



# Analysis I

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

**3. Auflage, Hamburg 2015**



## Vorwort

Die hier vorgelegten Noten konstituieren den ersten Teil eines in Vorbereitung befindlichen Textes, der von dem Aufbau des Zahlensystems ausgehend einen weiten Bereich der Analysis bis hin zur Integrationstheorie von (reellwertigen) Funktionen in mehreren *reellen* Veränderlichen, den Integralsätzen, den Grundlagen der Differentialgeometrie, den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und der Funktionalanalysis abdecken soll. Auch die Theorie der differenzierbaren Funktionen in einer *komplexen* Veränderlichen, also die *klassische Funktionentheorie*, soll hierin ihren Platz finden.

Dieser Text findet seine ursprünglichen Quellen in den Büchern meines Lehrers HANS GRAUERT und denen von OTTO FORSTER [7,6], hat sich aber im Laufe der Zeit stark von jenen entfernt. Bei der Entwicklung des *Riemannsches* und des *Lebesgueschen Integrals* verdanke ich dem in dem 2. Band des Analysis-Buches von KÖNIGSBERGER [11] beschrittenen Weg einige wichtige Erkenntnisse. Dem Kenner wird es nicht schwer fallen, weitere fundamentale Wurzeln wie z.B. S. LANG [12,13] und DIEUDONNÉ [33] ausfindig zu machen, auch wenn sie nicht jedesmal explizit genannt werden. Auf jeden Fall sollte das Literaturverzeichnis eine vollständige Liste meiner direkten und indirekten Hilfsmittel enthalten.

Was diesen Text von den meisten Lehrbüchern der Analysis unterscheidet, ist der Versuch, trotz des Aufbaus ab ovo von vornherein allgemeinere Konzepte und Prinzipien mit einzubeziehen, ohne deshalb auf die konkreten Beispiele zu verzichten. Insbesondere wird der Frage nach dem Wesen der reellen Zahlen stärker als üblich Rechnung getragen, indem wir uns zum einen der Mühe unterzogen haben, für möglichst viele der klassischen Sätze der reellen Analysis die Äquivalenz zum Vollständigkeitsaxiom nachzuweisen. Dies bedeutet im Wesentlichen keine Mehrarbeit; man hat nur genau Buch zu führen, welche Eigenschaften der reellen Zahlen man bei den einzelnen Beweisen benutzt hat, und muß die Sätze möglichst ökonomisch auseinander entwickeln. Es zeigt sich dann, daß man nach einer längeren Schlußkette über die Richtigkeit von Aussagen in einem angeordneten Körper meist wieder recht einfach einsieht, daß die zuletzt nachgewiesene Eigenschaft nur im Körper der reellen Zahlen gelten kann. Es ist meine Hoffnung, daß durch diese Art der Betrachtung ein tieferes Verständnis für die Gültigkeit der klassischen Sätze erreicht werden kann. Selbstverständlich hat man hierfür einen Preis zu bezahlen in Form einer frühen Konfrontation mit abstrakteren Konstrukten z. B. aus dem Bereich der Topologie, die allerdings von so grundlegender Natur sind, daß man sie ohnehin spätestens im zweiten Semester zur Verfügung stellen muß. Nun scheint das eben geschilderte Vorgehen eine viel zu starke Betonung der *axiomatischen* Sichtweise heraufzubeschwören. Um dem entgegenzuwirken, stellen wir ihr die *konstruktive Methode* zur Seite, indem wir in einem Anhang einen allgemeinen Vervollständigkeitsatz beweisen, der als einfachsten Spezialfall die Vervollständigung des rationalen Zahlkörpers enthält. Selbstverständlich kann sowohl dieser Anhang als auch alle anderen, die stärker topologischen Fragestellungen gewidmet sind, beim ersten Lesen überschlagen werden.

Es ist mir bewußt, daß nicht wenige Kolleginnen und Kollegen schon bei der Erwähnung der „axiomatischen“ Besonderheiten des vorliegenden Textes aus „wohlbegründeten didaktischen“ Gründen heraus unruhig, wenn nicht ungehalten werden und die Vermengung des Axiomatischen mit dem Konstruktiven gar als den Versuch einschätzen, den Teufel mit Beelzebub auszutreiben. Zur Beruhigung, Erwiderung, Rechtfertigung etc. sei aber gesagt, daß meine Erfahrungen mit dieser Art des Aufbaus zumindest nicht schlechter sind als mit mehrfach ausprobierten traditionelleren Vorgehensweisen, und - was mein eigentliches didaktisches Credo ist - daß ich selbst in meinen Vorlesungen weder meinem eigenen noch irgendeinem anderen Manuskript jemals sklavisch gefolgt bin. Insbesondere kann und sollte man in einer Vorlesung auf der Basis des vorliegenden Manuskripts je nach Zielsetzung und Geschmack Teile desselben, insbesondere die eben schon erwähnten Anhänge, zunächst völlig auslassen oder höchstens erwähnen und gegebenenfalls erst zu einem späteren Zeitpunkt ausführlicher behandeln.

Der eigentliche Zweck der hier vorgelegten Fassung besteht allerdings darin, den Hörer/innen meiner Vorlesung im Wintersemester 2002/03 eine verlässliche Orientierung zu geben darüber, in welchen Bereichen ich wesentlich von dem der Vorlesung zugrundegelegten Lehrbuch von Königsberger abgewichen bin oder dieses ergänzt habe. Zu den Ergänzungen gehört auch mein Manuskript [171], das hier nicht noch einmal abgedruckt wird. Die Unvollkommenheit der Noten bzw. ihre Entstehungsgeschichte spiegeln sich wider in der Tatsache, daß z. B. Verweise auf spätere Kapitel ins Leere führen können.

Wie ich früher an anderer Stelle (in meinem Manuskript über *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*) schon gesagt habe, sollte der ideelle Leser an Voraussetzungen vor allem Neugier auf mathematisches Basiswissen und Freude am mathematischen Denken mitbringen. Neben einer guten Schulbildung und den in dieser Veranstaltung erworbenen Fähigkeiten und Einsichten werden aber spätestens im zweiten Semester auch gute Kenntnisse der Linearen Algebra benötigt. Während sich diese mit speziellen, sehr einfachen, nämlich *linearen* Abbildungen  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper, beschäftigt und die Struktur von Lösungsmengen

$$\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = b\} = A^{-1}(b), \quad b \in \mathbb{K}^m \quad \text{fest},$$

klärt, studiert die Analysis z. B. Abbildungen

$$f : U \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad U \subset \mathbb{K}^n, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \mathbb{C},$$

die an jeder Stelle „gut durch lineare Abbildungen approximierbar“ sind (Differenzierbarkeit). Umgekehrt schränkt die Lineare Algebra in weiten Teilen den Grundkörper auf die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ein, z. B. bei der Untersuchung von euklidischen und unitären Vektorräumen, und verläßt sich dabei auf die Bereitstellung durch die Analysis.

Somit findet ein ständiger Austausch zwischen beiden Gebieten statt, so daß ein Studium des einen nicht ohne Grundkenntnisse des anderen sinnvoll ist. In meinem Verständnis ist ohnehin die Mathematik eine Einheit und daher die traditionelle Einteilung in „Kästchen“ eher schädlich. Aus diesem Grunde verweise ich auf die Literaturliste, die auch Bücher über „Lineare Algebra“ ausweist. Mein eigener Text [41] bietet (vielleicht) den Vorteil, sehr knapp (wie ich hoffe aber auch verlässlich) zu sein im eigentlichen Bestand dieses Gebietes. Er enthält zudem einen längeren Anhang über Anwendungen der Linearen Algebra in der Analysis.

Es ist mir ein besonderes Anliegen, Frau Erdmute Dänhardt für all die Jahre der Zusammenarbeit zu danken, in denen sie so viele unterschiedliche, zum Teil unausgereifte Texte zunächst mit der Schreibmaschine und später mit dem Computer via L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X für mich zu Papier gebracht hat. Ohne ihre Mithilfe würden diese Texte nur in meinem Kopf und als vage Vortragsnotizen auf losen Zetteln im Format DIN A5 existieren. Meinen früheren Mitarbeitern Dr. Andreas Leipelt und Dr. Jörg Schürmann danke ich für die Geduld, mit der sie mein nicht gerade weltbewegendes „Vollständigkeits-hobby“ unterstützt haben. In die vorliegende Fassung sind zudem ganz wesentlich Informationen und Anregungen eingeflossen, die mir Herr Kollege Alexander Prestel aus Konstanz hat zukommen lassen. Auch ihm sei hier herzlich Dank gesagt.

Dank und Anerkennung gebührt schließlich und vor allem den Studenten aus mehreren Generationen, die mit großem Ernst darum gerungen haben, den Stoff in der von mir präsentierten Form zu verstehen, insbesondere denen, die mich effektiv, d. h. durch konstruktive Kritik und Korrekturlesen früherer Fassungen einzelner Kapitel, dabei unterstützt haben, den Text zu verbessern. Besonders hervorheben möchte ich Daniel Hawellek und Stephan Tolksdorf, die unermüdlich die ständigen Metamorphosen des Manuskripts im vergangenen Semester verfolgt und entscheidend daran mitgewirkt haben, daß die schlimmsten „Schnitzer“ eliminiert und zahlreiche Druckfehler ausgemerzt werden konnten. Es ist unnötig zu betonen, daß alle verbleibenden Unstimmigkeiten allein auf mein Konto gehen.

Hamburg, den 10. 05. 2003

Oswald Riemenschneider

Die hier vorgelegte „3. Auflage“ unterscheidet sich von der ersten und zweiten durch die Hinzufügung einer größeren Anzahl von sehr konkreten Beispielen zur Analysis in der Erwartung, daß hierdurch eine bessere Balance zu dem ansonsten recht abstrakten Text hergestellt werden möge. Die Abschnitte über die Axiomatik der reellen Zahlen wurden teilweise überarbeitet. Hierbei war mir eine neuere Arbeit<sup>1</sup> von Nutzen, die ich allen Interessierten empfehlen möchte.

---

<sup>1</sup>Deveau, Michael, and Holger Teismann. 72 + 42: Characterizations of the completeness and archimedean properties of ordered fields. *Real Analysis Exchange* 39, pp. 261–303, 2014.

Das Manuskript wurde zudem einer genauen Inspektion unterworfen; die präzisere Einteilung in Abschnitte und Unterabschnitte soll die Lesbarkeit verbessern. Da das Manuskript vor der deutschen Rechtschreibreform entstand, und nicht nur deshalb, habe ich mich entschlossen, die alte Rechtschreibung beizubehalten.

Hamburg, den xx. xx. 2015

Oswald Riemenschneider

*Es ist ein herrliches Gefühl, die Einheitlichkeit eines Komplexes von Erscheinungen zu erkennen, die der direkten sinnlichen Wahrnehmung als ganz getrennte Dinge erscheinen.*

ALBERT EINSTEIN, 1901.

*Das wichtigste Resultat des sinnigen physischen Forschers ist daher dieses: in der Mannigfaltigkeit die Einheit zu erkennen, der erhabenen Bestimmung des Menschen eingedenk, den Geist der Natur zu ergreifen, welcher unter der Decke der Erscheinungen verhüllt liegt.*

ALEXANDER VON HUMBOLDT, 1845.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Literatur</b>	<b>ix</b>
<b>Lebensdaten einiger Hauptpersonen</b>	<b>xvii</b>
<b>Index</b>	<b>xxi</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>Teil I: Mengentheoretische und algebraische Grundlagen</b>	<b>5</b>
<b>0 Naive Mengentheorie</b>	<b>5</b>
0.1 Der naive Mengenbegriff . . . . .	5
0.2 Enthaltensein . . . . .	5
0.3 Vereinigung und Durchschnitt . . . . .	7
0.4 Formeln der Mengenalgebra . . . . .	7
0.5 Die leere Menge . . . . .	8
0.6 Der Abbildungsbegriff . . . . .	9
0.7 Surjektive, injektive und bijektive Abbildungen . . . . .	10
0.8 Links - und Rechtsinverse . . . . .	11
0.9 Das Auswahlaxiom . . . . .	11
0.10 Die Russelsche Antinomie . . . . .	13
Anhang: Kartesische Produkte und Abbildungen . . . . .	14
<b>1 Die Peano - Axiome der natürlichen Zahlen</b>	<b>17</b>
1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen . . . . .	17
1.2 Beispiele für das Induktionsprinzip . . . . .	18
1.3 Mengentheoretische Formulierung der Axiome . . . . .	20
1.4 Beweis einiger naheliegender Aussagen über Nachfolger . . . . .	22
1.5 Bemerkungen über gängige Schlußweisen . . . . .	23
1.6 Äquivalente Formulierung des Induktionsaxioms . . . . .	23
1.7 Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen . . . . .	24
Anhang: Wahrheitstabeln für logische Aussagen . . . . .	28
<b>2 Addition, Multiplikation und Anordnung natürlicher Zahlen</b>	<b>29</b>
2.1 Die Addition natürlicher Zahlen . . . . .	29
2.2 Die Multiplikation natürlicher Zahlen . . . . .	30
2.3 Die Ordnung der natürlichen Zahlen . . . . .	32
2.4 Eine weitere Induktionsvariante . . . . .	33
2.5 Wohlordnung der natürlichen Zahlen . . . . .	33
2.6 Die Methode des unendlichen Abstiegs . . . . .	34
2.7 Der goldene Schnitt und das reguläre Fünfeck . . . . .	35
2.8 Ordnungstheoretische Induktion . . . . .	38
2.9 Division mit Rest . . . . .	38
Anhang 1: Relationen und Ordnungen . . . . .	40
Anhang 2: Das Zornsche Lemma . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Endliche und unendliche Mengen</b>	<b>45</b>
3.1	Gleichmächtigkeit . . . . .	45
3.2	Endliche und unendliche Mengen . . . . .	45
3.3	Höchstens abzählbare Mengen . . . . .	47
3.4	Hilberts Hotel . . . . .	49
3.5	Überabzählbare Mengen . . . . .	50
3.6	Unendliche Mengen verschiedener Mächtigkeit . . . . .	51
3.7	Elementare kombinatorische Formeln . . . . .	51
	Anhang: Kardinalzahlen und Kontinuumshypothese . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Verknüpfungen, Halbgruppen und Gruppen</b>	<b>55</b>
4.1	Magmen . . . . .	55
4.2	Halbgruppen . . . . .	55
4.3	Produkte von endlich vielen Elementen . . . . .	56
4.4	Verallgemeinertes Assoziativ - Kommutativ - Gesetz . . . . .	58
4.5	Neutrale Elemente in Magmen . . . . .	58
4.6	Invertierbare und inverse Elemente . . . . .	59
4.7	Gruppen . . . . .	60
4.8	Reguläre Halbgruppen . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Ringe, Körper, Vektorräume</b>	<b>65</b>
5.1	Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ . . . . .	65
5.2	Erweiterung von regulären Halbgruppen . . . . .	66
5.3	Die Ringstruktur auf $\mathbb{Z}$ . . . . .	67
5.4	Die binomische Formel in kommutativen Ringen . . . . .	69
5.5	Unterringe, Ringhomomorphismen und Ideale . . . . .	70
5.6	Polynomringe und formale Potenzreihen - Ringe über Ringen . . . . .	71
5.7	Vektorräume, Moduln etc. . . . .	72
5.8	Konstruktion von Quotientenkörpern . . . . .	73
5.9	Die Unzulänglichkeit von $\mathbb{Q}$ . . . . .	75
	<b>Teil II: Grundlagen der Analysis</b>	<b>81</b>
<b>6</b>	<b>Angeordnete und bewertete Körper</b>	<b>81</b>
6.1	Positivitätsbereiche und Anordnungen in Ringen und Körpern . . . . .	81
6.2	Angeordnete Ober- und Unterringe . . . . .	82
6.3	Existenz angeordneter Ringe und Induktionsaxiom . . . . .	83
6.4	Arithmetisches und geometrisches Mittel . . . . .	83
6.5	Existenz nichtarchimedischer Anordnungen . . . . .	84
6.6	Bemerkenswerte Eigenschaften archimedischer Ringe . . . . .	85
6.7	Beträge in angeordneten Ringen . . . . .	85
6.8	Intervalle in angeordneten Ringen und Körpern . . . . .	86
6.9	Quadratwurzel aus $-1$ . . . . .	87
6.10	Bewertete Körper . . . . .	89
6.11	Polynomringe über Körpern . . . . .	90
6.12	Der goldene Schnitt und das reguläre Fünfeck . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Konvergente Folgen in metrischen Räumen</b>	<b>95</b>
7.1	Normierte Vektorräume . . . . .	95
7.2	Grenzwerte, Konvergenz . . . . .	97
7.3	Eindeutigkeit von Grenzwerten . . . . .	99
7.4	Beschränkte Folgen . . . . .	100
7.5	Bestimmt divergente Folgen in angeordneten Körpern . . . . .	101
7.6	Konvergenz und Nullfolgen . . . . .	102



7.7	Bernoullische Ungleichung . . . . .	102
7.8	Metrische Räume, Beispiele . . . . .	104
7.9	Offene und abgeschlossene Kugeln in metrischen Räumen . . . . .	107
7.10	Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen . . . . .	107
7.11	Konvergente Folgen in metrischen Räumen . . . . .	108
7.12	Häufungspunkte von Folgen in metrischen Räumen . . . . .	110
7.13	Abgeschlossene und folgenabgeschlossene Mengen . . . . .	111
7.14	Berührungspunkte und abgeschlossene Hüllen . . . . .	111
7.15	Randpunkte von Mengen . . . . .	113
7.16	Merkwürdige topologische Eigenschaften nichtarchimedisch bewerteter Körper . . . . .	114
	Anhang: Topologische Räume . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Konvergente Folgen und Reihen in normierten Vektorräumen</b>	<b>120</b>
8.1	Algebraische Eigenschaften von Limiten . . . . .	120
8.2	Intervallschachtelungen . . . . .	122
8.3	Reihen in normierten Vektorräumen . . . . .	122
8.4	Cauchy-Folgen und -Reihen . . . . .	123
8.5	Klammern und Entklammern in Reihen . . . . .	125
8.6	Algebraische Eigenschaften von Cauchy - Folgen und Vollständigkeit . . . . .	126
8.7	Existenz von Quadratwurzeln und Vollständigkeit . . . . .	126
8.8	Folgenstetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen . . . . .	128
8.9	Archimedisch angeordnete Körper und $g$ - adische Entwicklungen . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Axiomatische Beschreibungen der reellen Zahlen und einfache Folgerungen</b>	<b>145</b>
9.1	Äquivalente axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers . . . . .	145
9.2	Existenz von Wurzeln . . . . .	146
9.3	Die allgemeine Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel . . . . .	147
9.4	Einige nützliche Grenzwerte . . . . .	149
9.5	Berechnung des Kreisinhalts . . . . .	151
9.6	Die Wallische Zahlenfolge . . . . .	152
9.7	Asymptotisches Verhalten der Binomialkoeffizienten . . . . .	152
9.8	Stetige Verzinsung und Eulersche Zahl . . . . .	153
9.9	Konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ . . . . .	154
9.10	Die Fibonacci - Folge . . . . .	155
9.11	Die Eindeutigkeit des reellen Zahlkörpers . . . . .	160
9.12	Weitere Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers . . . . .	162
9.13	Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen . . . . .	163
9.14	Zusammenfassung der verschiedenen Charakterisierungen . . . . .	163
<b>10</b>	<b>Konvergenzkriterien für Reihen in Banach - Räumen</b>	<b>169</b>
10.1	Reihen mit positiven reellen Gliedern, Majorantenkriterium . . . . .	169
10.2	Absolut konvergente Reihen . . . . .	171
10.3	Das Leibniz - Kriterium für alternierende Reihen . . . . .	171
10.4	Dezimalbruch - Entwicklung reeller Zahlen . . . . .	172
10.5	Quotienten - und Wurzelkriterium . . . . .	173
10.6	Binomial - Reihen . . . . .	175
10.7	Das Wurzelkriterium . . . . .	177
10.8	Der große und der kleine Umordnungssatz . . . . .	180
10.9	Der Doppelreihensatz . . . . .	183
10.10	Multiplikation von Reihen . . . . .	184
10.11	Bedingte und unbedingte Konvergenz von Reihen . . . . .	186
10.12	Das Abelsche und das Dirichletsche Kriterium . . . . .	187
10.13	Verdichtungskriterium . . . . .	189

<b>11</b>	<b>Supremumsaxiom mit Anwendungen auf Potenzreihen</b>	<b>193</b>
11.1	Obere Schranken und kleinste obere Schranken . . . . .	193
11.2	Charakterisierung der reellen Zahlen durch das Supremumsaxiom . . . . .	195
11.3	Limes superior und Limes inferior . . . . .	195
11.4	Ein weiteres Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen . . . . .	197
11.5	Verschärfung des Wurzelkriteriums . . . . .	198
11.6	Der Umordnungssatz von Riemann und Lejeune - Dirichlet . . . . .	199
11.7	Der Konvergenzbereich von Potenzreihen . . . . .	199
<b>12</b>	<b>Grenzwerte von Funktionswerten, Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit</b>	<b>203</b>
12.1	Grenzwerte von Funktionswerten . . . . .	203
12.2	Eindeutigkeit und Existenz solcher Grenzwerte . . . . .	204
12.3	Folgenstetige und stetige Abbildungen . . . . .	206
12.4	Algebraische Eigenschaften von Grenzwerten von Funktionswerten . . . . .	207
12.5	Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen . . . . .	208
12.6	Verlauf der Exponentialfunktion . . . . .	209
12.7	Der Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion . . . . .	210
12.8	Weitere Charakterisierungen der Exponentialfunktion . . . . .	211
12.9	Die allgemeine Exponentialfunktion . . . . .	213
12.10	Die verallgemeinerten Potenzfunktionen . . . . .	214
<b>13</b>	<b>Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen</b>	<b>215</b>
13.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen . . . . .	215
13.2	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz . . . . .	217
13.3	Anwendungen des Weierstraßschen Konvergenzsatzes . . . . .	220
13.4	Abelscher Grenzwertsatz . . . . .	223
13.5	Das Abelsche und das Dirichletsche Konvergenzkriterium . . . . .	224
13.6	Der Identitätssatz für Potenzreihen . . . . .	227
13.7	Ineinandersetzen von Potenzreihen . . . . .	228
13.8	Division von Potenzreihen . . . . .	229

**Voraussichtlicher Inhalt von Analysis II**

## 14 Intervalle und stetige Funktionen

Anhang: Stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen

## 15 Differenzierbare Funktionen

Anhang: Weitere Charakterisierungen der reellen Zahlen

## 16 Kompakte Räume und stetige Funktionen

Anhang: Weitere Charakterisierungen der reellen Zahlen

## 17 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Anhang: Tabelle der wichtigsten Stammfunktionen

## 18 Differenzierbare Abbildungen, Kettenregel und Taylor-Formel

Anhang: Die Äquivalenz von Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen und  
Anwendungen

## 19 Das Darboux-, Riemann- und Lebesgue-Integral

Anhang: Die letzten 5 der 55 Charakterisierungen der reellen Zahlen

## 20 Die schwingende Saite und Fourierreihen

Anhang: Skalarprodukt- und Hilbert-Räume

## 21 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Anhang: Der Existenzsatz von Peano

## 22 Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung und Differentialgleichungssysteme

Anhang: Die Erhaltungssätze der klassischen Mechanik und die Keplerschen Gesetze

## 23 Lineare Differentialgleichungen und -Gleichungssysteme

## 24 Das Newton-Verfahren und der Banachsche Fixpunktsatz

Anhang: Die Stetigkeit der allgemeinen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

## Literatur

### Analysis - Grundlegende Werke

- [1] Barner, M. und F. Flohr: Analysis I, II. Walter de Gruyter: Berlin–New York 1974/83.
- [2] Bröcker, Th.: Analysis in mehreren Variablen. Teubner: Stuttgart 1980.
- [3] Courant, R. and F. John: Introduction to Calculus and Analysis 1, 2. Wiley Interscience Publishers: New York–London–Sidney 1965/74.
- [4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I, II, III. Akademische Verlagsgesellschaft: Frankfurt a.M. 1986/1973/74.
- [5] Erwe, F.: Differential- und Integralrechnung. Band I, II. B.I. Wissenschaftsverlag: Mannheim 1962/73.
- [6] Forster, O.: Analysis 1, 2, 3. Vieweg: Braunschweig 1979/81.
- [7] Grauert, H. und I. Lieb bzw. W. Fischer: Differential- und Integralrechnung I, II und III. Springer: Berlin–Heidelberg–New York (bis 1977).
- [8] Greenspan, H. P.: Calculus. New York 1986.
- [9] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1, 2. Teubner: Stuttgart 1982/83.
- [10] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1983.
- [11] Königsberger, K.: Analysis 1, 2. Springer (5./4. oder neuere Auflage): Berlin–Heidelberg–New York etc. 2001/2002 ff.
- [12] Lang, S.: Analysis I. Addison–Wesley: Reading etc. 1968.
- [13] Lang, S.: Analysis II. Addison–Wesley: Reading etc. 1969.
- [14] v. Mangoldt, H. und K. Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Bd. 1–3. Hirzel (11. Auflage): Stuttgart 1962.
- [15] Marsden, J. and A. Weinstein: Calculus I, II. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1985.
- [16] Reiffen, H.–J. und H. W. Trapp: Einführung in die Analysis I, II. BI Wissenschaftsverlag: Mannheim 1972/73.
- [17] Storch, U. und H. Wiebe: Lehrbuch der Mathematik. Für Mathematiker, Informatiker und Physiker. Band 1: Analysis einer Veränderlichen. BI Wissenschaftsverlag: Mannheim 1989.
- [18] Strubecker, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Band I, II, III. München–Wien 1966, 1967, 1980.
- [19] Walter, W.: Analysis I. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1985.

### Zahlen- und mengentheoretische Grundlagen

- [20] Ebbinghaus, H. D. et al.: Zahlen. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1983.
- [21] Efimow, N. W.: Höhere Geometrie I. Über die Grundlagen der Geometrie. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1970.
- [22] Forster, O.: Algorithmische Zahlentheorie. Vieweg: Braunschweig 1996.

- [23] Friedrichsdorf, U. und A. Prestel: Mengenlehre für den Mathematiker. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1985.
- [24] Halmos, P. R.: Naive Mengenlehre. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1972.
- [25] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Reprint: Chelsea Publishing Company: New York 1949.
- [26] Prieß-Crampe, S.: Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 98. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1983.
- [27] Redéi, L.: Algebra. Erster Teil. Geest & Portig: Leipzig 1959.

### Analysis - Weiterführende Werke

- [28] Agricola, I., und Friedrich, Th.: Globale Analysis. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig–Wiesbaden 2001.
- [29] Arnold, V. I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1978.
- [30] Birkhoff, G. and G. –C. Rota: Ordinary Differential Equations. 2nd ed. John Wiley & Sons: New York 1969.
- [31] Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1979.
- [32] Coddington, E. A. and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw Hill: New York 1955.
- [33] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Band 1. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1986.
- [34] Do Carmo, M. P.: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig–Wiesbaden 1983.
- [35] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner: Stuttgart 1989.
- [36] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. (8. Auflage). Akademische Verlagsgesellschaft: Leipzig 1967.
- [37] Spivak, M.: Calculus on Manifolds. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.

Empfohlen sei auch, insbesondere Studierenden des Lehramtes, wegen der gemäß seines Untertitels „besonderen Berücksichtigung der historischen Entwicklung“, das Buch

- [38] Sonar, Th.: Einführung in die Analysis. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig–Wiesbaden 1999.

### Topologie

Unser generelle Quelle ist

- [39] von Querenburg, B.: Mengentheoretische Topologie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.

Aussagen zur Algebraischen Topologie findet man in

- [40] Stöcker, R., und Zieschang, H: Algebraische Topologie. Teubner: Stuttgart 1988.

## Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Die Supplemente im vorliegenden Band sind im wesentlichen unveränderte Nachdrucke von

- [41] Riemenschneider, O.: Materialien zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I und II. Sommersemester 1991, Wintersemester 1991/92. Manuskript Hamburg.

Diese Manuskripte basieren auf

- [42] Fischer, G.: Lineare Algebra. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1975 ff.  
[43] Fischer, G.: Analytische Geometrie. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1978.

Weitere Literatur ist Legion. Wir erwähnen u. a.:

- [44] Artin, E.: Analytische Geometrie und Algebra I, II. Vorlesungsausarbeitung 1960/61, Hamburg.  
[45] Artmann, B.: Lineare Algebra. Birkhäuser: Basel–Boston–Stuttgart 1986.  
[46] Bosch, S.: Lineare Algebra. Springer: Berlin 2001.  
[47] Bourbaki, N.: Algèbre I, Chap. 1 à 3. Hermann: Paris 1970.  
[48] Brieskorn, E.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II, III. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1983, 1985 und  $\geq$  1993.  
[49] Halmos, P.: Finite–dimensional vector spaces. Van Nostrand: Princeton, New Jersey, etc. 1958 (2nd edition).  
[50] Hoffmann, K. and R. Kunze: Linear Algebra. Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey 1971 (2nd edition).  
[51] Jänich, K.: Lineare Algebra. Springer: Berlin etc. 1991 (4. verb. Auflage).  
[52] Klingenberg, K.: Lineare Algebra und Geometrie. Springer: Heidelberg etc. 1984.  
[53] Koecher, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie. Grundwissen Mathematik 2. Springer: Berlin etc. 1985 (2. Auflage).  
[54] Kostrikin, A. I. and Yu. I. Manin: Linear algebra and geometry. Gordon and Breach: New York etc. 1989.  
[55] Kowalsky, H.–J.: Lineare Algebra. Walter de Gruyter: Berlin etc. 1972 (6., verb. Auflage).  
[56] Lang, S.: Linear Algebra. Addison–Wesley: Reading, Mass. 1966.  
[57] Lingenberg, R.: Lineare Algebra. BI Wissenschafts–Verlag: Mannheim 1969.  
[58] Lorenz, F.: Lineare Algebra I, II. BI Wissenschafts–Verlag: Mannheim–Wien–Zürich 1988, 1989 (2., überarbeitete Auflage).  
[59] Oeljeklaus, E. und R. Remmert: Lineare Algebra I. Springer: Berlin etc. 1974.  
[60] Pickert, G.: Analytische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft: Leipzig 1955.  
[61] Scheja, G. und U. Storch: Lehrbuch der Algebra. Teil 1, 2, 3. Teubner: Stuttgart 1980, 1988, 1991.  
[62] Sperner, E.: Einführung in die Analytische Geometrie (1. Teil). Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1959.  
[63] Stammbach, U.: Lineare Algebra. Teubner: Stuttgart 1980.  
[64] Strang, G.: Linear algebra and its applications. Academic Press: New York etc. 1976.

## Differentialgeometrie

- [65] Bär, C.: Elementare Differentialgeometrie. Walter de Gruyter: Berlin 2000.
- [66] Bishop, R. L. and S. I. Goldberg: Tensor Analysis on Manifolds. MacMillan: New York 1968.
- [67] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 3. Auflage. Springer: Berlin 1929. Nachdruck: Dover: New York 1945.
- [68] Do Carmo, M. P.: Riemannian Geometry. Birkhäuser: Boston–Basel–Berlin 1992.
- [69] Chern, S. S.: Topics in Differential Geometry. Princeton 1951.
- [70] Guillemin, V. and S. Sternberg: Symplectic techniques in physics. Cambridge University Press: Cambridge 1984.
- [71] Hawking, S. W. and G. F. R. Ellis: The large scale structure of space–time. Cambridge University Press: Cambridge etc. 1973.
- [72] Helgason, S.: Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press: New York etc. 1978.
- [73] Jänich, K.: Vektoranalysis. Springer: Berlin–Heidelberg–New York etc. 1992.
- [74] Klingenberg, W.: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [75] Kobayashi, S. and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry. 2 Volumes. Interscience: New York 1963 and 1969.
- [76] Lang, S.: Introduction to Differentiable Manifolds. Wiley: New York 1962.
- [77] Laugwitz, D.: Differential–Geometrie. Teubner: Stuttgart 1960.
- [78] Misner, C. W., Thorne, K. S. and J. A. Wheeler: Gravitation. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.
- [79] Sachs, R. K. and H. Wu: General Relativity for Mathematicians. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1977.
- [80] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. 5 volumes. Publish or Perish: Berkeley 1970 etc.
- [81] Sternberg, S.: Lectures on Differential Geometry. Prentice–Hall: Englewood Cliffs 1964.

## Funktionentheorie

Der funktionentheoretische Teil des vorliegenden Bandes besteht aus einem korrigierten Nachdruck von

- [82] Riemenschneider, O.: Grundzüge der Funktionentheorie. Wintersemester 1992/93. Manuskript Hamburg.

Weiteres klassisches Material findet man in

- [83] Riemenschneider, O.: Funktionentheorie I. Sommersemester 1993. Manuskript Hamburg.

Diese Manuskripte folgen in vielem den Vorlesungen über Funktionentheorie von H. Grauert in Göttingen und sind daher nahe verwandt mit dem Band

- [84] Fischer, W. und I. Lieb: Funktionentheorie. Vieweg: Braunschweig 1980.

Es folgt eine bei weitem nicht erschöpfende Liste weiterer lesenswerter Literatur zu diesem Thema.

- [85] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*. McGraw–Hill: New York 1966 (2nd edition).
- [86] Behnke, H. und F. Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Springer: Berlin 1965 (3. Auflage).
- [87] Bieberbach, L.: *Einführung in die Funktionentheorie*. Teubner: Stuttgart 1966 (4. Auflage).
- [88] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie* (2 Bände). Birkhäuser: Basel 1960 (2. Auflage).
- [89] Cartan, H.: *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann: Paris 1961.
- [90] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*. Springer: New York, Heidelberg, Berlin 1973.
- [91] Diederich, K. und R. Remmert: *Funktionentheorie I*. Springer: Berlin 1972.
- [92] Freitag, E. und R. Busam: *Funktionentheorie*. Springer: Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest 1993.
- [94] Hurwitz, A. und R. Courant: *Funktionentheorie*. Mit einem Anhang von H. Röhrl. Springer: Berlin 1964 (4. Auflage).
- [95] Jänich, K.: *Einführung in die Funktionentheorie*. Springer: Berlin 1977.
- [96] Knopp, K.: *Funktionentheorie* (2 Bände). Walter de Gruyter (Sammlung Göschen): Berlin 1970/71 (12. Auflage).
- [97] Lang, S.: *Complex Analysis*. Addison–Wesley: Reading 1977.
- [98] Levinson, N. and R. Redheffer: *Complex Variables*. Holden–Day: San Francisco 1970.
- [99] Remmert, R.: *Funktionentheorie I. Grundwissen Mathematik 5*. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984.
- [100] Sansone, G. and J. Gerretsen: *Lectures on the theory of functions of a complex variable. I. Holomorphic functions*. Noordhoff: Groningen 1960.

Weiterführende Quellen (insbesondere über Riemannsche Flächen und Funktionentheorie in mehreren Veränderlichen) sind

- [101] Behnke, H. und P. Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. Zweite, erweiterte Auflage. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 51. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1970.
- [102] Fischer, W. und I. Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*. Vieweg: Braunschweig 1988.
- [103] Forster, O.: *Riemannsche Flächen*. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1977.
- [104] Grauert, H. und K. Fritzsche: *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen*. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1974.
- [105] Grauert, H. und R. Remmert: *Analytische Stellenalgebren*. Unter Mitarbeit von O. Riemenschneider. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 176. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1971.
- [106] Grauert, H. and R. Remmert: *Coherent analytic sheaves*. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 265. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984.



- [107] Grauert, H. und R. Remmert: Theorie der Steinschen Räume. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 227. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1977.
- [108] Griffiths, P. and J. Harris: Principles of algebraic geometry. Wiley: New York–Chichester–Brisbane–Toronto 1978.
- [109] Gunning, R. C.: Lectures on Riemann surfaces. Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press: Princeton 1966.
- [110] Gunning, R. C.: Riemann surfaces and generalized theta functions. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 91. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.
- [111] Gunning, R. C. and H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall: Englewood Cliffs 1965.
- [112] Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand: Princeton–Toronto–London 1966.
- [113] Iwayoshi, Y. and M. Taniguchi: An introduction to Teichmüller spaces. Springer: Tokyo–Berlin–Heidelberg–New York 1992.
- [114] Kaup, L. and B. Kaup: Holomorphic functions of several variables. De Gruyter: Berlin 1983.
- [115] Klein, F. und R. Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Erster Band. Johnson Reprint Corporation: New York 1966. Erstausgabe bei Teubner 1890.
- [116] Remmert, R.: Funktionentheorie 2. Grundwissen Mathematik 6. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1992.
- [117] Rothstein, W. und K. Kopfermann: Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. BI-Hochschulverlag: Zürich 1982.
- [118] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw–Hill: New York 1966.
- [119] Sansone, G. and J. Gerretsen: Lectures on the theory of functions of a complex variable. II. Geometric theory. Wolters–Noordhoff: Groningen 1969.
- [120] Wells, R. O. Jr.: Differential analysis on complex manifolds. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1980.

### **Tafeln etc.**

- [121] Teubner–Taschenbuch der Mathematik. Herausgeber: E. Zeidler. 2. Auflage. B. G. Teubner: Wiesbaden 2003.  
Teil II. Herausgeber: G. Grosche, E. Zeidler, D. Ziegler, V. Ziegler. 8. Auflage. B. G. Teubner: Wiesbaden 2003.
- [122] Gröbner, W. und N. Hofreiter: Integraltafeln 1, 2. Springer: Wien–New York 1965/66.
- [123] Jahnke, E., Emde, F. und F. Lösch: Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart 1960.
- [124] Timmann, S.: Repetitorium der Analysis. Teil 1. Binomi: Springe 2000.

### **Wahrscheinlichkeitstheorie**

- [125] Bandelow, Ch.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. BI Wissenschaftsverlag: Mannheim 1981.

- [126] Bosch, K.: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vieweg: Braunschweig 1984.
- [127] Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 1, 2. Stuttgart 1973/76.
- [128] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications I. 3rd ed. New York–London–Sydney 1967.
- [129] Freudenthal, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Oldenbourg: München 1963.
- [130] Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch: Thun 1978.

## Angewandte und Numerische Mathematik

- [131] Engel, A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Stuttgart 1977.
- [132] Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis. Vol. I, II. New York 1973/77.
- [133] Hofmann, W.: Numerische Mathematik. Manuskript: Hamburg 1994.
- [134] Knuth, D. E.: The Art of Computer Programming. Vol. 1, 2. Reading 1973/81.
- [135] Meinardus, G. und G. Merz: Praktische Mathematik I. Mannheim 1979.
- [136] Opfer, G.: Numerische Mathematik für Anfänger. 4. Auflage. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 2002.
- [137] Reimer, M.: Grundlagen der Numerischen Mathematik I, II. Akademische Verlagsgesellschaft: Wiesbaden 1980/82.
- [138] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.

## Partielle Differentialgleichungen

- [139] Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand: Princeton 1965.
- [140] Bers, L., John, F. and Schechter, M.: Partial Differential Equations. Wiley: New York 1964.
- [141] Epstein, B.: Partial Differential Equations. McGraw–Hill: New York 1962.
- [142] Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics 8. Springer 1965.
- [143] Friedman, A.: Generalized functions and partial differential equations. Prentice–Hall: Englewood Cliffs 1963.
- [144] Friedman, A.: Partial differential equations. Holt: New York 1969.
- [145] Hörmander, L.: Linear partial differential operators. Springer: Berlin 1963, und die neue vierbändige Version.
- [146] Ladyzhenskaya, O. and N. Ural'tseva: Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press: New York 1968.
- [147] Michlin, S.: Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. Deutsch: Thun 1978.
- [148] Miranda, C.: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Springer: Berlin 1955.

- [149] Petrowski, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Teubner: Leipzig 1955.
- [150] Sobolew, S. L.: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Akademie-Verlag: Berlin 1964.
- [151] Trèves, F.: Linear partial differential equations with constant coefficients. Gordon and Breach: New York 1967.
- [152] Trèves, F.: Locally convex spaces and linear partial differential equations. Springer: Berlin 1967.
- [153] Trèves, F.: Linear partial differential equations. Gordon and Breach: New York 1970.
- [154] Trèves, F.: Basic linear partial differential equations. Academic Press: New York 1975.

## **Funktionalanalysis**

- [155] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Hermann: Paris 1953 ff.
- [156] Gelfand, I. M. and G. Silov: Generalized functions. Academic Press: New York 1964.
- [157] Heuser, H.: Funktionalanalysis. Teubner: Stuttgart 1975.
- [158] Hille, E. and R. S. Phillips: Functional analysis and semi-groups. 2nd ed. American Mathematical Society: Providence 1957.
- [159] Kelley, J. L., Namioka, I. et al.: Linear topological spaces. 2nd print. Springer: New York 1976.
- [160] Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. 3d pr.corr. Springer: New York 1971.
- [161] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Nouv. éd. Hermann: Paris 1966.
- [162] Yosida, K.: Functional Analysis. 2nd ed. Springer: Berlin 1968.

## **Mathematische Physik**

- [163] Courant, R. und D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I, II. 3. Auflage. Springer: Berlin 1968.
- [164] Dirschmid, H. J., Kummer, W. und Schweda, M.: Einführung in die mathematischen Methoden der Theoretischen Physik. Vieweg: Braunschweig 1976.
- [165] Fischer, H. und H. Kaul: Mathematik für Physiker 1. Teubner: Stuttgart 1990.
- [166] Fischer, H. und H. Kaul: Mathematik für Physiker 2. Teubner: Stuttgart 1998.
- [167] Jones, L. M.: An Introduction to Mathematical Physics. Benjamin/Cummings: Menlo Park 1979.
- [168] Schwartz, L.: Mathematics for the Physical Sciences. Hermann: Paris 1966.

## **Originalarbeiten**

- [169] Prestel, A.: Model Theory for the Real Algebraic Geometer. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali: Pisa · Roma 1998.
- [170] Steiner, H. G.: Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms für die reellen Zahlen. Math. Phys. Sem. Ber. 13, 1966.
- [171] Riemenschneider, O.: 37 elementare axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers. Mitt. Math. Ges. Hamburg 20, 71–95 (2001).

## Lebensdaten einiger Hauptpersonen - Ohne Gewähr

Pythagoras .....	570 – 497
Eudoxos von Knides .....	408 – 355
Euklid .....	um ca. 300 v. Chr.
Archimedes .....	287? – 212
Eratosthenes von Kyrene .....	275 – 194
Fibonacci (Leonardo von Pisa) .....	ca. 1180 – 1250
Cardano, G. ....	1501 – 1576
Vieta, F. ....	1540 – 1603
Kepler, J. ....	1571 – 1630
Descartes, R. ....	1596 – 1650
Cavalieri, F. B. ....	1598 – 1647
Fermat, P. de .....	1601 – 1665
Wallis, J. ....	1616 – 1703
Pascal, B. ....	1623 – 1662
Huygens, Chr. ....	1629 – 1695
Newton, I. ....	1642 – 1727
Leibniz, G. W. ....	1646 – 1717
Rolle, M. ....	1652 – 1719
Bernoulli, Jak. I. ....	1654 – 1705
de l'Hospital, G. F. A. ....	1661 – 1704
Bernoulli, Joh. I. ....	1667 – 1748
Taylor, B. ....	1685 – 1731
Stirling, J. ....	1692 – 1770
Bernoulli, D. ....	1700 – 1782
Euler, L. ....	1707 – 1783
Simpson, Th. ....	1710 – 1761
d'Alembert, J. B.le Rond .....	1717 – 1783
Lagrange, J. L. ....	1736 – 1813
Wessel, C. ....	1745 – 1818
Laplace, P. S. ....	1749 – 1827
Legendre, A.–M. ....	1752 – 1833
Pfaff, J. F. ....	1765 – 1825
Argand, J. R. ....	1768 – 1822
Fourier, J. B. J. ....	1768 – 1830
Gauß, C. F. ....	1777 – 1855
Bolzano, B. ....	1781 – 1848
Poisson, S.–D. ....	1781 – 1840
Bessel, F. W. von .....	1784 – 1846
Fresnel, A. J. ....	1788 – 1827
Cauchy, A. L. ....	1789 – 1857
Lobatschewski, N. I. ....	1792 – 1856
Green, G. ....	1793 – 1841
Raabe, J. L. ....	1801 – 1859
Abel, N. H. ....	1802 – 1829
Sturm, Ch. ....	1803 – 1855
Jacobi, C. G. J. ....	1804 – 1851
Lejeune–Dirichlet, P. G. ....	1805 – 1859

Graßmann, H. ....	1809 – 1877
Liouville, J. ....	1809 – 1882
Galois, E. ....	1811 – 1832
Hesse, L. O. ....	1811 – 1874
Laurent, P. A. ....	1813 – 1854
Boole, G. ....	1815 – 1869
Weierstraß, K. ....	1815 – 1897
Stokes, G. G. ....	1819 – 1903
Cayley, A. ....	1821 – 1895
Heine, E. ....	1821 – 1882
Tschebyschew, P. L. ....	1821 – 1894
Hermite, Ch. ....	1822 – 1901
Kronecker, L. ....	1823 – 1891
Schlömilch, O. X. ....	1823 – 1901
Riemann, B. ....	1826 – 1866
du Bois-Reymond, P. ....	1831 – 1889
Dedekind, R. ....	1831 – 1916
Lipschitz, R. ....	1832 – 1903
Rouché, E. ....	1832 – 1910
Laguerre, E. N. ....	1834 – 1886
Casorati, F. ....	1834 – 1890
Jordan, C. ....	1838 – 1921
Hankel, H. ....	1839 – 1873
Darboux, G. ....	1842 – 1917
Ascoli, G. ....	1843 – 1896
Schwarz, H. A. ....	1843 – 1921
Cantor, G. ....	1845 – 1918
Dini, U. ....	1845 – 1918
Mittag-Leffler, G. ....	1846 – 1927
Arzelà, C. ....	1847 – 1912
Klein, F. ....	1849 – 1925
Gram, J. P. ....	1850 – 1916
Poincaré, H. ....	1854 – 1912
Morera, G. ....	1856 – 1909
Picard, E. ....	1856 – 1941
Runge, C. ....	1856 – 1927
Goursat, E. ....	1858 – 1936
Peano, G. ....	1858 – 1932
Cesàro, E. ....	1859 – 1906
Hölder, O. ....	1859 – 1937
Hurwitz, A. ....	1859 – 1919
Volterra, V. ....	1860 – 1940
Whitehead, A. N. ....	1861 – 1947
Hilbert, D. ....	1862 – 1943
Minkowski, H. ....	1864 – 1909
Wirtinger, W. ....	1865 – 1945
Hadamard, J. ....	1866 – 1963
Fredholm, I. ....	1866 – 1927
Hausdorff, F. ....	1868 – 1942
Lindelöf, E. ....	1870 – 1946
Koch, H. von ....	1870 – 1924
Borel, E. ....	1871 – 1956
Zermelo, E. ....	1871 – 1953

Russell, B. ....	1872 – 1970
Caratheodory, C. ....	1873 – 1950
Baire, L. ....	1874 – 1932
Fischer, E. ....	1875 – 1959
Lebesgue, H. ....	1875 – 1941
Vitali, G. ....	1875 – 1932
Levi, B. ....	1875 – 1961
Montel, P. ....	1876 – 1975
Hamel, G. ....	1877 – 1954
Landau, E. ....	1877 – 1938
Fréchet, R. M. ....	1878 – 1973
Fatou, P. ....	1878 – 1929
Fubini, G. ....	1879 – 1943
Einstein, A. ....	1879 – 1955
Bernstein, S. N. ....	1880 – 1968
Brouwer, L. E. J. ....	1881 – 1966
Haar, A. ....	1885 – 1933
Courant, R. ....	1888 – 1972
Banach, S. ....	1892 – 1945
Rademacher, H. ....	1892 – 1969
von Neumann, J. ....	1903 – 1957
Gödel, K. ....	1906 – 1978



# Index

## A

- Abänderung
  - stetige – einer Funktion 196
- Abb( $A, B$ ) 14
- Abb( $X$ ) 49
- Abbildung 8
  - bijektive – 9, 13
  - Bild einer – 9
  - Einschränkung einer – 9
  - folgenstetige – 110, 151
  - injektive – 9
  - gleichmäßiger Limes von stetigen –en 206
  - inverse – 9
  - konstante – 10, 13, 222
  - lineare – 53
  - polynomiale – 66
  - stetige – 110, 111
  - surjektive – 9
  - Urbild einer – 9
- Abel 53
  - sche partielle Summation 176
  - scher Grenzwertsatz 178, 213
  - sches Kriterium für
    - gleichmäßige Konvergenz 216, 217
  - Konvergenzsatz von – 177
- abelsche Gruppe bzw. Halbgruppe 53
- abgeschlossen
  - e Hülle  $\bar{A}$  (Abschluß) 105
  - e Kugel 100, 105
  - e Menge 101, 109
  - es Intervall 79
- Abgeschlossenheit
  - der Menge der Häufungswerte 187
- Ableitung
  - einer Funktion 191
  - einer Funktion (mit Werten in einem normierten Vektorraum) 202
  - formale – einer Potenzreihe 175
- Abschluß
  - einer Menge 105
- absolut
  - e Konvergenz 161
- Absolutbetrag
  - in  $\mathbb{C}$  81
- Abstand 97
  - sbegriff 89
  - sfunktion 97
- Abstraktion 3
- abzählbar
  - e Menge 39
  - höchstens –e Menge 39
- Abzählbarkeit
  - von  $I \cap \mathbb{Q}$  123
- Abzählbarkeitsaxiom
  - 1. – 109, 196
- addieren
  - geometrisch – 1
- Addition
  - natürlicher Zahlen 27
- $\aleph_0$  (Mächtigkeit der natürlichen Zahlen) 47
- Algebra
  - Fundamentalsatz der – 84
- algebraisch
  - e Zahl 44, 69
- Algorithmus
  - zur Approximation von Wurzeln 119
  - zur Approximation von  $p$ -ten Wurzeln 120
  - euklidischer – 70
- allgemeine lineare Gruppe  $GL(n, \mathbb{K})$  54
- Allquantor  $\forall$  6, 7
- Allmenge
  - Nichtexistenz der – 48
- alternierend
  - e Reihe 161
- analytisch
  - nilpotente Elemente 156
- Anfangswert 149
- angeordnet
  - er Körper 75
  - er Oberring 75
  - er Ring 75
  - er Unterring 75
  - Eigenschaft  $(*)$ ,  $(**)$  für –e Körper 156
- Anordnung
  - auf Polynomring 78
  - auf Vervollständigung  $\tilde{\mathbb{K}}$  127
  - natürlicher Zahlen 29
  - reeller Zahlen 80
  - archimedische – von  $\mathbb{Q}$  76
  - archimedische – von  $\mathbb{Z}$  75
  - Fortsetzung einer – auf Quotientenkörper 76
  - induzierte – 75
  - nichtarchimedische – 77
- anschauliche Ebene 2
- Antinomie
  - Russellsche – 12
- antisymmetrische Relation 35
- Anzahl
  - einer Menge 39
- Apéry 160
- Approximation
  - von  $\pi$  durch Intervallschachtelung 142
  - iterative – 9
- Äquivalenzklasse 34
- Äquivalenzrelation 34
  - durch Metrik auf dem Raum  $\mathcal{CF}_X$  definierte – 125



- Arbeit  
 ehrliche – 2
- archimedisch  
 – angeordneter Ring, Körper 75, 95, 122  
 – bewerteter Körper 95  
 –e Anordnung von  $\mathbb{Q}$  76  
 –e Anordnung von  $\mathbb{Z}$  75  
 –es Axiom 75  
 Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in jedem –  
 angeordneten Körper 123  
 $g$ -adische Bruchentwicklung in –  
 angeordneten Körpern 122
- Arcussinus-Funktion  
 Potenzreihenentwicklung der – 213
- arithmetisch  
 –es Mittel 77
- assoziativ  
 –es Magma 49
- Assoziativ  
 verallgemeinertes – -Kommutativ-Gesetz 52
- Assoziativität 7, 27, 28, 48
- assoziiert  
 –e Elemente 70
- Asymptote  
 – einer rationalen Funktion 87
- asymptotisch  
 – gleiche Folgen 143
- Atome 15
- Atomphysik 9
- Aussageform 7
- Auswahlaxiom 11, 37, 47
- Auswahlfunktion 11, 14
- Automorphismus 54  
 involutorischer – 81
- Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\mathbb{K}^n)$  54
- Axiom  
 (I) 153  
 (II) bis (VII) 154  
 (VIII) 155  
 (IX) bis (XVII) 180  
 (XVIII) bis (XIX) 181  
 (XX) 182  
 (XXI) und (XXII) 185  
 (XXIII) und (XXIV) 187  
 archimedisches – 75  
 Maximalitäts- – 152  
 schwaches – der Intervallschachtelung 137  
 starkes – – – 137
- axiomatisch  
 –e Einführung der reellen Zahlen 137 ff.  
 –e Methode 2
- Axiomensystem  
 – NBG 12  
 – von Peano 15, 16, 18, 19, 20  
 – von Zermelo und Fraenkel 37
- B**
- Banach  
 –Raum 119, 130  
 –scher Fixpunktsatz 121  
 Einbettung in –Raum 130
- Basis  
 Umgebungs- 110
- bedingt  
 – konvergente Reihe 176
- beliebig oft  
 – differenzierbare Funktion 207
- Bernays 12
- Bernoulli  
 –sche Ungleichung 97
- Berührungspunkt  
 – einer Menge 104  
 – eines Filters 111
- beschränkt  
 –e Menge 102  
 –es Intervall 79  
 gleichmäßig –e Funktionenfolge 214
- Beschränktheitsklasse  
 – in einem pseudometrischen Raum 222  
 – in einem pseudonormierten Vektorraum 222
- bestimmt  
 – divergente Folge 95
- Betrag  
 – in angeordnetem Körper 79  
 – in  $\mathbb{C}$  81  
 – in  $\mathbb{R}$  79, 80
- Bevölkerungsstatistik 3
- Beweis  
 – durch Widerspruch 8  
 – durch Kontraposition 20, 21
- bewertet  
 archimedisches –er Körper 95  
 –er Körper 82  
 nichtarchimedisches –er Körper 96, 111
- Bewertung  
 – mit Werten in einem angeordneten Körper 82  
 $p$ -adische – 82  
 triviale – 82
- $\text{Bij}(X)$  (Gruppe der bijektiven Abbildungen  
 der Menge  $X$ ) 49
- bijektive Abbildung 9
- Bild  
 – einer Menge unter einer Abbildung 9  
 –filter 111  
 iterierte –er 149
- Bilinearform 90  
 symmetrische – 90
- Binomialkoeffizient 46, 63  
 verallgemeinerter – 165, 175
- Binomialreihe 165, 211  
 Funktionalgleichung für –n 175
- binomische Formel 46, 63
- Bogenmaß 141
- Bolzano

- Satz von – (Zwischenwertsatz) 200  
 Satz von – und Weierstraß 103, 104, 137, 154, 185  
 Satz von – und Weierstraß  
 in bewerteten Körpern 145
- C**
- $c$  (Mächtigkeit des Kontinuums) 47  
 $\mathbb{C}$  (Körper der komplexen Zahlen) 81, 84  
 Cantor 5, 39  
 –sches Diagonalverfahren 44  
 $\text{card } M$  (Kardinalität von  $M$ ) 39  
 Cauchy  
 –Folge 118, 119, 125, 144  
 –Folge mit konvergenter Teilfolge 126  
 –Hadamardsche Formel 190  
 –Kriterium für gleichmäßige Konvergenz 208  
 –Kriterium für Grenzwerte  
 von Funktionswerten 195  
 –Kriterium für Reihen 116  
 –Produkt von Potenzreihen 190, 191  
 –Produkt von Reihen 174, 178, 221  
 –Reihe 116  
 –scher Produktsatz 174  
 – – in Banach-Algebren 191  
 –Vollständigkeit 118, 119, 137, 144  
 Teilfolge einer –Folge 126  
 Cauchy–Schwarzsche Ungleichung 90, 91  
 – auf  $\mathbb{R}^\infty$  133  
 Charakterisierung  
 – der Exponentialfunktion 201  
 – einer Gruppe 55  
 differentielle – der Exponentialfunktion 175, 201  
 charakteristisch  
 –e Funktion 45  
 –es Polynom 150  
 Codierungstheorie 99  
 Cohen 12, 48  
 Computer 201
- D**
- dann und nur dann 6  
 Definition  
 induktive – 22  
 rekursive – 23  
 Deltasymbol  
 Kroneckers – 65  
 de Morgan 8  
 Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen 153, 162  
 Dezimalentwicklung natürlicher Zahlen 33  
 Diagonalgestalt 150  
 Diagonalverfahren  
 Cantorsches – 44  
 Diagramm  
 kommutatives – 24  
 dichte Teilmenge 107  
 Dichtheit  
 – von  $\mathbb{Q}$  in jedem archimedisch  
 angeordneten Körper 123  
 – von  $\mathbb{K}$  in Vervollständigung  $\tilde{\mathbb{K}}$  128  
 Diebstahl 2  
 Diffeomorphismus 149  
 Differentialgleichung 3  
 differentiell  
 –e Charakterisierung der Exponentialfunktion  
 175, 201  
 Differenz  
 symmetrische – 7  
 Differenzenquotient 202  
 differenzierbar  
 beliebig (unendlich) oft –e Funktion 4, 207  
 –e Funktion 4, 190, 191  
 Differenzierbarkeit  
 – der Exponentialfunktion 202  
 – der Exponentialfunktion in 0 201  
 Differenzieren  
 – unter Summenzeichen 191  
 Differenzmenge 7  
 DIN-Norm 3  
 direktes Produkt 14  
 Dirichlet (siehe auch: Lejeune–Dirichlet)  
 –sches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz 216  
 disjunkte Mengen 8  
 diskret  
 –e Menge 107  
 –e Metrik 98  
 –es dynamisches System 149  
 –e Topologie 108  
 Distanz 97  
 Hamming- – 99  
 Distributivität 7  
 Distributivgesetz 28  
 divergent  
 bestimmt –e Folge 95  
 –e Folge 94  
 dividieren  
 durch Potenzreihe – 218, 219  
 geometrisch – 1  
 Division  
 – mit Rest 62  
 – – in euklidischen Ringen 70  
 Divisionsalgebra 81  
 Doppelinduktion 28  
 Doppelreihensatz 172  
 doppelt  
 – geometrische Reihe 174  
 Dreieck  
 Pascalsches – 45  
 Dreiecksungleichung  
 – in angeordneten Körpern 79  
 – in  $\mathbb{C}$  81  
 – in metrischen Räumen 98  
 – in normierten Vektorräumen 89, 97  
 – „nach unten“ 82, 114  
 verschärfte – 82, 111

- Dualentwicklung
  - natürlicher Zahlen 33
  - reeller Zahlen 47, 153, 162
- Durchschnitt von Mengen 7, 11
- dyadisch
  - e Entwicklung reeller Zahlen 153
- dynamisch
  - diskretes –es System 149
- E**
- e (siehe: Eulersche Zahl)
- Ebene
  - anschauliche – 2
- echt enthalten 6
- Efimow 156
- ehrliche Arbeit 2
- Eigenschaft (\*), (\*\*) für angeordnete Körper 156
- eigentlich
  - es Ideal 64
- Einbettung
  - in Banach–Raum 130
  - von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$  60
- Eindeutigkeit
  - der natürlichen Zahlen 22
  - des reellen Zahlkörpers  $\mathbb{R}$  123, 151
  - des Grenzwerts 93, 101, 109
- Einheit
  - in Integritätsbereich 70
- Einheitskreis
  - Rand des –es 177
- Einheitssphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  99
  - Metrik auf – 99, 100
- Eins
  - Ring mit – 61
- Einschränkung
  - einer Abbildung 9
- Eisenbahnmeterik
  - französische – 99
- Element
  - analytisch nilpotentes – 156
  - assoziierte –e 70
  - einer Menge 5
  - invertierbares – 53
  - irreduzibles – 72
  - kleinstes – 21
  - maximales – 36
  - minimales – 36
  - neutrales – 10, 48, 52, 53
  - positives – 75
  - teilerfremde –e 70
- Elementarteilchen 15
- endlich
  - e Gruppe 57
  - e Menge 39, 41
  - erzeugtes Ideal 71
- Endomorphismenring  $\text{End}(\mathbb{K}^n)$ ,  $\text{End}(S)$  53, 67
- Endomorphismus 53
- Entwicklung
  - einer Potenzreihe um einen anderen Punkt 218
  - schließlich periodische –
  - (rationaler Zahlen) 123, 163
- Entwicklungspunkt
  - einer Potenzreihe 165
- $\varepsilon$ – $\delta$ 
  - Kriterium für Grenzwert von Funktionswerten 195
  - Kriterium für Stetigkeit 195
- erweitert
  - e Zahlengerade 80, 95
- Erweiterung
  - einer Halbgruppe zu einer Gruppe 55, 60
  - eines Integritätsringes zu einem Körper 66
- Erweiterungskörper
  - quadratischer – 44
- erzeugend
  - e Potenzreihe für die Fibonacci–Folge 148
- es gibt/existiert (mindestens/genau) ein 6
- $\eta_1$ –Körper 156
- Euklid 2
- euklidisch
  - e Division mit Rest 124
  - e Metrik 99
  - e Norm 90
  - er Algorithmus 70
  - er Ring 70
  - er Vektorraum 91
  - unendlichdimensionaler –er Raum 133
- Eulersche Zahl e 1, 44, 143, 167
  - Näherungswert für die – 166
- Existenzaussage 6
- Existenzquantor  $\exists$  6
- Existenz
  - nichttrivialer Nullfolgen (Eigenschaft (\*)) 96
- exp 4
- Exponentialabbildung 192
- Exponentialfunktion 165, 175, 201
  - Charakterisierung der – 201
  - Charakterisierung der – zur Basis  $a$  203
  - Differenzierbarkeit der – in 0 175
  - zur Basis  $a$  203
  - Fehlerabschätzung für – 166
  - Folgenstetigkeit der – 166
  - Funktionalgleichung für – 166
  - Grenzwertdarstellung der – 167
  - Näherungspolynome für die – 166
  - Reproduktion der – durch Differentiation 202
  - Stetigkeit der – 198
  - Verlauf der reellen – 199, 200
  - Wachstum der – 199
- Exponentialreihe 165
  - in einer Banach–Algebra 192
- F**
- $\mathbb{F}_2$  (Körper mit 2 Elementen) 99

- Fakultät 45
  - Familie
    - [indizierte] – von Mengen 11
  - Faktorgruppe 58
  - Faser
    - einer Abbildung 10
  - Fehlerabschätzung
    - im Leibniz-Kriterium 161
    - im Quotientenkriterium 164
    - für Exponentialreihe 166
  - Fibonacci
    - Operation 148
    - Zahlen 145 ff.
    - Gesetzmäßigkeiten der –Folge 146
  - Filter 110
    - basis 110
    - Konvergenz eines –s 110, 111
    - Umgebungs– 110
  - Fixpunktsatz 110
    - Banachscher – 121
  - Folge
    - asymptotisch gleiche –n 143
    - beschränkte – 94
    - bestimmt divergente – 95
    - divergente – 94
    - der Fibonacci-Zahlen 145 ff.
    - konstante – 125
    - konvergente – 89, 92, 94, 96, 101, 108, 144
    - nach oben / nach unten beschränkte – 94
    - Permutation einer (konvergenten) – 93
    - Raum der „endlichen“ –n Abb<sup>fin</sup>( $\mathbb{N}$ ,  $R$ ) 65
    - Raum der –n Abb( $\mathbb{N}$ ,  $V$ ) 91
    - Raum der konvergenten –n
      - in einem normierten Vektorraum 91
    - uneigentlich konvergente – 95
    - unendliche – von Elementen 14
  - folgenabgeschlossen
    - e Menge 104, 110
  - Folgenabgeschlossenheit
    - von  $\overline{B} \subset \mathbb{C}$  145
  - folgenkompakt
    - e Menge 110
  - Folgenraum
    - Hilbertscher – 133, 135 ff.
  - folgenstetig
    - e Abbildung 110, 151, 196
  - Folgenstetigkeit 94, 193
    - der Exponentialfunktion 166
    - der Wurzelfunktionen 94
    - polynomialer Funktionen 121
    - rationaler Funktionen 121
  - formal
    - e Potenzreihe 66
    - Ring der –en Laurentreihen  $\mathbb{L}$  156
  - Formel
    - binomische – 46
    - Cauchy-Hadamardsche – 190
  - Fortsetzung
    - der Anordnung auf Vervollständigung  $\widetilde{\mathbb{K}}$  127
    - der Bewertung auf Vervollständigung  $\widetilde{\mathbb{K}}$  129
    - der Metrik auf Vervollständigung  $\widetilde{X}$  131
    - der Norm auf Vervollständigung  $\widetilde{V}$  129
    - stetige – 196
  - Fraenkel
    - Axiome von Zermelo und – 37
  - französisch
    - e Eisenbahnmetrik 99
  - Fundamentalfolge 125
  - Fundamentalsatz
    - der Algebra 84
  - Fünfeck
    - reguläres, regelmäßiges – 2, 86
  - Funktion
    - beliebig oft differenzierbare – 207
    - charakteristische – 45
    - differenzierbare – 4, 190, 191
    - echt gebrochen rationale – 87
    - polynomiale – 66, 197
    - quadratintegrierbare – 136
    - rationale – 68
    - stetige – 195, 196
    - trigonometrische – 141
  - Funktionalanalysis 205
  - Funktionalgleichung
    - des natürlichen Logarithmus 200
    - für Binomialreihen 175
    - für Exponentialfunktion 166, 175
  - Funktionenfolgen
    - gleichmäßige Konvergenz von – 193
    - punktweise Konvergenz von – 193, 201
  - Funktionentheorie 203
  - Funktionswert
    - Cauchy-Kriterium für Grenzwert von –en 195
    - $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für Grenzwert von –en 195
    - Grenzwert von –en 193
    - linksseitiger/rechtsseitiger Grenzwert von –en 193
  - für alle (Allquantor)  $\forall$  6
- ## G
- $g$ -adisch
    - e Bruchentwicklung
      - im reellen Zahlkörper 152, 162
      - – in archimedisch angeordneten Körpern 122, 152
    - e Entwicklung natürlicher Zahlen 32
    - e Ziffern 162
    - Körper der –en Brüche 153
    - Mehrdeutigkeit der –en Bruchentwicklung 124
    - Satz von der –en Entwicklung 152
    - schließlich periodische –e Bruchentwicklung 123
  - ganz
    - e Zahlen 1, 59
    - Addition von –en Zahlen 59, 60
    - Anordnung von –en Zahlen 75
    - Multiplikation von –en Zahlen 61

- Gauß 5  
 –sche Zahlen  $\mathbb{Q}[i]$  81  
 genau dann, wenn 6  
 geometrisch  
 doppelt (zweifach) –e Reihe 174  
 –e Reihe 116, 219  
 –e Reihe in einer Banach–Algebra 192  
 –es Mittel 77  
 –e Veranschaulichung von Konvergenz 92  
 $n$ –fach –e Reihe 174  
 geordnet  
 –e Menge 35  
 –es Paar 13  
 induktiv –e Menge 37  
 linear/total –e Menge 35  
 Gerade 2  
 gleichmächtig  
 –e Mengen 39  
 gleichmäßig  
 Cauchy–Kriterium für –e Konvergenz 208  
 – beschränkte Funktionenfolge 214  
 –e Konvergenz impliziert  
 punktweise Konvergenz 206  
 –e Konvergenz von Funktionenfolgen 193, 203  
 –e Konvergenz von Potenzreihen  
 im Inneren des Konvergenzkreises 207  
 –er Limes von stetigen Abbildungen 206  
 –e Stetigkeit der Wurzelfunktionen 198  
 Kriterien für –e Konvergenz 215  
 Glied  
 – einer Reihe 115  
 Gödel 12, 48  
 golden  
 –er Schnitt 2, 85, 86, 146, 148  
 gottgegeben 14  
 Graph  
 – einer Abbildung 8, 13  
 Grenzsteigung  
 – der Sekante 202  
 Grenzwert  
 Cauchy–Kriterium für –e  
 von Funktionswerten 195  
 Eindeutigkeit des –s 93, 101, 109  
 $\varepsilon$ – $\delta$ –Kriterium für –e von Funktionswerten 195  
 – einer Folge 92, 101, 109  
 – von Funktionswerten 193  
 – (Summe/Wert) einer Reihe 115  
 linksseitiger – 193  
 Monotonie des –s 114  
 rechtsseitiger – 193  
 uneigentlicher – 95  
 uneigentlicher – von Funktionswerten 199  
 Grenzwertdarstellung  
 – der Exponentialfunktion 167  
 Grenzwertsatz  
 Abelscher – 178, 213, 217  
 Großbusse 43  
 großer Umordnungssatz 170  
 größte  
 –r gemeinsamer Teiler 70, 71  
 –r Häufungswert 186, 187  
 – untere Schranke  $\inf A$  183  
 Gruppe 54  
 abelsche – 53  
 allgemeine lineare –  $GL(n, \mathbb{K})$  54  
 endliche –e 57  
 kommutative – 10  
 nicht kommutative – 10  
 symmetrische – 46, 49, 54  
 Gruppenautomorphismus 57  
 Gruppenhomomorphismus 57  
 Kern eines – 57  
 Bild eines – 57  
 Gruppenisomorphismus 57
- H**
- Hadamard  
 Cauchy–sche Formel 190  
 Halbgruppe 49  
 abelsche – 53  
 kommutative – 53  
 reguläre – 55  
 halboffen  
 –es Intervall 79  
 Halbordnung 35  
 Halmos 12  
 Hamburg  
 –er U–Bahn–Metrik 99  
 Hamilton  
 –sche Quaternionen 81  
 Hamming  
 –-Distanz 99  
 harmonisch  
 –e Reihe 117, 159, 164  
 Häufungspunkt  
 – einer Folge 103, 154, 185  
 – einer Menge 106  
 Häufungswert 103, 154, 185  
 größter – 186, 187  
 kleinster – 186, 187  
 Menge der –e 187  
 Hauptideal 71  
 Hauptsatz  
 – der Differential– und Integralrechnung 4  
 Hauptzweig  
 – der Potenzfunktionen 212  
 – des Logarithmus 191  
 Hausdorff  
 –sche  $\eta_1$ –Körper 156  
 –scher topologischer Raum 109  
 –sches Trennungsaxiom 109  
 Hermite  
 –sche Sesquilinearform 90  
 –sches Skalarprodukt 136  
 Hierarchien

- von „Unendlichkeiten“ 39
  - Hilbert 43
    - Raum 135
    - scher Folgenraum  $\ell^2$  133, 135 ff.
    - s Hotel 43
    - komplexer –Raum 136
  - Hintereinanderschaltung
    - von Abbildungen 10
    - Stetigkeit der – von stetigen Abbildungen 198
  - höchstens abzählbare Menge 39
  - Hotel
    - Hilberts – 43
  - Homomorphiesatz
    - erster – für Gruppen 58
    - erster – für Ringe 64
  - Horner–Schema 33, 166
- I**
- Ideal 38, 64
    - eigentliches – 64
    - endlich erzeugtes – 71
    - $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$  der Nullfolgen 126
    - maximales – 38, 127
    - Restklassen modulo einem – 64
  - identisch
    - e Abbildung 14
  - Identität 10
  - Identitätssatz
    - für Polynome 84
    - für Potenzreihen 148, 217
  - impliziert 6
  - Indexmenge 11
    - leere – 11
  - indiskret
    - e Topologie 108
  - indiziert
    - e Familie von Mengen 11
  - Induktion
    - s–Anfang 16, 30
    - s–Axiom 21, 76
    - s–Prinzip 2, 16
    - s–Schluß/Schritt 18
    - ordnungstheoretische – 31
    - vollständige – 16
  - induktiv
    - e Definition 22, 23
    - e Menge 47, 76
    - geordnete Menge 37
  - induziert
    - e Anordnung, Ordnung 35, 75
    - e Metrik 100
    - e Topologie 108
  - Ineinandersetzen
    - von Potenzreihen 218
  - Infimum
    - einer Menge reeller Zahlen 183
    - im uneigentlichen Sinne 183
  - saxiom 183, 184
  - Ingenieur
    - Rechenschieber als Markenzeichen des –s 201
  - injektiv
    - e Abbildung 9, 13
  - inner
    - er Kern 106
  - Integritätsbereich, Integritätsring 61
  - Interpolationspolynom
    - Lagrange–Form des –s 84
    - Newtons Verfahren der Berechnung des –s 83, 84
  - Intervall 79, 100
    - abgeschlossenes – 79
    - beschränktes – 79
    - halboffenes – 79
    - kompaktes – 79
    - offenes – 79
  - Intervallhalbierung
    - Methode der – 138
  - Intervallschachtelung 80, 114, 115, 137
    - schwaches Axiom der – 137
    - starkes Axiom der – 137
  - invers
    - e Abbildung  $f^{-1}$  10
    - es Element 10
  - invertierbar
    - e Elemente in einer Halbgruppe 53
    - e Elemente in einer Banach–Algebra 192
  - involutorisch
    - er Automorphismus 81
  - Irrationalität
    - von  $e$  166
    - von  $\pi$  166
    - von  $\sqrt{p}$  69
    - von  $\zeta(3)$  160
  - Irrationalzahl 2
    - Überabzählbarkeit der –en 44
  - irreduzibles
    - Element 72
    - Polynom 73
  - isoliert
    - er Punkt 107, 196
  - Iterationsverfahren
    - fehlerkorrigierendes – 120
  - iterativ
    - e Approximation 3
  - iteriert
    - e Bilder 149
- J**
- Jensen
    - sche Ungleichung 135
- K**
- $\mathbb{K}_0$  82
    - metrischer Raum 98

- $\mathbb{K}^n$  66
- Kaninchenpaare
  - Vermehrungsgesetz für – 146
- kanonisch 14
  - e Metrik 100
- Kardinalität
  - einer Menge 39
- Kardinalzahl 47
  - unendliche – 48
- kartesisch
  - es Produkt 12, 13
  - $n$ -faches –es Produkt 14
- Kern
  - innerer – 106
- Kette 37
- Klammerung
  - in konvergenten Reihen 117, 118
  - Unabhängigkeit eines Produktes von – 50
- Klasse 12
  - aller Mengen 12
- Kleinbusse 43
- kleiner Umordnungssatz 171
- kleinste
  - obere Schranke  $\sup A$  183
  - r Häufungswert 186, 187
- Koeffizient
  - en einer Potenzreihe 165
  - Methode des –envergleichs 218
  - rekursive Bestimmung von –en
  - eines Cauchy-Produkts von Potenzreihen 220
- Kombinatorik
  - Grundfragen der – 45
- kommutativ
  - e Gruppe 10
  - er Ring 61
  - es Diagramm 24
  - es Magma 49
- Kommutativität 7, 27, 28, 48
- kompakt
  - e Menge 110
  - er topologischer Raum 111
  - es Intervall 79
- Komplement 8
- komplex
  - (Absolut-) Betrag einer –en Zahl 81
  - Imaginärteil einer –en Zahl 81, 144
  - e Zahl 81, 144
  - Realteil einer –en Zahl 81, 144
- komponentenweise
  - Konvergenz 145
- Komposition 49
  - von Abbildungen 10
- Konjugation
  - in  $\mathbb{C}$  81
- konstant
  - e Abbildung 10, 222
  - e Folge 125
- konstruktive Methode 2
- Kontinuumshypothese 12, 48
  - allgemeine – 12, 48
- Kontraposition 20
  - Beweis/Schluß durch – 20, 21
- konvergent
  - e Folge 89, 92, 94, 96, 100, 101, 108
  - e Reihe 115
  - uneigentlich –e Folge 95
- Konvergenz
  - absolute – 161
  - absolute – impliziert unbedingte Konvergenz 176
  - bedingte – 176
  - Cauchy-Kriterium für gleichmäßige – 208
  - geometrische Veranschaulichung von – 92
  - gleichmäßige – von Funktionenfolgen 193, 205
  - komponentenweise – 145
  - im Produktraum 102
  - von Filtern 110, 111
  - von Folgen 3, 89, 96, 100, 101, 144
  - – in unendlich-dimensionalen Vektorraum 4
  - normale – von Reihen 209
  - Prinzip der monotonen – 137
  - punktweise – von Funktionenfolgen 193, 205
  - quadratische – 121
  - unbedingte – 176
- Konvergenzintervall 189
- Konvergenzkreis 189
- Konvergenzkriterium
  - von Abel 177, 216, 217
  - von Dirichlet 177, 215
  - von Raabe 164
- Konvergenzradius 189, 190
  - Cauchy-Hadamardsche Formel für den –
  - einer Potenzreihe 190, 192
- Konvergenzsatze
  - Weierstraßscher – 208, 209
- Konvergenzverbesserung 162
- Koordinatentransformation 150
- Körper 61
  - angeordneter – 75
  - archimedisch – – 75
  - archimedisch bewerteter – 111
  - bewerteter – 82, 89
  - der algebraischen Zahlen  $\mathbb{A}$  69
  - der  $g$ -adischen Brüche 153
  - der Gaußschen Zahlen  $\mathbb{Q}[i]$  81
  - der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  81, 144
  - der nichtstandard (nonstandard) reellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  156
  - der rationalen Funktionen 68
  - der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  67
  - der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  137 ff.
  - $\mathbb{F}_2$  mit 2 Elementen 62, 99
  - $\mathbb{F}_p$  mit  $p$  Elementen 63
  - vollständiger – 89
- Körpererweiterung
  - von  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$  80
- Körperhomomorphismus 64, 151

- Körperisomorphismus 64, 123  
 ordnungserhaltender – 123  
 Körperstruktur  
 – auf der Vervollständigung  $\widetilde{\mathbb{K}}$  von  $\mathbb{K}$  126  
 Kreisscheibe 93, 100  
 Kreiszahl  $\pi$  1, 44, 142, 143, 213  
 Kreuzprodukt 14  
 Kronecker 2  
 –s Deltasymbol 65  
 Kubikzahl 18  
 Kugel 93  
 abgeschlossene – 100  
 offene – 100  
 Kuratowski 37  
 Kürzungsregel 55  
 Kyoto  
 – -Straßenmetrik 98
- L**
- $\ell^2$  (Hilbertscher Folgenraum) 133, 135 ff.  
 $\ell^p$  135  
 $\ell^\infty$  135  
 Länge 1  
 Laurentreihe  
 Ring  $\mathbb{L}$  der formalen  $-n$  156  
 leer  
 –e Indexmenge 11  
 –e Menge 7, 8  
 Leibniz  
 – -Kriterium für alternierende Reihen 161  
 –sches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz 216  
 verallgemeinertes – -Kriterium 177  
 Lejeune–Dirichlet  
 Konvergenzsatz von – 177  
 Umordnungssatz von Riemann  
 und – 169, 176, 189  
 Limes  
 gleichmäßiger – von stetigen Abbildungen 206  
 – einer Folge  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j$ ,  $a_j \rightarrow a$  92, 94  
 – inferior  $\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j$ ,  $\underline{\lim} a_j$  183, 186  
 – superior  $\limsup_{j \rightarrow \infty} a_j$ ,  $\overline{\lim} a_j$  183, 186  
 linear  
 allgemeine –e Gruppe  $GL(n, \mathbb{K})$  54  
 –e Algebra 149  
 –e Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\mathbb{K}^n)$  54  
 – geordnete Menge 35  
 Linksinverses 10, 11  
 Linksnebenklasse 57  
 linksseitig  
 –er Grenzwert 193  
 Logarithmus  
 Hauptzweig des – 191, 212  
 –Reihe  $L(z)$  191, 211  
 natürlicher – als Umkehrfunktion  
 der reellen Exponentialfunktion 200  
 natürlicher – von 2 212  
 Potenzreihenentwicklung des – 212  
 Verwendung des – zur Multiplikation 201  
 Logik  
 Aristotelische – 2, 7  
 Lückenlosigkeit  
 – des reellen Zahlkörpers 119
- M**
- Mächtigkeit  
 – der Menge der Primzahlen 72  
 – einer Menge 39  
 Magma 49  
 assoziatives – 49  
 kommutatives – 49  
 Majorante  
 – einer Reihe 159  
 Majorantenkriterium 159  
 Manhattan  
 – -Norm 91  
 – -Straßenmetrik 98  
 Mannheim  
 – -Straßenmetrik 98  
 Mannigfaltigkeit  
 Riemannsche – 100  
 Maßzahl 1  
 Matrizenkalkül  
 – der Quantenmechanik 136  
 Matrizenmultiplikation 53  
 Matrizenring  $M(n \times n, \mathbb{K})$  66  
 maximal  
 –es Element 36  
 –es Ideal 38  
 Maximalitätsaxiom 152  
 Maximum  $\max A$  36, 183  
 Maximummetrik 99  
 Maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$  90  
 – auf  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper 145  
 Mehrdeutigkeit  
 – der  $g$ -adischen Bruchentwicklung 124  
 – des Logarithmus 212  
 – von Symbolen 89  
 Menge 5  
 abgeschlossene – 101  
 abzählbare – 39  
 Anzahl einer – 39  
 beschränkte – 102  
 disjunkte – 8  
 diskrete – 107  
 endliche – 12, 39, 41  
 folgenabgeschlossene – 104, 110  
 folgenkompakte – 110  
 gleichmächtige – 39  
 höchstens abzählbare – 39  
 induktive – 47, 76  
 Kardinalität einer – 39  
 kompakte – 110  
 leere – 7, 8  
 Mächtigkeit einer – 39



- $\text{Abb}^b(X, Y)$  der beschränkten Abbildungen 222
- $\mathcal{CF}_X$  der Cauchy-Folgen
  - in metrischem Raum  $X$  125
- der „endlichen“ Folgen  $\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$  65
- der Häufungswerte 187
- $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$  der Nullfolgen 126
- offene – 101, 108
- überabzählbare – 43
- unendliche – 15, 39, 41
- wohlgeordnete – 36
- Mengen
  - algebra 7
  - klammer 5
  - lehre 5
  - theorie 2
  - naive –lehre 12
- Mertens
  - Satz von – 178
- Methode
  - axiomatische – 2
  - konstruktive – 2
  - der Intervallhalbierung 138
  - des Koeffizientenvergleichs 218
- Metrik 97
  - diskrete – 98
  - induzierte – 100
  - kanonische – 100
  - Maximum- – 99
  - auf Einheitssphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  99
  - Stetigkeit der – 208
  - triviale – 98
- metrisch
  - er Raum 98
  - er Unterraum 100
- minimal
  - es Element 36
- Minorantenkriterium 160
- Mittel
  - arithmetisches – 77
  - geometrisches – 77
  - Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem – 77, 139
- Mittelpunkt
  - einer Kugel 100
- Modul (über einem Ring) 66
- Monoid 52
- monoton
  - e Konvergenz 137
- Monotonie
  - der Grenzwertbildung 114
- Multiplikation
  - ganzer Zahlen 61
  - natürlicher Zahlen 28
  - von Reihen 174
- multiplizieren
  - geometrisch – 1
- N**
  - $\mathbb{N}$  (Menge der natürlichen Zahlen) 1, 15, 47
    - Einbettung von – in  $\mathbb{Z}$  60
    - $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  140
  - Nachfolger 16
  - Nahebeieinanderliegen 89
  - Näherungspolynom
    - e für die Exponentialfunktion 166
  - Näherungswert
    - für die Eulersche Zahl  $e$  166
    - für die Kreiszahl  $\pi$  142
  - natürlich
    - Addition von –en Zahlen 27
    - Anordnung von –en Zahlen 29
    - Eindeutigkeit der –en Zahlen 22
    - Funktionalgleichung des –en Logarithmus 200
    - Multiplikation von –en Zahlen 28
    - er Logarithmus 200
    - er Logarithmus von 2 212
    - e Zahlen 1, 15, 47
  - Nebenklasse 57
  - $n$ -Eck 141
    - einbeschriebenes/umbeschriebenes
    - reguläres/regelmäßiges – 141
    - Fläche des – – 141
  - Negation
    - einer Aussage 20
  - negative Zahl 1
  - Neumann, von Neumann 12
  - neutrales Element 10, 48, 52, 53
  - Newton
    - -Verfahren 121
    - – (zur Approximation von Wurzeln) 119, 120
  - $n$ -faches kartesisches Produkt 14
  - nichtarchimedisch
    - bewerteter Körper 96
    - e Anordnung 77
  - nichtstandard
    - Körper der – (nonstandard) reellen Zahlen 156
  - nichtorientiert
    - er Winkel 91
  - nichttrivial
    - e Nullfolge 96, 156
  - Nichtvollständigkeit
    - von  $\mathbb{Q}$  119
    - von  $\mathbb{R}^\infty$  133
  - Nichtzusammenhang
    - totaler – 112
  - nilpotent
    - analytisch –es Element 156
  - Norm 89
    - euklidische – 90
    - Manhattan- – 91
    - $p$ - – 91
  - normal
    - e Konvergenz von Reihen 209
    - e Untergruppe 58

- Normalteiler 58  
 normiert  
   –er Vektorraum 89  
   –es Polynom 44, 199  
 Null 15  
 Nullfolge 94  
   Existenz nichttrivialer  $n$ -n (Eigenschaft  $(*)$ ) 96  
   Menge  $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$  der  $n$ -n 126  
   nichttriviale – 96, 156  
   triviale – 96  
 Nullstelle 85  
   Existenz einer – eines reellen Polynoms  
   ungeraden Grades 85  
 Nullteilerfreiheit  
   – von  $\mathbb{N}$  29  
   – von  $\mathbb{Z}$  61  
 nullteilerfreier  
   –er Ring 61  
 nullum 15  
 numerische Mathematik 3
- O**
- obere  
   – Schranke 37, 183  
   kleinste – Schranke  $\sup A$  183  
 Oberring 63  
   angeordneter – 75  
 Objekte  
   wohlunterschiedene – 5  
 oder ( $\vee$ ) 7  
   nicht ausschließendes – 7  
 offen  
   –e Kugel 100  
   –e Menge 101, 108  
   –es Intervall 79  
 Operatornorm 191  
 Ordinalzahl 48  
 Ordnung  
   induzierte – 35  
   lineare – 35  
   – auf einer Menge 35  
   – der natürlichen Zahlen 29  
   – einer Gruppe 46  
   partielle – 35  
   totale – 35, 75  
   – – für die Kardinalzahlen 47  
 ordnungserhaltend  
   –er Körperhomomorphismus 151  
   –er Körperisomorphismus 123  
 ordnungstheoretische  
   – Charakterisierung der natürlichen Zahlen 36  
   – Induktion 31  
 orientiert  
   –er Winkel 91  
 Origo 15  
 Ostrowski  
   Satz von – 82
- P**
- $p$ -adische  
   – Bewertung 82  
   – Norm 91  
 Paar  
   geordnetes – 13  
 Partialbruch 87  
   – Zerlegung rationaler Funktionen 87  
 Partialsumme 115  
 partiell  
   Abelsche –e Summation 176  
   –e Ordnung 35  
 Pascal  
   –sches Dreieck 45  
 Peano-Axiome 2, 15, 16, 18, 19, 20  
 Periode  
   – einer rationalen Zahl 123  
 periodisch 64  
   schließlich –e Entwicklung 123, 163  
 Permutation 10  
   – der natürlichen Zahlen 170  
   – einer (konvergenten) Folge 93  
 Permutationsgruppe  $\text{Perm}(X)$  10, 54  
 $\pi$  (Kreiszahl) 1, 44, 142, 143  
 Polynom 64  
   charakteristisches – 150  
   irreduzibles – 73  
   normiertes – 44, 199  
   Wachstum von –en 199  
 polynomial  
   –e Abbildung / Funktion 66, 197  
   Folgenstetigkeit –er Funktionen 121  
   Stetigkeit –er Funktionen 197  
 Polynomring  $R[x]$  65, 66  
   Anordnung auf – 78  
 Polyzylinder 101  
 positiv  
   –es Element 75  
 Positivitätsbereich 75  
 Potenz  
   allgemeine – 203  
   Rechenregeln für – – 204  
 Potenzfunktion  
   Hauptzweig der –en 212  
   – mit rationalem Exponenten 139  
   – mit reellem (und komplexem) Exponenten 203  
   Potenzreihenentwicklung der –en 212  
   Stetigkeit der –en 198  
   verallgemeinerte – 204  
 Potenzmenge 9, 45  
 Potenzreihe 66, 165  
   Cauchy-Produkt von –n 190  
   dividieren durch – 218, 219  
   Entwickeln einer – um einen anderen Punkt 218  
   Entwicklungspunkt einer – 165  
   erzeugende – 148  
   formale – 66

- gleichmäßige Konvergenz von  $-n$  207
  - Identitätssatz für  $-n$  148, 217
  - Ineinandersetzen von  $-en$  218
  - Koeffizienten einer  $-$  165
  - konvergente  $-$  66
  - Konvergenzradius einer  $-$  189, 190, 191
  - $-$  in einem Banach-Raum 165
  - $-$  in einer Banach-Algebra 191
  - Rechenregeln für  $-n$  190
  - Stetigkeit von  $-n$  207
  - Potenzreihenentwicklung
    - $-$  der Quadratwurzel und ihrer Inversen 212
    - $-$  des Arcussinus 213
    - $-$  des Logarithmus 212
  - Primelement 72
  - Primfaktorzerlegung 73, 84
  - Primzahl 5, 6, 49, 72
    - Mächtigkeit der Menge der  $-en$  72
    - $-$ -Verteilung 160
  - Primzahlsatz 72
  - Principia Mathematica 12
  - Prinzip
    - $-$  der monotonen Konvergenz 137
  - Produkt
    - allgemeines  $-$  14
    - direktes  $-$  14
    - kartesisches  $-$  12, 13
    - Kreuz-  $-$  14
    - $n$ -faches  $-$  14
    - $-$  von  $n$  Elementen 50
    - Wallische  $-$ Folge 141
  - Produktdarstellung
    - $-$  der  $\zeta$ -Funktion 160
  - Produktraum
    - Konvergenz im  $-$  102
  - Produktsatz
    - Cauchyscher  $-$  174
  - Produktsymbol  $\prod$  50, 53
  - Pseudometrik 208, 222
    - $-$  der gleichmäßigen Konvergenz 207
    - Supremums-  $d_\infty$  207
  - pseudometrisch
    - Beschränktheitsklasse in einem  $-en$  Raum 222
    - $-er$  Raum 222
  - Pseudonorm 222
    - $-$  der gleichmäßigen Konvergenz 207
  - pseudonormiert
    - Beschränktheitsklasse in einem  $-en$  Vektorraum 222
    - $-er$  Vektorraum 222
    - Untervektorraum der beschränkten Elemente in einem  $-en$  Vektorraum 223
  - Punkt
    - isolierter  $-$  107, 196
    - $-e$  auf einer Geraden 2
  - punktweise
    - Konvergenz von Funktionenfolgen 193
  - Pythagoräer 2, 85
- Q**
- $\mathbb{Q}$  (Körper der rationalen Zahlen) 67
  - quadratintegrierbar
    - $-e$  Funktion 136
  - quadratisch
    - $-e$  Gleichung 44
    - $-e$  Konvergenz 121
    - $-er$  Erweiterungskörper 44
  - Quadratzahl 18
  - Quantenmechanik 136
    - Matrizenkalkül der  $-$  136
    - Wellenkalkül der  $-$  136
  - Quaternionen
    - Hamiltonsche  $-$  81
  - Quotientengruppe 58
  - Quotientenkriterium 163, 168, 188, 189
    - Fehlerabschätzung im  $-$  164
- R**
- $\mathbb{R}$  (Körper der reellen Zahlen) 2, 137 ff.
  - Raabe
    - Konvergenzkriterium von  $-$  164
  - radioaktiv
    - $-er$  Zerfall 166
  - Radius
    - $-$  einer Kugel 100
  - Rand
    - $- \partial A$  einer Menge 106
    - $-$  des Einheitskreises 177
  - Randpunkt 106
  - rational
    - Asymptote einer  $-en$  Funktion 87
    - echt gebrochen  $-e$  Funktion 87
    - Folgenstetigkeit  $-er$  Funktionen 121
    - $-e$  Funktion 68
    - $-e$  Zahl 2, 67
    - Partialbruch-Zerlegung  $-er$  Funktionen 87
    - Stetigkeit  $-er$  Funktionen 197
  - Raum
    - hausdorffscher topologischer  $-$  109
    - $\mathbb{K}_0$ -metrischer  $-$  98
    - kompakter topologischer  $-$  111
    - metrischer  $-$  98
    - pseudometrischer  $-$  222
      - $-$  der beschränkten Folgen  $\mathcal{BF}_V$  118
      - $-$  der Cauchy-Folgen  $\mathcal{CF}_V, \mathcal{C}_X$  118, 125 ff.
      - $-$  der „endlichen“ Folgen  $\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$  65
      - $-$  der konvergenten Folgen  $\mathcal{KF}_V$  118
      - $-$  der quadratintegrierbaren Funktionen  $L^2$  136
      - $-$  der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum  $X$  208
    - topologischer  $-$  89, 205
    - unendlichdimensionaler euklidischer  $-$  133
    - vollständiger metrischer  $-$  125
  - Rechenregeln
    - $-$  für allgemeine Potenzen 204

- für Grenzwerte von Funktionswerten 196, 197
- für konvergente Folgen 113
- für konvergente Potenzreihen 190
- für konvergente Reihen 116
- Rechenschieber 201
  - als Markenzeichen des Ingenieurs 201
- Rechtsinverses 10, 11
- Rechtsnebenklasse 57
- rechtsseitig
  - er Grenzwert 193
- reell
  - axiomatische Einführung des
  - en Zahlkörpers 137 ff.
  - er Zahlkörper 137 ff.
  - (Eindeutigkeit) 123, 151
  - (Existenz) 125 ff.
  - e Zahl 1
- Reflexivität
  - der Gleichmächtigkeitsrelation 39
- Regeln
  - für den Umgang mit Ungleichungen 75
  - von de Morgan 8
- regulär
  - Fläche des einbeschriebenen/umbeschriebenen
  - en (regelmäßigen)  $n$ -Ecks 141
  - e Halbgruppe 55
  - es (regelmäßiges) Fünfeck 2, 85
- Reihe 115
  - absolut konvergente – 161
  - alternierende – 161
  - bedingt konvergente – 176
  - Cauchy-Produkt zweier –n 174, 178
  - Cauchy- – 116
  - doppelt (zweifach) geometrische – 174
  - geometrische – 116, 219
  - Grenzwert (Summe/Wert) einer – 115
  - harmonische – 117, 159, 164
  - konvergente – 115
  - Multiplikation zweier –n 174
  - $n$ -fach geometrische – 174
  - normale Konvergenz von –n 209
  - Partialsummen einer – 115
  - in Banach-Raum 159
  - Teleskop- – 115
  - unbedingt konvergente – 176
  - Verdichtungsbedingung für –n 116
- rekursiv
  - e Bestimmung von Koeffizienten 220
  - e Definition 23
- Relation 34
  - antisymmetrische – 35
  - reflexive – 34
  - symmetrische – 34
  - transitive – 34
- Relativtopologie 108
- Reproduktion
  - der Exponentialfunktion durch
  - Differentiation 202
- Rest
  - Division mit – 62
- Restklassen
  - in  $\mathbb{Z}$  modulo  $m$  62
  - modulo einem Ideal  $\mathfrak{a}$  64
- Riemann
  - sche Mannigfaltigkeit 100
  - sche Vermutung 160
  - sche  $\zeta$ -Funktion 160, 173, 179, 188
  - Umordnungssatz von – und
  - Lejeune-Dirichlet 169, 176, 189
- Ring 38, 61
  - angeordneter – 75
  - archimedisch – – 75
  - euklidischer – 70
  - kommutativer – 61
  - nullteilerfreier – 29, 61
  - der formalen Potenzreihen  $R\{\{x\}\}$  66
  - der konvergenten Potenzreihen  $\mathbb{K}\{x\}$  66
  - mit Eins 61
- Ringhomomorphismus 64
  - Kern eines – 64
  - Bild eines – 64
- Ringisomorphismus 64
  - ordnungserhaltender – 78
- Ringschluß 8
- $R$ -Modul 66
- Rundlauf 8
- Russell 2, 12
  - sche Antinomie 5, 12
- S**
- Sandkörner 15
- Satz
  - von Bolzano (Zwischenwertsatz) 200
  - von Bolzano-Weierstraß 103, 104, 137, 154, 185
  - von der  $g$ -adischen Entwicklung 152
  - in bewerteten Körpern 145
  - von Mertens 178
  - von Ostrowski 82
- Schiefkörper
  - der Hamiltonschen Quaternionen 81
- schließlich
  - periodische Entwicklung 123, 163
- Schluß
  - durch Kontraposition 20, 21
- Schnitt
  - goldener – 2, 85, 86, 146, 148
- Schranke
  - größte untere – 183
  - kleinste obere – 183
  - obere – 37, 183
  - untere – 37, 183
- Schubfach-Prinzip 39
- schwach
  - es Intervallschachtelungsprinzip 137
- Sekante 202

- Steigung der – 202
  - Senkrechtstehen 91
  - Sesquilinearform 90
    - hermitesche – 90
  - Skalarprodukt 90
    - euklidisches – 91
    - hermitesches – 136
    - verallgemeinertes euklidisches – 133
  - Spitze
    - einer reellen Zahlenfolge 138
  - Stammfunktion 177, 190, 191
  - stark
    - es Intervallschachtelungsprinzip 137
  - Startwert 148
  - Staubrechnung 15
  - Steigung 202
    - Grenz– der Sekante 202
    - der Sekante 202
  - stetig
    - gleichmäßiger Limes von –en Abbildungen 206
    - e Abänderung 196
    - e Abbildung 100, 110, 111, 196
    - e Fortsetzung 196
    - e Verzinsung 143, 166
  - Stetigkeit 100, 193
    - gleichmäßige – (der Wurzelfunktionen) 198
    - der Exponentialfunktionen 198
    - der Hintereinanderschaltung stetiger Funktionen 198
    - der Metrik 208
    - der Potenzfunktionen 198
    - der Wurzelfunktionen 197
    - polynomialer Funktionen 197
    - rationaler Funktionen 197
    - von Potenzreihen 207
  - Strahlensätze 1
  - Straßenmetrik
    - Kyoto- – 98
    - Manhattan- – 98
    - Mannheim- – 98
  - Stufentheorie
    - der Mengenlehre 12
  - subtrahieren
    - geometrisch – 1
  - Summation
    - Abelsche partielle – 176
  - Summe
    - der Kubikzahlen 18
    - der Quadratzahlen 18
    - einer Reihe 115
  - Summenzeichen 17
    - Differentiation unter – 191
  - Summierbarkeit 172
  - Supremum
    - einer Menge reeller Zahlen 183
    - im uneigentlichen Sinne 183
    - saxiom 183, 184
    - snorm  $\| \cdot \|_\infty$  207, 214
    - spseudonorm 207
  - surjektiv
    - e Abbildung 9
  - Symmetrie
    - der Gleichmächtigkeitsrelation 39
  - symmetrisch
    - e Bilinearform 90
    - e Differenz 7
    - e Gruppe 46, 49, 54
    - e Relation 34
  - System
    - diskretes dynamisches – 149
- T**
- Tangente
    - als Grenzlage der Sekanten 202
  - Taschenrechner 201
  - Teilbarkeit mit Rest
    - für natürliche Zahlen 32
  - Teilbarkeitstheorie 2
    - in Integritätsbereichen 70
  - teilerfremd
    - e Elemente 70
  - Teilerkettensatz 73
  - Teilfolge 93
    - einer Cauchy-Folge 126
  - Teilmenge 6
    - dichte – 107
  - Teleskopreihe 115, 164, 177, 215
  - Temperaturen 1
  - Teufel
    - der Unendlichkeit 32
  - tertium non datur 6, 20
  - Topologie 108, 205
    - allgemeine – 205
    - diskrete – 108
    - hausdorffsche – 109
    - indiskrete – 108
    - induzierte – 108
  - topologisch
    - hausdorffscher –er Raum 109
    - kompakter –er Raum 111
    - er Raum 89, 108, 205
    - er Unterraum 108
  - total
    - e Ordnung 75
    - er Nichtzusammenhang 112
    - e Umordnung 170
    - geordnete Menge 35
  - transitiv
    - e Relation 34
  - Transitivität 29
    - der Gleichmächtigkeitsrelation 39
    - des Schließens 21
  - transzendent
    - e Zahl 44, 78
  - Transzendenz

- von  $e$  166
- von  $\pi$  166
- Trennungssaxiom
  - hausdorffsches – 109
- Trennungseigenschaft 109
- trigonometrisch
  - e Funktion 141
- trivial
  - e Bewertung 82
  - e Metrik 98
  - e Nullfolge 96
- Typentheorie
  - der Mengenlehre 12
  
- U**
- überabzählbar
  - e Menge 43
- Überabzählbarkeit
  - der Irrationalzahlen 44
  - jedes nichttrivialen Intervalls  $I \subset \mathbb{R}$  153
- Umgebung 101, 108
  - sbasis 110
  - sfilter 110
  - offene – 101
- Umkehrabbildung 10, 13
  - der reellen Exponentialfunktion 200
- Umordnung
  - großer –ssatz 170
  - kleiner –ssatz 171
  - totale – 170
  - einer Reihe 168, 170
  - – – (Gegenbeispiel) 169
  - wilde – 171
  - zahme – 171
- Umordnungssatz
  - von Riemann und Lejeune–Dirichlet 169, 176, 189
- unbedingt
  - konvergente Reihe 176
- und  $\wedge$  7
- uneigentlich
  - Infimum/Supremum im –en Sinne 183
  - er Grenzwert 95
  - – von Funktionswerten 199
  - konvergente Folge 95
- unendlich
  - -dimensionaler euklidischer Raum 133
  - e Folge 14
  - e Kardinalzahl 48
  - e Menge 15, 39, 41
  - e Teilfolge 93
- Unendlich  $\infty$  79
- Ungleichung
  - Bernoullische – 97
  - Cauchy–Schwarzsche – 90
  - Jensensche – 135
  - Umgang mit –en 75
  - zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel 77, 139
- unitär
  - er Vektorraum 91
- untere
  - größte – Schranke 183
  - Schranke 37, 183
- Untergruppe 57
  - echte – 57
  - Kriterien für –n 57
  - triviale – 57
- Unterhalbgruppe 54
- Unterkörper 64
  - angeordneter – 75, 76
- Untermagma 49
- Unterraum
  - metrischer – 100
  - topologischer – 108
- Unterring 63
  - angeordneter – 75
- Uranisotop U 235 3
- Urbild
  - von Mengen unter einer Abbildung 9
- Ursprung 15
- Urzahl 22
  
- V**
- Vektor
  - Länge eines –s 91
  - (orientierter/nichtorientierter) Winkel zwischen –en 91
- Vektorraum
  - euklidischer – 91
  - normierter – 89
  - pseudonormierter – 222
  - unitärer – 91
  - der Folgen  $\mathcal{F}_V = \text{Abb}(\mathbb{N}, V)$  91
  - der konvergenten Folgen in einem normierten Vektorraum 92
  - von Abbildungen 66
- Venn–Diagramm 7
- verallgemeinert
  - e Potenzfunktion 204
  - er Binomialkoeffizient 175
  - es Leibniz–Kriterium 177
- Verdichtungsbedingung (Cauchy–Kriterium)
  - für Reihen 116
- Verdichtungskriterium
  - für Reihen 179
- Verdoppelungsformel
  - für Sinus und Cosinus 142
- Vereinigung
  - von Mengen 7, 11
- vergleichbar
  - e Elemente 35
- Verknüpfung 49
- Verlauf

- der reellen Exponentialfunktion 199, 200
- Vermehrungsgesetz
  - für Kaninchenpaare 146
- Vermutung
  - Riemannsche – 160
- verschärft
  - e Dreiecksungleichung 82, 111
- Vertauschungsregel 52
- Verteilung
  - Primzahl- – 160
- Vervollständigung 125
  - von  $\mathbb{R}^\infty$  in  $\mathcal{F}_\mathbb{R}$  134
  - $\tilde{X}$  von  $X$  125
- Verzinsung
  - stetige – 143, 166
- vollständig
  - e Hülle 129
  - e Induktion 16
  - er Abschluß 129
  - er Körper 89, 137
- Vollständigkeit 119
  - der komplexen Zahlen 145
  - der reellen Zahlen 69, 137 ff.
  - der Vervollständigung 132
  - des Hilbertschen Folgenraums 135
  - eines (angeordneten/bewerteten) Körpers 89, 119
- Vollständigkeitsaxiom 115, 137

**W**

- Wachstumsverhalten
  - der Exponentialfunktion 199
  - der Polynome 199
- Wahrheitstafel 25
- Wahrheitswert 21
- Wallis
  - sche Produktfolge 143
- Wappensymbol der Pythagoräer 85
- Weierstraß
  - Satz von Bolzano- – 103, 104, 137, 154, 185
  - scher Konvergenzsatz 208, 209
  - sches Beispiel 210
- Wellenkalkül
  - der Quantenmechanik 136
- Weltall
  - endliches – 15
- Whitehead 12
- Widerspruch
  - Beweis durch – 8, 20, 21
- Widerspruchsfreiheit 12
  - der mengentheoretischen Axiome 48
- wilde Umordnung 171
- Winkel
  - nichtorientierter – 91
  - orientierter – 91
  - im Bogenmaß 141
- wohlgeordnet

- e Menge 36
- Wohlordnung
  - der natürlichen Zahlen 31, 36
- Wohlordnungssatz 37
- Würfel 93, 100
- Wurzel
  - Existenz von  $-n$  positiver reeller Zahlen 138, 139, 184
  - Näherungswert für  $-$  aus 2 120, 184
  - Potenzreihenentwicklung der  $-$ funktionen 212
    - aus 2 1
    - aus 5 2
    - aus  $\pi$  143
- Wurzelfunktion 165
  - Folgenstetigkeit der  $-$ en 121
  - gleichmäßige Stetigkeit der  $-$ en 198
  - Stetigkeit der  $-$ en 197
- Wurzelkriterium 167, 188, 190

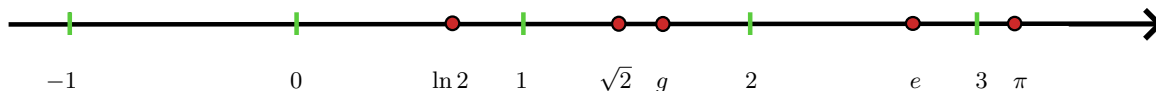
**Z**

- $\mathbb{Z}$  (Ring der ganzen Zahlen) 59
  - Einbettung von  $\mathbb{N}$  in – 60
- Zahl
  - algebraische – 44, 69
  - ganze – 1
  - Gaußsche – 81
  - irrationale – 2
  - komplexe – 81
  - natürliche – 1, 15, 47
  - negative – 1
  - rationale – 2, 67
  - reelle – 1
  - transzendente – 44, 78
- Zahlengerade 1
  - erweiterte – 80, 95
- Zahlenturm 15
- zahme Umordnung 171
- Zeit 1
- Zerfall
  - radioaktiver – 166
- Zerlegung
  - Partialbruch- – rationaler Funktionen 87
- Zermelo 12, 37
  - Axiome von – und Fraenkel 37
- $\zeta$ -Funktion
  - Produktdarstellung der – 160
  - Riemannsche – 160, 173, 179, 188
  - spezielle Werte  $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$ ,  $\zeta(6)$  der – 160
- Zickzackverfahren 170
- Zinseszinsrechnung 3
- Zorn 37
  - sches Lemma 37, 47
- Zunftzeichen (der Pythagoräer) 2
- Zustand 149
- Zwischenwertsatz 200

## Einleitung

Diese Noten dienen dem kohärenten Aufbau einer tragfähigen Grundlage für das Verständnis der Analysis im Reellen und Komplexen. Wir wollen dabei beim Leser an schon vorhandenen Detailkenntnissen nichts voraussetzen, sondern die Materie von Grund auf entwickeln. Es ist selbstverständlich, daß wir uns dabei dennoch auf einem nicht allzu festen Boden bewegen, da wir fortwährend bewußt oder unbewußt Anleihen machen bei Tausenden von Jahren menschlicher Kulturentwicklung, insbesondere bei der abendländisch-europäischen Tradition der Regeln der (Aristotelischen) *Logik*.

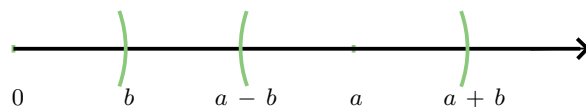
Das Wort *Analysis* bezeichnet nichts anderes als die Entfaltung des Begriffs der *reellen Zahl*. Solche reelle Zahlen treten im täglichen Leben auf als *Maßzahlen*, z. B. als *Längen*, *Zeiten*, *Temperaturen*, *Gewichte*. Sie können in manchen Fällen auch negativ sein. I. a. veranschaulicht man die reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden:



Figur E.1

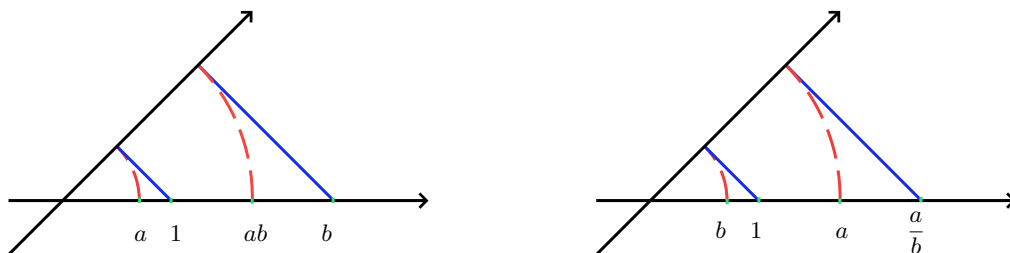
Hierin ist näherungsweise  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$  die *Quadratwurzel* aus 2,  $\pi = 3,141592\dots$  die *Kreiszahl*,  $g = 1,618033\dots$  die *goldene Schnittzahl*,  $e = 2,718281\dots$  die *Eulersche Zahl* und  $\ln 2 = 0,693147\dots$  der *natürliche Logarithmus* von 2.

Man kann Zahlen (nach Festlegung des Ursprungs 0) *geometrisch* addieren und subtrahieren:



Figur E.2

und ebenso (nach Festlegung der multiplikativen Einheit 1) multiplizieren und dividieren (Strahlensätze !):



Figur E.3

Insbesondere kann man sich innerhalb der Zahlengeraden (nach Festlegung von 0 und 1) die Mengen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots\}$$



der *natürlichen Zahlen*,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0 - 1 := -1, -1 - 1 := -2, \dots\}$$

der *ganzen Zahlen* und

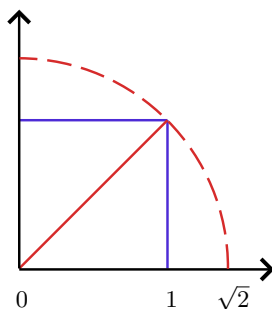
$$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

der *rationalen Zahlen* geometrisch verschaffen.

*Bemerkung.* Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß leider der Gebrauch des Symbols  $\mathbb{N}$  für die natürlichen Zahlen in den Grundtexten nicht übereinstimmt. Ich persönlich neige dazu (übrigens nicht vom Anfang meiner Beschäftigung mit Mathematik an), dem Beispiel von G. FISCHER [42] zu folgen und abweichend von KÖNIGSBERGER [11] die 0 als natürliche Zahl anzusehen (was übrigens auch mit der deutschen DIN-Norm übereinstimmt). Mit anderen Worten: in diesem Manuskript bezeichnet  $\mathbb{N}$  die Menge der endlichen *Kardinalzahlen* (siehe auch den Anhang zu Kapitel 3) und nicht die der endlichen *Ordinalzahlen*. Für diese, d. h. für die Menge der *positiven* natürlichen Zahlen, schreibe ich

$$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{n \in \mathbb{N} : n > 0\}.$$

Aber schon den Pythagoräern, deren Weltanschauung u. a. darin bestand, daß alle Zahlenverhältnisse rationaler Natur sein sollten, wurde schmerzlich bewußt, daß die rationalen Zahlen nicht die Gesamtheit  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ausfüllen, d. h. daß es *Irrationalzahlen* gibt:



Figur E.4

Tatsächlich ist  $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , d. h. es existieren keine (von Null verschiedenen) natürlichen Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $a^2 = 2b^2$ . Dies folgt sehr einfach aus der Teilbarkeitstheorie der ganzen Zahlen (siehe Anhang zu Kapitel 5, aber auch schon Kapitel 2.6). Noch schlimmer für die Pythagoräer: auch in ihrem *Zunftzeichen*, dem regulären Fünfeck, kommt der *goldene Schnitt* und damit die Irrationalzahl  $\sqrt{5}$  als Längenverhältnis vor.

Eine wie oben geartete geometrische „Einführung“ der reellen Zahlen und ihrer Beziehungen zueinander ist aber kaum logisch einwandfrei zu nennen: Wenn wir schon nicht wissen, was reelle Zahlen sind, so wissen wir erst recht nicht, was eine *Gerade* ist, und wir wissen auch nicht, was Punkte auf einer solchen Geraden bedeuten; ebenso haben wir bei der Addition und Multiplikation die zwar anschauliche, aber keineswegs zweifelsfrei definierte *Ebene* benutzt. Was sollen wir also tun?

Nun, aus diesem Dilemma gibt es zwei Auswege:

1. einen *axiomatischen*

und

2. einen *konstruktiven*,

die sich nach einem Bonmot von RUSSELL zueinander verhalten *wie Diebstahl zu ehrlicher Arbeit*.

Dennoch folgen die meisten Lehrbücher aus wohl didaktischen Gründen im wesentlichen dem ersten, auf HILBERT (letztendlich natürlich auf EUKLID) zurückgehenden *axiomatischen* Ansatz. Dies ist auch über weite Strecken in den vorliegenden Noten der Fall:

Für uns ist der reelle Zahlkörper  $\mathbb{R}$  der - wie wir zeigen werden, bis auf Isomorphie einzige - archimedisch angeordnete, vollständige Körper.

Somit ist alles, was wir allgemein über Körper und sogar über kommutative Ringe, über Anordnungen, archimedische und vollständige Anordnungen sagen und beweisen, auch gültig für den Körper  $\mathbb{R}$  und damit relevant zum Verständnis des Kurses. Entsprechendes gilt auch für den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen und die allgemeine Theorie der vollständig archimedisch bewerteten Körper. Im Gegensatz dazu können die gelegentlich eingeschobenen Exkurse zu den *nicht-archimedischen* Fällen überschlagen werden.

Führt man die reellen Zahlen axiomatisch ein, so hat man selbstverständlich die Pflicht,

1. die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen samt ihrer Eigenschaften in  $\mathbb{R}$  zu rekonstruieren; insbesondere gilt es,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  wiederzufinden und zu beweisen, daß  $\mathbb{N}$  dem Induktionsprinzip genügt (dies geschieht zum Beispiel in den Büchern von HEUSER [9] und wird hier zumindest ansatzweise erläutert),
2. die *Existenz* eines solchen Körpers zu beweisen.

Der *konstruktive* Ansatz besteht daher in einer schrittweise vorgenommenen algebraisch-arithmetischen Erweiterung der Zahlenbereiche:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dies ist der Standpunkt von KRONECKER, der gesagt hat: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* Hat man damit aber wirklich die reellen Zahlen? Natürlich nicht, denn auch die gottgegebenen natürlichen und ganzen Zahlen müssen entweder konstruiert oder zumindest axiomatisch eingeführt werden. Das erstere geht mit Hilfe der *Mengentheorie*, die dann aber selbst wieder axiomatisiert werden muß, was selbstverständlich Herrn Russell nicht verborgen blieb. Das letztere wird geleistet durch die PEANO-Axiome, deren wichtigstes das *Induktionsprinzip* ist.

Wir werden in dieser Vorlesung die Konstruktion aller relevanten Zahlbereiche aus den Peano-Axiomen vorstellen, dabei aber gelegentlich nicht jede Einzelheit bis zum Exzess durchführen und die Axiome der Mengentheorie mehr oder weniger unkommentiert benutzen. Wir lassen uns dabei von der Einsicht leiten, daß die Axiome der natürlichen Zahlen (zumindest auf den ersten Blick) viel einsichtiger, überzeugender, also *natürlicher* sind als diejenigen der Mengentheorie.

Noch ein Wort zur *Abstraktion*: Es liegt eine ungeheure Kraft in der Fähigkeit der Mathematik, die auch jeder Mathematiker erlernen und beherrschen muß (sonst ist er keiner), in ganz verschiedenen Bereichen dieselben Strukturen zu erkennen. Dies erlaubt, Neues auf bekanntes Altes zurückzuführen und sich nicht jedesmal wieder dieselben (langweiligen) Gedanken zu machen. Aus diesem Grunde werde ich von Anfang an auch im Altvertrauten schon allgemeine Strukturen aufzeigen und Begriffe in spezielleren Situationen so einführen, daß sie später leicht übertragen werden können.

Ich will dazu ein Beispiel geben. Aus der Atomphysik oder Bevölkerungsstatistik oder Zinseszinsrechnung ist die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = ay, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

bekannt (Größe des Wachstums proportional zum vorhandenen Bestand), wobei ich nicht behauptete, daß sie ein realistisches Bild im 2. Fall liefert. Selbstverständlich ist es der Differentialgleichung völlig gleich, ob es sich bei  $y = y(t)$  um den Bestand z. Zt.  $t$  von Atomen des Uranisotops U 235, um Euro oder Yen, um Afrikaner, Europäer oder Berggorillas (wenn wir ihnen denn die Chance zum unbegrenzten Wachstum geben würden) handelt. Dies ist natürlich ein sehr banales „statement“; ich will tatsächlich auf etwas ganz anderes hinaus.

Ein grundlegendes Thema der Analysis ist die „iterative Approximation“ von Lösungen von Gleichungen (und die dazugehörige Theorie macht erst die „Numerische Mathematik“ und den Einsatz von Computern möglich). Betrachten wir z. B. eine positive rationale (reelle) Zahl  $a$  und eine Folge  $c_0, c_1, c_2, \dots$  positiver rationaler (reeller) Zahlen, so daß gilt:

$$\text{i) } c_{n+1} = \frac{1}{2} \left( c_n + \frac{a}{c_n} \right);$$

ii) es existiert  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n > 0$ .

(Wir werden später sehen, daß es (viele) solche Folgen gibt). Dann folgt aus i) und ii) und den elementaren Sätzen über Konvergenz von Folgen, daß

$$c = \frac{1}{2} \left( c + \frac{a}{c} \right),$$

d. h.  $c$  ist Lösung der Gleichung  $c = A(c)$ , wobei  $A : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  gegeben ist durch  $A(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ , und dies ist äquivalent zu

$$a = c^2, \text{ d. h. } c = \sqrt{a}.$$

Mit anderen Worten:  $\sqrt{a}$  kann man durch solche Folgen beliebig genau approximieren.

In dem anderen Beispiel der Differentialgleichung (wir betrachten den Spezialfall  $a = 1$ ) haben wir ein ganz ähnliches Problem. Was suchen wir? Wir suchen eine *Lösung* von (\*), d. h. eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein festes Intervall, so daß

$$(+)\quad f'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Insbesondere muß  $f$  differenzierbar und damit stetig sein und damit, wie man sofort sieht, *unendlich oft* differenzierbar. Wir befinden uns damit in einem „Funktionsraum“, und zwar in

$$C^\infty(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren alle Ableitungen } f', f'', f''', \dots\}.$$

Dies ist tatsächlich ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der aber weit davon entfernt ist, endlich-dimensional zu sein! Wenn wir uns auf Lösungen beschränken mit  $f(x_0) = c$ ,  $x_0 \in I$ ,  $c \in \mathbb{R}$  fest, so ist (+) nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung äquivalent zu

$$(++)\quad f(x) = c + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad f \in C^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Definiert man jetzt für  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$  eine neue Funktion  $\Phi(f)$  durch

$$(\Phi(f))(x) := c + \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

so ist  $\Phi(f) \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ , also  $\Phi$  eine Abbildung von  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  in sich, und eine Lösung  $f$  ist ein Fixpunkt von  $\Phi : f = \Phi(f)$ . Was brauchen wir also zu unserem Glück? Einen guten Begriff von Konvergenz (in einem unendlich-dimensionalen Vektorraum) und einen Satz, der besagt, daß Iteration unter gewissen Voraussetzungen zum Ziel führt. Daß wir wohl tatsächlich Glück haben, zeigt das Beispiel  $x_0 = 0$ ,  $c = 1$ . Hier beginnen wir mit  $f_0 \equiv 1$ ; dann ist

$$f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

und damit (formal)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: \exp x.$$

In der Tat ist  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  eine wohldefinierte Funktion, die Konvergenz der Folge  $f_n$  gegen  $\exp$  ist „gleichmäßig“ auf jedem „beschränkten“ Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , und es gilt, wie gewünscht,

$$\exp' x = \exp x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Teil I: Mengentheoretische und algebraische Grundlagen

## 0 Naive Mengentheorie

### 0.1 Der naive Mengenbegriff

Als Sprache, die die gesamte Mathematik durchzieht, benutzen wir die der *Mengen*, wobei wir diese *naiv* verwenden und die logischen Fallstricke, wenn wir sie auch nicht gänzlich unerwähnt lassen, so doch nach Möglichkeit nicht überbetonen. Wir stellen hier einige Grundtatsachen und Bezeichnungen zusammen.

Der Begründer der modernen *Mengenlehre* ist GEORG CANTOR, weiland Professor der Mathematik in Halle a. d. S. Es ist heutzutage fast nicht mehr im Bewußtsein der Mathematiker verankert, daß seine epochale Theorie durch überaus konkrete Bedürfnisse der mathematischen Forschung begründet war. Wir werden auf diese Fragen, insbesondere diejenigen, die die Problematik der *Fourier-Reihen* betreffen, später noch zurückkommen. CANTOR's 1895 erschienene „Beiträge zur Begründung der Mengenlehre“ beginnen mit dem berühmten Satz:

„Unter einer *Menge*  $M$  verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen“.

Es ist aus der Geschichte der Mathematik bekannt, daß ein hemmungsloser oder sogar ein nur allzu naiver Umgang mit dieser äußerst unpräzisen Definition zu Widersprüchen führt wie z. B. Russells Menge, die sich selbst als Element enthält. (Siehe die Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts). Vielleicht nicht so sehr bekannt ist aber, daß schon GAUSS seine Bedenken anmeldete: „So protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welches in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.“

### 0.2 Enthaltensein

Wir bezeichnen Mengen meistens mit Großbuchstaben:  $M, N, A, B, X, Y$  etc. Ist  $x$  ein Element der Menge  $M$ , so wird dies in Zeichen durch

$$x \in M \quad (x \text{ ist Element von, gehört zu, liegt in } M)$$

oder

$$M \ni x \quad (M \text{ enthält } x)$$

ausgedrückt; wenn dies nicht der Fall ist, schreibt man  $x \notin M$ . Die *Gleichheit* von Elementen wird nicht weiter sprachlich erläutert (dies scheint - zumindest auf den ersten Blick - auch nicht erforderlich zu sein). Wir notieren aber, daß das Gleichheitszeichen den folgenden Regeln genügt:

- i) für alle  $x \in M$  gilt  $x = x$ ;
- ii) aus  $x = y, x, y \in M$ , folgt  $y = x$ ;
- iii) aus  $x = y, y = z, x, y, z \in M$ , folgt  $x = z$ .

Man kann Mengen darstellen in Mengenklammern durch Auflisten der Elemente, wenn dies möglich ist wie z. B. in

$$M = \{2, 3, 5, 7\}$$

oder, weniger überzeugend, in dem Beispiel der Menge der *Primzahlen*:

$$P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$

(weniger, oder besser: gar nicht überzeugend, da der Gebrauch der Pünktchen  $\dots$  allen Spekulationen Tür und Tor öffnet. Ohne die vorhergehende *verbale* Umschreibung könnte es sich bei  $P$  z. B. auch um die Menge der positiven natürlichen Zahlen handeln könnte, die *gerade* und kleiner als 3 oder *ungerade* und größer als 2 sind:  $P = \{2, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ ).

Das Symbol  $N \subset M$  bzw.  $M \supset N$  besagt, daß  $N$  eine *Teilmenge* von  $M$  ist: aus  $x \in N$  folgt stets  $x \in M$ . Für den letzten Sachverhalt schreiben wir  $x \in N \implies x \in M$  und sagen dafür auch:  $x \in N$  *impliziert*  $x \in M$ . Wir schließen dabei (inkonsequenterweise, wie wir noch am Gebrauch der Zeichen  $\leq$  und  $<$  sehen werden) nicht aus, daß auch  $N = M$  ist, d. h. daß  $N \subset M$  und gleichzeitig  $M \subset N$  gilt, in Zeichen also

$$x \in N \implies x \in M \quad \text{und} \quad x \in M \implies x \in N,$$

was wir auch mit dem Symbol

$$M \ni x \iff x \in N$$

belegen (wobei das Zeichen  $\iff$  sprachlich umschrieben wird mit Ausdrücken der Form *dann und nur dann, genau dann wenn* etc.). Um auszudrücken, daß  $N$  in  $M$  *echt* enthalten ist, d. h. daß  $N \subset M$  aber  $M \not\subset N$ , schreiben wir manchmal genauer

$$N \subsetneq M.$$

Beispielsweise haben wir die *echte* Inklusionskette

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Offensichtlich ist die Aussage  $M \not\subset N$  äquivalent dazu, daß es (mindestens) ein Element  $m \in M$  gibt mit  $m \notin N$ . Solche *Existenzaussagen* pflegt man mit Hilfe des „Existenzquantors“  $\exists$  (gelesen: *es gibt* oder *es existiert (mindestens) ein*) symbolisch zu kodifizieren. Im obigen Beispiel schreibt man z. B.  $\exists m : m \in M, m \notin N$ . Entsprechend benutzt man den „Allquantor“  $\forall$  im Sinne von *für alle (Elemente gilt)*. Ist z. B.  $P^* \subset \mathbb{N}$  die Menge der *Primzahlen*, die größer als 2 sind, so ist die folgende Aussage richtig:

$$\forall n \in P^* \text{ gilt : } \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k + 1.$$

Mit anderen Worten: *Jede von 2 verschiedene Primzahl ist ungerade.*

Ist  $A(x)$  eine *Aussageform*<sup>2</sup>, die auf Elemente  $x$  einer festen Grundmenge  $M$  angewandt „sinnvolle“ Aussagen ergibt und damit bei festem  $x \in M$  nur richtig oder falsch sein kann (und nach den klassischen Regeln der Aristotelischen Logik gibt es keine weitere Möglichkeit: „tertium non datur“), so kann man weitere Mengen erklären durch

$$N = \{x \in M : A(x)\},$$

also in Worten:  $N$  ist die Menge der Elemente  $x \in M$ , für die die Eigenschaft  $A(x)$  zutrifft. So gilt z. B. für die Menge  $P$  der Primzahlen:

$$P = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\},$$

wenn  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet und  $P(x)$  die Aussageform

$$x \geq 2, \text{ und teilt die natürliche Zahl } y \geq 2 \text{ die Zahl } x, \text{ so folgt } y = x.$$

Als weiteres Beispiel notieren wir noch

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{x \in P : x \leq 10\}.$$

<sup>2</sup>Wir verwenden diesen Begriff ebenfalls umgangssprachlich-naiv; die notwendige Präzisierung erfolgt im Rahmen der Logik.

### 0.3 Vereinigung und Durchschnitt

Sind  $A, B$  Mengen, so nennen wir

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

die *Vereinigung* von  $A$  mit  $B$ . Die Bedeutung von „oder“ ( $\vee$  steht für lat. „vel“) ist hier „entweder oder, oder beides“ (also das *nicht ausschließende Oder*). Ferner definiert man den *Durchschnitt*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

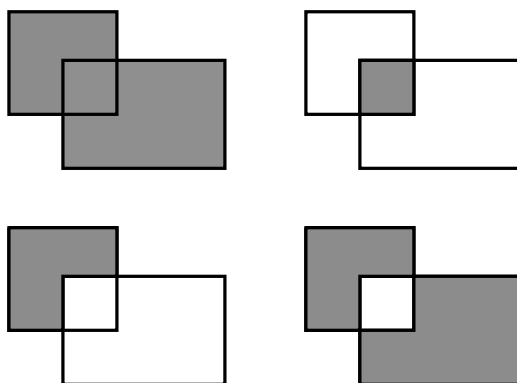
Durch die Existenz der *leeren Menge* (siehe weiter unten) ist sichergestellt, daß der Durchschnitt zweier Mengen *stets* eine Menge ist. Schließlich definiert man noch die *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

und die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Auch diese Mengen können leer sein. Man veranschaulicht sich die jeweiligen Situationen an sogenannten *VENN-Diagrammen*.



Figur 0.1

### 0.4 Formeln der Mengenalgebra

Wir listen einige Formeln der sogenannten *Mengenalgebra* auf.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A = A \cap (A \cup B), \quad A = A \cup (A \cap B)$$

$$A \subset B \iff A = A \cap B \iff B = A \cup B.$$

Man bezeichnet die Aussagen der ersten Zeile als Regeln der *Kommutativität* und die der zweiten und dritten als Regeln der *Assoziativität* bzw. *Distributivität*.

Tatsächlich ist hier bei den meisten Regeln nichts zu beweisen; die Formeln stellen nur mengentheoretische Übersetzungen unserer Gesetze der Aristotelischen Logik dar. So lautet die rechte Aussage in der

ersten Zeile, wenn wir die Mengen  $A, B, C$  durch entsprechende Aussagenformen ersetzen, nichts anderes als: für alle Elemente  $x$  gilt  $A(x) \wedge (B(x) \vee C(x))$  genau dann, wenn  $(A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x))$  oder, mit dem Allquantor geschrieben<sup>3</sup>:

$$\forall x : A(x) \wedge (B(x) \vee C(x)) \iff (A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x)) .$$

## 0.5 Die leere Menge

Um die Existenz der leeren Menge einzusehen, beweisen wir einen ersten Satz.

**Satz 0.1** Für die Menge  $L$  sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- i)  $L$  ist in jeder Menge  $M$  enthalten;
- ii) für jede Menge  $M$  gilt  $M \cap L = L$  ;
- iii)  $L$  enthält kein Element  $x$  ;
- iv) für jede Menge  $M$  gilt  $M \cup L = M$  .

*Beweis.* Wir beweisen diesen Satz vermittels eines „Ringschlusses“ oder „Rundlaufs“  $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) \implies i)$ .

$i) \implies ii)$   $L \subset M \cap L \subset L$  .

$ii) \implies iii)$  Angenommen, es existiere ein  $x \in L$ . Setze  $M := L \setminus \{x\}$ . Dann wäre

$$L = (L \setminus \{x\}) \cap L = L \setminus \{x\} ,$$

also  $x \notin L$ . Widerspruch!

$iii) \implies iv)$  Aus  $x \in M \cup L$  folgt  $x \in M$  oder  $x \in L$ . Da das letztere nicht sein kann, ist  $M \cup L \subset M$ . Umgekehrt folgt aus  $x \in M$  auch  $x \in M \cup L$ , also  $M \subset M \cup L$  und somit  $M \cup L = M$ .

$iv) \implies i)$   $L \subset M \cup L = M$  . □

**Folgerung 0.2** Die Menge  $L$  ist eindeutig bestimmt. Es gilt  $L = M \setminus M$  für alle Mengen  $M$  .

*Beweis.* Es sei  $L'$  eine weitere solche Menge. Nach iv) ist dann  $L' = L' \cup L = L \cup L' = L$ . Offensichtlich erfüllt  $M \setminus M$  die Bedingung iii). □

*Definition.*  $L$  heißt die leere Menge; sie wird stets mit  $\emptyset$  bezeichnet. Gilt für zwei Mengen  $M$  und  $N$ , daß  $M \cap N = \emptyset$ , so nennt man  $M$  und  $N$  auch *disjunkt*.

*Bemerkung.* Im Schritt  $ii) \implies iii)$  des Beweises von Satz 0.1 haben wir das *Beweisverfahren durch Widerspruch* verwendet. Mehr dazu findet man in der Bemerkung im Anschluß an die Folgerung 1.2.

Ist die Aussage  $A(x)$  für kein  $x \in M$  erfüllt, so gilt offensichtlich

$$\{x \in M : A(x)\} = \emptyset .$$

Es ist z.B. mit der Menge  $P \subset \mathbb{N}$  der *Primzahlen*:

$$\{x \in P : x > 2, 2 \text{ teilt } x\} = \emptyset .$$

Für Teilmengen einer festen Menge  $E$  heißt  $E \setminus A$  auch das *Komplement* von  $A$  (bezüglich  $E$ ). Es gelten z. B. die folgenden Regeln (auch DE MORGANSche Regeln genannt):

$$E = A \cup (E \setminus A) , A \cap (E \setminus A) = \emptyset$$

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B) , E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) .$$

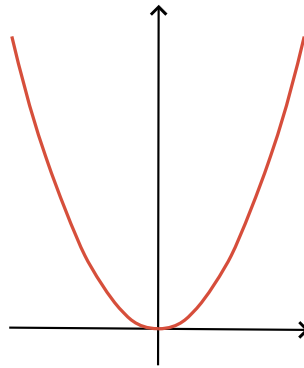
<sup>3</sup>Zu den Regeln unserer Logik gehören auch die folgenden, die wir ständig benutzen, ohne sie jedesmal zu erwähnen: Mit zwei Aussagen  $A, B$  ist die Aussage  $A \wedge B$  genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  wahr sind; die Aussage  $A \vee B$  ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. Siehe hierzu auch den kurzen Anhang zu Kapitel 1.

## 0.6 Der Abbildungsbegriff

Wir benötigen endlich, gerade in der Analysis, den abstrakten Begriff einer *Abbildung*. Eher umgangssprachlich bezeichnet man als *Abbildung* von  $X$  nach  $Y$ , in Zeichen  $f : X \rightarrow Y$ , eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in X$  auf eindeutige Weise ein Element  $y \in Y$  zuordnet, das man auch mit  $y = f(x)$  bezeichnet. Man schreibt dann

$$f : \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

oder einfach  $f : x \mapsto f(x)$  oder ähnliches. Als Beispiel betrachten wir die durch  $x \mapsto x^2$  definierte Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die man sich vermittels ihres *Graphen* in kartesischen Koordinaten wie folgt veranschaulicht:



Figur 0.2

In dieser Veranschaulichung der Abbildung durch einen Graphen steckt übrigens die Möglichkeit, die etwas nebulöse Umschreibung einer Abbildung als „Vorschrift“ mengentheoretisch zu präzisieren. (Siehe dazu den Anhang zu diesem Kapitel). Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $A \subset X$  eine nichtleere Teilmenge, so wird durch  $A \ni a \mapsto f(a)$  eine neue Abbildung  $A \rightarrow Y$  erklärt, die die *Einschränkung* von  $f$  auf  $A$  genannt wird. Man bezeichnet sie mit  $f|_A$  oder  $f|_A$ .

Für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt die Teilmenge

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subset Y$$

das *Bild* von  $A$  unter  $f$ . Im Falle  $A = X$  sprechen wir auch von der *Bildmenge*  $f(X)$  der Abbildung  $f$ . Man beweist leicht die folgenden Regeln:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Man macht sich an einfachen Beispielen klar, daß im zweiten Fall i. A. keine Gleichheit besteht. Ist umgekehrt  $B \subset Y$ , so heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$$

das *Urbild* von  $B$  unter der Abbildung  $f$ . Hier gelten die Regeln

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

*Bemerkung.* Führen wir die *Potenzmenge*  $\mathcal{P}(M)$  einer Menge  $M$  als *die Menge aller ihrer Teilmengen*

$$\mathcal{P}(M) := \{A : A \subset M\}$$



ein, so induziert eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nach dem obigen also auch auf kanonische Weise durch die Zuordnung  $X \supset A \mapsto f(A) \subset Y$  bzw.  $Y \supset B \mapsto f^{-1}(B) \subset X$  Abbildungen

$$\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X),$$

die wir entsprechend mit  $f$  bzw.  $f^{-1}$  bezeichnen.

## 0.7 Surjektive, injektive und bijektive Abbildungen

Offensichtlich ist per definitionem stets  $f^{-1}(Y) = X$ . Dagegen braucht das Bild  $f(X)$  einer Abbildung  $f$  nicht mit  $Y$  übereinzustimmen. Im Falle  $f(x) = x^2$  ist z. B.  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \subsetneq \mathbb{R}$ . Ist jedoch  $f(X) = Y$ , d. h. gibt es zu jedem  $y \in Y$  (mindestens) ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ , so heißt die Abbildung  $f$  *surjektiv*. Sie heißt *injektiv*, falls aus  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  oder, äquivalent, aus  $x_1 \neq x_2$  stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$  folgt.

Eine zugleich surjektive und injektive Abbildung heißt auch *bijektiv*. In diesem Fall gibt es zu jedem  $y \in Y$  *genau* ein Element  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ , so daß die Zuordnung

$$y \mapsto x$$

eine Abbildung  $Y \rightarrow X$  definiert, die man als *Inverse* zu  $f$  und in Zeichen mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

*Bemerkung.* Ist  $f$  bijektiv und  $B \subset Y$  eine Teilmenge, so hat  $f^{-1}(B)$  a priori zwei Bedeutungen, nämlich als Urbild von  $B$  unter  $f$  und als Bild von  $B$  unter  $f^{-1}$ . Beide Teilmengen von  $X$  stimmen aber, wie man leicht sieht, überein!

*Warnung.* Ist  $f$  nicht notwendig bijektiv, so schreibt man manchmal für festes  $y \in Y$  lax  $f^{-1}(y)$  anstelle von  $f^{-1}(\{y\})$ , meint dann also eine *Menge*, die auch leer sein kann. Ist z. B.  $y_0 \in Y$  und  $f : X \rightarrow Y$  die *konstante* Abbildung  $f(x) := y_0$ , so ist  $f^{-1}(y_0) = X$  und  $f^{-1}(y) = \emptyset$  für alle  $y \in Y$ ,  $y \neq y_0$ . Man nennt in diesem Zusammenhang die Menge  $f^{-1}(y)$  auch die *Faser* von  $f$  über  $y$ .

Die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  hat die *charakteristische* Eigenschaft

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y,$$

wobei die *identische Abbildung*  $\text{id}_X$  durch  $\text{id}_X(x) = x$ ,  $x \in X$  und für  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  die *Komposition* oder *Hintereinanderschaltung*  $g \circ f : X \rightarrow Z$  („ $g$  nach  $f$ “ oder „ $f$  gefolgt von  $g$ “) durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

definiert ist.

Mit  $f$  ist auch  $f^{-1}$  bijektiv. Man sieht leicht, daß die Menge der *Permutationen*

$$\text{Perm } X := \{f : X \rightarrow X, f \text{ bijektiv}\}$$

die Eigenschaft besitzt, daß mit  $f, g \in \text{Perm } X$  auch die Komposition  $g \circ f$  in  $\text{Perm } X$  liegt. Dies konstituiert das erste Beispiel einer sogenannten *Gruppe* (siehe Kapitel 4). Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Perm } X \times \text{Perm } X \rightarrow \text{Perm } X \\ (f, g) \mapsto g \circ f \end{array} \right.$$

(zum Gebrauch des Symbols „ $\times$ “ siehe den Anhang zu dem vorliegenden Kapitel) erfüllt die folgenden Gesetze:

- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  (Assoziativgesetz)
- es gibt ein *neutrales Element*, nämlich die *Identität*  $\text{id}_X \in \text{Perm } X$ :

$$\text{id}_X \circ f = f \circ \text{id}_X \quad \text{für alle } f \in \text{Perm } X,$$

c) zu jedem Element  $f \in \text{Perm } X$  gibt es ein *Inverses*, nämlich  $f^{-1}$ :

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{id}_X .$$

Diese Gruppe ist i. a. *nicht kommutativ*; wir werden dies in Kapitel 4 an Hand des Spezialfalles von *endlichen* Mengen (mit mindestens 3 Elementen) sehen.

## 0.8 Links - und Rechtsinverse

Wir wollen die obigen Untersuchungen über *bijektive* Abbildungen noch etwas verallgemeinern. Wir nennen eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  eine *Rechtsinverse* zu  $f : X \rightarrow Y$ , wenn  $f \circ g = \text{id}_Y$ . In diesem Fall heißt  $f$  auch eine *Linksinverse* zu  $g$ . Die Existenz solcher „Halbinversen“ ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Es gilt nämlich:

**Satz 0.3** *Rechtsinverse sind stets injektiv, Linksinverse stets surjektiv.*

*Beweis.* Es sei  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Ist  $g(y_1) = g(y_2)$ , so ist notwendig  $y_1 = f \circ g(y_1) = f \circ g(y_2) = y_2$ ,  $g$  also injektiv. Zudem ist zu vorgegebenem  $y \in Y$  das Element  $x := g(y) \in X$  ein Urbild von  $y$  unter  $f$ :  $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = y$ .  $\square$

Die Bijektivität einer Abbildung kann man hiermit wie folgt ausdrücken.

**Folgerung 0.4** *Eine Abbildung  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn sie eine Rechtsinverse  $g_r$  und eine Linksinverse  $g_l$  besitzt. Es ist dann notwendig  $f^{-1} = g_r = g_l$ .*

*Beweis.* Es gelte  $f \circ g_r = \text{id}_Y$  und  $g_l \circ f = \text{id}_X$ . Dann ist  $f$  sowohl surjektiv als auch injektiv, also bijektiv, und durch Vorschalten bzw. Hinterschalten von  $f^{-1}$  ergibt sich sofort  $g_r = f^{-1} = g_l$ .  $\square$

Es sei noch angemerkt, daß es umgekehrt zu jeder *injektiven* Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  tatsächlich auch (mindestens) eine *Linksinverse*  $g$  gibt.

**Satz 0.5** *Eine Abbildung  $f$  ist genau dann injektiv, wenn sie eine Linksinverse  $g$  besitzt.*

*Beweis.*  $f$  induziert eine bijektive Abbildung  $F : X \rightarrow f(X) \subset Y$ . Man definiere nun  $g : Y \rightarrow X$  auf  $f(X)$  durch die Umkehrabbildung von  $F$  und auf  $Y \setminus f(X)$  beliebig (zum Beispiel sende man alle  $y \in Y \setminus f(X)$  auf ein fest gewähltes Element von  $X$ ).  $\square$

## 0.9 Das Auswahlaxiom

Um zu beweisen, daß umgekehrt jede *surjektive* Abbildung eine *Rechtsinverse* besitzt, benutzt man häufig ein weiteres Axiom der Mengenlehre, nämlich das sogenannte *Auswahlaxiom*, das durchaus überraschende, um nicht zu sagen *paradoxe* Konsequenzen hat. Wir können auf diese Problematik hier nur oberflächlich eingehen. Zunächst formulieren wir das Axiom als Satz, um später gegebenenfalls darauf zurückgreifen zu können. Dazu müssen wir zunächst die Formung der Vereinigung von *zwei* Mengen auf evtl. *beliebig viele* Mengen verallgemeinern. Es sei  $I$  eine beliebige Menge, und jedem  $\iota \in I$  sei eine nichtleere Menge  $M_\iota$  zugeordnet. Wir nennen dann das System der  $(M_\iota)_{\iota \in I}$  eine *durch die Indexmenge  $I$  indizierte Familie von Mengen*. Wir sprechen auch von einem *System von Mengen*. Genauer handelt es sich hierbei um eine *Abbildung* von der Menge  $I$  in die Klasse  $\mathfrak{M}$  aller Mengen (siehe weiter unten). Unter diesen Gegebenheiten definieren wir die *Vereinigung* der Mengen  $M_\iota$  durch

$$\bigcup_{\iota \in I} M_\iota := \{ x : \exists \iota \in I, \text{ so daß } x \in M_\iota \}$$

und den *Durchschnitt* durch

$$\bigcap_{\iota \in I} M_\iota := \{ x : \text{für alle } \iota \in I \text{ ist } x \in M_\iota \} .$$

Hierbei hat man für die *leere* Indexmenge  $I = \emptyset$  noch etwas Sorgfalt walten zu lassen. Für die *Vereinigung* setzt man in diesem Fall sinnvollerweise immer

$$\bigcup_{\iota \in \emptyset} M_\iota := \emptyset .$$

Dagegen macht der *Durchschnitt* in diesem Fall nur dann einen Sinn, wenn alle  $M_\iota$  Teilmengen einer *festen* Menge  $M$  sind. In diesem Fall setzt man

$$\bigcap_{\iota \in \emptyset} M_\iota := M .$$

Wir können nun das *Auswahlaxiom* formulieren.

**Satz 0.6 (Auswahlaxiom)** *Es sei  $(M_\iota)_{\iota \in I}$  eine durch die nichtleere Indexmenge  $I$  indizierte Familie von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Abbildung*

$$\varphi : I \longrightarrow \bigcup_{\iota \in I} M_\iota$$

mit  $\varphi(\iota) \in M_\iota$ .

Zum *Beweis* der obigen Aussage für surjektive  $f : X \longrightarrow Y$  braucht man nur  $I = Y$  und

$$M_y = f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

zu wählen. Nach Voraussetzung ist  $M_y \neq \emptyset$  für alle  $y \in Y$ . Sei  $g$  die Auswahlfunktion  $\varphi$  in dieser speziellen Situation. Dann ist  $g$  eine Abbildung

$$g : Y \longrightarrow \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = X$$

mit  $g(y) \in f^{-1}(y)$ , d. h.  $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y = \text{id}_Y(y)$ . □

medskip

*Bemerkungen.* 1. In der Tat benötigt man bei diesem Argument das Auswahlaxiom überhaupt nicht, wie man z. B. bei FRIEDRICHSDORF - PRESTEL [23] nachlesen kann.

2. Das *Auswahlaxiom* ist äquivalent zu der Aussage, daß für eine *beliebige* nichtleere Indexmenge  $I$  das *kartesische Produkt*  $M$  von nichtleeren Teilmengen  $M_\iota$ ,  $\iota \in I$ , also

$$M = \prod_{\iota \in I} M_\iota ,$$

selbst nicht leer ist (siehe hierzu und dem folgenden auch den Anhang). Wenn  $I$  eine *endliche* Menge ist, so kann man diese Aussage leicht mit den Axiomen der *naiven Mengenlehre* (siehe HALMOS [24]) beweisen. B. LEVI (1902) und E. ZERMELO (1904) bemerkten als erste, daß man diese Aussage für *unendliche* Indexmengen  $I$  jedoch *nicht* aus den Axiomen der naiven Mengenlehre schließen kann. Genauer ist der heutige Stand der folgende (zitiert nach [23]): GÖDEL hat 1939 gezeigt, daß aus der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems NBG (VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL) *ohne* Auswahlaxiom auch die Widerspruchsfreiheit von NBG *mit* Auswahlaxiom und *allgemeiner Kontinuumshypothese* (siehe hierzu den Anhang von Kapitel 3) folgt. Andererseits hat P. COHEN 1963 gezeigt, daß unter der Annahme, daß NBG widerspruchsfrei ist, sich weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumshypothese aus den übrigen Axiomen beweisen lassen. Zu weiteren nichttrivialen Folgerungen aus dem Auswahlaxiom siehe den Anhang zu Kapitel 2.

## 0.10 Die Russellsche Antinomie

Wir wollen zum Schluß noch kurz auf die sogenannte Russellsche *Antinomie* eingehen. RUSSELL hat 1901 durch ein Beispiel gezeigt, daß der hemmungslose Umgang mit Mengen zu Widersprüchen führt, und die Mathematik dadurch in eine Grundlagenkrise gestürzt. Im Grunde geht diese Idee aber schon auf CANTOR 1899 zurück, dessen Beweisgang wir im Anhang zu Kapitel 3 skizzieren.

Dazu betrachten wir (versuchshalber) die „Menge“  $\mathfrak{M}$  aller Mengen und darin die Teilmenge  $\mathfrak{M}_0$  aller Mengen mit  $M \notin M$ . Nach Definition ist also

$$M \in \mathfrak{M}_0 \iff M \notin M .$$

Nun ist  $\mathfrak{M}_0$  selbst eine Menge und damit

$$\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{M}_0 \iff \mathfrak{M}_0 \notin \mathfrak{M}_0 .$$

Russell hat zusammen mit WHITEHEAD in den 3-bändigen „Principia Mathematica“ (1910 - 1913 erschienen) eine *Typen-* oder *Stufentheorie* der Mengen entwickelt, in der dieser Widerspruch nicht auftritt. Heutzutage benutzt man einen stufenlosen Aufbau der Mengentheorie durch Einführung des Begriffs der *Klasse*. Mengen sind spezielle („kleine“) Klassen. Es wird axiomatisch festgelegt, wie man aus Klassen neue bilden darf, und wann dabei aus Mengen wieder Mengen werden. In diesem Aufbau sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}_0$  Klassen, aber keine Mengen. Man spricht daher von der *Klasse aller Mengen*. Man beachte aber, daß die *Potenzmenge*  $\mathcal{P}(M)$  einer Menge  $M$  nach diesen Axiomen tatsächlich eine Menge ist.

Bis heute ist in diesem Aufbau kein Widerspruch entdeckt worden. Wir haben aber keine Gewißheit, daß dieser Aufbau widerspruchsfrei ist.

## Anhang: Kartesische Produkte und Abbildungen

Zur Definition einer Abbildung vermöge ihres Graphen benötigen wir das *kartesische Produkt* von zwei Mengen  $A, B$ . Wir können dieses (anschaulich) definieren als Menge  $A \times B$  der *geordneten Paare*  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ , wobei  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2$ . Dies ist selbstverständlich keine stichhaltige Definition im Rahmen der Mengentheorie; sie läßt sich jedoch leicht geben.

*Definition* (Kuratowski).  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ,  $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .

Es gilt dann  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  genau dann, wenn

- i)  $\{a_1\} = \{a_2\}$ ,  $\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$ , also wenn  $a_1 = a_2$  und  $b_1 = b_2$

oder, was nur im Fall  $A = B$  möglich ist, wenn

- ii)  $\{a_1\} = \{a_2, b_2\}$ ,  $\{a_1, b_1\} = \{b_2\}$ , d. h. wenn  $a_1 = a_2 = b_2 = b_1$ ,

also, wie gewünscht, genau dann, wenn  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ .

Der Begriff der Abbildung läßt sich nun leicht formalisieren, wenn wir daran denken, daß wir Funktionen  $f : A \rightarrow B$  oft ihren Graphen  $\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x)\}$  zuordnen und  $f$  aus  $\Gamma_f$  zurückgewinnen können.

*Definition*. Eine Abbildung von  $A$  nach  $B$  ist (repräsentiert durch) eine Teilmenge

$$\Gamma \subset A \times B,$$

so daß für alle  $a \in A$  die Menge  $\Gamma_a := \{b \in B : (a, b) \in \Gamma\}$  genau ein Element enthält. Oder anders ausgedrückt:

- a) Zu jedem  $a \in A$  gibt es ein  $b \in B$  mit  $(a, b) \in \Gamma$ ;

- b) aus  $(a, b) \in \Gamma$  und  $(a, b') \in \Gamma$  folgt  $b = b'$ .

Für  $(a, b) \in \Gamma$  schreibt man  $b = f_\Gamma(a)$  oder  $a \mapsto f_\Gamma(a)$ . Damit haben wir mit  $\Gamma$  eine Abbildung  $f = f_\Gamma : A \rightarrow B$  im anschaulichen Sinne gewonnen.

*Beispiel*. Sind  $A$  und  $B$  nichtleer, so wähle man ein  $b_0 \in B$  und setze

$$\Gamma := \{(a, b) \in A \times B : b = b_0\}.$$

$\Gamma$  definiert die *konstante* Abbildung  $f(a) = b_0$ ,  $a \in A$ .

*Definition*. a) Zwei Abbildungen  $\Gamma_1, \Gamma_2$  heißen *gleich*, wenn  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Dies ist gleichwertig mit

$$f_1(a) = f_2(a) \text{ für alle } a \in A, \text{ wobei } f_j = f_{\Gamma_j}, j = 1, 2.$$

b) Eine Abbildung  $\Gamma$  heißt *surjektiv*, wenn für alle  $b \in B$  die Menge

$$\Gamma^b := \{a \in A : (a, b) \in \Gamma\} \neq \emptyset$$

ist. Sie heißt *injektiv*, wenn diese Mengen jeweils höchstens ein Element enthalten, und *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. In dem letzten Fall ist

$$\Gamma^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \Gamma\}$$

ebenfalls eine Abbildung. Man schreibt für diese sogenannte *Umkehrabbildung*

$$(f_\Gamma)^{-1} := f_{\Gamma^{-1}}.$$

*Beispiel*. Für  $A \subset B$  wird durch  $\Gamma := \{(a, a) : a \in A\}$  eine Abbildung von  $A$  nach  $B$  definiert, die offensichtlich injektiv ist. Wir bezeichnen diese stets mit  $\text{id}_{A \subset B}$  oder mit  $A \hookrightarrow B$ . Für  $A = B$

schreiben wir auch einfach  $\text{id}_A := \text{id}_{A \subset A}$  oder noch vereinfachender  $\text{id}$ , wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

*Bemerkung.* Aus der Definition folgt, daß die Menge  $\text{Abb}(A, B)$  aller Abbildungen von  $A$  nach  $B$  nur das Element  $\text{id}_{A \subset B}$  enthält, falls  $A = \emptyset$  ist.

*Definition.* Es seien  $A, B$  nichtleere Mengen. Dann bezeichnet  $B^A$  oder  $\text{Abb}(A, B)$  die (nichtleere) Menge aller Abbildungen  $\alpha : A \rightarrow B$ . Im Falle  $A = [1, n]$  schreibt man auch  $B^n$  anstelle von  $B^{[1, n]}$ . Die Elemente  $\alpha \in B^n = \text{Abb}([1, n], B)$  sind eindeutig festgelegt durch die Werte  $\alpha(1), \dots, \alpha(n) \in B$ . Man schreibt dann  $b_j := \alpha(j)$  und identifiziert  $\alpha$  mit dem geordneten  $n$ -Tupel  $(b_1, \dots, b_n)$ .  $B^n$  ist also eine Verallgemeinerung des kartesischen Produkts  $B \times B$  und wird als  $n$ -faches *kartesisches Produkt* von  $B$  mit sich selbst bezeichnet. Man hat für alle  $n \geq 2$  eine *kanonische*, d. h. „offensichtlich eindeutig zu definierende“ und damit „gottgegebene“ Bijektion  $B^n \rightarrow B^{n-1} \times B$ .

Entsprechend identifizieren wir eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow B$  mit der *unendlichen Folge*

$$b := (b_0, b_1, b_2, \dots) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n = \alpha(n) \in B.$$

Man beachte, daß die Menge  $\{b_0, b_1, \dots\} = \alpha(\mathbb{N}) \subset B$  der Folgenglieder etwas ganz anderes bedeutet; deswegen schreiben wir bei *Folgen* runde statt geschweifte Klammern.

Wir können nun für *beliebige Systeme*  $(M_\iota)_{\iota \in I}$  von nichtleeren Mengen das *kartesische Produkt* erklären. Wir setzen  $M$  für die Vereinigung der  $M_\iota$  und definieren dieses Produkt durch

$$\prod_{\iota \in I} M_\iota := \{ \varphi \in \text{Abb}(I, M) : \varphi(\iota) \in M_\iota \}.$$

Man nennt es auch das *Kreuz-Produkt* oder das *direkte Produkt* der Mengen  $M_\iota$ . Es ist per definitionem klar, daß im Falle  $I = \{1, 2\}$  das kartesische Produkt  $\prod_{\iota \in I} M_\iota$  mit  $M_1 \times M_2$  übereinstimmt. Man schreibt deshalb auch im Falle  $I = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$

$$\prod_{j=1}^n M_\iota \quad \text{anstelle von} \quad \prod_{\iota \in I} M_\iota.$$

*Bemerkung.* Die Existenz einer *Auswahlfunktion* im Sinne des Auswahlaxioms für ein nichtleeres System von nichtleeren Teilmengen  $M_\iota$  ist damit, wie weiter oben schon angekündigt, gleichwertig mit der Aussage, daß die Menge  $\prod_{\iota \in I} M_\iota$  nicht leer ist.



# 1 Die Peano - Axiome der natürlichen Zahlen

Zu den grundlegenden Errungenschaften der menschlichen Entwicklungsgeschichte gehört unsere Fähigkeit, (endlich viele) Dinge abzuzählen. *Ein* Ding erhält die Nummer 1, ein *weiteres* die Nummer 2, ein weiteres die Nummer 3, etc. Wir haben 1 Nase, 2 Augen, 2 Hände, 5 Finger an jeder Hand, 10 Finger und 10 Zehen insgesamt, etc. Schon in diesem *etc.* liegen aber viele Fragen verborgen.

Oder denken wir an einen Physiker. Für diesen ist es naheliegend, von einem *Ursprung* aus zu *messen*. Einen solchen Ursprung bezeichnet man seit Erfindung der Null durch die Inder auch mit 0, wobei die Ähnlichkeit zu unserem großen Buchstaben O nicht zufällig ist, da das Symbol an „origo“ = lat. *Ursprung* erinnern soll (übrigens wurde uns die Null von den Arabern gebracht; „nullum“ heißt auf lateinisch *keiner, keines*). Durch Abtragung eines festen Maßstabes erhält man, von 0 ausgehend, die Längswerte 1, 2, 3, . . . .



Figur 1.1

## 1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen

Ausgangspunkt unserer *Reise durch die Welt der Mathematik* soll daher diese *Menge der natürlichen Zahlen* (als Kardinalzahlen) sein. Wir bezeichnen sie mit

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} .$$

Selbstverständlich sind wir alle von der *Existenz* einer solchen Menge überzeugt. Und dennoch führt ein wenig *Nachdenken* schon zur *Nachdenklichkeit*: Behaupten nicht einige kosmologische Theorien, daß unser Weltall *endlich* ist ? Und wenn dies so ist, und jedes *Elementarteilchen* ein *nichtverschwindendes, unteilbares* Volumen einnimmt, muß dann nicht die Anzahl *aller* Elementarteilchen endlich sein ? Wo ist dann also Platz für diese offensichtlich *unendliche* Menge ? Oder auch viel primitiver: Wie bezeichnet man denn die Zahl

$$10^{(10^{(10^{10})})} ?$$

(Nicht etwa auf englisch, französisch, italienisch, spanisch, hebräisch, japanisch, chinesisches, kisuaheli, sondern in unserer eigenen Muttersprache!).

Lassen Sie uns einen Text aus dem Lehrbuch „Mathematik für Physiker“ [165] zitieren:

„Die unbegreiflichen Möglichkeiten, die im Zahlensystem stecken, faszinierten vor allem die Inder. Sie stellten sich vor, daß der „Zahlenturm“ über das Menschliche hinausragt in den Raum der Götter, und sie ersannen weit über alle praktischen Bedürfnisse hinaus Zahlensysteme und Zahlwörter, um gleichnishaft eine Idee von der Unerschöpflichkeit der denkbaren Welt zu geben. BUDDHA soll dargelegt haben, daß die Zählung nach Potenzen von  $10^{17}$  sich noch durch eine andere übertreffen läßt, diese wiederum durch eine weitere und so fort. Ihm wird auch die Staubrechnung zugeschrieben, wonach 7 Atome auf ein sehr feines Staubkorn kommen, sieben sehr feine Staubkörner auf ein feines und so schließlich  $7^{17}$  Atome auf eine Meile. Ähnlich dazu gab ARCHIMEDES eine Zahl an, welche größer ist als die Zahl der Sandkörner eines Haufens, der das Weltall füllt.

Es ist schon kühn, diese potentielle Unendlichkeit in einer „fertigen“ Menge  $\mathbb{N}$  zu fassen. Niemand wird je alle natürlichen Zahlen sehen.“

Trotzdem wollen wir uns nicht davon abhalten lassen, an die Existenz einer solchen *unendlichen* Menge  $\mathbb{N}$  zu glauben (denn wie sonst sollten wir akzeptieren, daß es auch „beliebig kleine“ Zahlen gibt, was uns erst zur Konzeption der Analysis befähigt?).

Es war PEANO (1891), der (nach Vorarbeiten von DEDEKIND) unsere Vorstellung der natürlichen Zahlen im Sinne eines sukzessiven Fortschreitens von einem Ursprung aus in einem Axiomensystem kodifiziert hat. Wir modifizieren das sogenannte *Peanosche Axiomensystem* unseren Vorstellungen entsprechend, indem wir das *ursprüngliche, ausgezeichnete* Element mit 0 bezeichnen. (Zu einem anderen Axiomensystem siehe z. B. den Anhang zu Kapitel 2).



### Die Axiome von Peano

- i) 0 ist eine natürliche Zahl.
- ii) Jede natürliche Zahl besitzt einen eindeutig bestimmten (unmittelbaren) Nachfolger.
- iii) 0 ist kein Nachfolger.
- iv) Verschiedene Zahlen besitzen verschiedene Nachfolger.
- v) (Induktionsaxiom) Enthält eine Menge von natürlichen Zahlen die 0 und mit  $n$  auch deren Nachfolger, so enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Mathematisch etwas präziser bedeutet dies also: *Es existiert eine (nichtleere) Menge  $\mathbb{N}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

1. In  $\mathbb{N}$  gibt es ein ausgezeichnetes Element, das mit 0 (Null) bezeichnet wird.
2. Jedem Element  $n \in \mathbb{N}$  ist (auf eindeutige Weise) ein weiteres Element in  $\mathbb{N}$  zugeordnet, das man i. a. den „(unmittelbaren) Nachfolger“ von  $n$  nennt und mit  $n^\#$  bezeichnet.
3. 0 ist kein Nachfolger (hat also „keinen Vorgänger“).
4. Zwei verschiedene Elemente in  $\mathbb{N}$  (also zwei verschiedene natürliche Zahlen) können nicht denselben Nachfolger haben. In Symbolen:  $m^\# = n^\# \implies m = n$ .
5. (Induktionsprinzip) Ist  $N \subset \mathbb{N}$  eine Teilmenge mit:
  - a)  $0 \in N$ ,
  - b)  $n \in N \implies n^\# \in N$ ,

so ist  $N = \mathbb{N}$ .

Hierbei ist nach unserem Schulwissen der Nachfolger von  $n$  die Zahl  $n + 1$ . Wenn wir aber nur die Peano-Axiome verwenden wollen, dürfen wir dieses Wissen (noch) nicht heranziehen: eine Addition ist im Bereich der durch die Peano-Axiome gegebenen natürlichen Zahlen ja noch gar nicht erklärt. Im Gegenteil werden wir so vorzugehen haben, daß wir mit ihrer Hilfe die Addition erst *definieren* müssen, und zwar in der Weise, daß tatsächlich  $n^\# = n + 1$  gilt. Dann ist das fünfte Axiom jedoch nichts anderes als eine Formalisierung des bekannten Beweisschemas durch *vollständige Induktion*:

*Ist eine Aussage über natürliche Zahlen richtig für die Zahl 0 (Induktionsanfang) und unter Annahme der Richtigkeit für eine Zahl  $n$  auch richtig für  $n + 1$  (Induktionsschritt), so ist sie richtig für alle natürlichen Zahlen.*

## 1.2 Beispiele für das Induktionsprinzip

Z. B. kann man mit diesem Prinzip die bekannte Formel

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

beweisen. Denn sie ist offensichtlich richtig für  $n = 0$  und, unter der Annahme, daß sie für ein (beliebiges)  $n$  richtig ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

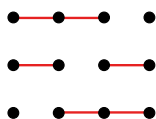
also die Richtigkeit für  $n + 1$  anstelle von  $n$ .

Selbstverständlich ist der vorstehende Beweis an dieser Stelle noch völlig inhaltsleer: Die linke Seite ist wegen der fehlenden Addition in  $\mathbb{N}$  noch nicht definiert, und die rechte liegt a priori sogar im Ring der *rationalen Zahlen*  $\mathbb{Q}$ , etc. Übrigens braucht man keine Induktion für diese Aussage, wie schon der 6-jährige Gauß erkannte. Er rechnete (für  $n = 100$ ) nach folgendem Schema, das man sofort auf alle *geraden*  $n = 2k$  übertragen kann:  $1 + 2 + \dots + n = 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) + \dots + 2k = (1 + 2k) + (2 + (2k - 1)) + \dots + (k + (k + 1)) = k(2k + 1) = \frac{n}{2}(n + 1)$ . Entsprechend kann man im *ungeraden* Fall  $n = 2k + 1$  verfahren. Will man die Fallunterscheidung vermeiden, kann man auch wie folgt argumentieren:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \dots + (n - 1) + n) &= (1 + 2 + \dots + (n - 1) + n) + (n + (n - 1) + \dots + 2 + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + (n - 1)) + \dots = n(n + 1). \end{aligned}$$

Nun sind beide Seiten natürliche Zahlen, von denen die linke durch 2 teilbar ist. Also ist auch die rechte Seite durch 2 teilbar (dies ist ohnehin klar: eine der beiden Zahlen  $n$  und  $n + 1$  ist gerade), so daß sich erneut die obige Summenformel ergibt.

Das vorstehende Beweisschema läßt sich wie folgt „geometrisch“ skizzieren:

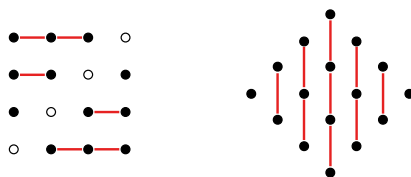


Figur 1.2

Nach einer leichten Umformung gewinnt man eine vielleicht noch schönere Interpretation. Ist die Formel nämlich für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt, so gilt auch

$$(1 + 2 + \dots + (n - 1) + n) + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) = \frac{1}{2} ((n + 1)n + n(n - 1)) = n^2,$$

was man sich wie folgt auf zwei verschiedene Weisen veranschaulichen kann:



Figur 1.3

Umgekehrt folgt aus der letzten Formel, angewandt auf  $n + 1$  anstelle von  $n$ :

$$(n + 1)^2 = (n + 1) + 2(1 + 2 + \dots + (n - 1) + n),$$

woraus sich durch Auflösung nach der in Rede stehenden Summe die alte Formel wieder ergibt.

*Bemerkung.* Das Anschreiben der Summe der ersten  $n$  von Null verschiedenen natürlichen Zahlen mit Hilfe von „Pünktchen“ wie oben ist weder übersichtlich noch elegant und letztlich nicht einmal wohldefiniert. Man umschift dies Problem durch (induktive!) Einführung des *Summenzeichens*

$$\sum_{j=m}^n a_j$$

und dem Nachweis seiner Eigenschaften (siehe Kapitel 4). Die obige Formel lautet dann

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Eine entsprechende Formel hat man auch für die Summe der ersten  $n$  von Null verschiedenen *Quadratzahlen*:

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

und für die Summe der *Kubikzahlen*:

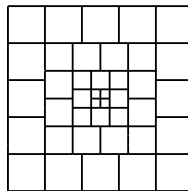
$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Der Leser wird bemerken, daß für die Summe der Kubikzahlen gerade das Quadrat der Summe der Zahlen selbst herauskommt. Dies merkwürdige Beziehung kann ebenfalls geometrisch gedeutet werden. Die folgende Zeichnung beruht offenbar auf der Tatsache, daß  $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$  etc. Ist die Grundlängeneinheit der inneren vier Quadrate gleich 1, so erhält man für die Seitenlänge bei  $n = