega = \int_{A \cap (M \cap \Omega)} d\omega = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap V} \varphi^*(d\omega) = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap V} d\tilde{\omega} = \int_{H \cap V} \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial t_j} dt_1 \cdot \dots \cdot dt_k$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \omega &= \int_{\partial A \cap (M \cap \Omega)} \omega = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap V} \varphi^* \omega = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap V} \tilde{\omega} \\ &= \int_{\partial H \cap V} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k. \end{aligned}$$

Aus Lemma 3 folgt dann die Behauptung. □

Wir beenden das Kapitel mit einer einfachen Folgerung.

Folgerung 29.7

1. Ist unter der Voraussetzung des Satzes von Stokes die Form ω geschlossen, so gilt

$$\int_{\partial A} \omega = 0.$$

2. Ist umgekehrt $\partial A = \emptyset$, so ist

$$\int_A d\omega = 0.$$

Bemerkung. Man kann die Voraussetzungen des Satzes von Stokes noch wesentlich abschwächen: ∂A braucht nur *stückweise glatt*, ω nur auf M selbst erklärt zu sein und stetig auf A , stetig differenzierbar auf dem Inneren von A .

Anhang: Differenzierbare Teilungen der Eins

Das Ziel dieses Anhangs ist der Nachtrag einiger Hilfsaussagen über die Existenz von differenzierbaren Funktionen, die wir im Hauptteil dieses Kapitels zum Beweis des Satzes von Stokes durch „Lokalisierung“ benötigt haben und später noch einmal beim Beweis der Transformationsformel heranziehen werden. Wir beweisen sie nur in der Form, wie wir sie später brauchen, ohne größtmögliche Allgemeinheit anzustreben. Mit „differenzierbar“ meinen wir hier stets „vom Typ C^∞ “.

Wir formulieren den zentralen Satz wie folgt.

Satz 29.8 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ eine endliche offene Überdeckung von K . Dann gibt es ein (endliches) System von Funktionen $\{\chi_j\}_{j \in J}$ von differenzierbaren Funktionen $\chi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ und eine Abbildung $\iota : J \rightarrow I$ mit den folgenden Eigenschaften :*

- a) $\text{supp } \chi_j \subset\subset U_{\iota(j)}$,
- b) für die Funktion $\chi := \sum_{j \in J} \chi_j$ gilt $0 \leq \chi \leq 1$ und $\chi(x) = 1$ für $x \in K$.

Eine nützliche Folgerung ist die ebenfalls schon früher verwendete Aussage:

Folgerung 29.9 *Sind $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, K kompakt, U offen, so gibt es eine stetig differenzierbare Funktion χ mit $\text{supp } \chi \subset\subset U$, $\chi|_K \equiv 1$ und $0 \leq \chi \leq 1$.*

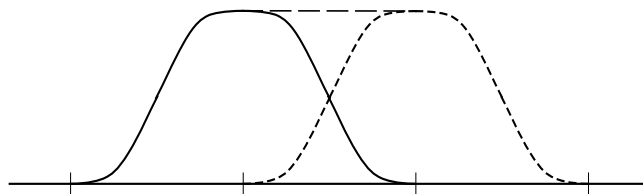
Beweis (Folgerung 8). Wähle $\mathfrak{U} = \{U\}$ und $\chi = \sum \chi_j$ wie in dem vorigen Satz. Es ist dann, wie gewünscht,

$$\text{supp } \chi \subset \bigcup_{j \in J} \text{supp } \chi_j \subset\subset U. \quad \square$$

Wir kommen nun zum *Beweis* des Hauptsatzes 7. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Es ist wohlbekannt, daß g auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar ist (der Grund hierfür liegt in der Beziehung $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)e^{-t} = 0$ für beliebige Polynome $P(t)$).



Figur 29.7

Man bildet jetzt

$$G(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(t - m);$$

da die Summe in Wahrheit lokal endlich ist (höchstens drei Translationen tragen lokal zu dieser Summe bei), ist G beliebig oft differenzierbar und offensichtlich aus entsprechendem Grunde positiv, und es gilt

$$G(t - \ell) = G(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Man setzt nun

$$h(t) = \frac{g(t)}{G(t)} ;$$

dann ist $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\text{supp } h = [-1, 1]$. Ferner gilt

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} h(t - m) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

also insbesondere $0 \leq h \leq 1$.

Aus dieser speziellen „differenzierbaren Teilung (besser: Zerlegung) der Eins“ auf \mathbb{R} kann man nun auch solche auf \mathbb{R}^n mit beliebig kleinem Träger konstruieren. Man setzt bei festem $\varepsilon > 0$ für beliebiges $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$:

$$\alpha_{p\varepsilon}(x) = \prod_{k=1}^n h\left(\frac{x_k}{\varepsilon} - p_k\right).$$

Offensichtlich ist $\alpha_{p\varepsilon} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und besitzt den kompakten Würfel

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

als Träger; ferner hat man

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon}(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

und die Summe ist wieder lokal endlich.

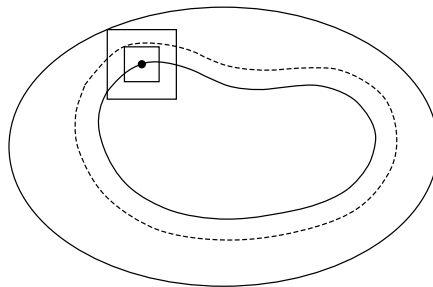
Es sei nun, wie in der Voraussetzung des Hauptsatzes, $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum und $\{U_\iota : \iota \in I\}$ eine endliche offene Überdeckung von K . Wir setzen $U = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ und nehmen $\partial U \neq \emptyset$ an (ansonsten ist $U = \mathbb{R}^n$ und die folgenden Überlegungen sind trivialerweise erfüllt): Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert

$$\text{dist}(x, \partial U) = \inf_{a \in \partial U} \|x - a\|_\infty,$$

und die Funktion $x \mapsto \text{dist}(x, \partial U)$ ist stetig. Sie nimmt insbesondere auf K ihr Minimum an: Es gibt $x_0 \in K$ mit

$$\text{dist}(x_0, \partial U) \leq \text{dist}(x, \partial U), \quad x \in K.$$

Wäre $\text{dist}(x_0, \partial U) = 0$, so gäbe es eine Folge $a_j \in \partial U$ mit $\lim a_j = x_0$. Da ∂U abgeschlossen ist, wäre auch $x_0 \in \partial U$ im Widerspruch zu $K \subset U$. Wähle nun ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $2\varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial U)$. Wir setzen $K' = \bigcup_{x \in K} W_{\varepsilon_0}(x)$; $W_{\varepsilon_0}(x)$ der kompakte Würfel mit Kantenlänge $4\varepsilon_0$ und Mittelpunkt x . Es ist leicht zu sehen, daß K' eine kompakte Menge ist, die noch ganz in U liegt.



Figur 29.8

Als nächstes bezeichnen wir mit $\delta > 0$ die Lebesguesche Zahl der Überdeckung \mathfrak{U} von K' und wählen $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ so klein, daß der Durchmesser eines Würfels der Kantenlänge 2ε höchstens gleich δ wird. Ist

dann W ein solcher kompakter Würfel, der überdies K trifft, so ist dieser notwendig in K' und damit in einem der U_i enthalten. Wir betrachten nun diejenigen $p \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\} \cap K \neq \emptyset.$$

Diese bilden eine endliche Menge $P \subset \mathbb{Z}^n$. Wir setzen weiter

$$\chi_p := \alpha_{p\varepsilon}, \quad p \in P \quad \text{und} \quad \chi = \sum_{p \in P} \chi_p.$$

Nach Konstruktion ist der (kompakte) Träger jedes χ_p in einem U_i enthalten, es gilt $0 \leq \chi \leq 1$ und $\chi = 1$ auf K , da $\chi_p(x) = 0$ ist für $x \in K$ und $p \notin P$. \square

30 Volumenberechnungen und die klassischen Integralsätze

Man kann das Integral über k -Formen in den extremalen Fällen $k = 1, n-1$ und n leicht geometrisch deuten und dies verallgemeinernd zu beliebigem k zwischen 1 und n ausnutzen, um k -dimensionale Volumina zu berechnen.

Für $k = 1$ führen wir ganz formal ein sogenanntes *vektorielles Linienelement* oder *vektorielles Streckenelement* ein durch

$$ds := (dx_1, \dots, dx_n),$$

und für $k = n - 1$ ein *vektorielles Hyperflächenelement*

$$dF := (dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n, -dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n, + - \dots).$$

Diese Ausdrücke sind in der Tat nur rein formal zu verstehen. Um ihren vektoriellen Charakter deutlicher zu machen, schreibt man manchmal auch

$$\overrightarrow{ds} \quad \text{anstelle von} \quad ds$$

und

$$\overrightarrow{dF} \quad \text{anstelle von} \quad dF.$$

Das *Volumenelement* wird selbstverständlich definiert durch

$$dV := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Man kann den ersten beiden Ausdrücken auf die folgende Weise mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts Leben einhauchen: Ist $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein *Vektorfeld*, so bilden wir (zunächst wieder nur formal):

$$\begin{aligned} \langle v, ds \rangle &= \sum_j v_j dx_j, \\ \langle v, dF \rangle &= \sum_j (-1)^{j-1} v_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Man beachte, daß jede 1- bzw. $n - 1$ -Form im \mathbb{R}^n sich auf diese Weise schreiben läßt. Man beachte aber auch, daß für $n = 2$ die Bedeutung von ds und dF *verschieden* ist, was sich insbesondere darin äußert, daß für ein zweidimensionales Vektorfeld $v = (v_1, v_2)$ im allgemeinen

$$\langle v, ds \rangle = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 \quad \text{und} \quad \langle v, dF \rangle = v_1 dx_2 - v_2 dx_1$$

voneinander verschieden sind.

Wir wollen nun an Hand dieser Symbole z. B. das *Kurvenintegral*

$$\int_{\alpha} \omega$$

für eine 1-Form $\omega = \langle v, ds \rangle$ neu interpretieren. Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die Parametrisierung einer 1-Mannigfaltigkeit, also einer Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die *Länge* $L(\alpha)$ der Kurve nach früheren Sätzen

$$L(\alpha) = \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Dieses Integral können wir interpretieren als Integral über eine *skalare* Form, nämlich über

$$\|ds\| := \sqrt{|dx_1|^2 + \dots + |dx_n|^2},$$

die wir auch das *skalare Linienelement* nennen⁵⁶. Für eine parametrisierte Kurve

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

⁵⁶Schreibt man \overrightarrow{ds} für das vektorielle Linienelement, so bezeichnet man das skalare Linienelement auch mit ds .

definiert man sinnvollerweise

$$\alpha^* \| ds \| = \sqrt{\left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|^2 + \cdots + \left| \frac{d\alpha_n}{dt} \right|^2} dt = \| \alpha' \| dt .$$

Damit kann man schließlich schreiben:

$$\int_I \| \alpha'(t) \| dt = \int_{\alpha(I)} \| ds \| .$$

Ist $f : \alpha(I) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so setzen wir allgemeiner

$$\int_{\alpha(I)} f \| ds \| = \int_I ((f \circ \alpha)(t)) \cdot \| \alpha'(t) \| dt .$$

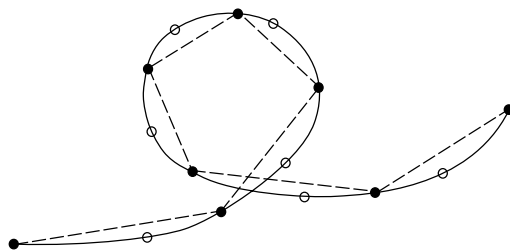
Wir nennen dies die „Integration einer Funktion entlang einer (parametrisierten) Kurve bzgl. des Linienelements“. Dieses Integral hängt in der Tat nicht von der Parametrisierung α ab (auch nicht von der Orientierung), wie man sofort mit der Substitutionsformel sieht, und ist die eigentliche Verallgemeinerung des (Riemann-) Integrals. Denn ist $\alpha : I \rightarrow I$ die Identität, so ist

$$\int_{\alpha(I)} f \| ds \| = \int_I f(t) dt .$$

Dieses Integral kann selbstverständlich auch durch RIEMANNSCHE *Summen* approximiert werden von der Gestalt

$$\sum_{j=1}^N f(\alpha(t_j)) \| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \| ,$$

wenn $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_N = b$ eine *Unterteilung* des Definitions-Intervalls $I = [a, b]$ ist. Das Integral stellt somit eine „gewichtete Länge“ der parametrisierten Kurve $\alpha(t)$ dar.



Figur 30.1

Betrachten wir nun die 1-Form $\omega = \langle v, ds \rangle = v_1 dx_1 + \cdots + v_n dx_n$. Dann gilt

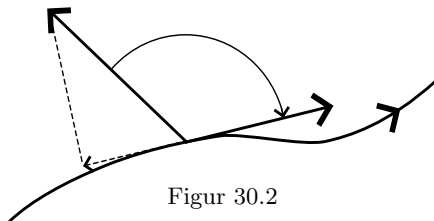
$$\begin{aligned} \alpha^* \omega &= [(v_1 \circ \alpha, \alpha'_1 + \cdots + (v_n \circ \alpha) \alpha'_n] dt \\ &= \langle v \circ \alpha, \alpha' \rangle dt = \| v \circ \alpha \| \cdot \cos \beta \cdot \| \alpha' \| dt \\ &= \alpha^* (\| v \| \cos \beta \| ds \|) \end{aligned}$$

mit dem *orientierten* Winkel β zwischen $v(\alpha(t))$ und dem Tangentialvektor $\alpha'(t)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int_{\alpha} \langle v, ds \rangle := \int_I \alpha^* \omega = \int_I \alpha^* (\| v \| \cdot \cos \beta \cdot \| ds \|) \\ &= \int_{\alpha(I)} \| v \| \cdot \cos \beta \cdot \| ds \| . \end{aligned}$$

Damit zeigt sich schließlich

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha(I)} v_{\text{tang}} \|ds\| .$$



Figur 30.2

Bemerkungen. 1. Interpretiert man hierin v als ein stationäres, d. h. zeitlich unveränderliches *Flüssigkeitsfeld*, so kann man die rechte Seite der vorigen Formel auffassen als die *Rotation* der Flüssigkeit in der Zeiteinheit entlang der Kurve $\alpha(I)$. Ist v ein stationäres *Kraftfeld*, so kann man dieses Integral (multipliziert mit der Größe m) auch als *Arbeit* auffassen, die durch das Kraftfeld an einem Teilchen der Masse m von dem gegebenen Kraftfeld verrichtet wird, wenn sich dieses längs der Bahn $t \mapsto \alpha(t)$ durch das Kraftfeld bewegt.

2. Diese Interpretationen zeigen schon, daß Integrale von dieser Form gegenüber orientierter Umparometrisierung invariant sind, aber das Vorzeichen bei Umkehr der Orientierung wechseln. Dies liegt einfach daran, daß bei einer solchen Orientierungsumkehr das Vorzeichen von v_{tang} sich umdreht.

Bevor wir als nächstes den Hyperflächenfall $k = n - 1$ behandeln, betrachten wir den Sonderfall $k = 1, n = 2$. Hier ist

$$ds = (dx_1, dx_2), \quad dF = (dx_2, -dx_1)$$

und damit

$$\langle v, ds \rangle = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 \quad \text{und} \quad \langle v, dF \rangle = v_1 dx_2 - v_2 dx_1 ,$$

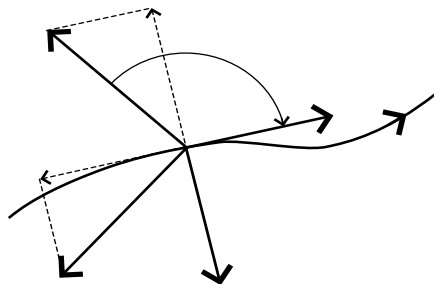
so daß also im Allgemeinen $\langle v, ds \rangle \neq \langle v, dF \rangle$ ist. Aber mit $v^\perp := (-v_2, v_1)$ sieht man sofort, daß

$$\langle v, dF \rangle = \langle v^\perp, ds \rangle .$$

Offensichtlich ist $v^\perp \perp v$, $\|v^\perp\| = \|v\|$, und das Paar v, v^\perp hat „dieselbe Orientierung“ wie die Standard-Basis e_1, e_2 , da

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{vmatrix} = v_1^2 + v_2^2 > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0 .$$

Aus der Zeichnung ergibt sich sofort, daß der Normalenanteil v_{norm} von v bzgl. der *äußeren Normalen* $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ (die per definitionem auf dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(t) := \alpha'(t) \neq 0$ senkrecht steht, so daß das Paar $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t))$ negativ orientiert ist) gleich dem Tangentialanteil v_{tang}^\perp ist:



Figur 30.3

Es gilt also

$$\int_{\alpha} \langle v, dF \rangle = \int_{\alpha} \langle v^{\perp}, ds \rangle = \int_{\alpha(I)} v_{\text{tang}}^{\perp} \| ds \| = \int_{\alpha(I)} v_{\text{norm}} \| ds \|$$

und die rechte Seite nennt man, wiederum motiviert durch ein stationäres Flüssigkeitsfeld, den *Fluß* von v durch die Kurve $\alpha(I)$. Diese Interpretation bleibt allgemein für $k = n - 1$ erhalten, wie wir weiter unten zeigen werden.

Als erstes wollen wir aber zunächst aus dem allgemeinen Satz von Stokes den klassischen Satz von GAUSS in der Ebene ableiten.

Satz 30.1 (Klassischer Satz von Gauß) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit glattem Rand und $v = (v_1, v_2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $U \supset A$. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} v_{\text{norm}} \| ds \| = \int_A (\text{div } v) dx_1 dx_2 ,$$

wobei $\text{div } v$ die (stetige) Funktion

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

bezeichnet.

Beweis. Die linke Seite ist nach den obigen Ausführungen nichts anderes als das Integral

$$\int_{\partial A} \omega$$

für die 1-Form $\omega := v_1 dx_2 - v_2 dx_1$. Man braucht daher nur noch das Differential $d\omega$ auszurechnen:

$$d\omega = d(v_1 dx_2 - v_2 dx_1) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 = (\text{div } v) dx_1 \wedge dx_2 . \quad \square$$

Bemerkungen. 1. Die sogenannte *Divergenz* $\text{div } v$ des Vektorfeldes v ist also in ein Maß für die *lokale* (genauer: *punkttale*) *Ergiebigkeit* von v . Das Integral dieser Funktion über ganz A ist gleich dem Fluß des Vektorfeldes durch den Rand ∂A .

2. Man kann diesen Sachverhalt leicht auf den Fall kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^n mit glattem Rand verallgemeinern (allgemeiner Satz von Gauß, siehe Satz 4).

3. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich umgekehrt auch die Divergenz eines Vektorfeldes „geometrisch“ interpretieren.

Indem wir wieder von dem Vektorfeld $v = (v_1, v_2)$ zu dem Vektorfeld $v^{\perp} = (-v_2, v_1)$ übergehen, erhalten wir prinzipiell einen völlig gleichwertigen Satz, jetzt aber in anderer geometrischer Interpretation.

Satz 30.2 (Klassischer Satz von Stokes in der Ebene) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit glattem Rand und $v = (v_1, v_2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $U \supset A$. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} v_{\text{tang}} \| ds \| = \int_A (\text{rot } v) dx_1 dx_2 ,$$

wobei $\text{rot } v$ die (stetige) Funktion

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

bezeichnet.

Beweis. Es ist offensichtlich

$$\operatorname{div} v^\perp = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\operatorname{rot} v.$$

Man beachte weiter, daß $(v^\perp)^\perp = -v$. Daraus folgt:

$$\int_{\partial A} v_{\text{tang}} \|ds\| = - \int_{\partial A} (v^\perp)_{\text{norm}} \|ds\| = - \int_A (\operatorname{div} v^\perp) dx_1 dx_2 = \int_A (\operatorname{rot} v) dx_1 dx_2 \quad \square$$

Bemerkung. Auch dieser Satz kann verallgemeinert werden, und zwar auf den Fall glatt berandeter Kompakta auf (zweidimensionalen) Flächen im dreidimensionalen Raum. Dies ist der *klassische* Satz von STOKES (siehe Satz 3).

Nach den Kurvenintegralen behandeln wir den komplementären Fall von Integralen über Hyperflächen in \mathbb{R}^n . Dazu benötigen wir einige Voraussetzungen aus der (multi-) linearen Algebra.

Es seien a_1, \dots, a_{n-1} Vektoren in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Dann kann man ein *Vektorprodukt*

$$a_0 := a_1 \times \cdots \times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

(formal) erklären durch

$$a_0 := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

wobei e_1, \dots, e_n eine *orthonormale Basis* des euklidischen \mathbb{R}^n bezeichnet und in der Zeile k , $k = 2, \dots, n$, die Koordinaten der Vektors a_{k-1} bzgl. dieser Basis stehen. Dies ist genauer so zu verstehen, daß man die obige Determinante formal nach dem LAPLACESchen *Entwicklungssatz* ausrechnet. Anders ausgedrückt: Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^1 & \cdots & a_{n-1}^n \end{pmatrix},$$

definiere

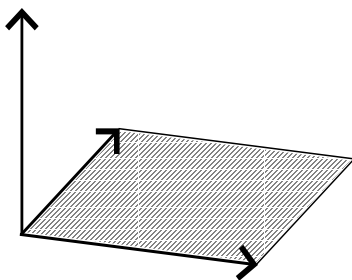
$$\alpha_i := (-1)^{i-1} \det A_i,$$

wobei die Matrix A_i aus A durch Streichen der i -ten Spalte entsteht, und

$$a_0 := \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Man kann leicht beweisen (siehe auch die Ausführungen am Ende des eigentlichen Kapitels über k -dimensionale Volumina von k -dimensionalen Parallelotopen):

- i) $\langle a_0, a_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n-1$.
- ii) $\langle a_0, a_0 \rangle > 0$, falls die Vektoren a_1, \dots, a_{n-1} linear unabhängig sind.
- iii) $\|a_0\|$ ist gleich dem $((n-1)$ -dimensionalen) Volumen des von den Vektoren a_1, \dots, a_{n-1} aufgespannten *Parallelotops*.
- iv) $\det(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) > 0$, falls a_1, \dots, a_{n-1} linear unabhängig sind. Somit definiert die geordnete Basis (a_0, \dots, a_{n-1}) dieselbe Orientierung wie die Standard-Basis (e_1, \dots, e_n) .



Figur 30.4

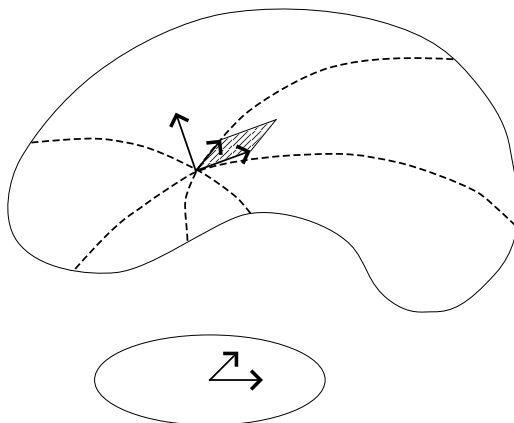
Bemerkung. Nur für $n = 3$ ist $n - 1 = 2$, so daß durch das „Kreuzprodukt“ nur in \mathbb{R}^3 ein Produkt im eigentlichen Sinne erklärt ist, das zudem *anti-kommutativ* ist: $a_2 \times a_1 = -a_1 \times a_2$.

Wir können damit sofort Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^n$ ein sinnvolles $(n - 1)$ -dimensionales Volumen zuordnen: Ist $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine (lokale) Parametrisierung mit den Parametern t_1, \dots, t_{n-1} , so spannen für „infinitesimal kleine“ dt_1, \dots, dt_{n-1} die Vektoren

$$dt_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, dt_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}$$

ein „infinitesimal kleines“ Parallelotop „auf“ M auf mit dem $(n - 1)$ -dimensionalen Volumen

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\| dt_1 \cdot \dots \cdot dt_{n-1}.$$



Figur 30.5

Wir sollten das Volumen einer kompakten (oder allgemeiner einer Jordan-meßbaren) Teilmenge $A \subset U$ dann erklären durch

$$\text{Vol}_{n-1}(A) := \int_{\varphi^{-1}(A)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\| dt_1 \cdot \dots \cdot dt_{n-1}.$$

Wir können diesen Ausdruck mit Hilfe des vektoriellen Hyperflächenelements

$$dF = (\dots, \pm dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_1, \dots)$$

umformulieren. Wir schreiben wieder formal

$$\|dF\| = (\dots + \|dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n\|^2 + \dots)^{1/2}$$

und naheliegenderweise

$$\varphi^* \|dF\| := \left(\dots + \det^2 \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} \right|_{\substack{j=t, \dots, n, j \neq i \\ k=1, \dots, n-1}} + \dots \right)^{1/2} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

Dies ist aber nichts anderes als

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\| dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1}.$$

In anderen Worten: Mit der oben gegebenen Definition ist

$$\text{Vol}_{n-1}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_n} \right\| dt_1 \dots dt_{n-1} = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \|dF\| = \int_A \|dF\|$$

für eine Jordan-meßbare Teilmenge $A \subset U$.

Noch allgemeiner kann man wieder wie im Fall von Kurvenintegralen „gewichtete“ Volumina auf Hyperflächen M einführen durch Integrale der Form

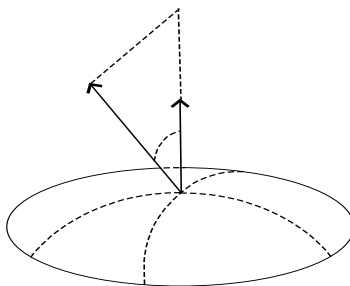
$$\int_A f \|dF\|,$$

und dies auch für allgemeine Jordan-meßbare Mengen $A \subset M$ mittels Zerlegung in Teile, die in Karten liegen. Dieses Integral ist wie im Fall $k = 1$ unabhängig von der Orientierung der Hyperfläche M .

Mit diesen Vorbereitungen ist es uns nun möglich, auch Integrale der Gestalt

$$\int_A \omega, \quad \omega = \langle v, dF \rangle = v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - + \dots$$

geometrisch zu interpretieren. Es ist, wenn β den orientierten Winkel zwischen dem Normalenvektor auf M und dem Vektor v (beide an der gleichen Stelle in $A \subset M$ genommen) bezeichnet,



Figur 30.6

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= (v_1 \circ \varphi) d\varphi_2 \wedge \dots \wedge d\varphi_n - + \dots \\ &= \left[(v_1 \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_{n-1})} - + \dots \right] dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \\ &= \left\langle v \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\rangle dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \\ &= \|v \circ \varphi\| \cdot \cos \beta \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\| dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \\ &= \varphi^* (\|v\| \cdot \cos \beta \cdot \|dF\|) = \varphi^* (v_{\text{norm}} \cdot \|dF\|), \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\int_A \omega = \int_A v_{\text{norm}} \cdot \|dF\|,$$

und die rechte Seite kann wieder als „Fluß“ des Feldes v durch A bezeichnet werden.

Bemerkung. Auch dieses Integral ist nur scheinbar unabhängig von der Orientierung, da sich das Vorzeichen von v_{norm} ändert, wenn die Orientierung vertauscht wird.

Wir können nun einen weiteren der klassischen Integralsätze ableiten. Es sei hierbei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand ∂A .

Satz 30.3 (Klassischer Satz von Stokes) *Unter den eben genannten Voraussetzungen ist für ein stetig differenzierbares Vektorfeld v auf einer Umgebung von A :*

$$\int_A (\text{rot } v)_{\text{norm}} \|dF\| = \int_{\partial A} v_{\text{tang}} \|ds\|.$$

Beweis. Mit $\omega = \langle v, ds \rangle = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$ ist

$$d\omega = \langle \text{rot } v, dF \rangle$$

mit dem Vektorfeld

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Der Rest ist eine direkte Konsequenz aus dem allgemeinen Satz von Stokes:

$$\int_A (\text{rot } v)_{\text{norm}} \|dF\| = \int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega = \int_{\partial A} v_{\text{tang}} \|ds\|. \quad \square$$

Bemerkung. Ist speziell $A \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und $v = (v_1, v_2)$ ein Vektorfeld auf einer Umgebung U von A , so betrachtet man \mathbb{R}^2 als die Ebene $x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 und setzt v fort nach $U \times \mathbb{R}$ durch $\tilde{v} := (v_1, v_2, 0)$. Aus dem vorigen Satz folgt dann als Spezialfall sofort

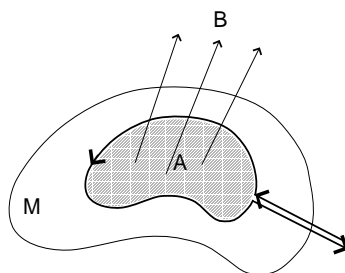
$$\begin{aligned} \int_{\partial A} v_{\text{tang}} \|ds\| &= \int_{\partial A} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) = \int_{\partial A} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) \\ &= \int_{\partial A} \tilde{v}_{\text{tang}} \|ds\| = \int_A (\text{rot } \tilde{v})_{\text{norm}} \|dF\| \\ &= \int_A \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

also erneut die schon weiter oben in Satz 2 hergeleitete Formel.

Als *Beispiel* zu dem klassischen Satz von Stokes behandeln wir kurz das Phänomen der *elektromagnetischen Induktion*, das z. B. seine Anwendung bei der Konstruktion des *Dynamos* findet. Wir betrachten dazu eine elektrisch leitende Drahtschleife auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, die ein Kompaktum $A \subset M$ glatt beranden möge. Ferner sei ein zeitlich veränderliches *magnetisches Feld* B auf \mathbb{R}^3 gegeben. (Beim Dynamo ist dieses Feld konstant, aber die Schleife bewegt sich im Feld, so daß relativ zu der Schleife das Feld, genauer der Fluß des Feldes durch die Schleife, sich doch verändert). Nach einer der berühmten MAXWELLSchen *Gleichungen* ist ein solches Magnetfeld verbunden mit einem (ebenfalls veränderlichen) *elektrischen Feld* E über die Beziehung

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t},$$

wobei t einen *Zeit*-Parameter bezeichnet.



Figur 30.7

Mit dem Satz von Stokes ergibt sich dann

$$\int_{\partial A} E_{\text{tang}} \| ds \| = - \int_A \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{norm}} \| dF \| = - \frac{d}{dt} \int_A B_{\text{norm}} \| dF \| ,$$

wobei die linke Seite als *der in der Leiterschleife induzierte Strom* und die rechte Seite als *die Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche A* zu interpretieren ist.

Schließlich erhalten wir auch den *Gaußschen Integralsatz* in seiner allgemeinen Formulierung:

Satz 30.4 (Gaußscher Integralsatz) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit glattem Rand ∂A und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von A . Dann gilt*

$$\int_{\partial A} v_{\text{norm}} \| dF \| = \int_A (\text{div } v) dV ,$$

wobei

$$\text{div } v := \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} .$$

Beweis. Die linke Seite ist das Integral über die $(n - 1)$ -Form

$$\omega = \langle v, dF \rangle = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n .$$

Das Differential $d\omega$ dieser Form berechnet sich leicht zu

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} dv_j \wedge dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n \\ &= (\text{div } v) dV , \end{aligned}$$

und der Rest folgt wieder mit der allgemeinen Stokesschen Integralformel. □

Bemerkung. Man beachte, daß man im zweidimensionalen Fall den klassischen Satz von GAUSS (Satz 1) zurück erhält:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} (v_1 dx_2 - v_2 dx_1) &= \int_{\partial A} v_{\text{norm}} \| dF \| = \int_A (\text{div } v) dV \\ &= \int_A \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 . \end{aligned}$$

Beispiel. Mit Hilfe des Satzes von GAUSS läßt sich auf einfache Weise eine schöne Beziehung zwischen dem Volumen $\text{Vol}_n(D_n)$ der Einheitskugel D_n und dem (Hyper-) Flächeninhalt $\text{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$ ihrer

Oberfläche $S^{n-1} = \partial D_n$ gewinnen. Wir betrachten zu diesem Zwecke mit dem Vektorfeld $v(x) := (x_1, \dots, x_n)$ die $(n-1)$ -Form

$$\omega(x) := \langle v(x), dF \rangle = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

auf \mathbb{R}^n . Es sei weiter etwas allgemeiner $\overline{B}_r^n \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r und dem Ursprung als Mittelpunkt, und S_r^{n-1} sei ihr $(n-1)$ -dimensionaler Rand. Wegen $\operatorname{div} v = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist dann

$$\int_{\overline{B}_r^n} d\omega = n \operatorname{Vol}_n(\overline{B}_r^n).$$

Auf der anderen Seite ist nach dem Satz von Gauß die linke Seite gleich

$$\int_{S_r^{n-1}} \omega = \int_{S_r^{n-1}} v_{\text{norm}} \|dF\| = r \int_{S_r^{n-1}} \|dF\| = r \operatorname{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}).$$

Also ist insgesamt

$$\operatorname{Vol}_n(\overline{B}_r^n) = \frac{r}{n} \operatorname{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}) \quad \text{und speziell} \quad \operatorname{Vol}_n(D_n) = \frac{1}{n} \operatorname{Vol}_{n-1}(S^{n-1}).$$

Für kleine n ist uns diese Formel wohlvertraut:

$$2 \operatorname{Vol}_2(\overline{B}_r^2) = 2(\pi r^2) = r(2\pi r) = r \operatorname{Vol}_1(S_r^1), \quad 3 \operatorname{Vol}_3(\overline{B}_r^3) = 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = r(4\pi r^2) = r \operatorname{Vol}_2(S_r^2).$$

Als letzte spezielle Ausprägung des allgemeinen Satzes von Gauß leiten wir den *Satz von GREEN* ab. Hierzu müssen wir an eine einfache Beziehung aus der Vektoranalysis erinnern: Ist f einmal und g zweimal stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so ist $f \operatorname{grad} g$ ein einmal stetig differenzierbares Vektorfeld, dessen Divergenz sich einfach berechnet zu

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \langle f, g \rangle,$$

wobei Δ den LAPLACE-Operator bezeichnet. Durch Subtraktion folgt hieraus unmittelbar, sofern auch f zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) = f \Delta g - g \Delta f.$$

Für eine kompakte Menge $A \subset U$ mit glattem Rand ist dann wegen des Satzes von Gauß

$$\int_A (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_{\partial A} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f)_{\text{norm}} \|dF\|.$$

Nun ist aber

$$(f \operatorname{grad} g)_{\text{norm}} = f (\operatorname{grad} g)_{\text{norm}} = f \frac{\partial g}{\partial \nu},$$

wobei

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = \langle \operatorname{grad} g, \nu \rangle$$

die Ableitung von g in Richtung des normierten äußeren Normalenvektors ν in einem Punkt des Randes ∂A bezeichnet. - Wir haben somit bewiesen:

Satz 30.5 (Greensche Integral - Formel) Sind f, g zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ist $A \subset U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand, so gilt

$$\int_A (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_{\partial A} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) \|dF\|.$$

Die klassischen Integralsätze geben einem die Möglichkeit an die Hand, den vektor-analytischen Funktionen wie der *Divergenz* und der *Rotation* eine sinnvolle physikalische Interpretation zu geben. Dies wollen wir im folgenden erläutern. Dazu betrachten wir eine Kugel B_ε um einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit dem Radius ε . Aus dem Satz von Gauß folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon} v_{\text{norm}} \|dF\| = \int_{B_\varepsilon} (\operatorname{div} v) dV$$

und daraus

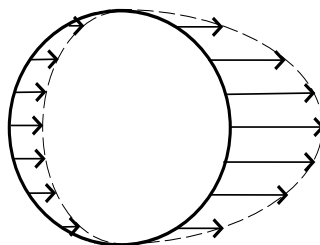
$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} v_{\text{norm}} \|dF\| = \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} (\operatorname{div} v) dV.$$

Da die Funktion $\operatorname{div} v$ stetig ist, sieht man sofort, daß die rechte Seite bei $\varepsilon \searrow 0$ gegen den Wert $\operatorname{div} v(x)$ konvergiert. - Wir können deshalb festhalten:

Satz 30.6 Ist $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt an jeder Stelle $x \in U$:

$$\operatorname{div} v(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} v_{\text{norm}} \|dF\|.$$

Bemerkung. Die Divergenz eines Vektorfeldes v an einer Stelle x ist also bei infinitesimal kleinem ε gleich dem Verhältnis des *Flusses* von v durch die Oberfläche ∂B_ε zu dem Volumen von B_ε . Dies rechtfertigt unsere frühere Interpretation der Divergenz als „Ergiebigkeit“ des Vektorfeldes v . Ist insbesondere $\operatorname{div} v(x) > 0$, so ist bei hinreichend kleinem ε auch der Fluß durch ∂B_ε positiv; stellt man sich also das Vektorfeld v als stationäres Flüssigkeitsfeld vor, so „fließt etwas aus dem Punkt x heraus“. Man spricht in diesem Fall in naheliegender Weise auch von einer *Quelle*. Einen Punkt x mit $\operatorname{div} v(x) < 0$ nennt man entsprechend eine *Senke*. Ein Vektorfeld v mit $\operatorname{div} v \equiv 0$ heißt entsprechend auch *quellen- und senkenfrei*.

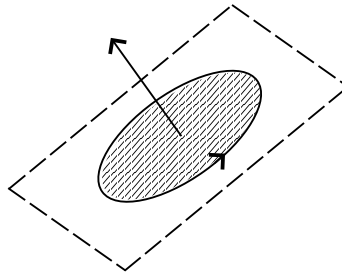


Figur 30.8

Auch die *Rotation* eines dreidimensionalen Vektorfeldes kann einer geometrisch-physikalischen Veranschaulichung zugeführt werden. Die Situation ist hier etwas komplizierter als bei der Divergenz, da es sich bei der Rotation selbst wieder um einen Vektor handelt. Wir werden also versuchen, die *Komponenten* von $\operatorname{rot} v$ geeignet zu interpretieren. Da alle Ausdrücke unter Translationen invariant sind, können wir uns auf die Betrachtung eines Vektorfeldes um den Nullpunkt des \mathbb{R}^3 beschränken.

Satz 30.7 Es sei (w_1, w_2, w_3) eine positiv orientierte Orthonormal-Basis im euklidischen \mathbb{R}^3 . Weiter sei $v = (v_1, v_2, v_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung des Nullpunktes $0 \in \mathbb{R}^3$, und es sei D_ε ein positiv orientierter Kreis in der (w_1, w_2) -Ebene um den Ursprung. Dann gilt für den Anteil der Rotation in Normalenrichtung zu dieser Ebene :

$$((\operatorname{rot} v)(0))_{\text{norm}} := \langle (\operatorname{rot} v)(0), w_3 \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}_2(D_\varepsilon)} \int_{\partial D_\varepsilon} v_{\text{tang}} \|ds\|.$$



Figur 30.9

Beweis. Es sei $M \cong \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die durch die Vektoren w_1, w_2 aufgespannte euklidische Ebene und $A = \overline{D}_\varepsilon \subset M$ die kompakte Kreisscheibe mit Mittelpunkt $x = 0$ und Radius ε , wobei ε so klein gewählt sei, daß diese Kreisscheibe in dem Definitionsbereich U des Vektorfeldes v enthalten ist. Dann ist nach dem klassischen Satz von Stokes

$$\int_{\overline{D}_\varepsilon} (\operatorname{rot} v)_{\text{norm}} \|dF\| = \int_{\partial D_\varepsilon} v_{\text{tang}} \|ds\|.$$

Wie oben sieht man wegen der Stetigkeit des Vektorfeldes $\operatorname{rot} v$, daß

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}_2(\overline{D}_\varepsilon)} \int_{\overline{D}_\varepsilon} (\operatorname{rot} v)_{\text{norm}} \|dF\| = ((\operatorname{rot} v)(0))_{\text{norm}}.$$

Damit ist

$$((\operatorname{rot} v)(0))_{\text{norm}} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}_2(\overline{D}_\varepsilon)} \int_{\partial D_\varepsilon} v_{\text{tang}} \|ds\|,$$

also gleich dem (Grenzwert des) Verhältnis(es) der totalen Rotation von v längs eines kleinen (richtig orientierten) Kreises ∂D_ε senkrecht zu der betrachteten Richtung und dem Flächeninhalt $\operatorname{Vol}_2(\overline{D}_\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$. \square

Bemerkungen. 1. Die Zuordnung $\omega = \sum f_j dx_j \mapsto v = (f_1, \dots, f_n)$ ist, wie schon mehrfach betont, nicht invariant bzgl. allgemeiner differenzierbarer Koordinatentransformationen. Die Koeffizienten links und rechts transformieren sich *kontragredient* zueinander, also insbesondere bei einer *linearen* Koordinatentransformation mit Matrix A durch $A \leftrightarrow (A^t)^{-1}$. Ein Spezialfall ist gegeben, wenn $A = (A^t)^{-1}$, d. h. wenn $A \cdot A^t = E$ und somit die Matrix A *orthogonal* ist. Dies impliziert:

Die klassischen Integralsätze sind invariant unter *eigentlichen Bewegungen* des Raumes.

Daß dies für allgemeine Diffeomorphismen nicht der Fall ist, wird schon daran klar, daß bei $\|dF\|$, $\|ds\|$ etc. die euklidische Metrik des \mathbb{R}^3 eingeht.

2. Hingegen ist die *allgemeine Form* des Satzes von Stokes in der Formulierung mit Differentialformen invariant unter *beliebigen Diffeomorphismen*! Dies hat durchaus eine physikalische (orientierte) Bedeutung. Mehr dazu (z. B. Maxwell'sche Gleichungen, etc.) siehe bei GRAUERT - LIEB, *Differential- und Integralgleichung III*, oder auch bei BRÖCKER, *Analysis in mehreren Variablen*.

Es ist klar, daß man im Falle $1 < k < n - 1$ Differentialformen nicht mit Vektorfeldern in Verbindung bringen kann. Trotzdem kann man auch für k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ *Volumina* bestimmen. Auch hier geht selbstverständlich die *euklidische* Maßbestimmung des \mathbb{R}^n ein, so daß man allgemeiner in diesem Zusammenhang die Verhältnisse auf RIEMANN'schen *Mannigfaltigkeiten* studieren könnte.

Um den „metrischen Tensor“ für eine solche Untermannigfaltigkeit einführen zu können, benötigen wir aus der (multi-) linearen Algebra einfache Formeln für das k -dimensionale Volumen eines

Parallelotops

$$P_k(a_1, \dots, a_k) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^k t_j a_j, 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, \dots, k \right\}$$

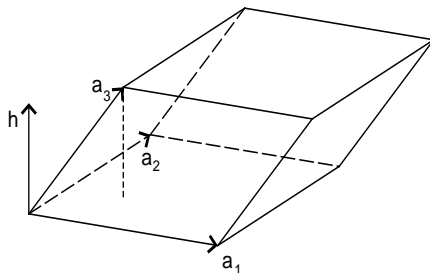
mit vorgegebenen Vektoren $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Wir gehen hierbei induktiv (nach k) vor und bedienen uns des GRAM-SCHMIDTSchen *Orthonormalisierungsverfahrens*. Dazu schreiben wir

$$v_k(a_1, \dots, a_k) := \text{Vol}_k P_k(a_1, \dots, a_k)$$

und definieren per Induktion

$$v_1(a_1) := \|a_1\|, \\ v_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1}) := \begin{cases} v_k(a_1, \dots, a_k) \cdot \|h_{k+1}\|, & a_1, \dots, a_k \text{ linear unabhängig,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei h_{k+1} die eindeutig bestimmte *Höhe* des gegebenen $(k+1)$ -dimensionalen Parallelotops $P_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1})$ bzgl. der Basis $P_k(a_1, \dots, a_k)$ bezeichnet.



Figur 30.10

Damit diese Definition überhaupt sinnvoll ist, müssen wir zumindest zeigen können, daß sie von der Reihenfolge der Vektoren a_1, \dots, a_k *unabhängig* ist. Dies und mehr beinhaltet der folgende

Satz 30.8 *Es gilt*

$$(*)_k \quad v_k^2(a_1, \dots, a_k) = \det \left(\langle a_i, a_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq k},$$

und es ist $v_k^2(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ genau dann, wenn die Vektoren a_1, \dots, a_k linear unabhängig sind.

Bemerkung. Man nennt die Matrix $(\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$ auch die GRAMSche *Matrix* zu den Vektoren a_1, \dots, a_k .

Beweis. Für $k = 1$ sind die Aussagen des Satzes offenbar richtig. Seien sie also schon für ein festes $k \in \mathbb{N}^*$ bewiesen, und seien die Vektoren $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ fest vorgegeben. Man sieht sofort, daß die Gramsche Matrix ausgeartet ist, wenn die Vektoren a_1, \dots, a_k linear abhängig sind. Damit gilt die Formel $(*)_{k+1}$ für linear abhängige a_1, \dots, a_k . Es seien also diese Vektoren unabhängig. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung eindeutig bestimmte reelle Zahlen c_1, \dots, c_k , so daß

$$c_1 \langle a_1, a_j \rangle + \dots + c_k \langle a_k, a_j \rangle = \langle a_{k+1}, a_j \rangle, \quad j = 1, \dots, k.$$

Offensichtlich ist $c_1 a_1 + \dots + c_k a_k$ die (eindeutig bestimmte) *orthogonale Projektion* von a_{k+1} in den von den Vektoren a_1, \dots, a_k erzeugten k -dimensionalen Unterraum und daher

$$h_{k+1} := a_{k+1} - (c_1 a_1 + \dots + c_k a_k)$$

die gesuchte Höhe.

Subtrahiert man nun in der Gramschen Matrix für a_1, \dots, a_{k+1} von der letzten Spalte c_1 -mal die erste Spalte, c_2 -mal die zweite Spalte etc., so erhält man eine neue Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \vdots \\ \langle \langle a_i, a_j \rangle \rangle_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline & \langle a_{k+1}, a_{k+1} - (c_1 a_1 + \dots + c_k a_k) \rangle \end{array} \right)$$

mit unveränderter Determinante. Der untere rechte Eintrag ist aber gleich

$$\langle a_{k+1}, h_{k+1} \rangle = \langle h_{k+1} + c_1 a_1 + \dots + c_k a_k, h_{k+1} \rangle = \|h_{k+1}\|^2,$$

und damit gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\det (\langle \langle a_i, a_j \rangle \rangle_{1 \leq i, j \leq k+1}) = \det (\langle \langle a_i, a_j \rangle \rangle_{1 \leq i, j \leq k}) \cdot \|h_{k+1}\|^2 = v_{k+1}^2(a_1, \dots, a_{k+1}).$$

Selbstverständlich ist $v_{k+1}^2(a_1, \dots, a_{k+1}) > 0$ (genau dann), wenn die Vektoren a_1, \dots, a_{k+1} linear unabhängig sind, denn dann ist $v_k(a_1, \dots, a_k) > 0$ und $h_{k+1} \neq 0$. \square

Bemerkung. Ist (a_1, \dots, a_k) ein *Orthonormalsystem*, d. h. gilt $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$, so ist $v_k(a_1, \dots, a_k) = 1$ in Übereinstimmung mit unserer geometrischen Vorstellung.

Wir wollen jetzt noch eine wichtige Formel zur Berechnung der Gramschen Matrix angeben und beweisen. Diese wird uns zur Einführung des metrischen Tensors auf beliebigen Untermannigfaltigkeiten von Nutzen sein. Dazu betrachten wir weitere Vektoren b_1, \dots, b_k im \mathbb{R}^n und bilden die Determinante

$$\det (\langle \langle b_i, a_j \rangle \rangle) = \det ({}^t B A),$$

wobei $A := (a_1, \dots, a_k)$, $B := (b_1, \dots, b_k) \in M(n \times k, \mathbb{R})$. Offensichtlich ist diese Funktion bei festem B eine *alternierende Multilinearform* in den Einträgen a_1, \dots, a_k , die wir mit λ_B bezeichnen. Nach allgemeinen Aussagen der multilinearen Algebra kann diese Form bzgl. der Standardbasis e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n dann eindeutig dargestellt werden als

$$\lambda_b = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} b_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

Hierbei ist

$$b_{i_1, \dots, i_k} = \lambda_B(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \det {}^t B \cdot (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \det B_{i_1, \dots, i_k},$$

wenn B_{i_1, \dots, i_k} die Matrix bezeichnet, die man aus B erzeugt, indem man alle Zeilen streicht außer der i_1 -ten, i_2 -ten etc. - Hieraus folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} \lambda_B(a_1, \dots, a_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} b_{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(a_1, \dots, a_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det A_{i_1, \dots, i_k} \det B_{i_1, \dots, i_k}, \end{aligned}$$

wobei die Matrix A_{i_1, \dots, i_k} genauso wie B_{i_1, \dots, i_k} gebildet wird.

Wir sind besonders an dem Spezialfall $B = A$ interessiert. - Wir fassen hierfür zusammen:

Satz 30.9 Für jede Gramsche Matrix ${}^t A \cdot A$ gilt :

$$\det({}^t A \cdot A) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det^2 A_{i_1, \dots, i_k} .$$

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir schreiben dann formal

$$\|dF_k\| := \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \|dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\|^2 \right)^{1/2}$$

und nennen diesen Ausdruck das k -dimensionale (skalare) „Flächenelement“ oder „Volumenelement“ (auch „Oberflächenelement“ genannt und mit Symbolen wie $d\mathcal{O}_k$, do_k etc. bezeichnet). Wir können eine solche Form integrieren, indem wir sie (lokal) formal bzgl. einer Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow U = \Omega \cap M$ zu einer k -Form $\varphi^* \|dF_k\|$ auf $V \subset \mathbb{R}^k$ liften und dort integrieren. Selbstverständlich setzen wir

$$\varphi^* \|dF_k\| := \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right|^2 \right)^{1/2} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k ,$$

und dies ist nach den vorstehenden Ausführungen nichts anderes als das k -dimensionale Volumen des infinitesimal kleinen Parallelotops, das aufgespannt wird von den Tangentialvektoren

$$dt_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} , \dots , dt_k \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} .$$

Es erscheint daher sinnvoll, für eine Jordan-meßbare Menge $A \subset U \subset M$ zu setzen:

$$\text{Vol}_k(A) := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \|dF_k\| =: \int_A \|dF_k\| .$$

Man beachte, daß diese Definition für $k = 1$ und $k = n - 1$, n mit den früher gegebenen übereinstimmt.

Wie auch weiter oben verallgemeinern wir diesen Integralbegriff noch für den Fall, daß $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist und die Menge A zerlegt werden kann in eine endliche Vereinigung $\bigcup A_j$ von Jordan-meßbaren Mengen, so daß $A_j \subset \subset U_j$ bzgl. einer Karte $\varphi_j : V_j \rightarrow U_j = \Omega_j \cap M$. Wir setzen dann selbstverständlich

$$\int_A f \|dF_k\| := \sum_{j=1}^N \int_{A_j} f \|dF_k\| , \quad \int_{A_j} f \|dF_k\| := \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} f(\varphi_j(t)) \varphi_j^* \|dF_k\| .$$

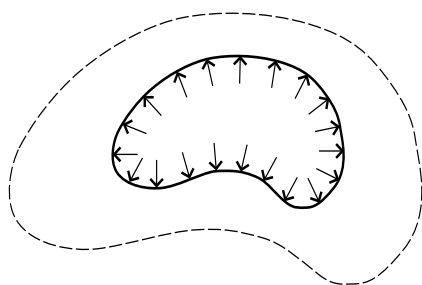
Bemerkung. Ist M orientiert, so ist $\|dF_k\|$ tatsächlich eine *Volumenform* auf M , also die wohlbestimmte k -Form ω_M mit der Eigenschaft $(\omega_M(x))(v_1, \dots, v_k) = 1$ für jede orientierte orthonormale Basis (v_1, \dots, v_k) des Tangentialraums $T_{M,x}$.

Anhang: Anwendungen des Satzes von Stokes

Es sollen jetzt noch einige Anwendungen des Satzes von Stokes oder seiner klassischen Varianten skizziert werden - dabei halte ich mich stark an das Buch von TH. BRÖCKER, loc.cit. Bröcker schreibt: „Die einfache Formel des Hauptsatzes, suggestiv durch eine sinnreiche Bezeichnung, stellt eine Beziehung her zwischen etwas Geometrischem - dem Rand $[\partial M]$ - und etwas Analytischem, der äußeren $[-]$ Ableitung. Und so führt der Satz dazu, daß man aus geometrischen Aussagen analytische erhält, $[-]$ “. Und natürlich, wie wir sehen werden, auch umgekehrt. Dazu jetzt ein paar Beispiele.

Satz 30.10 *Es sei $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge der Mannigfaltigkeit M mit glattem Rand. Dann gibt es keine stetig differenzierbare Retraktion r von der Menge A auf ihren Rand ∂A ; d. h. es gibt keine C^1 -Abbildung*

$$r : A \rightarrow \partial A \quad \text{mit} \quad r|_{\partial A} = \text{id}_{\partial A} .$$



Figur 30.11

Beweis. Angenommen, es gäbe doch ein solches r . Wenn wir voraussetzen, daß M orientierbar ist (was für die Richtigkeit des Satzes unerheblich, für den Beweisansatz aber unerläßlich ist), so ist auch ∂A orientierbar, und es gibt folglich eine $(k - 1)$ -Form ω auf ∂A ohne Nullstellen. Wir können dann weiter ω so wählen, daß ohne Einschränkung

$$\int_{\partial A} \omega > 0$$

ist. Nun gilt aber $d(r^*\omega) = r^*(d\omega) = r^*0$, da der Rand ∂A von der Dimension $k - 1$ ist und folglich $d\omega = 0$ gilt. Also ist wegen $r|_{\partial A} = \text{id}_{\partial A}$:

$$0 = \int_A d(r^*\omega) = \int_{\partial A} r^*\omega = \int_{\partial A} \omega > 0 ,$$

was offensichtlicher Unsinn ist. □

Als Folgerung notieren wir den

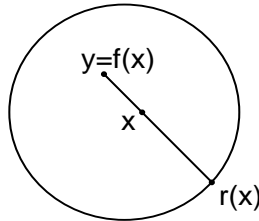
Satz 30.11 (Brouwerscher Fixpunktsatz) *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in einer Umgebung U der kompakten Einheitskugel $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ mit $f(\partial D) \subset D$. Dann besitzt f einen Fixpunkt in D .*

Bemerkungen. 1. Der Satz ist auch richtig für eine nur *stetige* Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; einen Beweis hierfür kann man aus der obigen Fassung gewinnen, indem man f stetig in eine Umgebung fortsetzt und die Fortsetzung dann stetig differenzierbar approximiert.

2. Speziell ist der Satz also gültig für stetige Abbildungen $f : D \rightarrow D$.

3. Der Spezialfall $n = 1$ ist uns wohl vertraut; es handelt sich dabei um den *Zwischenwertsatz*.

Beweis. Angenommen, f würde keinen Fixpunkt in D besitzen. Es sei also $f(x) =: y \neq x$ für alle $x \in D$. Bilde dann zu gegebenem x die Strecke von y nach x und verlängere bis zum Schnittpunkt $r(x) \in S^{n-1} = \partial D$. Nach Konstruktion ist $r : D \rightarrow \partial D$ eine (stetige) Abbildung mit $r|_{\partial D} = \text{id}_{\partial D}$.



Figur 30.12

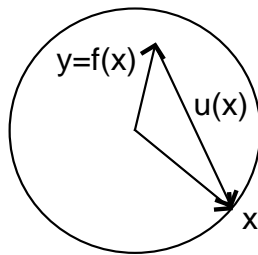
Es genügt zu beweisen, daß r sogar *stetig differenzierbar* ist, denn dies steht dann im Widerspruch zu Satz 10. Hierzu ist tatsächlich die Bedingung $f(\partial D) \subset D$ erforderlich! Wir schreiben

$$r(x) = x + \tau(x) \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|},$$

Wegen $\|r(x)\| = 1$ und $\tau(x) \geq 0$ ist dann

$$\tau(x) = -\langle x, u \rangle + \sqrt{1 - \|x\|^2 + \langle x, u \rangle^2} \quad \text{mit} \quad u := u(x) := x - f(x).$$

Man braucht dann nur noch einzusehen, daß der Radikand unter dem Wurzelzeichen niemals Null wird. Dies ist aber auf jeden Fall richtig, wenn $\|x\| < 1$. Ist aber $\|x\| = 1$, so kann wegen $f(\partial D) \subset D$ der Vektor u niemals auf x senkrecht stehen.



Figur 30.13

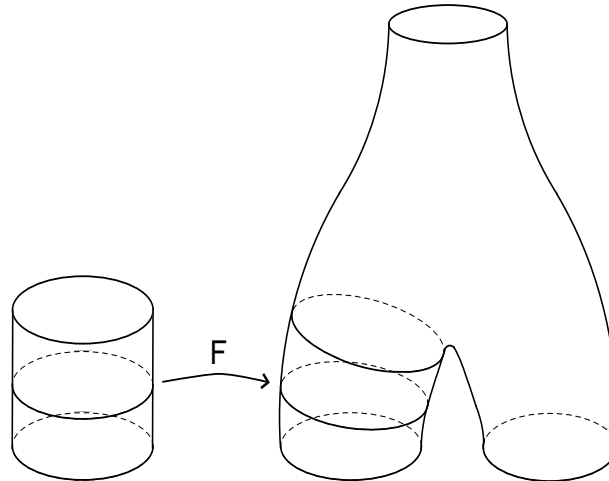
Somit ist also

$$1 - \|x\|^2 + \langle x, u \rangle^2 = \langle x, u \rangle^2 > 0. \quad \square$$

Man kann auch die früheren *Homotopie-Überlegungen* für Kurven wesentlich verschärfen: Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ seien C^k -Abbildungen. Dann heißen f_0, f_1 C^k -homotop, falls eine C^k -Abbildung

$$F : I \times M \longrightarrow N, \quad I = [0, 1],$$

existiert mit $F(0, x) = f_0(x)$, $F(1, x) = f_1(x)$, $x \in M$.



Figur 30.14

Satz 30.12 (Monodromiesatz) Die Mannigfaltigkeit M sei geschlossen (d. h. kompakt ohne Rand) und orientiert, N sei eine beliebige Mannigfaltigkeit, und die Abbildungen $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ seien \mathcal{C}^1 -homotop. Ist dann ω eine stetig differenzierbare geschlossene Form auf N vom Grad $m = \dim M$, so gilt :

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega .$$

Beweis. Die Teilmenge $I \times M \subset \mathbb{R} \times M$ ist kompakt und besitzt einen glatten Rand. Sei F eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 . Wegen $F^*(d\omega) = 0$ folgt

$$0 = \int_{I \times M} F^*(d\omega) = \int_{I \times M} d(F^*\omega) = \int_{\partial(I \times M)} F^*\omega = \int_M f_1^*\omega - \int_M f_0^*\omega . \quad \square$$

Folgerung 30.13 Die Mannigfaltigkeit M sei geschlossen und orientiert. Wenn $\dim M > 0$ ist, so ist die Identität id_M nicht homotop zu einer konstanten Abbildung $M \rightarrow x_0 \in M$, d. h.: M läßt sich nicht stetig differenzierbar in sich auf einen Punkt zusammenziehen.

Beweis. Wähle eine Top-Form ω auf M mit $\int_M \omega \neq 0$ und wende den vorigen Satz an. □

Satz 30.14 (vom stetig gekämmten Igel) Sei $\tau : S^n \rightarrow S^n$ die Antipodenabbildung $\tau(x) := -x$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- a) τ ist homotop zur Identität ;
- b) S^n besitzt ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld ohne Nullstellen ;
- c) n ist ungerade.

Bemerkung. Insbesondere besitzt also jedes \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf S^2 mindestens eine Nullstelle. Umgangssprachlich heißt dies: „Jeder stetig gekämmte Igel besitzt mindestens einen Glatzpunkt“.

Beweis von Satz 14. 1. Der Tangentialraum von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an der Stelle $x \in S^n$ wird beschrieben durch $T_{S^n, x} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\}$. Durch

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) := \det(x, v_1, \dots, v_n), \quad v_1, \dots, v_n \in T_{S^n, x},$$

wird die *kanonische Volumenform* ω auf S^n gegeben, und es gilt, wenn τ homotop zu der Identität id ist:

$$0 < \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \tau^{ast} \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega.$$

Dies ist nur möglich bei ungeradem n . Also ist a) \implies c) gezeigt.

2. Wenn n ungerade ist, dann ist $n + 1 = 2m$ und $S^n \subset \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$. Wir schreiben $x = u + iv$ für Vektoren in \mathbb{C}^m mit $u, v \in \mathbb{R}^m$. Offensichtlich ist dann die Zuordnung

$$S^n \ni x = u + iv \longmapsto ix := -v + iu \perp x$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf S^n ohne Nullstellen.

3. Es muß also noch b) \implies a) bewiesen werden. Es sei also $x \mapsto v(x)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf S^n ohne Nullstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sogar $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$ annehmen. Wegen $v(x) \perp x$ wird durch

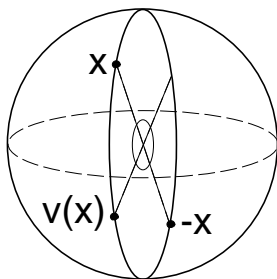
$$F(x, t) := (\cos \pi t) \cdot x + (\sin \pi t) \cdot v(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung $F : S^n \times I \rightarrow S^n$ definiert mit

$$F(x, 0) = \text{id}_{S^n}, \quad F(x, \frac{1}{2}) = v(x), \quad F(x, 1) = -\text{id}_{S^n} = \tau.$$

Somit ist τ homotop zur Identität. □

Bemerkung. Die Beweisidee zu dem letzten Schritt läßt sich in der folgenden Skizze veranschaulichen.



Figur 30.15

Man kann die Fragestellung über den stetig gekämmten Igel noch wesentlich verallgemeinern:

„Für welche $n \in \mathbb{N}^*$ besitzt die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ Vektorfelder v_1, \dots, v_{n-1} , die an jeder Stelle $x \in S^{n-1}$ linear unabhängig sind?“

Für $n = 1$ ist dies sicher richtig, da nichts zu beweisen ist, und auch für $n = 2$ liefert Satz 14 eine positive Antwort. Derselbe Satz impliziert aber auch, daß für $n \geq 2$ nur die *geradzahligen* n in Frage kommen.

Überraschenderweise hat dieses *topologische* Problem einen *algebraischen* Hintergrund: Man betrachte den \mathbb{R}^n mit der üblichen Addition und der euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Die Frage, die sich schon CAYLEY für den \mathbb{R}^3 stellte, ist die, ob es auf \mathbb{R}^n eine (nicht notwendig kommutative) „Multiplikation“ gibt, die mit der Addition vermöge der üblichen *Distributionsgesetze* verknüpft ist, also zusammen mit der Addition eine *Algebra-Struktur* auf \mathbb{R}^n definiert, so daß

$$(\times) \quad \|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt. Solche Algebren sind notwendig sogenannte *Divisions-Algebren*, d. h., daß aus

$$x y_1 = x y_2 \quad \text{bzw.} \quad y_1 x = y_2 x \quad \text{für ein } x \neq 0$$

automatisch $y_1 = y_2$ folgt. - Es gilt (zum Beweis siehe EBBINGHAUS ET ALII [20]) nun der außerordentlich interessante

Satz 30.15 *Der \mathbb{R}^n mit der üblichen Addition trägt genau dann die Struktur einer Divisions-Algebra, wenn S^{n-1} parallelisierbar ist. Dies tritt genau dann ein, wenn $n = 1, 2, 4, 8$. Die zugehörigen Strukturen sind eindeutig bestimmt; es handelt sich um die übliche Körperstruktur auf \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} ($n = 1, 2$), die Schiefkörperstruktur der Hamiltonschen Quaternionen auf \mathbb{R}^4 und die Divisionsalgebrastruktur der Oktonen auf \mathbb{R}^8 .*

Bemerkung. Die Existenz von $n - 1$ linear unabhängigen Vektorfeldern auf der $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre S^{n-1} bedeutet nichts anderes, als daß das Tangentialbündel $T_{S^{n-1}}$ *trivial* (oder besser: *trivialisierbar*) ist. In diesem Sinne kann man die Fragestellung übertragen auf beliebige Mannigfaltigkeiten M , die man dann aus verständlichen Gründen *parallelisierbar* nennt. - Die oben zitierten Resultate kann man also zusammenfassen in der Form:

Satz 30.16 *Unter den Sphären sind nur S^0, S^1, S^3 und S^7 parallelisierbar.*

Zum Schluß dieses Anhangs gebe ich einen Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*.

Satz 30.17 *Jedes nichtkonstante komplexe Polynom $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ besitzt mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Wir nehmen an, f habe keine Nullstelle, und führen diese Annahme mit einem *Homotopie-*Argument zu einem Widerspruch. Man hätte dann nämlich eine stetig differenzierbare Abbildung

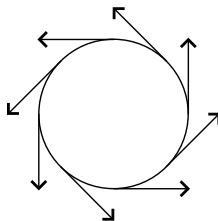
$$g := \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow S^1, \\ z \longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{cases}$$

Diese Abbildung, eingeschränkt auf $S^1 \subset \mathbb{C}$, ist aber, wie wir anschließend zeigen werden,

(*) sowohl homotop zur Projektion λ von S^1 auf den Punkt $a_0/|a_0|$

(**) als auch homotop zur Abbildung $w := h_n(z) = z^n$.

Dies führt wegen $n \geq 1$ leicht zu einem Widerspruch: (*) und (**) können dann nicht gleichzeitig gelten. Um dies einzusehen, betrachten wir die 1-Form $\omega = -y dx + x dy$ auf S^1 .



Figur 30.16

Es gilt dann, was eigentlich offensichtlich ist, aber natürlich noch nachgerechnet werden muß,

$$\int_{S^1} h_n^* \omega = 2n\pi.$$

Parametrisieren wir nämlich den Einheitskreis S^1 durch $z = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, also $x = \cos \vartheta$, $y = \sin \vartheta$, so wird die Einschränkung $i^* \omega$ von ω auf S^1 unter der Inklusion $i: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dargestellt durch

$$(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) d\vartheta = d\vartheta.$$

Die Einschränkung von h_n auf S^1 ist nichts anderes als die Abbildung $\vartheta \mapsto n\vartheta$. Infolgedessen ist die Einschränkung von $h_n^* \omega$ auf S^1 die Form $n d\vartheta$, womit die obige Identität nachgewiesen ist.

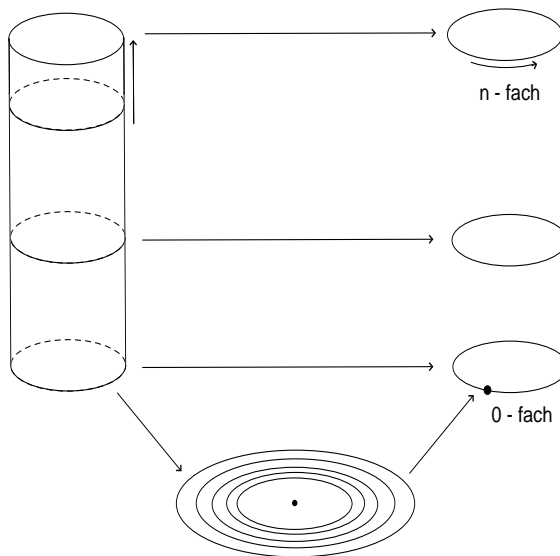
Hieraus erhält man wegen $h_n \sim g|_{S^1} \sim \lambda$ mit dem Monodromiesatz (Satz 12):

$$2n\pi = \int_{S^1} h_n^* \omega = \int_{S^1} (g|_{S^1})^* \omega = \int_{S^1} \lambda^* \omega = 0$$

und damit $n = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Wir müssen noch die Homotopie-Aussagen (*) und (**) begründen. Dazu betrachten wir die Abbildungen π und g in dem folgenden Diagramm, wobei $\pi(r, z) := rz$:

$$\mathbb{R}_+ \times S^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} S^1, \quad g = \frac{f}{|f|}$$



Figur 30.17

Wir setzen weiter

$$g_r(z) := g(rz), \quad |z| = 1.$$

Offensichtlich gilt: $g_r \sim g_0$ für alle $r \geq 0$, $g_0 = \text{const.} = a_0/|a_0|$. Wenn $r = R$ jedoch groß ist, so ist $g_R \sim g_\infty := h_n$. Es gilt nämlich

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) =: z^n (1 + \ell(z)).$$

Also ist $|\ell(z)| < 1/2$, falls $|z| \geq R$. Offensichtlich gilt dann für $R \gg 0$, $|z| = 1$, daß $g \sim g_R$.
Denn es ist

$$g_R(z) = z^n \frac{1 + \ell(Rz)}{|1 + \ell(Rz)|},$$

und die behauptete Homotopie wird hergestellt durch

$$F(t, z) = z^n \frac{1 + t\ell(Rz)}{|1 + t\ell(Rz)|}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad \square$$

Teil IV: Höherdimensionale Integrations- theorie

31 Treppenfunktionen

Wir müssen jetzt endlich die höherdimensionale Integrationstheorie entwickeln, wobei wir uns jedoch vorwiegend an unserer Einführung des eindimensionalen Integrals in Kapitel 18 orientieren können und werden. Wie jenes basiert auch das Integral für Funktionen in n Veränderlichen auf der Vorgabe eines elementaren Volumenbegriffs für die einfachsten „Figuren“ im \mathbb{R}^n , nämlich für *Quader*, d. h. kartesische Produkte von Intervallen, und den mit deren Hilfe gebildeten *Treppenfunktionen* zusammen mit ihren elementar-geometrischen Integralen. Die Gesamtheit der integrierbaren Funktionen gewinnt man dann als Abschluß des Raums der Treppenfunktionen im Raum aller Funktionen bzgl. einer geeigneten *Pseudohalbnorm* und ihr Integral durch *stetige* Fortsetzung des Integrals für Treppenfunktionen auf diesen Abschluß. Die hierzu benötigten funktional-analytischen Methoden haben wir schon in Kapitel 18 bereitgestellt, und daher können wir uns an dieser Stelle verhältnismäßig kurz fassen. - Wir beginnen mit der einfachen

Definition. Eine *Treppenfunktion* im \mathbb{R}^n ist eine Funktion φ , die Linearkombination von charakteristischen Funktionen χ_Q *kompakter* Quader

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

ist:

$$\varphi = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{Q_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Die Gesamtheit aller Treppenfunktionen bildet einen Vektorraum, den wir mit \mathcal{T}^n oder \mathcal{T} bezeichnen.

Lemma 31.1 \mathcal{T}^n enthält die charakteristischen Funktionen von beliebigen Quadern. Jede Treppenfunktion φ läßt sich schreiben in der Form

$$\varphi = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{Q_k}$$

mit nicht notwendig kompakten Quadern, so daß $Q_k \cap Q_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$. In diesem Fall sind die Koeffizienten c_k durch die Treppenfunktion φ eindeutig bestimmt. Insbesondere ist mit φ auch $|\varphi|$ eine Treppenfunktion, so daß \mathcal{T}^n sogar einen Funktionenverband bildet.

Beweis. Ist $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, so ist

$$\chi_Q = \chi_{I_1} \cdot \cdots \cdot \chi_{I_n}.$$

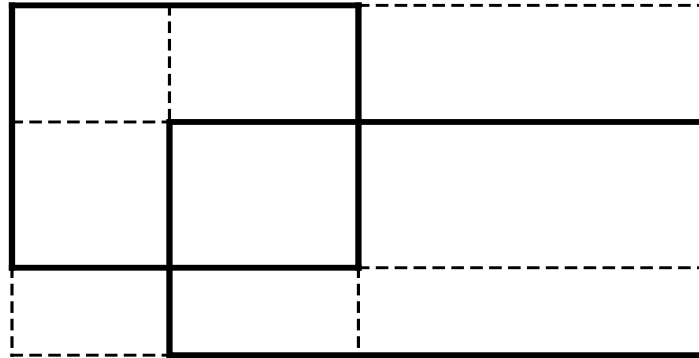
Ist nun z. B. I_1 ein halboffenes Intervall, also etwa $I_1 = [a_1, b_1)$, so ist

$$\chi_{I_1} = \chi_{[a_1, b_1]} - \chi_{[b_1, b_1]},$$

und entsprechende Darstellungen findet man für $(a_1, b_1]$ und das offene Intervall (a_1, b_1) . Hiermit folgt sofort die erste Behauptung.

Für die zweite Aussage ordnen wir für festes j alle auftretenden j -ten Koordinaten der Eckpunkte der Quader Q_k linear an: $x_0^{(j)} < \cdots < x_{r_j}^{(j)}$, wobei

$$\{x_0^{(j)}, \dots, x_{r_j}^{(j)}\} = \bigcup_{k=1}^r \{a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\}.$$



Figur 31.1

Dann ist φ auf jedem der paarweise disjunkten offenen Quader

$$Q_\delta^0 := (x_{\delta_1}^{(1)}, x_{\delta_1+1}^{(1)}) \times \cdots \times (x_{\delta_n}^{(n)}, x_{\delta_n+1}^{(n)}), \quad 0 \leq \delta_j < r_j$$

konstant und außerhalb

$$[x_0^{(1)}, x_{r_1}^{(1)}] \times \cdots \times [x_0^{(n)}, x_{r_n}^{(n)}]$$

gleich Null. Mit $\tilde{c}_\delta = \sum_{Q_\delta^0 \subset Q_k} c_k$ hat dann die Treppenfunktion

$$\varphi = \sum \tilde{c}_\delta \chi_{Q_\delta^0}$$

einen Träger, der in der Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Hyperebenen enthalten ist. Durch vollständige Induktion nach der Dimension n folgt die Behauptung. \square

Definition. Unter dem *Integral* einer Treppenfunktion φ versteht man die Zahl

$$\int \varphi(x) d^n x = \sum_{k=1}^r c_k \text{Vol}_n(Q_k), \quad \text{wenn } \varphi = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{Q_k}$$

mit kompakten Quadern Q_k dargestellt und

$$\text{Vol}_n(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) \text{ für } Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x \leq b_j\}$$

gesetzt wird.

Lemma 31.2 Die Definition des Integrals einer Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}^n$ ist unabhängig von der Darstellung $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k} \equiv 0$, so ist $\sum c_k \text{Vol}_n(Q_k) = 0$. Wir betrachten dazu die Darstellung von φ im vorstehenden Beweis. Es ist darin

$$\text{Vol}_n(Q_k) = \sum_{Q_\delta^0 \subset Q_k} \text{Vol}_n(\overline{Q_\delta^0})$$

(die ausgearteten Quader Q_k tragen ohnehin nicht zum Integral von φ bei). Also ist die in Rede stehende Summe

$$\sum_{k=1}^r c_k \text{Vol}_n(Q_k) = \sum_{\delta} \left(\sum_{Q_\delta^0 \subset Q_k} c_k \right) \text{Vol}_n(\overline{Q_\delta^0}) = \sum \tilde{c}_\delta \text{Vol}_n(\overline{Q_\delta^0}) = 0,$$

da alle $\tilde{c}_\delta = 0$ sind. \square

Folgerung 31.3 *Das Integral*

$$\int : \mathcal{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist ein lineares, monotonen Funktional.

Beweis. Die Linearität ist klar wegen des vorstehenden Lemmas. Ist $\varphi \geq 0$ und $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ eine Darstellung mit kompakten Quadern und $Q_j \cap Q_k$ leer oder entartet für alle $j \neq k$ (eine solche erhält man leicht aus dem ersten Lemma), so ist notwendig $c_k \geq 0$ für alle nichtentarteten Q_k und damit $\int \varphi d^n x \geq 0$. \square

Einer der wichtigsten Sätze der Integrationstheorie von Funktionen in mehreren Veränderlichen, der Satz von FUBINI, führt das Integral auf *mehrfache eindimensionale* Integrale zurück. Grundlage für seinen Beweis ist die entsprechende Aussage für Treppenfunktionen.

Satz 31.4 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen) *Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, $n = p + q$, eine Treppenfunktion. Dann ist*

$$\varphi(x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_p) \text{ fest,}$$

eine Treppenfunktion in den Variablen $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, die Funktion

$$x' \longmapsto \int \varphi(x', x'') d^{n-p} x''$$

ist eine Treppenfunktion in x' , und es gilt

$$\int \left(\int \varphi(x', x'') d^{n-p} x'' \right) d^p x' = \int \varphi(x) d^n x.$$

Beweis. Wegen der Linearität der beteiligten Integrale braucht man diese Aussage nur für charakteristische Funktionen χ_Q von kompakten Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ zu beweisen. Nun zerlegt sich Q in ein Produkt $Q' \times Q''$, $Q' \subset \mathbb{R}^p$, $Q'' \subset \mathbb{R}^q$ von niederdimensionalen kompakten Quadern, und es ist $\chi_Q = \chi_{Q'} \cdot \chi_{Q''}$, also

$$\chi_Q(x', x'') = \chi_{Q''}(x''), \quad x' \in Q', \quad \chi_Q(x', x'') = 0, \quad x' \notin Q',$$

und damit

$$x' \longmapsto \int \chi_Q(x', x'') d^{n-p} x'' = \begin{cases} \text{Vol}_{n-p}(Q''), & x' \in Q', \\ 0, & x' \notin Q'. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$\int \left(\int \chi_Q(x', x'') d^{n-p} x'' \right) d^p x' = \text{Vol}_{n-p}(Q'') \text{Vol}_p(Q') = \text{Vol}_n(Q' \times Q'') = \text{Vol}_n(Q),$$

und wegen

$$\text{Vol}_n(Q) = \int \chi_Q(x) d^n x$$

folgt die Behauptung. \square

32 Das Regel-, Darboux- und Lebesgue-Integral im \mathbb{R}^n

Wir werden nun ganz entsprechend wie in Kapitel 18 vorgehen und müssen dazu die dort eingeführten Halbnormen bzw. Pseudo-Halbnormen auf Funktionen in mehreren Veränderlichen erklären. Auf viele Beweise können wir verzichten, da sie schon in loc. cit. erbracht wurden bzw. vom Leser selbst mutatis mutandis ohne Mühe auf die allgemeinere Situation übertragen werden können.

Wir beginnen mit dem zentralen Begriff für die DARBOUXsche und RIEMANNSche Integrationstheorie.

Definition. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann definiert man

$$\|f\|^* := \inf \left\{ \int \varphi(x) d^n x : \varphi \in \mathcal{T}_n, |f| \leq \varphi \right\},$$

wobei $\|f\|^* = \infty$ zu setzen ist, wenn es keine Treppenfunktion φ mit $|f| \leq \varphi$ gibt.

Bemerkung und Definition. Offensichtlich gilt $\|f\|^* < \infty$ genau dann, wenn f beschränkt ist und die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^n \setminus Q}$ auf das Komplement eines kompakten Quaders Q verschwindet. Allgemein bezeichnet man als *Träger* einer Funktion f den Abschluß der Menge der Punkte, in denen f nicht verschwindet:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Damit ist:

$$\{f : \|f\|^* < \infty\}$$

der Vektorraum der *beschränkten* Funktionen mit *kompaktem* Träger. Anders als in Kapitel 18 bezeichnen wir im folgenden mit \mathcal{F} den Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und konsequenterweise mit $\mathcal{F}_c^b \subset \mathcal{F}$ den Untervektorraum der soeben eingeführten beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger.

Lemma 32.1 *Durch $f \mapsto \|f\|^*$ wird auf \mathcal{F} eine Pseudo-Halbnorm erklärt. Insbesondere gilt für $f, g \in \mathcal{F}$ die Dreiecksungleichung*

$$\|f + g\|^* \leq \|f\|^* + \|g\|^*.$$

Der Vektorraum \mathcal{F}_c^b ist der maximale Unterraum von \mathcal{F} , auf dem die Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|^$ endlich ist.*

Die L^1 -Pseudo-Halbnorm wird wie in einer Veränderlichen für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und kann durchaus in speziellen Fällen endlich sein, auch wenn die betrachtete Funktion weder beschränkt ist noch kompakten Träger besitzt. Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und zulassen, daß die Funktionen die Werte $\pm\infty$ annehmen dürfen. Wir schreiben daher im folgenden

$$\overline{\mathcal{F}} := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}\}.$$

Definition. Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$ setzt man

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \inf \{I(\Phi) : \Phi \text{ ist Hüllreihe zu } f\}.$$

Hierbei sind *Hüllreihen* von f Reihen der Form

$$\Phi = \sum c_k \chi_{Q_k}, \quad Q_k \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakte Quader, } c_k \geq 0,$$

so daß

$$|f(x)| \leq \Phi(x) := \sum c_k \chi_{Q_k}(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

und ihr *Inhalt* wird definiert durch

$$I(\Phi) := \sum c_k \operatorname{Vol}_n(Q_k) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Bemerkung. Es gibt Hüllreihen mit $\Phi(x) = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, z. B.

$$\Phi := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{W_j},$$

wenn W_j den kompakten Würfel in \mathbb{R}^n um 0 mit Kantenlänge $2j$ bezeichnet. Deswegen existiert die L^1 -Pseudo-Halbnorm für *alle* Funktionen $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Für einige Beweise ist es hilfreich, das folgende Lemma zur Verfügung zu haben.

Lemma 32.2 *Zur Definition der L^1 -Pseudo-Halbnorm kann man in der Definition der Hüllreihen die kompakten Quader durch beliebige, insbesondere auch durch offene Quader ersetzen.*

Beweis. Ist $\Phi = \sum_j c_j \chi_{Q_j}$ eine Hüllreihe zu $f \in \mathcal{F}$ mit beliebigen Quadern Q_j , so ist auch $\overline{\Phi} := \sum_j c_j \chi_{\overline{Q}_j}$ eine Hüllreihe zu f mit kompakten Quadern \overline{Q}_j und gleichem Inhalt $I(\overline{\Phi}) = I(\Phi)$.

Ist umgekehrt eine Hüllreihe Φ von f mit kompakten Quadern Q_j gegeben, so kann man ohne Einschränkung alle c_j echt positiv annehmen und zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ offene Quader Q'_j wählen mit $Q_j \subset Q'_j$ und $\operatorname{Vol}_n(Q'_j) = \operatorname{Vol}_n(Q_j) + \varepsilon/2^{j+1}c_j$. Dann ist auch

$$\Psi := \sum_j c_j \chi_{Q'_j}$$

eine Hüllreihe von f , da sie mindestens so groß wie die vorgegebene Hüllreihe Φ ist, und sie besitzt einen um höchstens ε größeren Inhalt als Φ . \square

Man beachte, daß $\overline{\mathcal{F}}$ keine Vektorraum-Struktur besitzt. Wir erklären dennoch rein formal in $\overline{\mathcal{F}}$ eine Anordnung, eine Addition und eine skalare Multiplikation mit reellen Zahlen durch die Festsetzungen

$$\begin{aligned} -\infty < a < \infty \text{ für alle } a \in \mathbb{R}, \quad |\pm\infty| &= \infty, \\ a + \infty &= \infty + a = \infty, \text{ falls } a > -\infty, \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty, \text{ falls } a < \infty, \\ \infty + (-\infty) &= (-\infty) + \infty = 0, \\ 0 \cdot (\pm\infty) &= 0, \quad c\infty = \infty, \text{ falls } c > 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Außerordentlich wichtig, wenn auch elementar, ist die folgende Aussage, deren Beweis wir getrost dem Leser überlassen dürfen.

Satz 32.3 *Für Funktionen $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ und Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

- a) $\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$ (Dreiecksungleichung);
- b) $\|cf\|_{L^1} = c\|f\|_{L^1}$.

Insbesondere ist die Einschränkung von $\|\cdot\|_{L^1}$ auf $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$ eine Pseudo-Halbnorm. \square

Die Dreiecksungleichung läßt sich sogar von endlichen Summen auf *Reihen* $f := \sum f_j$ mit nicht negativen Gliedern $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$ übertragen. Man beachte, daß nach unseren obigen Festsetzungen f stets als (nicht negatives) Element in $\overline{\mathcal{F}}$ wohldefiniert ist.

Satz 32.4 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung) Für die Funktionen $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$ gelte $f_j(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{L^1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{L^1}.$$

Beweis. Man wähle zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Hüllreihe Φ_j zu f_j mit $I(\Phi_j) \leq \|f_j\|_1 + \varepsilon/2^{j+1}$. Dann ist $\Phi := \sum_j \Phi_j$ eine Hüllreihe von $f = \sum_j f_j$ und also

$$\|f\|_1 \leq I(\Phi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} I(\Phi_j) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_1 + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung. \square

Für eine *Treppenfunktion* stimmen nun beide Pseudo-Halbnormen mit dem Integral ihres Betrags überein. Dies ist der wesentliche Inhalt des folgenden Lemmas, das im weiteren Fortgang unserer Überlegungen eine zentrale Rolle spielen wird.

Lemma 32.5 Ist $\varphi \in \mathcal{T}_n$, so gilt

$$\|\varphi\|^* = \|\varphi\|_1 = \int |\varphi(x)| d^n x.$$

Insbesondere ist für jeden kompakten Quader Q :

$$\|\chi_Q\|_1 = \int \chi_Q(x) d^n x = \text{Vol}_n(Q).$$

Beweis. Wir zeigen nacheinander:

- a) $\|\varphi\|^* = \int |\varphi(x)| d^n x.$
- b) $\|\varphi\|_1 \leq \int |\varphi(x)| d^n x.$
- c) $\text{Vol}_n(Q) \leq \|\chi_Q\|_1.$
- d) $\int |\varphi(x)| d^n x \leq \|\varphi\|_1.$

a) ist trivial wegen der Monotonie des Integrals und der Tatsache, daß $|\varphi|$ eine Treppenfunktion ist.

b) Da φ und $|\varphi|$ die gleiche L^1 -Pseudo-Halbnorm besitzen, können wir annehmen, daß $\varphi \geq 0$ ist. Es ist dann

$$\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k} + \psi, \quad c_k \geq 0, \quad Q_k \text{ kompakt},$$

und $\text{supp } \psi$ ist enthalten in einer endlichen Vereinigung von Hyperebenen. Es ist leicht zu sehen, daß $\|\psi\|_1 = 0$ ist und also die Ungleichung

$$\|\varphi\|_1 \leq \left\| \sum c_k \chi_{Q_k} \right\|_1$$

besteht. Nun ist aber $\Phi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ eine Hüllreihe von sich selbst. Es folgt

$$\left\| \sum c_k \chi_{Q_k} \right\|_1 \leq I(\Phi) = \sum c_k \text{Vol}_n(Q_k) = \int \varphi(x) d^n x.$$

c) Es sei $\Phi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ eine Hüllreihe zu χ_Q mit *offenen* Quadern Q_k . Es gibt dann bei festem $\varepsilon > 0$ zu jedem $x \in Q$ einen Index $N(x)$, so daß

$$\sum_{k=0}^{N(x)} c_k \chi_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon.$$

Da die Q_k offen sind, bleibt diese Ungleichung in einer ganzen Umgebung $U = U(x)$ bestehen (und auch für alle $N \geq N(x)$). Da man den kompakten Quader Q mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken kann, gibt es ein N mit

$$\Phi_N := \sum_{k=0}^N c_k \chi_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon, \quad x \in Q.$$

Damit ist, da Φ_N eine Treppenfunktion ist,

$$I(\Phi) \geq I(\Phi_N) = \sum_{k=0}^N c_k \text{Vol}_n(Q_k) = \int \Phi_N(x) d^n x \geq \int (1 - \varepsilon) \chi_Q(x) d^n x = (1 - \varepsilon) \text{Vol}_n(Q).$$

Somit ist

$$\|\chi_Q\|_1 \geq (1 - \varepsilon) \text{Vol}_n(Q),$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, notwendig auch

$$\|\chi_Q\|_1 \geq \text{Vol}_n(Q),$$

d) Es sei wieder ohne Einschränkung $\varphi \geq 0$. Es sei Q ein kompakter Quader mit $\text{supp } \varphi \subset Q$ und $m := \max \varphi$. Dann ist

$$\psi := m \chi_Q - \varphi \geq 0,$$

und nach b) gilt

$$\|\psi\|_1 \leq \int \psi(x) d^n x.$$

Dann ergibt sich aber vermittels c):

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) d^n x &= \int (m \chi_Q - \psi) d^n x = m \text{Vol}_n(Q) - \int \psi(x) d^n x \\ &\leq m \|\chi_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 32.6 Für alle Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\|f\|_1 \leq \|f\|^*.$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{F}_c^b \subset \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \|f\|_1 < \infty\}.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Teil b) im vorigen Lemma folgt: Zu jeder Treppenfunktion φ mit $\varphi \geq |f|$ gibt es eine Hüllreihe Φ zu $|f|$ mit $I(\Phi) = \int \varphi(x) d^n x$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Wir schreiben im folgenden \mathcal{F}_c für die Funktionen mit kompaktem Träger und $\mathcal{F}_c(Q)$ für die Funktionen mit Träger in einem kompakten Quader Q . Selbstverständlich hat man Inklusionen von Vektorräumen

$$\mathcal{F}_c(Q) \subset \mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}.$$

Ferner gilt die Beziehung

$$\mathcal{F}_c = \bigcup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \mathcal{F}_c(Q);$$

es besteht sogar für jede Folge $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ von kompakten Würfeln Q_j mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j$ die Gleichheit

$$\mathcal{F}_c = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_c(Q_j).$$

Auf all diesen Vektorräumen hat man die Pseudo-Halbnormen

$$\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)|, \quad \|f\|^*, \quad \|f\|_1.$$

Bezeichnet man weiter wie im Kapitel zuvor mit \mathcal{T} den Vektorraum der Treppenfunktionen, so ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_c$ und $\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{F}_c(Q)$, wenn $\mathcal{T}(Q)$ den Vektorraum der Treppenfunktionen mit Träger in Q bezeichnet. Für jede Treppenfunktion φ ist

$$\int |\varphi| d^n x = \|\varphi\|^* = \|\varphi\|_1 < \infty$$

und, wenn $\varphi \in \mathcal{T}(Q)$ liegt,

$$\int |\varphi| d^n x \leq \|\varphi\|_{\infty} \text{Vol}_n(Q).$$

Wegen

$$\left| \int \varphi d^n x - \int \psi d^n x \right| = \left| \int (\varphi - \psi) d^n x \right| \leq \int |\varphi - \psi| d^n x$$

hat man dann das folgende

Lemma 32.7 *Das Integral ist eine stetige Funktion auf dem Raum*

- $\mathcal{T}(Q)$ bzgl. der Supremums-Pseudo-Halbnorm auf $\mathcal{F}_c(Q)$,
- \mathcal{T} bzgl. der $\|\cdot\|^*$ -Pseudo-Halbnorm auf \mathcal{F}_c ,
- \mathcal{T} bzgl. der $\|\cdot\|_1$ -Pseudo-Halbnorm auf \mathcal{F} .

Wir erinnern jetzt an den folgenden allgemeinen Satz, den wir schon früher bewiesen haben (siehe Satz 18.21).

Satz 32.8 *Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|$. Dann ist*

$$V_{\text{fin}} := \{v \in V : \|v\| < \infty\}$$

ein \mathbb{R} -Untervektorraum von V mit Halbnorm $\|\cdot\|$.

Ist $T \subset V_{\text{fin}}$ ein Untervektorraum, so ist sein (Folgen-) Abschluß

$$\bar{T} = \{v \in V : \text{es gibt eine Folge } v_j \in T \text{ mit } \|v - v_j\| \rightarrow 0\}$$

ein Untervektorraum von V_{fin} .

Ist $I : T \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von T in einen Banach-Raum W , die bzgl. der Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|$ stetig ist im Sinne von $\|I(v)\|_W \leq C\|v\|$, $v \in T$, so besitzt diese eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $\bar{I} : \bar{T} \rightarrow W$. Es gilt

$$\bar{I}(v) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(v_j), \text{ wenn } v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j, \quad v_j \in T.$$

Insbesondere gilt die gleiche Abschätzung wie für I :

$$\|\bar{I}(v)\|_W \leq C\|v\|, \quad v \in \bar{T}.$$

Aufgrund der obigen Beispiele liegt der Raum der *Treppenfunktionen* jeweils in dem Unterraum mit *endlicher* Pseudo-Halbnorm. Man kann dann in jedem der Fälle den Abschluß bilden und das Integral auf den Abschluß fortsetzen. Man gelangt so zu den verschiedenen Integral-Begriffen.

Definition. a) Für $\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{F}_c(Q)$ mit der Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|_\infty$ heißt $\overline{\mathcal{T}(Q)}$ der Raum der *Regelfunktionen* $\text{Reg}(Q)$ auf Q und die Fortsetzung des Integrals das *Regel-Integral*:

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j(x) d^n x$$

für jede Folge φ_j von Treppenfunktionen, die auf Q *gleichmäßig* gegen f konvergiert. Wir setzen weiter

$$\text{Reg} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{Reg}(Q_j)$$

für eine Ausschöpfungsfolge von \mathbb{R}^n mit kompakten Quadern. Man sieht leicht, daß auch auf diesem Vektorraum das Regelintegral erklärt werden kann.

b) Für $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_c$ und $\|\cdot\|^*$ heißt $\overline{\mathcal{T}}$ der Raum der *Darboux-integrierbaren Funktionen* Darb , und die Fortsetzung des Integrals heißt das *Darboux-Integral*. Eine Funktion $f \in \mathcal{F}_c^b$ ist genau dann integrierbar im Darboux'schen Sinne, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ gibt mit $|f - \varphi| \leq \psi$ und

$$\int \psi(x) d^n x \leq \varepsilon.$$

Wählt man speziell Folgen φ_j, ψ_j zu einer Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$, so ist

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j(x) d^n x.$$

Wir werden die Integrierbarkeitsbedingung weiter unten noch umformulieren.

c) Für $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ und $\|\cdot\|_1$ hat man die *Lebesgue-integrierbaren Funktionen* \mathcal{L}^1 mit dem *Lebesgue-Integral*. Eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ ist genau dann integrierbar im Lebesgueschen Sinne, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ und eine Hüllreihe Φ zu $f - \varphi$ gibt mit

$$I(\Phi) \leq \varepsilon.$$

Wählt man speziell Folgen φ_j, Φ_j zu einer Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$, so ist

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j(x) d^n x.$$

Bemerkung. Da in diesem Text das Lebesgue-Integral im Vordergrund steht, wird im Allgemeinen unter „Integrierbarkeit“ ohne weiteren Zusatz die *Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne* verstanden. Man kann die letzte Umformulierung der Integrierbarkeit und des Integrals dann auch ohne große Mühe auf Funktionen in $\overline{\mathcal{F}}$ ausdehnen und gelangt so zu der *Menge* $\overline{\mathcal{L}}^1$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, die den Raum \mathcal{L}^1 umfaßt. Es ist $\overline{\mathcal{L}}^1 \cap \mathcal{F} = \mathcal{L}^1$.

Lemma 32.9 *Es gelten die Vektorraum-Inklusionen $\text{Reg}(Q) \subset \text{Darb} \subset \mathcal{L}^1$. Die jeweiligen (linearen) Integrale sind Fortsetzungen der vorhergehenden. Sie sind außerdem monotone Funktionale. Im Darboux'schen bzw. Lebesgueschen Fall gilt für die jeweiligen integrierbaren Funktionen f :*

$$\|f\|^* = \int |f(x)| d^n x, \quad \|f\|_1 = \int |f(x)| d^n x.$$

Beweis. Ist $f \in \text{Reg}(Q)$, so ist $\|f - \varphi_j\|_\infty \rightarrow 0$ für eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_j \in \mathcal{T}(Q)$, also $|f - \varphi_j| \leq c_j \chi_Q$ mit $c_j \searrow 0$, d. h. $\|f - \varphi_j\|^* \leq c_j \text{Vol}_n(Q)$. Die zweite Inklusion folgt aus $\|f - \varphi_j\|_1 \leq \|f - \varphi_j\|^*$.

Von den restlichen Behauptungen bedürfen nur die letzten Gleichungen einer Begründung. Wir beweisen sie weiter unten. \square

Bemerkung. Die Inklusionen $\text{Reg}(Q) \subset \text{Darb} \subset \mathcal{L}^1$ sind echt. Denn die charakteristische Funktion χ_C des Cantorschen Diskontinuums ist keine Regelfunktion, aber Darboux-integrierbar, und $\chi_{[0,1] \cap Q}$ ist nicht Darboux-integrierbar, aber Lebesgue-integrierbar.

Bemerkung. Unsere Definition für das Darboux-Integral ist nicht die übliche. Wir wollen daher noch wie in der Integrationstheorie für Funktionen in einer Veränderlichen eine weitere Definition geben und die Äquivalenz beider Begriffe überprüfen. Es sei also $f \in \mathcal{F}_c^b(Q)$ und

$$\int^* f(x) d^n x := \inf \left\{ \int \varphi(x) d^n x : \varphi \in \mathcal{T}(Q), \varphi \geq f \right\},$$

$$\int_* f(x) d^n x := \sup \left\{ \int \psi(x) d^n x : \psi \in \mathcal{T}(Q), \psi \leq f \right\}.$$

$\int^* f(x) d^n x$ heißt das RIEMANNSche oder DARBOUXSche *Oberintegral* und $\int_* f(x) d^n x$ entsprechend das *Unterintegral* von f . Insbesondere ist

$$\|f\|^* = \int^* |f(x)| d^n x.$$

Satz 32.10 Die Funktion f ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn

$$\int_* f(x) d^n x = \int^* f(x) d^n x.$$

In diesem Fall stimmt das Integral mit dem Ober- und dem Unterintegral überein.

Beweis. Stimmen Ober- und Unterintegral überein, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ und

$$\int (\varphi - \psi) d^n x \leq \varepsilon.$$

Damit ist $0 \leq f - \psi \leq \varphi - \psi$ und

$$\|f - \psi\|^* \leq \varepsilon,$$

also ist f Darboux-integrierbar. Umgekehrt folgt aus der Integrierbarkeit die Existenz von Treppenfunktionen $\tilde{\psi}_j$ und $\tilde{\varphi}_j$ mit

$$|f - \tilde{\psi}_j| \leq \tilde{\varphi}_j$$

und $\lim_{j \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_j d^n x = 0$. Folglich ist

$$\psi_j := -\tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_j \leq f \leq \tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_j =: \varphi_j$$

und $\varphi_j - \psi_j = 2\tilde{\varphi}_j$. Also ist $\int^* f(x) d^n x = \int_* f(x) d^n x$. \square

Bemerkung. Wir werden im nächsten Kapitel den Begriff der RIEMANNSchen *Summen* einführen und nachweisen, daß die Darboux-integrierbaren Funktionen durch solche Summen approximiert werden können. Auch im höherdimensionalen Fall führen also die Integrationstheorien nach Darboux und Riemann zu demselben Integral.

Wir holen noch einen Teil des Beweises des davorstehenden Satzes nach, der auch für sich Interesse beansprucht.

Satz 32.11 Ist f Lebesgue-integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt

$$\left| \int f(x) d^n x \right| \leq \int |f(x)| d^n x = \|f\|_1.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch im Darboux'schen Fall. Insbesondere ist

$$\|f\|^* = \int |f(x)| d^n x.$$

Beweis. Wir schreiben abkürzend $\|\cdot\|$ anstelle von $\|\cdot\|^*$ bzw. $\|\cdot\|_1$. Aus der Integrierbarkeit ergibt sich $\|f - \varphi_j\| \rightarrow 0$ mit einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen φ_j . Aus $||f| - |\varphi_j|| \leq |f - \varphi_j|$ gewinnt man mit Hilfe der Monotonie der entsprechenden Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|$ die Ungleichung

$$\| |f| - |\varphi_j| \| \leq \|f - \varphi_j\|.$$

Also ist $|f|$ integrierbar mit

$$\int |f| d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\varphi_j| d^n x$$

und

$$\left| \int f(x) d^n x \right| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j d^n x \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int \varphi_j d^n x \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\varphi_j| d^n x.$$

Zum zweiten Teil der Aussage beachte man die Ungleichungen

$$\|f\| - \|f - \varphi_j\| \leq \|\varphi_j\| \leq \|f\| + \|\varphi_j - f\|,$$

die

$$\|f\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \int |\varphi_j| d^n x = \int |f(x)| d^n x \leq \|f\|$$

nach sich ziehen. □

Aus diesem Satz kann man wie in Kapitel 18 schließen, daß die integrierbaren Funktionen einen *Funktionsverband* bilden (siehe Satz 18.6).

Folgerung 32.12 Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so sind es auch

$$\max(f, g), \quad \min(f, g), \quad f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \max(-f, 0).$$

Ebenso wie dort schließen wir:

Satz 32.13 Sind f, g Lebesgue- bzw. Darboux-integrierbar und ist g beschränkt, so ist auch ihr Produkt fg im gleichen Sinne integrierbar.

Beweis. Es sei $|g(x)| \leq M < \infty$ und ohne Einschränkung $M > 0$. Wähle zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon/2M$ und dann eine Treppenfunktion ψ mit $\|g - \psi\| \leq \varepsilon/2m$, wobei m eine positive obere Schranke von $|\varphi|$ bezeichne. Wegen

$$|fg - \varphi\psi| \leq |f - \varphi||g| + |\varphi||g - \psi| \leq M|f - \varphi| + m|g - \psi|$$

folgt die entsprechende Aussage für die betrachtete Pseudonorm, also

$$\|fg - \varphi\psi\| \leq M\|f - \varphi\| + m\|g - \psi\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

In der eindimensionalen Theorie kann man sich im Wesentlichen auf die Integration von Funktionen beschränken, die auf Intervallen erklärt sind. In der allgemeinen Situation können die Definitionsbereiche $A \subset \mathbb{R}^n$ jedoch weit komplizierter aussehen. Die dadurch bedingten Komplikationen umgeht man in der Lebesgue-Theorie dadurch, daß man die von A herrührenden Schwierigkeiten einfach ignoriert und die zu integrierenden Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ trivial nach \mathbb{R}^n fortsetzt.

Definition und Bemerkung. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. f heißt dann *integrierbar*, wenn die durch

$$f^A(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

definierte *triviale Fortsetzung* f^A von f integrierbar im gleichen Sinne ist. Man setzt dann

$$\int f(x) d^n x := \int_{\mathbb{R}^n} f^A(x) d^n x.$$

Wir schreiben für die Menge der integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1(A)$. Dies ist selbstverständlich ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und das Integral auf $\mathcal{L}^1(A)$ ist automatisch linear und monoton. Entsprechend wird $\overline{\mathcal{L}}^1(A)$ definiert.

Bemerkung. Wir schreiben für die triviale Fortsetzung manchmal auch, wenn auch inkorrekterweise, $f^A = f \chi_A$.

Bemerkung. Ganz entsprechend kann man für *beschränkte* Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ die Räume $\text{Reg}(A)$ und $\text{Darb}(A)$ erklären. Es gilt

$$\text{Reg}(A) \subset \text{Reg}(Q), \quad \text{Darb}(A) \subset \text{Darb}(Q)$$

für jeden kompakten Quader Q , der A umfaßt.

Lemma 32.14 Für beschränkte Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ hat man Inklusionen von Vektorräumen

$$\text{Reg}(A) \subset \text{Darb}(A) \subset \mathcal{L}^1(A).$$

Die Integrale sind jeweils lineare, monotone Funktionale und werden durch Einschränkung des Lebesgue-Integrals gewonnen.

Selbstverständlich wird man i. a. weder mit der Definition der integrierbaren Funktionen noch mit der Definition des Integrals *direkt* arbeiten wollen. Wir stellen uns also die Fragen:

1. Welche allgemeinen Klassen von Funktionen sind integrierbar?
2. Wie kann man die Berechnung von Integralen auf den Fall $n = 1$ zurückführen oder näherungsweise bewerkstelligen?

Die Antwort zu 2. wird von dem Satz von Fubini geliefert, und für den zweiten Teil gibt die Riemannsche Theorie zumindest Teilantworten. Wir wenden uns hier Teilantworten zu Frage 1 zu und beginnen mit dem folgenden Satz, den wir später noch wesentlich verbessern werden.

Satz 32.15 (Kleiner Satz von B. Levi) Es seien φ_k Treppenfunktionen, die punktweise monoton aufsteigend gegen die Grenzfunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvergieren: $\varphi_k \nearrow f$, und die Folge der Integrale $\int \varphi_k(x) d^n x$ sei nach oben beschränkt. Dann ist f Lebesgue-integrierbar mit

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d^n x.$$

Beweis. Aus $f - \varphi_k = \sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$ folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (Satz 4) und dem Fundamental-Lemma 5

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq \sum_{j+1}^{\infty} \|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_1 = \sum_{j=k}^{\infty} \left(\int \varphi_{j+1} d^n x - \int \varphi_j d^n x \right).$$

Die Folge der Integrale $\int \varphi_j d^n x$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Ist I ihr Grenzwert, so folgt

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq I - \int \varphi_k d^n x,$$

insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ und

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d^n x = I. \quad \square$$

Bemerkung. Die Dirichlet-Funktion zeigt, daß dieser Satz nur in der Lebesgue-Theorie gültig ist, nicht aber in der Darbouxschen.

Für Anwendungen dieses Satzes ist die folgende Aussage von Nutzen.

Lemma 32.16 *Es sei die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nicht negativ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine aufsteigende Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \nearrow f^U$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: es gibt eine abzählbare Familie (ψ_k) von Treppenfunktionen mit

$$f^U(x) = \sup_k \psi_k(x);$$

denn setzt man

$$\varphi_k := \max(\psi_0, \dots, \psi_k),$$

so sind die φ_k Treppenfunktionen, es gilt $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \sup_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = f^U(x)$ für alle $x \in U$.

Wir betrachten nun alle kompakten Würfel $W_r(a)$ mit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$ und $W_r(a) \subset U$. Offensichtlich gibt es zu jedem $\xi \in U$ einen solchen Würfel $W_r(a)$ mit $\xi \in W_r(a)$. Insbesondere ist

$$U = \bigcup W_r(a).$$

Wir setzen weiter

$$\psi_{r,a} := m_{r,a} \chi_{W_r(a)}, \quad m_{r,a} = \min_{W_r(a)} f,$$

und zeigen, daß $f = \sup \psi_{r,a}$. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $\xi \in U$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$B_\delta(\xi) \subset U \quad \text{und} \quad f(x) > f(\xi) - \varepsilon, \quad x \in B_\delta(\xi).$$

Diese Ungleichung gilt dann erst recht auf einem Würfel $W_{r,a}$ mit $\xi \in W_{r,a} \subset B_\delta(\xi)$. Nach Definition von $m_{r,a}$ ist weiter $f(\xi) - \varepsilon < m_{r,a} \leq f(\xi)$ und somit

$$f(\xi) - \varepsilon \leq \sup \psi_{r,a}(\xi) \leq f(\xi), \quad \xi \in U.$$

Läßt man nun ε gegen 0 gehen, so ergibt sich $f(\xi) = \sup_{r,a} \psi_{r,a}(\xi)$, $\xi \in U$. Außerhalb von U ist die gewünschte Identität trivialerweise erfüllt. \square

Wir kommen nun zu dem weiter oben angekündigten Nachweis der Integrierbarkeit von einfachen Klassen von Funktionen.

Satz 32.17 Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so ist f (Lebesgue-) integrierbar.

Beweis. Mit $f = f^+ - f^-$ können wir ohne Einschränkung $f \geq 0$ voraussetzen. Nach dem vorstehenden Lemma gilt $\varphi_k \nearrow f^U$. Ist $U \subset Q$, Q kompakt, und $f \leq M$, so ist $\varphi_k \leq M \chi_Q$, also $\int \varphi_k(x) d^n x \leq M \text{Vol}_n(Q)$. Damit kann man den Satz von B. Levi anwenden. \square

Folgerung 32.18 Der Vektorraum C_c^0 der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist enthalten in \mathcal{L}^1 . Es ist sogar $C_c^0(Q) \subset \text{Reg}(Q)$ für kompakte Quader Q .

Eine weitere wichtige Konsequenz ist die

Folgerung 32.19 Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f Lebesgue-integrierbar.

Bemerkung. In den Situationen dieser Folgerungen sind die betrachteten Funktionen sogar integrierbar im Sinne von Darboux.

Beweis. Man kann f zu einer stetigen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen (Fortsetzungssatz von Tietze, siehe Anhang). Sei Q ein offener Quader mit $K \subset Q$. Dann ist \tilde{f} beschränkt auf Q , also integrierbar. Nun ist

$$f^K = \tilde{f}^Q - \tilde{f}^Q \chi_{Q \setminus K},$$

also f^K integrierbar, da $\chi_{Q \setminus K}$ ebenfalls nach dem vorigen Satz (beschränkt und) integrierbar ist. \square

Wir formulieren noch den sogenannten kleinen Satz von Fubini. Der Beweis ergibt sich aus den obigen Sätzen, dem kleinen Satz von B. Levi und dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen. Wir verzichten auf die Durchführung, zumal wir im Kapitel 36 die allgemeinste Version behandeln werden.

Satz 32.20 Es sei $A \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ eine kompakte (oder eine beschränkte offene) Menge, und die Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig (oder stetig und beschränkt). Dann ist für jedes $x'' \in \mathbb{R}^{n-q}$ mit

$$A_{x''} := \{x' \in \mathbb{R}^q : (x', x'') \in A\} \neq \emptyset$$

die Funktion $x' \mapsto f(x', x'')$ über \mathbb{R}^q integrierbar. Ferner ist die durch

$$F(x'') := \begin{cases} \int_{A_{x''}} f(x', x'') d^q x' & , A_{x''} \neq \emptyset, \\ 0 & , A_{x''} = \emptyset, \end{cases}$$

über \mathbb{R}^{n-q} integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^{n-q}} F(x'') d^{n-q} x'' = \int_{\mathbb{R}^{n-q}} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^A(x', x'') d^q x' \right) d^{n-q} x''.$$

Zum Abschluß wollen wir uns einem Spezialfall der Transformationsformel für Integrale zuwenden. Es seien $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^*$ vorgegeben, und $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei die durch

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto S(x) := \left(\frac{x_1}{s_1}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

definierte Abbildung („Streckung“).

Satz 32.21 (Transformationsformel für Streckungen) Für jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Komposition $f \circ S$ integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ S)(x) d^n x = |s_1 \cdot \dots \cdot s_n| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x.$$

Beweis. Man kommt vollständig mit der puren Definition des Lebesgue-Integrals aus, wenn man die folgenden elementaren Schritte nachvollzieht:

1. Mit jeder Treppenfunktion φ ist auch $\varphi \circ S$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \circ S)(x) d^n x = |s_1 \cdot \dots \cdot s_n| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n x.$$

2. Ist Φ eine Hüllreihe zu einer Funktion f , so ist $\Phi \circ S$ eine Hüllreihe zu $f \circ S$, und es gilt $I(\Phi \circ S) = |s_1 \cdot \dots \cdot s_n| I(\Phi)$. \square

Noch einfacher gestaltet sich der Nachweis der *Translationsinvarianz* des Integrals.

Satz 32.22 (Translationsinvarianz) Für jede integrierbare Funktion f und jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist auch die Funktion $x \mapsto f(x - a)$ integrierbar, und es gilt

$$\int f(x - a) d^n x = \int f(x) d^n x.$$

Anhang: Fortsetzungssätze für stetige Funktionen

Wir haben in dem Haupttext dieses Kapitels den *Fortsetzungssatz* von TIETZE benutzt, dessen Beweis man z. B. in der *Analysis 2* von KÖNIGSBERGER unter der Nummer 1. 3. IV findet. Er wird dort sogleich allgemeiner für metrische Räume hergeleitet.

Satz 32.23 (Tietze) *Jede stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge A in einem metrischen Raum X läßt sich stetig nach ganz X fortsetzen.* \square

Dieser Satz ist charakteristisch für eine größere Klasse von *topologischen* Räumen, was wir im folgenden etwas näher erläutern wollen. Zu Einzelheiten siehe QUERENBURG [39]. Nimmt man an, daß für einen topologischen Raum X der Fortsetzungssatz von Tietze gilt, so kann man speziell zu zwei abgeschlossenen *disjunkten* Mengen $A_0, A_1 \subset X$ eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ finden, die auf A_0 identisch Null und auf A_1 identisch Eins ist. Diese Aussage nennt man das URYSOHNSche *Lemma*. Durch Abschneiden nach oben und unten kann man zusätzlich erreichen, daß die Funktion f nur Werte im Intervall $[0, 1]$ annimmt. - Wir halten insbesondere fest:

Folgerung 32.24 (Urysohnsches Lemma) *Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A_0, A_1 in einem metrischen Raum X gibt es eine stetige reellwertige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$, die auf A_0 identisch Null und auf A_1 identisch Eins ist.*

Topologische Räume, in denen das URYSOHNSche *Lemma* richtig ist, müssen einem sehr starken *Trennungsaxiom* genügen. Nimmt man zu disjunkten abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subset X$ eine entsprechende stetige Funktion f , so definiert man die offenen Mengen U_0 und U_1 durch

$$U_0 := \{x \in X : f(x) < 1/2\}, \quad U_1 := \{x \in X : f(x) > 1/2\}$$

Es ist dann $A_0 \subset U_0$, $A_1 \subset U_1$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Definition. Ein topologischer Raum X genügt dem Trennungsaxiom T_4 , wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen „durch offene Mengen trennen lassen“, d. h. wenn es zu je zwei abgeschlossenen Mengen A_0, A_1 mit $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ offene Umgebungen $U_0 \supset A_0$, $U_1 \supset A_1$ mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ gibt. Man nennt dann X auch kurz einen T_4 -Raum

Erstaunlicherweise reicht die soeben abgeleitete notwendige topologische Bedingung auch hin für die Gültigkeit der gewünschten Fortsetzungssätze.

Satz 32.25 *Für den topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- o) X erfüllt das Trennungsaxiom T_4 ;
- i) in X gilt der Satz von Tietze ;
- ii) in X gilt das Urysohnsche Lemma.

Bemerkung und Definition. Sind *atomare*, also einpunktige und damit auch alle endlichen Teilmengen abgeschlossen, so ist ein T_4 -Raum X auch ein T_2 -Raum: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x_0, x_1 \in X$ gibt es trennende (offene) Umgebungen. Die Abgeschlossenheit einpunktiger Mengen ist gleichbedeutend mit dem schwachen Trennungsaxiom T_1 : Zu je zwei verschiedenen Punkten x_0, x_1 gibt es eine offene Menge U_0 mit $x_0 \in U_0$, $x_1 \notin U_0$ (und damit auch eine offene Menge U_1 mit $x_1 \in U_1$, $x_0 \notin U_1$). Die vorige Bemerkung besagt also in knapper Form:

$$T_4 + T_1 \implies T_2 .$$

Räume mit T_4 und T_1 heißen auch *normale* topologische Räume in der Literatur. Da der Fortsetzungssatz von Tietze in metrischen Räumen gilt, sind diese automatisch normal.

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er die Trennungsaxiome T_1 und T_3 erfüllt, wobei T_3 „zwischen“ T_2 und T_4 angesiedelt ist: Abgeschlossene Mengen A und Punkte $x \notin A$ lassen sich durch offene Umgebungen trennen. Selbstverständlich ist auch ein regulärer Raum schon notwendig hausdorffsch. Ein topologischer Raum X wird oft auch *vollständig regulär* genannt, wenn er ein T_1 -Raum ist, für den es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und zu jedem Punkt $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die auf A verschwindet, nicht aber in x . Offensichtlich erfüllt ein solcher Raum das Trennungsaxiom T_3 , ist also insbesondere regulär. - Aus dem zuvor zitierten Satz ergibt sich noch:

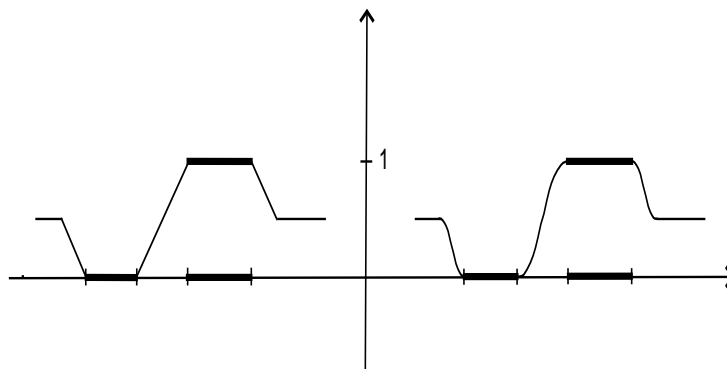
Folgerung 32.26 *Normale, insbesondere metrische Räume sind (vollständig) regulär.*

Für manche Anwendungen braucht man noch eine verschärfte Version des Urysohnschen Lemmas.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt eine G_δ -Menge, wenn sie abzählbarer Durchschnitt von *offenen* Mengen ist. Sie heißt eine F_σ -Menge, wenn sie abzählbare Vereinigung von *abgeschlossenen* Mengen ist.

Beispiel. Die Nullstellenmenge N einer stetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine G_δ -Menge, denn es ist $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ mit $N_j := f^{-1}((-1/j, 1/j))$. Im \mathbb{R}^n ist jede abgeschlossene Menge die Nullstellenmenge einer nichtnegativen stetigen⁵⁷ Funktion, also eine G_δ -Menge, und im Beweis zu Lemma 16 haben wir nachgewiesen, daß jede offene Menge in \mathbb{R}^n eine F_σ -Menge ist.

Satz 32.27 *Ist X ein T_4 -Raum, und sind $A_0, A_1 \subset X$ G_δ -Mengen, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit Nullstellenmenge A_0 und 1-Stellenmenge A_1 , d. h. : $f^{-1}(0) = A_0$, $f^{-1}(1) = A_1$. Ist $X = \mathbb{R}^n$, so kann man sogar zu zwei beliebigen disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A_0, A_1 eine C^∞ -Funktion mit diesen Eigenschaften finden. \square*



Figur 32.1

⁵⁷Man kann diese Funktion sogar *beliebig oft differenzierbar* wählen. Dies besagt ein Satz von WHITNEY. Seinen Beweis findet man z. B. in meinem Vorlesungsmanuskript *Singularitäten in der reellen und komplex-analytischen Geometrie*, Hamburg, Wintersemester 1996/1997.

33 Meßbare Mengen und Nullmengen

Mit Hilfe der Integrationstheorie kann man nun auch gewissen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Volumen oder Maß zuordnen. Man kann die Eigenschaften solcher meßbarer Mengen dann auch axiomatisieren und darauf aufbauend Treppenfunktionen $\varphi = \sum c_k \chi_{A_k}$ mit meßbaren Mengen A_k bilden und damit weitere Integrationstheorien begründen. Dies geschieht in der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie, die hier aber nicht weiter verfolgt wird.

Definition. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt LEBESGUE-meßbar, wenn ihre charakteristische χ_A Lebesgue-integrierbar ist. Ist χ_A sogar im Riemannschen Sinne integrierbar, so heißt A auch JORDAN-meßbar. Man nennt dann

$$\text{Vol}_n(A) := \int \chi_A(x) d^n x$$

das n -dimensionale Volumen oder Lebesgue- bzw. Jordan-Maß von A . Wir werden im folgenden den Zusatz „Lebesgue“ meist fortlassen, da wir uns mit dem entsprechenden Begriff in der Riemannschen Theorie nur am Rande beschäftigen werden.

Bemerkung. Die Definition von $\text{Vol}_n(Q)$ stimmt für kompakte Quader Q mit unserer elementargeometrischen Einführung überein. Im Falle $n = 1$ spricht man gewöhnlich von der Länge anstelle von 1-dimensionalem Volumen und entsprechend von Flächeninhalt und Rauminhalt oder Volumen in den Fällen $n = 2, 3$.

Aus den allgemeinen Integrierbarkeitssätzen des vorigen Kapitels gewinnt man unmittelbar die folgenden Klassen von meßbaren Mengen.

Satz 33.1 *Kompakte und beschränkte offene Mengen A sind meßbar. In diesem Fall gilt das CAVALLIERISCHE Prinzip : Ist $A \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$, so sind für alle $x'' \in \mathbb{R}^{n-q}$ die Mengen $A_{x''} := \{x' \in \mathbb{R}^q : (x', x'') \in A\}$ (leer oder) kompakt bzw. offen und beschränkt, und es gilt :*

$$\text{Vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-q}} \text{Vol}_q(A_{x''}) d^{n-q} x'' .$$

Insbesondere haben zwei kompakte Mengen A, B in $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ das gleiche Volumen, wenn die Mengen $A_{x''}$ und $B_{x''}$ das gleiche q -dimensionale Volumen haben für alle $x'' \in \mathbb{R}^{n-q}$. \square

Beispiele. 1. Für den offenen oder kompakten Kreis $B := B_r$ um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$ sind bei festem $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < r$ bzw. $\leq r$ die Mengen B_y offene bzw. kompakte Intervalle der Länge $2\sqrt{r^2 - y^2}$. Infolgedessen ist

$$\text{Vol}_2(B_r) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r} \right) \Big|_{-r}^r = \pi r^2 .$$

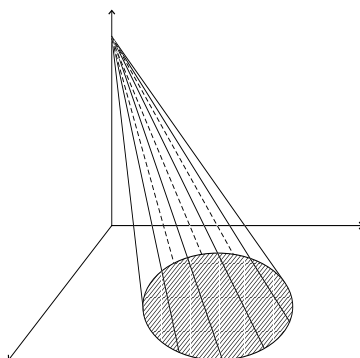
Für die entsprechenden Kugeln B_r im 3-dimensionalen Raum ergibt sich hieraus auf dem gleichen Wege

$$\text{Vol}_3(B_r) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz = \pi \left(r^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

2. Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte oder offene und beschränkte Menge und für positives $h \in \mathbb{R}$

$$K := \{ (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in (1 - h^{-1}t)B, 0 \leq t \leq h \}$$

der Kegel mit Basis B und der Höhe h .



Figur 33.1

Mit der Transformationsformel für *Streckungen* (Satz 32.21) ergibt sich sofort

$$\text{Vol}_n(tB) = t^n \text{Vol}_n(B)$$

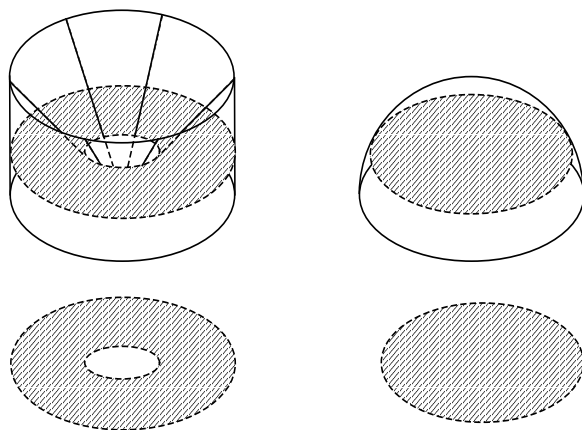
und damit

$$\text{Vol}_{n+1}(K) = \text{Vol}_n(B) \int_0^h (1 - h^{-1}t)^n dt = \text{Vol}_n(B) h \int_0^1 s^n ds = \frac{h}{n+1} \text{Vol}_n(B).$$

Speziell für ein Dreieck $\Delta \in \mathbb{R}^2$ mit Grundlänge a und Höhe h bzw. für einen Kegel K mit 2-dimensionalen Basis B gilt

$$\text{Vol}_2(\Delta) = \frac{h}{2} a, \quad \text{Vol}_3(K) = \frac{h}{3} \text{Vol}_2(B).$$

Beispiel. Schon Archimedes hat das Cavalierische Prinzip zur Berechnung des Volumens einer Halbkugel verwendet. Er betrachtet den Körper A , der entsteht, wenn man aus dem Kreiszyylinder Z mit Radius r und Höhe r einen (offenen) Kegel K mit Spitze in 0 und Basis gleich der Deckscheibe von Z ausbohrt.



Figur 33.2

Hier ist $\text{Vol}_2(A_z) = \pi r^2 - \pi z^2 = \pi(r^2 - z^2)$, und dies ist offensichtlich auch der Flächeninhalt $\text{Vol}_2(B_z)$ für die kompakte Halbkugel B mit Radius r . Also ist (noch einmal)

$$\text{Vol}_3(B) = \text{Vol}_3(A) = \text{Vol}_3(Z) - \text{Vol}_3(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3,$$

sofern wir die (intuitiv einsichtige) Formel für *Differenzen* von meßbaren Mengen schon zur Verfügung hätten.

Diese und andere können wir aber sofort noch nachtragen.

Lemma 33.2 *Sind A und B meßbare Teilmengen des \mathbb{R}^n , so auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$, und es gilt*

$$\text{Vol}_n(A \cup B) = \text{Vol}_n(A) + \text{Vol}_n(B) - \text{Vol}_n(A \cap B), \quad \text{Vol}_n(A \setminus B) = \text{Vol}_n(A) - \text{Vol}_n(A \cap B).$$

Speziell ist $\text{Vol}_n(A \cup B) = \text{Vol}_n(A) + \text{Vol}_n(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$. Für $B \subset A$ gilt $\text{Vol}_n(B) \leq \text{Vol}_n(A)$.

Beweis. Für alle Mengen A, B gilt: $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \setminus B} = \max(\chi_A - \chi_B, 0)$, und für $B \subset A$ ist $\chi_B \leq \chi_A$. Schließlich ist $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ eine disjunkte Zerlegung. \square

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Begriffe in der Lebesgueschen Integrationstheorie.

Definition. Eine (meßbare) Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *Nullmenge*, wenn $\text{Vol}_n(N) = 0$.

Nullmengen lassen sich sehr einfach durch die L^1 -Norm charakterisieren.

Lemma 33.3 *Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\|\chi_N\|_1 = 0$.*

Beweis. Ist N eine Nullmenge, so ist χ_N integrierbar und

$$0 = \text{Vol}_n(N) = \int \chi_N d^n x = \int |\chi_N| d^n x = \|\chi_N\|_1.$$

Umgekehrt gilt für die Treppenfunktionen $\varphi_j = 0$:

$$\|\chi_N - \varphi_j\|_1 = 0;$$

also ist χ_N integrierbar und

$$\text{Vol}_n(N) = \int \chi_N d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j d^n x = 0. \quad \square$$

Hiermit lassen sich bequem weitere Mengen als Nullmengen erkennen.

Lemma 33.4 i) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*

ii) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

Beweis.

i) $M \subset N$ impliziert $\chi_M \leq \chi_N$ und $0 \leq \|\chi_M\|_1 \leq \|\chi_N\|_1 = 0$.

ii) Aus $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ folgt $\chi_N \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k}$ und mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$0 \leq \|\chi_N\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{N_k}\|_1 = 0. \quad \square$$

Beispiele. 1. Jede Vereinigung abzählbar vieler *ausgearteter* Quader in \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge. Insbesondere ist jede abzählbare Menge und jeder k -dimensionale lineare Unterraum von \mathbb{R}^n , $k < n$, eine Nullmenge.

2. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen (also z. B. eine offene oder eine abgeschlossene Menge) und $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von g vom $(n+1)$ -dimensionalen Maße Null. Sei nämlich ohne Einschränkung A selbst schon kompakt, so auch Γ , und es ist

$$\text{Vol}_{n+1}(\Gamma) = \int_A \left(\int_{g(x)}^{g(x)} 1 \, dy \right) d^n x = 0.$$

Definition. Es sei E eine Aussage über Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, die gemäß unserer aristotelischen Logik nur wahr oder falsch sein kann. Man sagt, E sei (Lebesgue) *fast überall* oder *für fast alle* x erfüllt, wenn

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : \neg E(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Für die Integrationstheorie sind die folgenden Sätze grundlegend.

Satz 33.5 *Es sei $f \in \overline{\mathcal{F}}$, und es gelte $\|f\|_1 < \infty$ (z. B. sei f integrierbar). Dann ist f fast überall endlich, d. h.*

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \pm\infty\}$$

ist eine Nullmenge.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\chi_N \leq \varepsilon|f|$, also $\|\chi_N\|_1 \leq \varepsilon\|f\|_1$. Da $\|f\|_1$ endlich ist, muß $\|\chi_N\|_1 = 0$ gelten. \square

Satz 33.6 *Es seien $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$, es sei f integrierbar, und es gelte $f(x) = g(x)$ für fast alle x . Dann ist auch g integrierbar, und es gilt*

$$\int f(x) d^n x = \int g(x) d^n x.$$

Beweis. Sei $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ und $u := \infty \chi_N$. Mit $u_k := \chi_N$, $k \in \mathbb{N}$, ist $u = \sum u_k$, und wegen $\|\chi_N\|_1 = 0$ auch $\|u\|_1 = 0$.

Da f integrierbar ist, gilt $\lim \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ mit einer Folge von Treppenfunktionen φ_k . Nun ist aber

$$|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + u$$

und deshalb

$$\|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|u\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1.$$

Also ist auch g integrierbar mit

$$\int g(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d^n x = \int f(x) d^n x. \quad \square$$

Satz 33.7 *Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$ gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn f fast überall gleich Null ist.*

Beweis. Sei f fast überall gleich Null. Dann ist $|f|$ nach dem vorigen Satz integrierbar, und es ist

$$\|f\|_1 = \int |f(x)| d^n x = \int 0 d^n x = 0.$$

Sei umgekehrt $\|f\|_1 = 0$. Es ist dann

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$

mit den Mengen

$$N_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Wegen $\chi_{N_k} \leq k|f|$ ist aber $\|\chi_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0$, und die Behauptung ergibt sich wieder aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung. \square

Folgerung 33.8 *Es sei die Funktion f über A und B integrierbar, und $A \cap B$ sei eine Nullmenge. Dann ist f auch über $A \cup B$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{A \cup B} f(x) d^n x = \int_A f(x) d^n x + \int_B f(x) d^n x.$$

Beweis. Nach dem obigen Satz dürfen wir f so abändern, daß $f(x) = 0$ für $x \in A \cap B$. Dann ist

$$f^{A \cup B} = f^A + f^B. \quad \square$$

Folgerung 33.9 *Zu jeder integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gibt es eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.*

Beweis. Man braucht nur $g(x) = f(x)$ zu setzen, wenn $|f(x)| < \infty$, und $g(x) = 0$ sonst. \square

Wir geben jetzt noch zwei Charakterisierungen von Nullmengen, von denen eine die Integrations-theorie nicht benutzt.

Satz 33.10 *Für eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent :*

- i) N ist eine Nullmenge ;
- ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es abzählbar viele Quader Q_j mit $N \subset \bigcup Q_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \text{Vol}_n(Q_j) < \varepsilon$;
- iii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine meßbare offene Menge U mit $N \subset U$ und $\text{Vol}_n(U) < \varepsilon$.

Beweis. Wir zeigen ii) \implies i) \implies iii) \implies ii).

ii) \implies i). Wegen $N \subset \bigcup Q_j$ ist $\chi_N \leq \sum \chi_{Q_j}$ und damit

$$\|\chi_N\|_1 \leq \sum \|\chi_{Q_j}\|_1 = \sum \text{Vol}_n(Q_j) < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$.

i) \implies iii). Wegen $\|2\chi_N\|_1 = 2\|\chi_N\|_1 = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Hüllreihe $\Phi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ mit $c_k \geq 0$, Q_k offen, $\Phi(x) \geq 2$, $x \in N$, und $I(\Phi) < \varepsilon$. Setze

$$\varphi_\ell := \sum_{k=0}^{\ell} c_k \chi_{Q_k}.$$

Offensichtlich ist φ_ℓ eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale nach oben beschränkt sind. Also ist $F := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi_\ell$ integrierbar mit

$$\int F(x) d^n x = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \varphi_\ell(x) d^n x = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} c_k \text{Vol}_n(Q_k) \leq I(\Phi) < \varepsilon.$$

Es sei nun $U := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 1\}$. Nach Voraussetzung ist $N \subset U$. Weiter ist U offen. Denn zu $x_0 \in U$ gibt es ein φ_ℓ mit $\varphi_\ell(x_0) > 1$, und ist V der Durchschnitt der Q_0, \dots, Q_ℓ , die x_0 enthalten, so ist $\varphi_\ell(x) \geq \varphi_\ell(x_0)$, $x \in V$, und damit $V \subset U$. Schließlich ist U meßbar: Nach einem früheren Lemma 32.16 ist χ_U Grenzfunktion einer aufsteigenden Folge ψ_j von Treppenfunktionen, deren Integrale wegen $\psi_j \leq \chi_U \leq F$ durch ε nach oben beschränkt sind. Also ist nach dem kleinen Satz von B. Levi χ_U integrierbar mit

$$\text{Vol}_n(U) \leq \int F(x) d^n x < \varepsilon.$$

iii) \implies ii). Für $k \in \mathbb{N}$ sei \mathfrak{W}_k die Menge der kompakten Würfel $W = I_1 \times \dots \times I_n$ mit $I_\nu = [m_\nu 2^{-k}, (m_\nu + 1) 2^{-k}]$, $m_\nu \in \mathbb{Z}$. Zwei solche Würfel $W \in \mathfrak{W}_k$, $W' \in \mathfrak{W}_i$, $k > i$, schneiden sich entweder nur in Randpunkten, oder es ist $W \subset W'$. Für die gegebene offene Menge U setze $\mathfrak{W}_0^* := \{W \in \mathfrak{W}_0 : W \subset U\}$ und induktiv

$$\mathfrak{W}_k^* = \{W \in \mathfrak{W}_k : W \subset U, W \not\subset W', W' \in \mathfrak{W}_i^*, i < k\}.$$

Dann ist $\mathfrak{W}^* = \bigcup \mathfrak{W}_k^*$ eine abzählbare Menge $\{Q_j\}$ von Würfeln mit entartetem oder leerem Durchschnitt $Q_j \cap Q_k$, falls $j \neq k$, und es gilt

$$N \subset U = \bigcup Q_j.$$

Ist nun $A_\ell := Q_0 \cup \dots \cup Q_\ell$, so ist $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset U$ und $U = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell$. Folglich konvergieren die Treppenfunktionen χ_{A_ℓ} monoton aufsteigend gegen χ_N , und es ist

$$\sum_{j=0}^{\ell} \text{Vol}_n(Q_j) = \int \chi_{A_\ell} d^n x \leq \int \chi_U d^n x = \text{Vol}_n(U) < \varepsilon. \quad \square$$

Folgerung 33.11 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, N sei eine Nullmenge, und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und auf $K \setminus N$ stetig. Dann ist f über K integrierbar.*

Beweis. Es sei $|f| \leq M$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine meßbare offene Menge U mit $N \subset U$ und $M \text{Vol}_n(U) < \varepsilon/2$. Nun ist $K \setminus U$ kompakt und $f : K \setminus U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also integrierbar. Somit gibt es eine Treppenfunktion φ mit $\|f^{K \setminus U} - \varphi\|_1 < \varepsilon/2$. Ferner ist $\|f^U\|_1 \leq M \text{Vol}_n(U) < \varepsilon/2$, und folglich

$$\|f^K - \varphi\|_1 \leq \|f^{K \setminus U} - \varphi\|_1 + \|f^U\|_1 < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Zum Abschluß dieses Kapitels wenden wir uns noch kurz der RIEMANNschen Integrationstheorie zu und definieren zuerst allgemeine *Riemannsche Summen*.

Definition. Eine Zerlegung einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ der Feinheit $\leq \delta$ besteht aus Teilmengen A_1, \dots, A_r mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $A_1 \cup \dots \cup A_r = A$;
- ii) die A_k sind meßbar und $A_j \cap A_k$ ist eine Nullmenge für $1 \leq j < k \leq r$;

iii) alle Durchmesser

$$\text{diam } A_k = \sup \{ \|x - y\|_2, x, y \in A_k \}$$

sind höchstens gleich δ .

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, $A = \bigcup A_k$ sei eine Zerlegung von A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, und $\xi_k \in A_k$ seien irgendwelche Punkte. Dann heißt

$$\Sigma := \Sigma(f, (A_k), (\xi_k)) := \sum_{k=1}^r f(\xi_k) \text{Vol}_n(A_k)$$

eine *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung (A_k) und zu den *Stützstellen* (ξ_k) .

Stetige Funktionen auf Kompakta sind integrierbar und sogar Darboux-integrierbar. Damit sind sie auch RIEMANN-integrierbar. - Dies besagt der folgende

Satz 33.12 *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle Zerlegungen von $A = (A_k)$ der Feinheit $\leq \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_k \in A_k$ gilt :*

$$\left| \int_A f(x) d^n x - \Sigma(f, (A_k), (\xi_k)) \right| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei A keine Nullmenge. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf A folgt bei Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}_n(A)} \quad \text{wenn} \quad \|x - x'\|_2 \leq \delta.$$

Haben also die A_k alle einen Durchmesser $\leq \delta$, so ist insbesondere

$$|f(x) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}_n(A_k)}, \quad x \in A_k,$$

und damit

$$\left| \int_{A_k} f(x) d^n x - f(\xi_k) \text{Vol}_n(A_k) \right| \leq \int_{A_k} |f(x) - f(\xi_k)| d^n x \leq \frac{\varepsilon}{\text{Vol}_n(A)} \text{Vol}_n(A_k).$$

Wegen der Ungleichung

$$\text{Vol}_n(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \text{Vol}_n(A_k)$$

stellt sich die gewünschte Abschätzung unmittelbar ein. □

Anhang: Der Ring der Lebesgue-meßbaren Mengen

Die allgemeine *Maßtheorie* startet mit sogenannten *Mengenringen* und *Mengenalgebren* auf einer nichtleeren Menge X .

Definition und Bemerkung. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X heißt ein *Mengenring* in X oder kurz ein *Ring*, wenn mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in \mathcal{A} enthalten sind. Dann ist notwendig auch die leere Menge \emptyset und mit A, B auch der Durchschnitt $A \cap B$ und die symmetrische Differenz $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ in \mathcal{A} enthalten.

Eine reellwertige Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Mengenring \mathcal{A} heißt

- i) *positiv*, falls $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$;
- ii) *monoton*, falls $\mu(A) \leq \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$;
- iii) *additiv*, falls $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$;
- iv) *σ -additiv*, falls $\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$ für alle paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, deren Vereinigung ebenfalls in \mathcal{A} liegt.

Eine positive Mengenfunktion μ auf einem Mengenring heißt ein *Inhalt*, wenn μ additiv, und ein Maß, wenn μ sogar σ -additiv ist.

Aufgrund der Eigenschaften Lebesgue-meßbarer Mengen in \mathbb{R}^n bilden diese einen Mengenring, der alle kompakten und alle beschränkten offenen Teilmengen enthält, und die Zuordnung

$$\mathcal{A} \ni A \longmapsto \text{Vol}_n(A)$$

ist ein Maß, das man auch das *LEBESGUE-Maß* auf \mathbb{R}^n nennt. Die σ -Additivität wird später noch bewiesen (siehe Teil a) von Folgerung 34.8). Dieses Maß hat die zusätzliche Eigenschaft, daß es *translationsinvariant* und *normiert* ist in dem Sinne, daß das Volumen des Einheitswürfels gleich 1 ist. - Diese Eigenschaften charakterisieren tatsächlich das Lebesgue-Maß.

Satz 33.13 *Das Lebesgue-Maß ist das einzige normierte, translationsinvariante Maß auf dem Mengenring, der von den kompakten und beschränkten offenen Mengen erzeugt wird.*

Man kann sich weiter fragen, ob es überhaupt *beschränkte, nicht meßbare* Mengen gibt. In der Tat konnte VITALI im Jahre 1905 ein solches Beispiel konstruieren.

Beispiel. Betrachte auf \mathbb{R} die Äquivalenzrelation $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Jede Äquivalenzklasse $[x] \subset \mathbb{R}$ enthält Elemente im Einheitsintervall $I = [0, 1]$, so daß die natürliche Projektion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ eine surjektive Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ induziert. Aufgrund des Auswahlaxioms besitzt diese Abbildung eine (injektive) Rechtsinverse $\mathbb{R}/\sim \rightarrow I$, deren Bild wir mit $A \subset I$ bezeichnen. Es sei weiter r_0, r_1, \dots eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap I$ und $N_j := r_j + A$. Dann ist

$$N := \bigcup N_j$$

eine disjunkte Vereinigung. Wäre nun A meßbar, so auch wegen der Translationsinvarianz des Integrals alle Mengen N_j , $j \in \mathbb{N}$, und es wäre

$$\text{Vol}_n(N_j) = \text{Vol}_n(A).$$

Nun ist aber N nach Konstruktion auch eine *beschränkte* Menge, so daß wegen der sogenannten σ -Additivität des Lebesgue-Maßes (siehe oben) auch N meßbar sein müßte mit

$$\text{Vol}_n(N) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Vol}_n(A_j).$$

Wegen der Endlichkeit von $\text{Vol}_n(N)$ ist dies aber nur möglich, wenn $\text{Vol}_n(A_j) = 0$ und damit $\text{Vol}_n(N) = 0$. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß $I = [0, 1] \subset N$.

Bemerkung. SOLOVAY hat 1964 mit Methoden von P. J. COHEN gezeigt, daß man statt des Auswahlaxioms den Axiomen der naiven Mengenlehre auch das Axiom

Alle Teilmengen von \mathbb{R} sind meßbar

hinzufügen kann, ohne in Widersprüche zu geraten. Somit ist das Vitalische Gegenbeispiel nur mit Hilfe des Auswahlaxioms konstruierbar.

Das Vitalische Beispiel $A \subset \mathbb{R}$ hat übrigens weitere interessante Konsequenzen:

1. Es gibt nichtnegative Funktionen mit beschränkter L^1 -Halbnorm, die nicht integrierbar sind, nämlich z. B. χ_A .
2. Es gibt nicht integrierbare Funktionen, deren Betrag integrierbar ist. Ist nämlich $A \subset I$ eine nicht meßbare Teilmenge des Einheitsintervalls, so hat

$$f := \chi_A - \chi_{I \setminus A}$$

offensichtlich wegen $|f| = \chi_A + \chi_{I \setminus A} = \chi_I$ diese Eigenschaft.

LEBESGUE hatte übrigens das folgende Problem aufgeworfen:

Gibt es ein Maß auf dem Ring aller beschränkten Mengen, das für Quader das elementargeometrische Volumen ergibt und die zusätzliche Eigenschaft besitzt, daß kongruente beschränkte Mengen das gleiche Maß besitzen?

Man kann leicht aus dem Charakterisierungssatz für das Lebesgue-Maß ableiten, daß ein solches Maß mit dem Lebesgue-Maß übereinstimmen müßte. Dies führt aber zu einem Widerspruch zu dem Vitalischen Gegenbeispiel $A \subset \mathbb{R}$, da auch die beschränkte Menge $A \times [0, 1]^{n-1}$ nicht meßbar ist.

Somit ist das Lebesguesche Maßproblem nicht lösbar. Interessanterweise kann man aber Lösungen in den Dimensionen 1 und 2 finden, wenn man den Begriff des Maßes abschwächt zu dem des *Inhalts*. Dies hat damit zu tun, daß die Gruppe der Kongruenzen in diesen Fällen sehr klein ist. Dagegen kann auch dies abgeschwächte „Inhaltsproblem“ in Dimensionen $n \geq 3$ keine Lösung besitzen aufgrund eines geradezu ungeheuerlichen Satzes.

Satz 33.14 (Banach - Tarski - Paradoxon) *Sind A und B beliebige beschränkte Mengen in \mathbb{R}^3 mit nicht leerem Inneren, so gibt es disjunkte Zerlegungen*

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_m,$$

so daß A_j und B_j kongruent sind für alle j . □

D. h. also mit anderen Worten:

Man kann eine dreidimensionale Kugel vom Radius 1 so in endlich viele Teile zerlegen, daß man die Einzelteile wieder zu einer Kugel vom Radius 2 zusammensetzen kann.

Es gibt sogar eine solche Zerlegung in 5 zusammenhängende Puzzlestückchen.

Es dürfte klar sein, daß diese „wundersame Brotvermehrung“ nur mit dem Auswahlaxiom zu erreichen ist.

34 Der Banachraum L^1

Die Pseudo-Halbnorm $\|\cdot\|_1$ auf \mathcal{F} induziert auf dem Unterraum \mathcal{L}^1 der *Lebesgue-integrierbaren* Funktionen eine *Halbnorm*, da nach Definition für jedes Element $f \in \mathcal{L}^1$ gilt: $\|f\|_1 < \infty$. Wir haben auf dem Raum \mathcal{L}^1 schon Begriffe wie *Konvergenz* und *stetiges Funktional* bzgl. dieser Halbnorm benutzt. - Klar ist z. B. das folgende Lemma, das wir wegen seiner häufigen Anwendung gesondert notieren und beweisen.

Lemma 34.1 *Ist $f_j \in \mathcal{L}^1$ eine Folge mit $f \in \mathcal{F}$ als L^1 -Grenzwert, d. h. gilt $\|f - f_j\|_1 \rightarrow 0$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^1$ und*

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x .$$

Beweis. Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist $\|f - f_j\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $j \geq N'(\varepsilon)$, und für jedes j gibt es eine Treppenfunktion φ_j mit $\|f_j - \varphi_j\|_1 \leq \frac{1}{2^{j+1}}$. Also ist für hinreichend großes $N = N(\varepsilon) \geq N'(\varepsilon)$:

$$\|f - \varphi_j\|_1 \leq \varepsilon, \quad j \geq N .$$

Somit liegt f in \mathcal{L}^1 , und es gilt

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j(x) d^n x .$$

Andererseits hat man

$$\left| \int f_j(x) d^n x - \int \varphi_j(x) d^n x \right| \leq \int |f_j(x) - \varphi_j(x)| d^n x = \|f_j - \varphi_j\|_1 \leq \frac{1}{2^{j+1}}$$

und damit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x . \quad \square$$

Bemerkung. Wortwörtlich gilt die entsprechende Aussage natürlich auch für Funktionen $f \in \overline{\mathcal{F}}$ und $f_j \in \overline{\mathcal{L}}^1$.

In der L^1 -Halbnorm auf \mathcal{L}^1 sind Grenzwerte nicht eindeutig bestimmt. Es ist aber offensichtlich folgendes richtig: Gilt $\|f - f_j\|_1 \rightarrow 0$, so ist eine weitere Funktion \tilde{f} Grenzwert derselben Folge (f_j) genau dann, wenn $\|\tilde{f} - f\|_1 = 0$, d. h. wenn $\tilde{f} = f$ fast überall (siehe Satz 33.7). Somit ist der „richtige“ Raum, den man betrachten sollte, der Raum der Äquivalenzklassen

$$L^1 := \mathcal{L}^1 / \sim ,$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim zu erklären ist durch

$$f \sim g :\iff g - f \in \mathcal{N} := \{h \in \mathcal{F} : h(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n\} .$$

Wegen $\mathcal{N} = \{h \in \mathcal{F} : \|h\|_1 = 0\}$ ist \mathcal{N} tatsächlich ein *Untervektorraum* von \mathcal{L}^1 , und die L_1 -Halbnorm auf \mathcal{L}^1 wird durch die Setzung

$$\|\bar{f}\|_1 := \|f\|_1, \quad \bar{f} \in L^1 \quad \text{die Restklasse von } f \in \mathcal{L}^1 ,$$

zu einer *Norm* auf L^1 .

Bemerkungen. 1. Nach Satz 33.5 ist jede Funktion in $\overline{\mathcal{L}}^1 \subset \overline{\mathcal{F}}$ nach Abänderung auf einer Nullmenge enthalten in \mathcal{L}^1 . Man hat selbstverständlich auch auf $\overline{\mathcal{F}}$ die eben eingeführte Äquivalenzrelation \sim , und durch die Einbettung $\mathcal{L}^1 \subset \overline{\mathcal{L}}^1$ gewinnt man die Gleichheit

$$L^1 = \mathcal{L}^1 / \sim = \overline{\mathcal{L}}^1 / \sim .$$

Insbesondere hat man auch auf $\overline{\mathcal{L}}^1 \subset \overline{\mathcal{F}}$ eine bis auf die Abänderung von Funktionen auf Nullmengen wohldefinierte Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren.

2. Die zuvor über L^1 aufgestellten Behauptungen ergeben sich aus einem einfach herzuleitenden allgemeinen Satz über Vektorräume mit Halbnorm.

Lemma 34.2 *Es sei V ein reeller Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|$. Dann ist*

$$V_0 := \{v \in V : \|v\| = 0\} \subset V$$

ein Untervektorraum, und der Quotientenraum $\overline{V} := V/V_0$ wird durch $\|\overline{v}\| := \|v\|$, $v \in V$ ein beliebiger Repräsentant der Restklasse $\overline{v} \in \overline{V}$, zu einem normierten Vektorraum.

Beweis. Sind $v_0, v \in V_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist mit der Dreiecksungleichung $\|v_0 + \lambda v\| \leq \|v_0\| + \lambda \|v\| = 0$. Also ist V_0 ein Untervektorraum von V . Gilt für zwei Vektoren $v, w \in V$, daß $\overline{v} = \overline{w}$, so ist $v - w \in V_0$ und damit $\|v - w\| = 0$. Die Dreiecksungleichung impliziert dann sofort $\|v\| = \|w + (v - w)\| \leq \|w\|$ und nach Vertauschen der Rollen von v und w sogar

$$\|v\| = \|w\| .$$

Somit ist $\|\overline{v}\|$ unabhängig von dem Repräsentanten v definiert, und es ist unmittelbar klar, daß $\|\cdot\|$ auf \overline{V} eine Halbnorm ist. Nun gilt aber $\|v\| = \|\overline{v}\| = 0$ genau dann, wenn $v \in V_0$, also wenn $\overline{v} = 0 \in \overline{V}$. \square

Der Hauptsatz der Lebesgue-Theorie ist der *Vollständigkeitssatz* von RIESZ-FISCHER, den wir jetzt beweisen wollen. Aus ihm folgen alle weiteren tiefliegenden Konvergenzsätze.

Satz 34.3 (Riesz - Fischer) *Der normierte Vektorraum L^1 ist vollständig, also ein Banach-Raum.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus einem Resultat, das sogar genaueren Aussagen über die Gewinnung einer Grenzfunktion zu einer vorgegebenen Cauchy-Reihe macht, und seiner Folgerung.

Satz 34.4 *Es sei $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen derart, daß die Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|g_j\|_1$$

konvergiert. Dann ist die Reihe $g := \sum_j g_j$ fast überall punktweise absolut konvergent, und die Funktion g ist integrierbar mit

$$\int g(x) d^n x = \sum_{j=0}^{\infty} \int g_j(x) d^n x .$$

Beweis. Wir setzen $G := \sum_j |g_j|$. Nach der verallgemeinerten Dreiecksungleichung und Voraussetzung ist $\|G\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|g_j\|_1 \leq M < \infty$ und damit $G(x) < \infty$ für alle x außerhalb einer Nullmenge N (siehe Satz 33.5). Damit ist, wie behauptet, die Reihe g fast überall absolut konvergent. Es bleibt

zu zeigen, daß die Funktion g der Grenzwert der Folge der Partialsummen $G_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} g_j$ in der L^1 -Halbnorm ist. Nun gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ℓ_0 , so daß

$$\sum_{j=\ell_0+1}^{\infty} \|g_j\|_1 < \varepsilon.$$

Daraus folgt für alle $\ell \geq \ell_0$:

$$\|g - G_\ell\|_1 = \left\| \sum_{j=\ell+1}^{\infty} g_j \right\|_1 \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \|g_j\|_1 < \varepsilon. \quad \square$$

Folgerung 34.5 *Es sei (f_k) eine Cauchy-Folge in \mathcal{L}^1 . Dann besitzt (f_k) einen L^1 -Grenzwert f in \mathcal{L}^1 , so daß insbesondere*

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d^n x.$$

Die Grenzfunktion f ist fast überall punktweiser Limes einer Teilfolge der f_k .

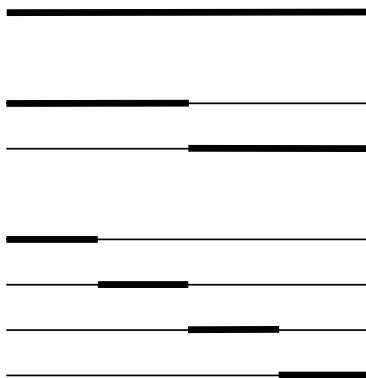
Beweis. Wegen der Cauchy-Bedingung gibt es eine Teilfolge f_{k_j} mit $\|f_k - f_{k_j}\|_1 \leq 1/2^{j+1}$ für $k \geq k_j$. Da eine Cauchy-Folge genau dann konvergent ist, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt, genügt zu zeigen, daß die Folge (f_{k_j}) einen L^1 -Grenzwert f besitzt, der fast überall punktweiser Limes der Folge (f_{k_j}) ist. Wir können daher von vornherein annehmen, daß die Folge (f_k) selbst schon die Eigenschaft

$$\|f_{k+1} - f_k\|_1 \leq 2^{-(k+1)}, \quad k \geq 0,$$

besitzt. Man kann dann den vorstehenden Satz anwenden auf die Teleskopreihe

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)). \quad \square$$

Bemerkung. Man kann in Satz 5 nicht auf die Auswahl einer *Teilfolge* verzichten. Ein Gegenbeispiel wird durch den sogenannten „wandernden Buckel“ gegeben. Durch Halbierung des kompakten Einheitsintervalls $I_0 = [0, 1]$ gelangt man zu den Intervallen $I_1 = [0, 1/2]$ und $I_2 = [1/2, 1]$ der Länge $1/2$, von diesen zu den Intervallen I_3, I_4, I_5, I_6 der Länge $1/4$ etc.



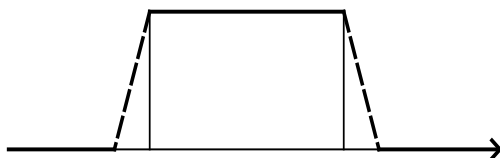
Figur 34.1

Die Folge $f_j := \chi_{I_j}$ der charakteristischen Funktionen der I_j ist eine L^1 -Nullfolge, also insbesondere eine Cauchy-Folge. Sie ist aber selbst an keiner Stelle $x \in I_0$ konvergent, da jede der Folge $f_j(x)$ unendlich viele Nullen und Einsen enthält. Eine Teilfolge im Sinne von Satz 5 ist $f_0, f_1, f_3, f_7, f_{15}, \dots$

Aufgrund der Definition ist der Raum der Treppenfunktionen (genauer sein Bild) *dicht* in L^1 . Aus sowohl theoretischen als auch praktischen Gründen ist es wichtig, weitere Klassen von Funktionen zu kennen, die diese Dichteigenschaft besitzen. Solche Funktionen müssen integrierbar sein und insbesondere Treppenfunktionen beliebig genau in der L^1 -Norm approximieren. - Wir behaupten z. B.:

Satz 34.6 Der Vektorraum C_c^0 der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht in L^1 .

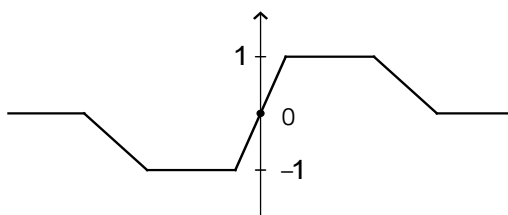
Beweis. Nach früheren Ergebnissen ist jede Funktion $f \in C_c^0$ eine Regelfunktion mit Träger in einem hinreichend großen kompakten Quader Q und damit Lebesgue-integrierbar. Es braucht somit nur noch gezeigt zu werden, daß jede Treppenfunktion in der L^1 -Norm beliebig genau durch Funktionen in C_c^0 approximiert werden können. Dazu reicht aber offensichtlich die Approximierbarkeit einer einzelnen „Treppe“ χ_Q , die sich aus der folgenden Zeichnung ergibt.



Figur 34.2

In der Tat kann man die Zeichnung im eindimensionalen Fall sozusagen „wörtlich“ nehmen und dann für beliebige Dimensionen Produkte solcher Funktionen bilden.

Bemerkung. Der Vektorraum C_c^0 ist selbst jedoch nicht vollständig, wenn man ihn mit der L^1 -Norm versieht. Man betrachte z. B. alle stückweise differenzierbaren (sogar linearen) Funktionen der folgenden Bauart:

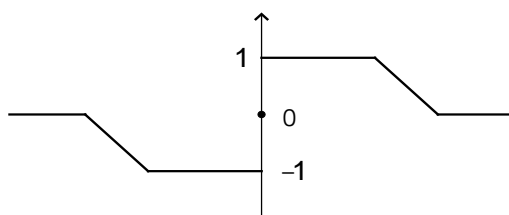


Figur 34.3

Hierbei sei die Funktion f_j , $j \geq 1$, diejenige, deren Steigung des durch den Ursprung gehenden linearen Teilstücks gerade $1/j$ ist. Es ist unmittelbar klar, daß für $j \geq k$ gilt:

$$\|f_j - f_k\|_{L^1} \leq \frac{2}{k}.$$

Somit ist die Funktionenfolge f_j eine L^1 -Cauchy-Folge. Da sie selbst punktweise gegen die folgende Funktion f_∞ konvergiert:



Figur 34.4

ist diese (ein Repräsentant des) Grenzwert(es) der Folge in L^1 . Jeder andere Repräsentant des Grenzwertes kann sich dann nur auf einer Nullmenge von f_∞ unterscheiden. Da Nullmengen aber keine inneren Punkte besitzen können, muß ein *stetiger* Repräsentant mit f_∞ außerhalb des Nullpunkts übereinstimmen, was nicht möglich ist.

Da der Raum L^1 vollständig ist, sollte es nicht überraschen, daß weitere Versuche, den Raum der integrierbaren Funktionen durch die uns schon bekannten Methoden zu erweitern, zum Scheitern verurteilt sind. Das nächste Resultat besagt, daß L^1 auch „im Darboux'schen Sinne“ *abgeschlossen* ist.

Lemma 34.7 *Eine Funktion $f \in \overline{\mathcal{F}}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ integrierbare Funktionen g, h mit $g \leq f \leq h$ fast überall gibt mit*

$$\int (h(x) - g(x)) d^n x < \varepsilon.$$

Beweis. Ist f integrierbar, so kann man z. B. $g = h = f$ setzen. Sei umgekehrt das angegebene Kriterium erfüllt. Es ist dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ mit den dazugehörigen Funktionen g und h fast überall $0 \leq f - g \leq h - g$ und folglich

$$\|f - g\|_1 \leq \|h - g\|_1 = \int (h(x) - g(x)) d^n x \leq \varepsilon.$$

Somit ist f der L^1 -Grenzwert einer Folge integrierbarer Funktionen. □

Wir kommen nun zu dem ersten starken Konvergenzsatz in der Lebesgue-Theorie. Wir nennen ihn „stark“ deshalb, weil an die Konvergenz der betrachteten Funktionenfolgen nur sehr schwache Forderungen gestellt werden müssen. Man nennt dieses Ergebnis auch den *Satz über die monotone Konvergenz*.

Folgerung 34.8 (B. Levi) *Es sei f_j eine fast überall monoton aufsteigende Folge integrierbarer Funktionen mit nach oben beschränkter Integralfolge. Dann existiert der punktweise Limes*

$$f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

für alle x außerhalb einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, und setzt man die Grenzfunktion f zu einer Funktion \tilde{f} auf ganz \mathbb{R}^n beliebig fort (z. B. durch $\tilde{f}(x) = 0, x \in N$), so ist \tilde{f} integrierbar mit

$$\int \tilde{f}(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x.$$

Beweis. Durch Abänderung der Funktionen f_j auf einer Nullmenge können wir annehmen, daß alle Folgen $(f_j(x)), x \in \mathbb{R}^n$, monoton aufsteigen. Die Integralfolge $I_j = \int f_j d^n x$ ist monoton aufsteigend, also konvergent und damit eine Cauchy-Folge. Deshalb ist

$$\|f_j - f_k\|_1 = \int (f_j(x) - f_k(x)) d^n x = I_j - I_k < \varepsilon$$

für alle $j \geq k \geq k_0(\varepsilon)$, also (f_j) eine L^1 -Cauchy-Folge. Für den nach dem Satz von Riesz-Fischer existierenden L^1 -Grenzwert f gilt mit einer Teilfolge die punktweise Konvergenz $f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{j_\ell}(x)$ fast überall. Wegen der Monotonie der Folgen $(f_j(x))$ ist dann aber auch $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ fast überall. \square

Der Satz über die monotone Konvergenz ist bestens geeignet, Fragen nach der Integrierbarkeit von Funktionen auf Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$, die sich durch „gute“ Mengen „ausschöpfen“ lassen, zu beantworten. Wir geben dazu zuerst die naheliegende

Definition. Eine aufsteigende Folge $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ von Teilmengen in \mathbb{R}^n mit

$$A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

heißt eine *Ausschöpfung* von A .

Satz 34.9 *Es sei $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion, und (A_j) sei eine Ausschöpfung von A durch Teilmengen A_j , auf denen f integrierbar sei. Dann gilt: f ist genau dann über A integrierbar, wenn die Folge der Integrale*

$$\int_{A_j} |f(x)| d^n x$$

(nach oben) beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\int_A f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A_j} f(x) d^n x.$$

Beweis. a) Ist f über A integrierbar, so auch $|f|$, und wegen der offensichtlichen Abschätzung $|f^{A_j}| \leq |f^A|$ ist notwendig

$$\int_{A_j} |f(x)| d^n x \leq \int_A |f(x)| d^n x.$$

b) Wegen $f = f_+ - f_-$ dürfen wir ohne Einschränkung $f = f_+ \geq 0$ voraussetzen. Dann ist die Folge f^{A_j} monoton wachsend und punktweise konvergent gegen f^A . Nach Voraussetzung ist die Integralfolge

$$\int_{A_j} f(x) d^n x = \int f^{A_j}(x) d^n x = \int |f^{A_j}(x)| d^n x$$

beschränkt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von B. Levi. \square

Setzt man in diesem Satz speziell $f \equiv 1$, so erhält man den ersten Teil des folgenden Resultats über *meßbare* Mengen.

Folgerung 34.10 a) *Es sei $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen. Genau dann ist $A := \bigcup A_j$ meßbar, wenn die Folge $\text{Vol}_n(A_j)$ der Volumina nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\text{Vol}_n(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{Vol}_n(A_j).$$

b) *Es sei (B_j) eine beliebige Folge meßbarer Mengen, so daß $B_j \cap B_k$ eine Nullmenge ist für alle Paare $j \neq k$. Genau dann ist $\bigcup B_j$ meßbar, wenn*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \text{Vol}_n(B_j) < \infty$$

ist. In diesem Fall gilt

$$\text{Vol}_n \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Vol}_n(B_j).$$

Beweis. Nur der Teil b) bedarf noch einer Begründung. Man setze $A_k = B_0 \cup \dots \cup B_k$. Dann ist (A_k) eine Ausschöpfung der Vereinigung $\bigcup B_j$, und nach Voraussetzung ist

$$\text{Vol}_n(A_k) = \sum_{j=0}^k \text{Vol}_n(B_j). \quad \square$$

Bemerkung. Aus dem Beweis von Lemma 32.16 folgt, daß jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann in der Form b) mit achsenparallelen Würfeln B_j .

Wir formulieren noch einen Satz über die Integration von *rotationssymmetrischen Funktionen*, den man leicht mit den Mitteln dieses Paragraphen herleiten kann. Wir verzichten aber auf einen Beweis an dieser Stelle, da er sich später mit Hilfe von Polarkoordinaten unmittelbar aus der Transformationsformel ergibt.

Satz 34.11 *Es sei f eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $I \subset [0, \infty)$, und \tilde{f} sei die rotationssymmetrische Funktion*

$$\tilde{f}(x) := f(\|x\|_2), \quad x \in B_I,$$

wobei B_I die Kugelschale $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}$ bezeichnet. Dann gilt: Genau dann ist \tilde{f} über B_I integrierbar, wenn $|f(r)|r^{n-1}$ über I integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{B_I} \tilde{f}(x) d^n x = n \kappa_n \int_I f(r) r^{n-1} dr,$$

wobei κ_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel⁵⁸ bezeichnet.

Als Anwendung dieses Satzes betrachten wir die Integration der Funktion $1/\|x\|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $\|\cdot\|$ abkürzend die euklidische Norm bezeichnen soll.

Lemma 34.12 a) *Das Integral*

$$\int_{B_R(0)} \frac{d^n x}{\|x\|^\alpha}$$

existiert genau dann, wenn $\alpha < n$.

b) *Das Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{d^n x}{\|x\|^\alpha}$$

existiert genau dann, wenn $\alpha > n$.

Die Integrale ergeben sich jeweils zu

$$\frac{n}{n-\alpha} \kappa_n R^{n-\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n}{\alpha-n} \kappa_n R^{n-\alpha}.$$

Beweis. a) Das Integral existiert genau dann, wenn das Integral der Funktion $r \mapsto r^{n-1-\alpha}$ über $(0, R)$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $n-1-\alpha > -1$, d. h. $\alpha < n$.

Teil b) beweist man entsprechend. □

⁵⁸Zur Berechnung von κ_n siehe Kapitel 37.

Folgerung 34.13 Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $m : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte integrierbare Funktion, so existiert das Integral

$$\int_K \frac{m(x)}{\|x - a\|^\alpha} d^n x$$

für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ und jeden Exponenten $\alpha < n$.

Anhang: Ein anderer Zugang zum Lebesgue-Integral

Der Satz von Beppo Levi hat weitere vielfältige Anwendungen. Wir können z. B. mit seiner Hilfe das Lemma 6 zu einer neuen abstrakten Charakterisierung der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ausbauen, die in einigen Textbüchern zur Einführung des Lebesgue-Integrals dient. Im Laufe der folgenden Überlegungen werden wir weitere große Klassen von Funktionen kennenlernen, die integrierbar sind. - Wir beginnen mit einer sehr einfachen Bemerkung.

Lemma 34.14 *Eine Hüllreihe $\Phi = \sum c_j \chi_{Q_j}$ ist genau dann eine integrierbare Funktion, wenn ihr Inhalt $I(\Phi)$ endlich ist. In diesem Falle ist*

$$\int \Phi(x) d^n x = I(\Phi).$$

Beweis. Da die Koeffizienten c_j per definitionem nicht negativ sind, ist jede Hüllreihe der punktweise aufsteigende Limes der Folge ihrer Partialsummen, deren Integrale gerade die Partialsummen der Reihe

$$I(\Phi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \text{Vol}_n(Q_j)$$

sind. Hieraus folgt mit dem Satz von B. Levi unmittelbar die Behauptung. □

Wir erinnern jetzt an die folgende Definition (siehe Kapitel 13).

Definition. Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *halbstetig von unten* (auch *nach unten* oder *unterhalbstetig*), wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt, so daß

$$h(x) > h(x_0) - \varepsilon \quad \text{für alle } x \in U.$$

Eine Funktion h heißt *halbstetig von oben*, wenn $-h$ halbstetig von unten ist.

Der Nachweis des folgenden Lemmas ist eine leichte Übung.

Lemma 34.15 *Eine Funktion h ist genau dann halbstetig von unten, wenn die Mengen*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$$

offen sind.

Der punktweise Limes $f = \lim f_j$ einer aufsteigenden Folge $f_j \nearrow f$ und das Supremum $f = \sup f_j$ einer beliebigen Folge von nach unten halbstetigen Funktionen f_j ist nach unten halbstetig.

Die charakteristische Funktion χ_A ist genau dann halbstetig von unten bzw. von oben, wenn A offen bzw. abgeschlossen ist.

Folgerung 34.16 *Jede Hüllreihe $\Phi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ mit offenen Quadern ist halbstetig von unten.*

Definition. Wir schreiben \mathcal{H} für die Menge der Funktionen $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit:

- i) h ist halbstetig von unten,
- ii) $h \geq 0$ außerhalb eines kompakten Quaders \overline{Q} ,
- iii) h ist integrierbar.

Bemerkung. Es ist klar, daß aus $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ und $c \geq 0$ folgt, daß $h_1 + h_2, c h_1 \in \mathcal{H}$. Ferner ist offensichtlich

$$\mathcal{H} \cap (-\mathcal{H}) = \mathcal{C}_c^0.$$

Wir kommen nun zu einer neuen Charakterisierung der integrierbaren Funktionen.

Satz 34.17 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ gibt mit*

$$-h_1 \leq f \leq h_2 \quad \text{fast überall}$$

und

$$\int (h_1(x) + h_2(x)) d^n x \leq \varepsilon.$$

Beweis. a) Sei f integrierbar und φ eine Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon/4$. Wir haben schon eingesehen, daß sich χ_Q und damit jede Treppenfunktion φ in der $\|\cdot\|_1$ -Halbnorm beliebig genau durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximieren lassen (Satz 6). Also gibt es $g \in \mathcal{C}_c^0$ mit z. B. $\|f - g\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - g\|_1 \leq \varepsilon/3$. Dann gibt es eine Hüllreihe Φ mit $|f - g| \leq \Phi$ und $\int \Phi d^n x \leq \varepsilon/2$. Somit ist $-h_1 \leq f \leq h_2$, wobei $h_1 := \Phi - g$, $h_2 := \Phi + g$ und $\int (h_1 + h_2) d^n x = 2 \int \Phi d^n x \leq \varepsilon$. Selbstverständlich sind $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$.

b) Aus $0 \leq f + h_1 \leq h_1 + h_2$ folgt

$$\|f + h_1\|_1 \leq \|h_1 + h_2\|_1 = \int (h_1(x) + h_2(x)) d^n x \leq \varepsilon.$$

Also ist f wegen des Satzes von RIESZ - FISCHER integrierbar. \square

Wir können die Funktionen in \mathcal{H} noch auf andere Weise charakterisieren.

Satz 34.18 *Eine Funktion h ist genau dann Element von \mathcal{H} , wenn es eine aufsteigende Folge $f_j \in \mathcal{C}_c^0$ gibt mit $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = h$ punktweise und*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x < \infty.$$

Beweis. a) Ist $h = \lim f_j$, so ist, wie wir oben bemerkt haben, h halbstetig von unten; außerdem ist $h(x) \geq 0$ für x außerhalb $\text{supp } f_0$. Wegen des Satzes von B. LEVI ist h schließlich integrierbar.

b). Ist $h \in \mathcal{H}$, so ist, wie man leicht sieht, h nach unten beschränkt: $h \geq -M$. Durch leichte Modifikation des Beweises von Lemma 32.16 findet man eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen $\varphi_j \nearrow h$, $\varphi_j \geq 0$ außerhalb eines festen Quaders Q . Durch geeignete stetige Approximation der φ_j gewinnt man die Funktionen f_j . Wegen $f_j \leq h$ ist die Folge der Integrale nach oben beschränkt. \square

Bemerkung. Man kann die beiden vorstehenden Sätze zu einer Einführung des Lebesgue-Integrals ohne a priori-Verwendung der L^1 -Pseudo-Halbnorm benutzen; siehe z. B. FORSTER *Analysis 3*. Dazu braucht man nur einen Integralbegriff für die Funktionen in \mathcal{H} , den man wegen Satz 18 aus einem Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gewinnen kann. Wegen des Satzes von Fubini hat man folglich zu beginnen mit dem *mehrfachen Integral*

$$\int f(x) d^n x := \int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots \right) dx_n,$$

wenn f eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^n mit Träger in dem Quader $Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ist. Dieses Integral existiert und ist unabhängig von der Auswahl des Quaders Q und der Reihenfolge der Integrationen. Der Rest ergibt sich dann aus dem folgenden Lemma, das man ohne Benutzung tieferliegender Methoden aus der Lebesgue-Theorie beweisen kann.

Lemma 34.19 Ist h der aufsteigende Limes einer Folge $f_j \in \mathcal{C}_c^0$, und ist die Folge der Integrale

$$\int f_j(x) d^n x$$

nach oben beschränkt, so wird durch

$$\int h(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x$$

ein Integral für die Funktion h erklärt, welches unabhängig von der speziellen Auswahl der Folge f_j ist.

Bemerkung. Ich verdanke JOHN HUBBARD den Hinweis, daß man die Lebesgue-Theorie auch mit Satz 4 aufbauen kann, wenn man dort als „Summenglieder“ g_j z. B. nur Riemann-integrierbare Funktionen zuläßt. Man betrachtet also (formale) Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j$$

von Riemann-integrierbaren Funktionen g_j , für die die Reihe der Integrale

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int |g_j(x)| d^n x$$

konvergent ist. Es ist dann $g = \sum_j g_j$ fast überall konvergent, und durch

$$\int g(x) d^n x := \sum_{j=0}^{\infty} \int g_j(x) d^n x$$

wird der Funktion g auf eindeutige Weise ein Integral zugeordnet. Man kann zeigen, daß man auf diese Weise alle Funktionen in L^1 zusammen mit ihrem Lebesgue-Integral erhält.

35 Der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz

Wir sind nun in der Lage, den zentralen Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie, den Satz von der *majorisierten Konvergenz*, zu verstehen. Aus allgemeinen Axiomen der Integrationstheorie haben wir früher abgeleitet, daß sich Integrale unter *gleichmäßiger* Konvergenz einer zu integrierenden Funktionenfolge gut verhalten müssen. Wir wissen andererseits aber auch, daß das Riemann- und damit auch das Regel-Integral sich nicht wie erhofft verhalten, wenn man von der zugrunde liegenden Funktionenfolge nur *punktweise* Konvergenz voraussetzt. Das Lebesgue-Integral kommt im Prinzip mit dieser sehr schwachen Voraussetzung aus, wenn man noch eine nicht allzu gravierende Vorsichtsmaßnahme in Form einer *integrierbaren Majorante* einbaut. Dann kann man sogar die Voraussetzungen noch etwas abschwächen.

Satz 35.1 *Es sei (f_j) eine Folge integrierbarer Funktionen auf \mathbb{R}^n , die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Ferner gebe es eine L^1 -beschränkte Majorante F dieser Folge, d. h. eine Funktion F mit $|f_j| \leq F$ fast überall für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\|F\|_1 < \infty$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int f(x) d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x .$$

Beweis. Nach Voraussetzung und früheren Sätzen gibt es eine Nullmenge N , so daß für alle $x \notin N$ gilt:

$$F(x) < \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x), \quad |f_j(x)| \leq F(x) .$$

Indem man $f_j(x) = f(x) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in N$ setzt, sind die letzten beiden Beziehungen für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Wir bilden dann

$$g_k^+ := \sup \{ f_j : j \geq k \} .$$

Die Funktion g_k^+ ist der monoton aufsteigende Limes der Folge der integrierbaren Funktionen $g_{k\ell} := \max \{ f_k, \dots, f_{k+\ell} \}$, und es besteht wegen $|g_{k\ell}(x)| \leq F(x)$ die Abschätzung

$$\left| \int g_{k\ell}(x) d^n x \right| \leq \int |g_{k\ell}(x)| d^n x = \|g_{k\ell}\|_1 \leq \|F\|_1 < \infty .$$

Nach dem Satz von B. LEVI ist dann g_k^+ integrierbar mit

$$\int g_k^+ d^n x = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int g_{k\ell} d^n x, \quad \text{und es ist} \quad \left| \int g_k^+ d^n x \right| \leq \|F\|_1 .$$

Die Folge der g_k^+ ist nun monoton fallend und punktweise konvergent gegen die punktweise definierte Funktion $\limsup f_j$ (siehe Satz 11.4). Nach Voraussetzung ist aber die Folge der f_j punktweise konvergent und damit $\limsup f_j = \lim f_j = f$. Nach erneuter Verwendung des Satzes von BEPPO LEVI erhält man folglich die Integrierbarkeit von f mit

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^+(x) d^n x .$$

Analog erhält man aber auch analoger Konstruktion der g_k^- als *Infimum* von $\{ f_j : j \geq k \}$, daß

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^-(x) d^n x .$$

Wegen $g_k^- \leq f_k \leq g_k^+$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist dann auch

$$\int f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d^n x . \quad \square$$

Bemerkungen. 1. Die obige Majorantenbedingung ist z. B. erfüllt für Funktionen

$$f_j : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

d. h. genauer für ihre trivialen Fortsetzungen $(f_j)^A$, wenn A meßbar und beschränkt und $|f_j(x)| \leq c$, $x \in A$, $j \in \mathbb{N}$, gilt.

2. Im Beweis wird, wie dort schon angemerkt, die Beziehung

$$\limsup f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup \{ f_j : j \geq k \})$$

benutzt. Er demonstriert deshalb noch wesentlich mehr, nämlich das sogenannte *Lemma* von FATOU, aus dem sich der Lebesguesche Konvergenzsatz unmittelbar ergibt.

Lemma 35.2 (Fatou) *Gilt für die integrierbare Funktionenfolge f_j , daß $|f_j| \leq F$ für eine Funktion F mit endlicher L^1 -Norm: $\|F\|_1 < \infty$, so sind die Funktionen $\liminf f_j$ und $\limsup f_j$ integrierbar mit*

$$\int \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d^n x \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d^n x \leq \int \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d^n x.$$

Mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz kann man frühere Sätze wesentlich verschärfen.

Satz 35.3 *Es sei $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ eine Ausschöpfung der Menge A und $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion, so daß $f|_{A_j}$ integrierbar ist für alle $j \in \mathbb{N}$. Genau dann ist f selbst integrierbar, wenn f auf A eine Majorante F mit endlicher L^1 -Norm besitzt:*

$$|f(x)| \leq F(x), \quad x \in A \quad \text{und} \quad \|F\|_1 < \infty.$$

Beweis. Ist f integrierbar, so ist $F := |f|$ eine solche Majorante. Umgekehrt stehe f_j für die triviale Fortsetzung der Einschränkung $f|_{A_j}$. Dann ist $f|_A$ der punktweise Limes der f_j , und es gilt $|f_j(x)| \leq F|_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Bemerkung. Es existiert eine Majorante wie im Satz zuvor sicher dann, wenn A meßbar und f beschränkt ist.

Die *Nichtintegrierbarkeit* einer Funktion kann zwei wesentlich verschiedene Gründe haben, daß sie sich nämlich schon lokal „schlecht“ verhält wie z. B. die charakteristische Funktion einer beschränkten, aber nicht Lebesgue-meßbaren Menge, oder, daß sie sich lokal gut verhält, also z. B. stetig ist, aber global in \mathbb{R}^n zu schnell wächst. Wir wollen diesen Zusammenhängen jetzt noch ein wenig nachgehen.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt, so daß $f|_U$ integrierbar ist.

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ lokal integrierbar und $V \subset U = U(x_0)$ eine meßbare Menge, so ist auch $f|_V$ integrierbar. Man kann daher in der obigen Definition $U = U(x_0)$ ersetzen durch offene oder kompakte Kugeln von (hinreichend kleinem) positivem Radius mit Mittelpunkt x_0 . Hieraus folgt unmittelbar, daß die Mengen $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ der *lokal integrierbaren Funktionen* einen Vektorraum bilden.

Satz 35.4 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann lokal integrierbar, wenn alle Einschränkungen $f|_K$ auf Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar sind.*

Beweis. Ist die Bedingung erfüllt, so ist $f|_{\overline{B}_r(x_0)}$ integrierbar für alle $r > 0$, also f lokal integrierbar. Ist umgekehrt $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und K kompakt, so gibt es endlich viele meßbare Mengen U_1, \dots, U_ℓ , so daß $f|_{U_\lambda}$ integrierbar ist und $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_\ell$. Da K ebenfalls meßbar ist, konstruiert man damit leicht (evtl. leere) meßbare Mengen K_1, \dots, K_ℓ mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_\ell$, $K_\lambda \subset U_\lambda$, und $K_\lambda \cap K_\kappa = \emptyset$ für $\lambda \neq \kappa$. Nach Voraussetzung ist $f|_{K_\lambda}$ integrierbar und damit auch $f|_K$. \square

Beispiel. Alle stetigen Funktionen sind lokal integrierbar. Das Beispiel $f \equiv 1$ zeigt, daß lokal integrierbare Funktionen nicht integrierbar zu sein brauchen.

Definition und Beispiele. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt σ -kompakt, wenn sie Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Mengen A_j ist.

1. Offensichtlich sind alle abgeschlossenen Mengen σ -kompakt.
2. Endliche Durchschnitte σ -kompakter Mengen sind σ -kompakt.
3. Alle offenen Mengen in \mathbb{R}^n sind σ -kompakt. (Gleiches Argument wie für F_σ -Menge).

Satz 35.5 Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge, so ist eine Funktion $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann integrierbar, wenn $f^A \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ liegt und f eine integrierbare Majorante F auf A besitzt.

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus den vorstehenden Sätzen. \square

Bemerkung. Ist $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ mit kompakten Mengen A_j , so kann man die Bedingung $f^A \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ ersetzen durch die Bedingung der Integrierbarkeit aller Einschränkungen $f|_{A_j}$.

Folgerung 35.6 Die Menge $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ sei σ -kompakt, $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar, und $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt mit integrierbaren Einschränkungen $g|_{A_j}$. Dann ist auch $f \cdot g$ über A integrierbar.

Insbesondere ist das Produkt $f \cdot g$ einer integrierbaren Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ mit einer beschränkten lokal integrierbaren Funktion $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ integrierbar.

Beweis. $(f \cdot g)|_{A_j}$ ist integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$, und ist M eine Schranke für g , so ist $F := M|f|$ eine integrierbare Majorante für $f \cdot g$ auf A . \square

Folgerung 35.7 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei fast überall stetig und besitze eine über U integrierbare Majorante F . Dann ist f über U integrierbar.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$. Nach dem obigen Kriterium brauchen wir nur zu zeigen, daß $f|_K$ integrierbar ist für jedes Kompaktum $K \subset U$. Dazu betrachten wir die Funktionen

$$f_j := \min(f^K, j), \quad j \in \mathbb{N},$$

die offensichtlich beschränkt und, eingeschränkt auf K , fast überall stetig sind. Nach einer früheren Folgerung ist f_j integrierbar. Weiter hat man $|f_j| \leq F^U$ für alle j und $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f^K(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Lebesgue ist $f|_K$ integrierbar. \square

Folgerung 35.8 Eine Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und $\|f\|_1 < \infty$.

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und $\|f\|_1 < \infty$. Dann gilt für die Folge $A_k := \overline{B}_k(0)$, $k \in \mathbb{N}^*$, daß $f|_{A_k}$ integrierbar ist und daß

$$\int_{A_k} |f(x)| d^n x \leq \|f\|_1 < \infty$$

gilt. Die Umkehrung ist trivial. \square

Korollar 35.9 Es sei $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, ferner gebe es Konstanten $\varepsilon > 0$, $M \geq 0$, $R > 0$, so daß

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x\|_2^{n+\varepsilon}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 \geq R.$$

Dann ist f über \mathbb{R}^n integrierbar.

Zum Abschluß notieren wir noch einmal die außerordentlich wichtigen Vertauschungssätze von Grenzwerten bei Integralen. (Siehe auch Satz 18.35).

Satz 35.10 Es sei $X \times T \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so daß für alle $x \in X$ die Integrale

$$F(x) = \int_T f(x, t) d^q t$$

existieren.

a) Ist zusätzlich $f(x, t)$ bei festem $t \in T$ eine stetige Funktion in x , und ferner $\Phi(t)$, $t \in T$, eine integrierbare Funktion mit $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$ für alle $(x, t) \in X \times T$, so ist auch $F(x)$ stetig auf X , d. h. es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_T f(x, t) d^q t = \int_T \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) d^q t.$$

b) Ist X offen in \mathbb{R}^p und f stetig partiell differenzierbar nach x_j bei festem t , und gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) \right| \leq \Phi(t), \quad (x, t) \in X \times T,$$

mit einer integrierbaren Funktion $\Phi(t)$, so ist F nach x_j stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_T f(x, t) d^q t = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) d^q t.$$

Die Beweise wurden schon im Anschluß an Satz 18.35 gebracht. □

Bemerkung. Die entsprechenden Aussagen für die Vertauschung von *mehrfachen Integralen* behandeln wir im folgenden Kapitel im Zusammenhang mit den Sätzen von FUBINI und TONELLI.

Als *Anwendungs-Beispiel* wollen wir das EULERSche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } \operatorname{Re} x > 0$$

betrachten (das dort die Γ -Funktion darstellt). Man kann in jedem Streifen $0 < a \leq x \leq 1$ und $1 \leq x \leq b < \infty$ integrierbare Schranken $\Phi_n(t)$ für die n -ten Ableitungen $(\log t)^n e^{-t} t^{x-1}$ im Sinne von Satz 10.b) angeben und gewinnt damit die Differenzierbarkeitsaussage

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-t} t^{x-1}) dt = \int_0^\infty (\log t)^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Nutzt man jedoch aus, daß der Integrand $e^{-t} t^{z-1}$ sogar *komplex-analytisch* in dem Halbraum $\operatorname{Re} z > 0$ ist, so läßt sich die obige Argumentation wesentlich abkürzen (siehe mein Manuskript *Funktionentheorie I*, Anhang über die Γ -Funktion).

36 Der Satz von Fubini

Wir können nun leicht den Satz von FUBINI beweisen. Wir verwenden dabei die Charakterisierung des Lebesgue-Integrals in Satz 34.17.

Satz 36.1 (Fubini) Sei $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$, so daß für jedes feste $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R}^p \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x \longmapsto f^y(x) := f(x, y) \end{cases}$$

integrierbar ist. Setzt man

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) d^p x & , \quad y \in \mathbb{R}^q \setminus N, \\ 0 & , \quad y \in N, \end{cases}$$

so ist die Funktion $F : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d^p x d^q y = \int_{\mathbb{R}^q} F(y) d^q y .$$

Beweis. Es sei zunächst $h \in \mathcal{H}$ und $h = \lim \varphi_k$ mit einer aufsteigenden Folge von Treppenfunktionen φ_k . Setzt man

$$\varphi_k^y(x) := \varphi_k(x, y), \quad h^y(x) := h(x, y) \quad \text{bei festem } y \in \mathbb{R}^q,$$

so ist φ_k^y eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen in den Variablen $x \in \mathbb{R}^p$ mit $\lim \varphi_k^y = h^y$ für alle $y \in \mathbb{R}^q$. Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k^y(x) dx = \int h^y(x) dx = H(y),$$

sofern das rechts stehende Integral existiert; sonst setzen wir $H(y) = \infty$. Nach dem Satz von B. Levi für Treppenfunktionen konvergiert die Folge der Integrale

$$\Phi_k(y) = \int \varphi_k^y(x) dx,$$

monoton aufsteigend gegen H (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne).

Nun ist aber die Folge der Integrale

$$\int \Phi_k(y) dy = \int \left(\int \varphi_k^y(x) dx \right) dy$$

erneut wegen des Satzes von Fubini für Treppenfunktionen gleich

$$\int \varphi_k(x, y) dx dy$$

und damit beschränkt durch $\int h(x, y) dx dy$. Also ist die Funktion $H(y)$ integrierbar, und es gilt

$$\int \left(\int h(x, y) dx \right) dy = \int H(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x, y) dx dy = \int h(x, y) dx dy .$$

Im allgemeinen Fall gibt es zu f und vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Funktionen $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ mit $-h_1 \leq f \leq h_2$ und

$$\int h(x, y) dx dy \leq \varepsilon, \quad h = h_1 + h_2 .$$

Wir setzen nun

$$H_i(y) := \int h_i^y(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

und

$$F_1(y) = \sup \left\{ \int \alpha(x) dx : \alpha(x) \leq f(x, y), -\alpha \in \mathcal{H} \right\},$$

$$F_2(y) = \inf \left\{ \int \beta(x) dx : \beta(x) \geq f(x, y), \beta \in \mathcal{H} \right\}.$$

Wegen $-h_1^y \leq f^y \leq h_2^y$ folgt $-H_1 \leq F_1 \leq F_2 \leq H_2$ und damit die Integrierbarkeit von F_1 und F_2 mit

$$\int F_i(y) dy = \int f(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2.$$

Wegen $F_2 - F_1 \geq 0$ und $\|F_2 - F_1\|_1 = 0$ stimmen die Funktionen F_1 und F_2 außerhalb einer Nullmenge N überein und sind dort endlich. Also ist für $y \notin N$

$$F_i(y) = \int f(x, y) dx, \quad i = 1, 2,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Man schreibt für den Sachverhalt im Satz von Fubini auch kurz

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x, y) d^p x d^q y = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) d^p x \right) d^q y.$$

Da es hierbei offensichtlich nicht auf die Reihenfolge der Integrationen auf der rechten Seite der Gleichung ankommt, können wir den folgenden *Vertauschungssatz für Integrale* formulieren.

Satz 36.2 *Ist die Funktion $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so existieren die beiden iterierten Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) d^p x \right) d^q y \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) d^q y \right) d^p x,$$

und sie stimmen überein.

Bemerkung und Beispiel. Es ist durchaus möglich, daß die beiden iterierten Integrale existieren, aber nicht übereinstimmen. Dies ist natürlich nur möglich, wenn die zugrunde liegende Funktion $f(x, y)$ nicht integrierbar ist. Als konkretes Beispiel hat man

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}.$$

Den Leser sollte dieses Beispiel an die Verhältnisse beim Doppelreihensatz erinnern. Diese suggerierte Analogie ist ja durchaus nicht aus der Luft gegriffen, da man im Falle von Riemann-Integralen die Doppelintegrale durch geeignete Doppelreihen approximieren kann. Und genau wie dort ist *absolute Konvergenz*, also hier die *absolute Integrierbarkeit*, das Zauberwort. - Es gilt z. B.:

Satz 36.3 (Tonelli) *Die Funktion $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}$ sei lokal integrierbar oder fast überall stetig. Genau dann ist die Funktion f über $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ integrierbar, wenn eines der beiden iterierten Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| d^p x \right) d^q y \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| d^q y \right) d^p x$$

über den Betrag von f existiert. In diesem Fall gilt der Satz von Fubini für f und insbesondere die daraus resultierende Vertauschungsregel.

Beweis. Die Bedingung ist notwendig wegen des Satzes von Fubini, da mit f auch $|f|$ integrierbar ist. Für die Umkehrung müssen wir nur zeigen, daß unter den gegebenen Umständen $|f|$ integrierbar ist; denn wegen des Satzes 35.5 und der Folgerung 35.7 ist dann auch f auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ integrierbar. Es sei dazu W_k der kompakte Würfel mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2k$, und ferner sei $f_k := \min(|f|, k \cdot \chi_{W_k})$. f_k ist für lokal integrierbares f aufgrund der Definition und für fast überall stetiges f wegen Folgerung 33.11 integrierbar, und die Folge der f_k konvergiert monoton wachsend gegen $|f|$. Der Rest ist eine einfache Anwendung des Satzes von B. Levi im Zusammenhang mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_k(x, y) d^p x d^q y = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f_k(x, y) d^p x \right) d^q y \leq \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| d^p x \right) d^q y < \infty. \quad \square$$

Beispiel. Man kann in dem Satz von Tonelli nicht auf die *Betragsbildung* bei der Funktion f verzichten. Es sei nämlich $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \text{sign}(xy)/(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Man zeigt leicht, etwa mit dem Satz über die Integration rotationssymmetrischer Funktionen, daß f nicht über \mathbb{R}^2 integrierbar ist, daß aber die beiden iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

existieren und gleich 0 sind.

Zum Abschluß dieses Kapitels besprechen wir kurz das „Tensorprodukt“ zweier Funktionen. Es seien dazu f, g integrierbare Funktionen in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ bzw. $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$. Dann wird durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x) \cdot g(y)$$

eine Funktion auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ definiert, die man auch als *Tensorprodukt* der beiden Funktionen bezeichnet. - Man hat den folgenden Satz.

Satz 36.4 *Mit f und g ist auch $f \otimes g$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} (f \otimes g)(x, y) d^p x d^q y = \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x) d^p x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(y) d^q y \right)$$

Ist umgekehrt $f \otimes g$ integrierbar und verschwindet g nicht fast überall, so ist f integrierbar.

Beweis. Ist Φ eine Hüllreihe zu f und Ψ eine solche zu g , so ist $\Phi \otimes \Psi$ eine Hüllreihe zu $f \otimes g$ mit dem Inhalt

$$I(\Phi \otimes \Psi) = I(\Phi) \cdot I(\Psi).$$

Daraus folgt unmittelbar die Ungleichung

$$\|f \otimes g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Sind dann φ und ψ Treppenfunktionen in x bzw. y , so ergibt sich die erste Behauptung aus der Ungleichung

$$\|f \otimes g - \varphi \otimes \psi\|_1 = \|f \otimes g - \varphi \otimes g + \varphi \otimes g - \varphi \otimes \psi\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 \|g\|_1 + \|g - \psi\|_1 \|\varphi\|_1$$

und der offensichtlichen Identität

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} (\varphi \otimes \psi)(x, y) d^p x d^q y = \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) d^p x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^q} \psi(y) d^q y \right).$$

Es sei umgekehrt das Tensorprodukt $f \otimes g$ integrierbar. Dann gibt es nach dem Satz von Fubini eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$, so daß für alle $y \notin N$ die Funktion $x \mapsto (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ integrierbar ist. Nach Voraussetzung gibt es sogar ein $y \notin N$, so daß $g(y) \neq 0$ ist. Dann ist aber auch die

Funktion f integrierbar. □

Beispiel. Die Funktion $(x, y) \mapsto x^{p-1} y^{q-1}$, $p, q \in \mathbb{R}$, ist genau dann über dem offenen Würfel $(0, 1) \times (0, 1)$ integrierbar, wenn beide Funktionen $x \mapsto x^{p-1}$ und $y \mapsto y^{q-1}$ über dem offenen Einheitsintervall $(0, 1)$ integrierbar sind, also genau dann, wenn $p > 0$, $q > 0$.

37 Die Transformationsformel für mehrfache Integrale

Das einzige Ziel dieses Paragraphen ist der Nachweis des folgenden zentralen Satzes der (Lebesgueschen) Integrationstheorie samt einiger einfacher Anwendungen.

Satz 37.1 (Transformationsformel für mehrfache Integrale) *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $\Phi : U \rightarrow V$ sei ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt :*

$$f : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

ist genau dann integrierbar, wenn

$$f_{\Phi} := (f \circ \Phi) \cdot |\det(D\Phi)|$$

über U integrierbar ist, und es gilt die Transformationsformel

$$\int_V f(y) d^n y = \int_U f_{\Phi}(x) d^n x,$$

also noch einmal vollständig ausgeschrieben :

$$\int_V f(y) d^n y = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi)(x)| d^n x.$$

Bemerkungen. 1. Es genügt zu zeigen, daß aus der Integrierbarkeit von $f \geq 0$ diejenige von f_{Φ} folgt und die Ungleichung

$$(*) \quad \int_V f dy \leq \int_U f_{\Phi} dx$$

besteht. Denn offensichtlich ist $(f_{\Phi})^{\pm} = (f^{\pm})_{\Phi}$, so daß aus der Integrierbarkeit einer beliebigen integrierbaren Funktion f auch die von f_{Φ} folgt. Durch Anwendung der gleichen Ungleichung auf f_{Φ} anstelle von f und auf Φ^{-1} anstelle von Φ erhält man weiter

$$\int_U f_{\Phi} dx \leq \int_V f dy,$$

da aufgrund der Kettenregel $(f_{\Phi})_{\Phi^{-1}} = f$ ist.

2. Die letzte Formel ist nur ein Spezialfall von

$$(f_{\Psi})_{\Phi} = f_{\Psi \circ \Phi},$$

wenn $\Psi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ einen weiteren \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und f eine integrierbare Funktion auf W bezeichnet. Daraus schließt man sofort:

Lemma 37.2 *Es seien $\Phi : U \rightarrow V$ und $\Psi : V \rightarrow W$ \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Gilt die Transformationsformel für Φ und Ψ , so auch für die Komposition $\Psi \circ \Phi$.*

Beweis. Mit $f : W \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist auch $g := f_{\Psi} : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und dann auch $g_{\Phi} : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Nach der vorstehenden Bemerkung 2 ist $g_{\Phi} = f_{\Psi \circ \Phi}$. Somit ergibt sich die gesuchte Formel:

$$\int_W f dw = \int_V f_{\Psi} dy = \int_U g dy = \int_U g_{\Phi} dx = \int_U f_{\Psi \circ \Phi} dx. \quad \square$$

Der *Beweis* der Transformationsformel wird in mehreren Schritten erfolgen und erst gegen Ende des Kapitels abgeschlossen sein. Er hat den Vorteil, daß fast jegliche „Epsilontik“ vermieden wird und jeder Einzelschritt leicht nachvollziehbar ist; dieser Vorteil hat aber seinen Preis, nämlich den Nachteil, daß die Argumentationskette in ihrer logischen Struktur ziemlich verwickelt ist.

Die entscheidenden Punkte sind, daß man das zu beweisende Resultat durch allgemeine Integrationstheorie und stetige Teilungen der Eins auf integrierbare Funktionen f mit „kleinen“ Trägern zurückführen und dann den Diffeomorphismus Φ lokal so zerlegen kann, daß die Gültigkeit der Transformationsformel mit Hilfe des Satzes von Fubini aus dem eindimensionalen Fall deduziert werden kann.

Wir beginnen mit dem *Beppo Levi-Prinzip* in dieser Situation:

Lemma 37.3 *Bei vorgegebenem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ ist die Transformationsformel schon dann für eine integrierbare Funktionen f auf V erfüllt, wenn f aufsteigender Limes von integrierbaren Funktionen f_j ist, für die die Transformationsformel bzgl. Φ gilt.*

Beweis. Da die Folge der f_j punktweise monoton von unten gegen die integrierbare Funktion f konvergiert, ist nach dem Satz von B. Levi die Folge der Integrale

$$\int_V f_j dy = \int_U (f_j)_\Phi dx$$

monoton wachsend gegen $\int_V f dy$ konvergent. Andererseits ist die Folge der $(f_j)_\Phi$ punktweise monoton wachsend gegen f_Φ . Erneut nach dem Satz von B. Levi ist dann f_Φ integrierbar mit

$$\int_U f_\Phi dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_U (f_j)_\Phi dx = \int_V f dy. \quad \square$$

Das erste der beiden weiter oben genannten Ziele wird schon durch die folgenden beiden Hilfssätze erreicht.

Lemma 37.4 *Bei vorgegebenem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ ist die Transformationsformel schon dann für alle integrierbaren Funktionen auf V erfüllt, wenn sie für alle integrierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in V erfüllt ist. Genauer gilt: Die Transformationsformel ist für eine fest vorgegebene integrierbare Funktion f erfüllt, wenn sie richtig ist für alle Einschränkungen $f|_L$ von f auf Kompakta $L \subset V$.*

Lemma 37.5 *Bei vorgegebenem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ ist die Transformationsformel schon dann für alle integrierbaren Funktionen auf V erfüllt, wenn es zu jedem Punkt $y \in V$ eine Umgebung $W = W(y) \subset V$ gibt, so daß die Transformationsformel für alle integrierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in W erfüllt ist.*

Beweis von Lemma 4. Es sei $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_j \subset \dots \subset V$ eine kompakte Ausschöpfung von V . Die Funktionen $f_j := \chi_{L_j} f$ sind dann integrierbar mit kompaktem Träger $\text{supp } f_j \subset L_j$. Da die Folge der f_j punktweise monoton von unten gegen die integrierbare Funktion f konvergiert, ist wegen Lemma 3 nichts weiter zu zeigen. \square

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Lemma 4 ist die Folge der $K_j := \Phi^{-1}(L_j)$ eine kompakte Ausschöpfung von $\Phi^{-1}(V) = U$, und wegen

$$(f_j)_\Phi = (\chi_{L_j} \circ \Phi)(f \circ \Phi) |\det(D\Phi)| = \chi_{K_j} f_\Phi$$

besitzen auch die Funktionen $(f_j)_\Phi$ kompakten Träger in U .

Beweis von Lemma 5. Wegen Lemma 4 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die integrierbare Funktion f einen kompakten Träger $L \subset V$ besitzt. Dann wird L von endlich vielen offenen Mengen $W_1, \dots, W_m \subset V$ überdeckt, für die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Wir wählen zu dieser

Überdeckung stetige Funktionen λ_j auf V mit kompakten Träger in W_j und $0 \leq \lambda_j \leq 1$, die sich auf L zu Eins addieren. Dann hat auch $f_j := \lambda_j f$ kompakten Träger in W_j , und es gilt $\sum_{j=1, \dots, m} f_j = f$ auf ganz V . Infolgedessen ist

$$\int_V f \, dy = \sum_{j=1}^m \int_V f_j \, dy = \sum_{j=1}^m \int_{W_j} f_j \, dy = \sum_{j=1}^m \int_{\Phi^{-1}(W_j)} (f_j)_\Phi \, dx = \int_U f_\Phi \, dx. \quad \square$$

Wir können nun einen ganz wesentlichen Reduktionsschritt bzgl. der zu betrachtenden integrierbaren Funktionen machen.

Satz 37.6 *Bei vorgegebenem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ ist die Transformationsformel schon dann für alle integrierbaren Funktionen auf V erfüllt, wenn sie für alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in V gültig ist.*

Dieser Satz, den wir sofort beweisen werden, hat eine unmittelbare Konsequenz, die wir wegen ihrer grundlegenden Bedeutung sogleich notieren wollen: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Transformationsformel gültig für alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in einer reellen Veränderlichen, und damit stellen wir fest:

Folgerung 37.7 *Die Transformationsformel ist im Falle der Dimension $n = 1$ für alle integrierbaren Funktionen erfüllt.*

Beweis (Satz 6). Es sei zunächst $h \in \mathcal{H}$ und $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lambda \geq 0$ und $\text{supp } \lambda \subset \subset V$. Dann gilt für λh die Transformationsformel wegen Lemma 3. Denn nach einem früheren Satz ist h der aufsteigende Limes von Funktionen $h_j \in \mathcal{C}_c^0$, so daß also auch $\lambda h_j \nearrow \lambda h$, und für die $\lambda h_j \in \mathcal{C}_c^0(V)$ gilt die Transformationsformel nach Voraussetzung.

Nach den obigen Reduzierungen können wir nun annehmen, daß die integrierbare Funktion $f \geq 0$ und der Träger von f in einem Kompaktum $L \subset V$ enthalten ist. Wir wählen nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Funktionen $h_1^\varepsilon, h_2^\varepsilon \in \mathcal{H}$ mit $-h_1^\varepsilon \leq f_L \leq h_2^\varepsilon$ und $\int (h_1^\varepsilon + h_2^\varepsilon) \, dy \leq \varepsilon$. Ferner gibt es eine stetige Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\lambda|_L \equiv 1$ und $\text{supp } \lambda \subset \subset V$. Also gilt auch

$$-H_1^\varepsilon =: -\lambda h_1^\varepsilon \leq f_L \leq \lambda h_2^\varepsilon =: H_2^\varepsilon$$

und

$$\int_V (H_1^\varepsilon + H_2^\varepsilon) \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} (h_1^\varepsilon + h_2^\varepsilon) \, dy \leq \varepsilon.$$

Nach der Eingangsbemerkung sind $(H_1^\varepsilon)_\Phi$ und $(H_2^\varepsilon)_\Phi$ integrierbar mit

$$\int_U \left((H_1^\varepsilon)_\Phi + (H_2^\varepsilon)_\Phi \right) dx = \int_V (H_1^\varepsilon + H_2^\varepsilon) \, dy \leq \varepsilon.$$

Wegen

$$(-H_1^\varepsilon)_\Phi \leq (f_L)_\Phi = f_\Phi \leq (H_2^\varepsilon)_\Phi$$

ist dann auch f_Φ integrierbar mit

$$\int_U f_\Phi \, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_U (H_2^\varepsilon)_\Phi \, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_V H_2^\varepsilon \, dy = \int_V f \, dy. \quad \square$$

Nachdem wir soweit die Klasse der zu integrierenden Funktionen wesentlich eingeschränkt haben auf die Klasse der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in V , müssen wir uns auf die Frage konzentrieren, ob wir auch die Klasse der \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen Φ auf speziellere Typen reduzieren können. Wegen der Lemmata 2 und 5 brauchen wir dazu nur einzusehen, daß sich Diffeomorphismen *lokal* immer als Produkt von spezielleren Diffeomorphismen schreiben lassen, für die die Transformationsformel durch Zurückführung auf den eindimensionalen Fall einfach zu beweisen ist. - Der Schlüssel zu dieser Strategie, die auf DIEUDONNÉ zurückgeht, liegt in dem folgenden Satz.

Satz 37.8 Die Abbildung $\Phi : U \rightarrow V$ sei \mathcal{C}^1 -invertierbar von der Gestalt

$$(y_1, \dots, y_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (h(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Dann gilt die Transformationsformel für Φ .

Beweis. Aufgrund der speziellen Bauart von Φ berechnet man sofort

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) \right| = |\det(D\Phi)(x)| \neq 0.$$

Nach Definition gilt dann mit Hilfe des Satzes von Fubini und der eindimensionalen Transformationsformel (Folgerung 7) (hierbei bezeichnet \tilde{f} die triviale Fortsetzung von f nach \mathbb{R}^n):

$$\begin{aligned} & \int_U (f \circ h)(x) |\det(D\Phi)(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(h(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| dx_1 \right) \dots \right) dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\dots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) dy_1 \right) dy_2 \dots \right) dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) dy = \int_V f(y) dy. \quad \square \end{aligned}$$

Der Satz von Fubini impliziert weiter, daß sich mehrfache Integrale nicht unter Permutation der Koordinaten ändern. Andererseits besitzen solche Permutationen, aufgefaßt als lineare Transformationen, die (Funktional-) Determinante ± 1 . Mit anderen Worten: Die Transformationsformel ist gültig für Permutationen der Koordinaten. - Dies führt zusammen mit Satz 8 zu

Satz 37.9 Die Transformationsformel ist gültig für alle bijektiven affinen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir schreiben die affine Abbildung Φ in der Form $\Phi : x \mapsto Ax + a$. Nach Voraussetzung ist $\det A = \det(D\Phi) \neq 0$, also die Matrix A invertierbar. Es ist dann zu zeigen, daß für alle $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = (\det A) \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + a) dx$$

besteht. Nun ist aber $Ax + a = A(x + A^{-1}a)$ und das Integral translationsinvariant. Somit ist die rechte Seite dieser Formel auch gleich

$$(\det A) \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) dx.$$

Mit anderen Worten: Wir können uns auf den Fall *linearer* Automorphismen $x \mapsto Ax$ beschränken. Eine solche Abbildung setzt sich aber zusammen aus Automorphismen der Gestalt

$$A_1(x_1, \dots, x_n) := (cx_1, x_2, \dots, x_n), \quad c \neq 0, \quad A_2(x_1, \dots, x_n) := (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$$

und Permutationen der Koordinaten. Mit dem Satz von Fubini und der Transformationsformel in Form von Satz 8 ergibt sich sofort in diesen verbleibenden zwei Fällen die Behauptung, da $\det A_1 = c$, $\det A_2 = 1$. \square

Bemerkung. Es gibt einen sehr eleganten Beweis von Satz 9, der auch ohne Satz 8 auskommt. Man setzt dazu

$$\mathfrak{T} := \{ A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : \text{für } A \text{ gilt die Transformationsformel bzgl. der Funktionen } f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \},$$

und zeigt:

1. $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{T}$,
2. $O(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{T}$ (Bewegungsinvarianz des Integrals).
3. $A \in \mathfrak{T}, B \in \mathfrak{T} \implies AB \in \mathfrak{T}$,
4. $\mathfrak{T} = \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Beweis von 1. Für die gegebene Diagonalmatrix D ist $\det D = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0$, also insbesondere $\lambda_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Weiter ist mit $f \in \mathcal{C}_c^0$ auch $f \circ D \in \mathcal{C}_c^0$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Dx) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

für geeignete $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$. Mit $y_j = \lambda_j x_j$ ergibt sich $dy_j = \lambda_j dx_j$. Beachtet man noch, daß man bei negativen λ_j die Integrationsgrenzen vertauschen muß, so erhält man schließlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Dx) dx = |\lambda_1^{-1}| \cdot \dots \cdot |\lambda_n^{-1}| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$$

und damit

$$\int f(Dx) |\det D| dx = \int f(y) dy.$$

Beweis von 2. Dies ist in der Tat der schwierigste Teil. Sei zunächst $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ beliebig. Dann ist mit $f \in \mathcal{C}_c^0$ sicher auch $f \circ A \in \mathcal{C}_c^0$, so daß

$$J_A(f) := \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) dx$$

ist lineares, monotonies Funktional darstellt. Nach einem bekannten Satz⁵⁹ ist jedes solche Funktional, das zusätzlich *translationsinvariant* ist, bis auf eine multiplikative Konstante das (Riemannsche) Integral. Die Translations-Eigenschaft haben wir oben schon bewiesen, ohne es direkt zu vermerken. Wir wiederholen das Argument: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ beliebig, und τ_a sei die entsprechende Translation. Dann gilt

$$\begin{aligned} J_A(\tau_a f) &= \int [(\tau_a f) \circ A](x) dx = \int f(Ax - a) dx \\ &= \int f(A \circ (x - A^{-1}a)) dx = \int \tau_{A^{-1}a}(f \circ A)(x) dx \\ &= \int (f \circ A)(x) dx = \int f(Ax) dx = J_A(f). \end{aligned}$$

Also existiert auch für $A \in O(n)$ ein $\lambda = \lambda_A \geq 0$, so daß

$$\int (f \circ A)(x) dx = \lambda_A \int f(y) dy,$$

und man braucht zur Bestimmung von λ_A nur beide Integrale für eine einzige Funktion f zu bestimmen. Wir wählen z. B.

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 - \|x\|, & \|x\| \leq 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Wegen $A \in O(n)$ ist dann $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so daß $f_0(Ax) = f_0(x)$ und damit

$$\int f_0(Ax) dx = \int f_0(x) dx > 0,$$

⁵⁹siehe FORSTER, *Analysis 3*

also $\lambda_A = 1$ gilt. Für orthogonale Matrizen A ist andererseits bekanntlich $\det A = \pm 1$, so daß wir die Konstante λ_A als Betrag $|\det A|$ der Determinante von A auffassen können.

Der *Beweis* von 3. ist selbstverständlich überflüssig, da die Aussage ein Spezialfall von Lemma 2 ist.

Die Aussage 4. ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden wohlbekanntem Ergebnis der Linearen Algebra, dessen einfachen Beweis wir hier zur Bequemlichkeit des Lesers reproduzieren.

Hilfssatz Jede Matrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ läßt sich schreiben als $A = S_1 D S_2$, wobei D eine Diagonalmatrix (mit positiven Einträgen) ist und die Matrizen S_1, S_2 orthogonal sind.

Beweis des Hilfssatzes. Die Matrix ${}^t A \cdot A$ ist symmetrisch. Damit liefert der Satz über die Hauptachsentransformation eine orthogonale Matrix S , so daß

$${}^t S {}^t A A S = D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Wegen

$$\lambda_k := {}^t e_k D_1 e_k = {}^t e_k {}^t S {}^t A A S e_k = {}^t (A S e_k) \cdot A S e_k = \|A S e_k\|^2 > 0$$

kann man $\alpha_k = \sqrt{\lambda_k}$ und $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ setzen und erhält $D^2 = D_1$. Setzt man schließlich $S_1 = A S D^{-1}$ und $S_2 = S^{-1}$, so prüft man leicht nach, daß S_1 und S_2 orthogonal sind und die gewünschte Beziehung $A = S_1 D S_2$ besteht. \square

Was uns jetzt noch zum vollständigen Nachweis der Transformationsformel fehlt, ist der folgende *lokale Struktursatz* für Diffeomorphismen.

Satz 37.10 Lokal ist jede \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung endliches Produkt von affinen Abbildungen und solchen von dem Typ in Satz 8 (bis auf Permutation der Variablen).

Beweis. Durch Heranmultiplizieren mit Translationen dürfen wir annehmen, daß $x = 0$ und $y = \Phi(x) = 0$. Betrachte dann $\Psi = ((D\Phi)(0))^{-1}\Phi$, d. h. $\Phi = ((D\Phi)(0)) \circ \Psi$. Da $(D\Phi)(0)$ linear ist, brauchen wir nur noch Ψ zu betrachten, können also annehmen, wenn wir wieder Φ für Ψ schreiben, daß

$$(D\Phi)(0) = E_n = (\delta_{ij}).$$

Wir ordnen nun der Abbildung $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ die Abbildungen

$$\psi_j(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_j(x), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

zu. Nach Voraussetzung ist auch

$$(D\psi_j)(0) = E_n,$$

und die ψ_j sind nach dem Satz über implizite Funktionen lokal um den Ursprung \mathcal{C}^1 -invertierbar. Mithin gilt lokal um 0 wegen $\psi_n(x) = \Phi(x)$, $\psi_0(x) = x$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \psi_n = \psi_n \circ (\psi_{n-1}^{-1} \circ \psi_{n-1}) \circ (\psi_{n-2}^{-1} \circ \psi_{n-2}) \circ \dots \circ (\psi_1^{-1} \circ \psi_1) \circ \psi_0^{-1} \\ &= (\psi_n \circ \psi_{n-1}^{-1}) \circ (\psi_{n-1} \circ \psi_{n-2}^{-1}) \circ \dots \circ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \psi_0^{-1}). \end{aligned}$$

Die Abbildungen in den Klammern der letzten Zeile sind aber von der Gestalt

$$\psi_j \circ \psi_{j-1}^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, \varphi_j(x), x_{j+1}, \dots, x_n),$$

also bis auf Permutation von der Art wie in Satz 8. \square

Damit ist die Transformationsformel Satz 1 endgültig bewiesen. - Als erste Konsequenz notieren wir:

Folgerung 37.11 *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $\Phi : U \rightarrow V$ sei ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Ist $B \subset V$ Lebesgue-meißbar, so gilt*

$$\text{Vol}_n(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} |\det(D\Phi)| dx.$$

Denn offenbar ist $\chi_B \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$ und damit $(\chi_B)_\Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)} |\det(D\Phi)|$. \square

Bemerkung. Wir werden anschließend beweisen, daß in der vorigen Folgerung B genau dann Lebesgue-meißbar ist, wenn dies für das Urbild $\Phi^{-1}(B)$ zutrifft.

Beispiel. Sind a_1, \dots, a_n Vektoren in \mathbb{R}^n , so heißt die kompakte Menge

$$P = P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1 \right\}$$

ein *Parallelotop* oder *Parallelepipid*, für $n = 2$ auch ein *Parallelogramm*. Ist $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die durch $A(e_j) = a_j$ gegebene lineare Abbildung, so ist

$$P = A(Q), \quad Q = [0, 1]^n.$$

Somit ergibt sich, sofern A invertierbar ist,

$$\text{Vol}_n(P) = \int_{A^{-1}(P)} |\det A| dx = |\det A| \text{Vol}_n(Q) = |\det A|.$$

Diese Formel gilt aber auch im ausgearteten Fall $\det A = 0$, bei dem P in einer Hyperebene enthalten ist und damit das Maß 0 besitzt.

Wir beweisen jetzt noch die weiter oben formulierte Bemerkung über den Zusammenhang der Integrierbarkeit der Mengen B und $\Phi^{-1}(B)$.

Satz 37.12 *Es sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Dann ist $B \subset V$ genau dann Lebesgue-meißbar, wenn dies auch für $\Phi^{-1}(B) \subset U$ richtig ist, und es gilt*

$$\text{Vol}_n(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} |\det(D\Phi)| dx.$$

Mit anderen Worten : Mit $M \subset U$ ist auch $\Phi(M) \subset V$ Lebesgue-meißbar, und es gilt

$$\text{Vol}_n(\Phi(M)) = \int_M |\det(D\Phi)| dx.$$

Beweis. Da wir die Rollen von Φ und Φ^{-1} vertauschen können, reicht der Nachweis, daß mit $\Phi^{-1}(B)$ auch B Lebesgue-meißbar ist. Die behauptete Formel braucht dann nur noch von Folgerung 11 abgeschrieben zu werden. Wir schöpfen dazu U durch kompakte Mengen aus: $U = \cup_{j=0}^{\infty} K_j$, $K_0 \subset K_1 \subset \dots$, und setzen $A_j = \Phi^{-1}(B) \cap K_j$. Dann wird $\Phi^{-1}(B)$ durch die Lebesgue-meißbaren Mengen A_j ausgeschöpft und B durch die Mengen $B_j := \Phi(A_j)$. Es genügt, den Satz für die B_j zu beweisen, da sich hieraus der Allgemeinfall wegen

$$\text{Vol}_n(\Phi(A_j)) = \int_{A_j} |\det(D\Phi)| dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Phi^{-1}(B)} |\det(D\Phi)| dx$$

ergibt. Wir dürfen also annehmen, daß $\Phi^{-1}(B)$ relativ kompakt in U liegt und dann, nach evtl. Verkleinerung von U und $V = \Phi(U)$, daß $|\det(D\Phi^{-1})| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf V ist. Dann ist aber

$$\chi_B = (\chi_{\Phi^{-1}(B)})_{\Phi^{-1}} \cdot |\det(D\Phi^{-1})|^{-1}$$

wegen der Transformationsformel für Φ^{-1} über V integrierbar. \square

Bemerkung. Man kann die letzte Aussage (im Falle von kompakten Teilmengen $K \subset U$) ganz wesentlich verallgemeinern auf stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nicht notwendig Diffeomorphismen von U auf $\Phi(U)$ sind. Selbstverständlich kann man hier nur eine *Ungleichung* erwarten. Wir zitieren ohne Beweis:

Lemma 37.13 (Sardsche Ungleichung) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine einmal stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt für jedes Kompaktum $K \subset U$:*

$$\text{Vol}_n(\Phi(K)) \leq \int_K |\det(D\Phi)(x)| d^n x.$$

Speziell ist $\Phi(Q)$ eine Nullmenge für einen ausgearteten Quader Q .

Bemerkung und Definition. Im Falle eines Diffeomorphismus Φ ist das SARDSche Lemma eine Konsequenz aus Satz 12, da mit K auch $\Phi(K)$ kompakt und damit Lebesgue-meßbar ist. Ist die in Lemma 33 angegebene Ungleichung für eine Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jedes Kompaktum $K \subset U$ erfüllt, so sagen wir, daß die Abbildung Φ dem Sardischen Lemma genügt.

Wir demonstrieren die Nützlichkeit des Sardischen Lemmas für einen alternativen Beweis der Transformationsformel an einem einfachen Resultat.

Lemma 37.14 *Die zu Beginn des Kapitels angegebene Ungleichung (*) gilt für alle Funktionen f der Gestalt*

$$f = \sum c_j \chi_{L_j}$$

mit $c_j \geq 0$ und Kompakta $L_j \subset V$, wenn Φ der Sardischen Ungleichung genügt.

Denn setzt man $K_j = \Phi^{-1}(L_j)$, so ist $K_j \subset U$ kompakt und

$$f_\Phi = \sum c_j \chi_{K_j} |\det(D\Phi)|.$$

Es folgt

$$\int_V f dy = \sum c_j \text{Vol}_n(\Phi(K_j)) \leq \sum c_j \int_{K_j} |\det(D\Phi)| dx = \int_U f_\Phi dx. \quad \square$$

Folgerung 37.15 *Die Transformationsformel gilt für alle $f \in C_c^0(V)$, sofern Φ und Φ^{-1} der Sardischen Ungleichung genügen.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$. f ist dann der aufsteigende Limes von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$. Durch Abänderung auf Quaderrändern kann man annehmen, daß

$$\varphi_k = \tilde{\varphi}_k + \psi_k, \quad \tilde{\varphi}_k = \sum c_{jk} \chi_{Q_{jk}},$$

mit $c_{jk} > 0$, Q_{jk} kompakte Quader in V , und $\psi_k = 0$ außerhalb einer Nullmenge $N \subset V$, die Vereinigung von ausgearteten Quadern ist. Es ist dann

$$\int_V \varphi_k dy = \int_V \tilde{\varphi}_k dy \leq \int_U (\tilde{\varphi}_k)_\Phi dx = \int_U \left((\tilde{\varphi}_k)_\Phi + (\psi_k)_\Phi \right) dx = \int_U (\varphi_k)_\Phi dx,$$

da nach der Sardischen Ungleichung für Φ^{-1} die Menge $\Phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge ist. Aus $\varphi_k \nearrow f$ folgt natürlich auch $(\varphi_k)_\Phi \nearrow f_\Phi$. Da f_Φ in $\mathcal{C}_c^0(U)$ liegt, hat man

$$\int_V \varphi_k dy \leq \int_U (\varphi_k)_\Phi dx \leq \int_W f_\Phi dx < \infty.$$

Also ist nach dem Satz von B. Levi

$$\int_V f dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V \varphi_k dy \leq \int_U f_\Phi dx.$$

Anwendung derselben Formel auf $f_\Phi \in \mathcal{C}_c^0(U)$ anstelle von f und Φ^{-1} anstelle von Φ liefert die Behauptung. \square

Bemerkungen. 1. Es ist in der Tat möglich, die Sardische Ungleichung *direkt*, also ohne Verwendung der Transformationsformel, zu beweisen und so entlang der eben angedeuteten Beweislinie die Transformationsformel abzuleiten. Dies führt sogar zu einer *strengeren Form* der Transformationsformel:

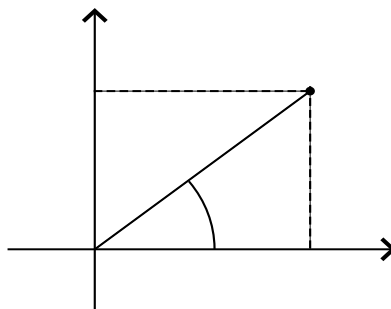
Satz 37.16 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar, so ist eine Funktion $f : \Phi(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann integrierbar, wenn dies für $f_\Phi : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ richtig ist, und es gilt die Transformationsformel.*

2. Man beachte, daß unter diesen schwächeren Voraussetzungen Φ kein Diffeomorphismus von U auf $\Phi(U)$ zu sein braucht. Allerdings ist das Bild $\Phi(U)$ aufgrund eines tiefliegenden Satzes von BROUWER tatsächlich offen in \mathbb{R}^n und $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ ist ein *Homöomorphismus*. Hierzu genügt schon, daß $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und *stetig* ist.

3. Mehr Einzelheiten über diesen Zugang findet man in K. FLORET: *Maß- und Integrationstheorie*. Teubner Studienbücher. B. G. Teubner: Stuttgart 1981.

Als Anwendung der Transformationsformel bringen wir die Berechnung von Integralen mittels *Polarkoordinaten*. In \mathbb{R}^2 läßt sich jeder Punkt (x, y) in der Form

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$



Figur 37.1

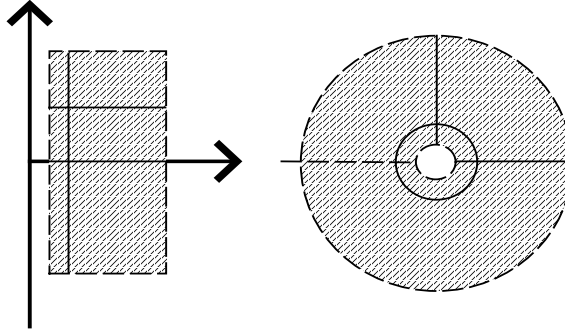
schreiben, d. h. die (differenzierbare) Abbildung

$$P_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad P_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ist surjektiv. Als Funktionalmatrix erhält man

$$DP_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit $\det(DP_2) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$. Somit ist die Einschränkung von P_2 auf $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ lokal ein Diffeomorphismus. Man sieht leicht, daß unter P_2 der offene Streifen $\mathbb{R}_+^* \times \Pi$, $\Pi = (-\pi, \pi)$, diffeomorph auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$ abgebildet wird.



Figur 37.2

Da die Halbachse $S = \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^2 ist, spielt sie bzgl. Integration keine Rolle.

Man definiert nun induktiv

$$P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := (P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos \varphi_{n-1}, r \sin \varphi_{n-1}),$$

also z. B. für $n = 3$:

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = (r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, r \sin \varphi_2).$$

Weiter setzt man

$$\Pi^1 := \Pi = (-\pi, \pi), \quad \Pi^k := \Pi^1 \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{k-1}, \quad k \geq 2,$$

und beweist dann leicht den folgenden

Satz 37.17 Die Polarkoordinatenabbildung $P_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die folgenden Eigenschaften :

- i) $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|_2 = r$.
- ii) P_n bildet den offenen Streifen $\mathbb{R}_+^* \times \Pi^{n-1}$ diffeomorph auf den geschlitzten Raum

$$\mathbb{R}^n \setminus (S \times \mathbb{R}^{n-2}), \quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$$

ab.

- iii) Es gilt mit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in \Pi^{n-1}$

$$|\det(DP_n)(r, \varphi)| = r^{n-1} C(\varphi)$$

mit

$$C(\varphi) = C(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \cos^0 \varphi_1 \cos^1 \varphi_2 \dots \cos^{n-2} \varphi_{n-1}.$$

Beweis (Übungsaufgabe). □

Es sei nun $I \subset [0, \infty]$ ein Intervall und

$$B(I) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}.$$

$B(I)$ ist eine Kugelschale bzw. eine punktierte Kugel. Als Folgerung aus der Transformationsformel erhält man dann sofort das

Lemma 37.18 Eine Funktion $f : B(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$f(P_n(r, \varphi)) C(\varphi) r^{n-1}$$

über $I \times \Pi^{n-1}$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_{B(I)} f(x) d^n x = \int_I \int_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi)) C(\varphi) r^{n-1} d^{n-1} \varphi dr.$$

Ein Spezialfall liegt dann vor, wenn f kugelsymmetrisch ist:

$$f(x) = f(\|x\|).$$

Wegen $f(P_n(r, \varphi)) = f(\|P_n(r, \varphi)\|) = f(r)$ ergibt sich hierbei mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\int_{B(I)} f(x) d^n x = \left(\int_{\Pi^{n-1}} C(\varphi) d^{n-1} \varphi \right) \left(\int_I f(r) r^{n-1} dr \right).$$

Wählt man in dieser Formel speziell $f \equiv 1$ und $I = [0, 1]$, so übersetzt sich diese in

$$\kappa_n := \text{Vol}_n(\overline{B}_1(0)) = \int_{\Pi^{n-1}} C(\varphi) d^{n-1} \varphi \cdot \left(\frac{r^n}{n} \Big|_{r=0}^1 \right).$$

Zusammenfassend ergibt sich die

Folgerung 37.19 Eine kugelsymmetrische Funktion f auf $B(I)$ ist genau dann integrierbar, wenn $f(r) r^{n-1}$ über I integrierbar ist, und es gilt

$$\int_{B(I)} f(\|x\|) d^n x = n \kappa_n \int_I f(r) r^{n-1} dr$$

mit dem n -dimensionalen Volumen κ_n der Einheitskugel:

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \begin{cases} \frac{\pi^q}{q!} & , \quad n = 2q, \\ \frac{2^q \pi^{q-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2q-1)} & , \quad n = 2q-1. \end{cases}$$

Es gibt weitere interessante Koordinatentransformationen, wie z. B. die von JACOBI, die sich im Falle der Dimension $n = 2$ schreiben läßt in der Form

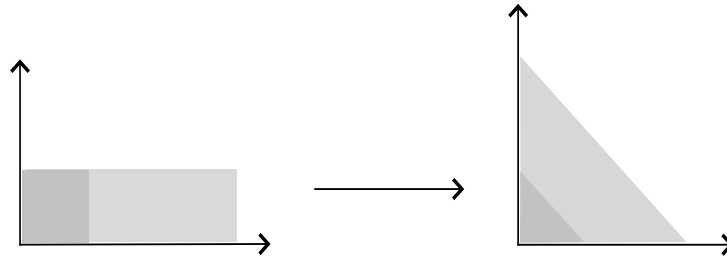
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix}$$

Es ist unschwer zu sehen, daß diese Abbildung den Streifen $\mathbb{R}_+^* \times (0, 1)$ diffeomorph auf $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ abbildet mit der Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y \\ y/(x+y) \end{pmatrix}.$$

Dabei geht insbesondere der offene „Einheitswürfel“ $(0, 1) \times (0, 1)$ über in das offene „Standard-Simplex“

$$\Delta^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x + y < 1\}.$$



Figur 37.3

Da die Determinante des Differentials dieser *Jacobi-Abbildung* gleich u ist, folgt direkt aus der Transformationsformel:

Satz 37.20 Eine Funktion f auf $(\mathbb{R}_+^*)^2 := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(u, v) \mapsto f(u(1-v), uv)u$$

über den Streifen $S := \mathbb{R}_+^* \times (0, 1)$ integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(x, y) dx dy = \int_S f(u(1-v), uv)u du dv.$$

Beispiel. Das EULERSche *Beta-Integral* ist definiert durch

$$B(z, w) := \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{w-1} dt;$$

es konvergiert für reelle $z > 0$, $w > 0$. (In der Tat existiert es auch für *komplexe* z, w mit $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$). Das Beta-Integral kann durch die Γ -Funktion ausgedrückt werden. Es ist bekanntlich (siehe Kapitel 18)

$$\Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}_+^*} x^{z-1} e^{-x} dx$$

für reelle $z > 0$ (und die Γ -Funktion wird durch die gleiche Formel auch in den komplexen Bereich $\operatorname{Re} z > 0$ fortgesetzt). Also ist nach dem Satz über das Integral von Tensorprodukten integrierbarer Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{z-1} y^{w-1} e^{-(x+y)} dx dy.$$

Für die rechte Seite bietet sich aber als Integrationsmethode sofort die Jacobi-Transformation an; sie berechnet sich mit Hilfe des Satzes von Fubini zu

$$\int_S (u(1-v))^{z-1} (uv)^{w-1} e^{-u} u du dv = \left(\int_0^\infty u^{z+w-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 (1-v)^{z-1} v^{w-1} dv \right).$$

Damit gewinnt man die berühmte Beziehung

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Es ist ein Leichtes, mit derselben Methode die folgende Aussage zu beweisen:

Lemma 37.21 *Es sei $\varphi = \varphi(u)$ eine Funktion in einer reellen Veränderlichen u , und p, q seien reelle Zahlen. Genau dann ist die Funktion*

$$f(x, y) := x^{p-1} y^{q-1} \varphi(x + y)$$

über das (offene) Standard-Simplex Δ^2 integrierbar, wenn p und q positiv sind und die Funktion $u \mapsto u^{p+q-1} \varphi(u)$ über $(0, 1)$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_{\Delta^2} x^{p-1} y^{q-1} \varphi(x + y) dx dy = B(p, q) \int_{(0,1)} u^{p+q-1} \varphi(u) du .$$

Beispiel. Wählt man in der vorstehenden Formel $\varphi \equiv 1$, so gewinnt man wegen

$$\int_{(0,1)} u^{p+q-1} du = \frac{1}{p+q} \quad \text{und} \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

die für alle positiven p, q gültige DIRICHLETSche Formel

$$\int_{\Delta^2} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} .$$

Beweis von Lemma 21. f ist genau dann über Δ^2 integrierbar, wenn die Funktion

$$f(u(1-v), uv)u = (u^{p+q-1} \varphi(u)) \cdot ((1-v)^{p-1} v^{q-1})$$

über den offenen Einheitswürfel integrierbar ist. Wegen Satz 36.4 ist dies äquivalent zur Existenz der beiden Integrale

$$\int_{(0,1)} u^{p+q-1} \varphi(u) du \quad \text{und} \quad \int_{(0,1)} (1-v)^{p-1} v^{q-1} dv ,$$

und das zweite Integral existiert genau dann, wenn p und q positiv sind. \square

Wir beenden dieses Kapitel mit der Einführung der sogenannten *Faltung* zweier integrierbarer Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und dem Nachweis der elementarsten Eigenschaften. Da das Tensorprodukt $f \otimes g$ integrierbar ist, folgt mit der Transformation $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ die Integrierbarkeit der Funktion $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ und somit die Existenz des Integrals

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da, wo das Integral nicht definiert ist, setze man einfach $(f * g)(x) := 0$.

Definition. Die hierdurch definierte (integrierbare) Funktion $f * g$ heißt die *Faltung* von f mit g (oder auch von f und g , da, wie wir weiter unten zeigen werden, die Kommutativitätsaussage $f * g = g * f$ gilt).

Bemerkung und Beispiel. Die Faltung $f * g$ ist eine Art „gewichtete Mittelung“ von f , wobei die Gewichtung vermittle g geschieht. Ist z. B. $g = g_\varepsilon$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-\varepsilon, \varepsilon]$, so ist unter Heranziehung der Substitutionsregel für die Substitution $\xi := x - y$ bei festem $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * g_\varepsilon)(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x - y) dy = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi) d\xi .$$

Satz 37.22 *Mit f und g liegt auch die Faltung $f * g$ in L^1 , und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) d^n x = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d^n x \right) .$$

Ferner hat man die folgenden Aussagen :

- a) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$;
 b) $f * g = g * f$;
 c) $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

Bemerkung. Aufgrund dieses Satzes wird L^1 zusammen mit der üblichen Addition und der Faltung als Multiplikation bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ eine (kommutative) Banach-Algebra. Das Integral ist auf diesem Raum ein Algebra-Homomorphismus.

Beweis (Satz 22). Bei Abänderung der Funktionen f und g auf Nullmengen wird auch die Faltung $f * g$ nur auf einer Nullmenge verändert. Da weiter die Funktion $f(x - y)g(y)$ integrierbar ist, erhält man nach Fubini und mit der Translationsinvarianz des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) d^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d^n y \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d^n x \right) d^n y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d^n x \right) d^n y = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d^n y \right) . \end{aligned}$$

a) Aus der Standard-Abschätzung für den Betrag eines Integrals gewinnt man sofort $|f * g| \leq |f| * |g|$ und daraus mit a) die Behauptung.

b) Mit der Substitution $(x, y) \mapsto (x, x - y)$ erhält man für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) d^n y = (g * f)(x) .$$

c) Hat man $(f * g)(x) \neq 0$ an einer Stelle x , so gibt es notwendig ein $y \in \text{supp}(g)$ mit $x - y \in \text{supp}(f)$. Also ist $x \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$. \square

Bemerkung. Ähnlich wie unter b) beweist man auch, daß das Faltungsprodukt auf L^1 assoziativ ist:

$$(f * g) * h = f * (g * h) .$$

Aus Satz 35.10 über parameterabhängige Integrale ergibt sich weiter die Tatsache, daß in einer Faltung $f * g$ schon einer der beiden Faktoren die Differentiationsgüte des Produkts bestimmt. - Genauer hat man den folgenden

Satz 37.23 *Es sei $f \in L^1$, und $g \in L^1$ sei zusätzlich eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist auch die Faltung $f * g$ stetig. Besitzt g überdies eine beschränkte stetige Ableitung nach der Variablen x_j , so ist auch $f * g$ nach x_j stetig differenzierbar mit*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * g) = f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) .$$

Bemerkung. Es sollte klar sein, welche allgemeineren Aussagen man für k -mal stetig differenzierbare g beweisen kann. Insbesondere ist $f * g$ beliebig oft differenzierbar, wenn $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt.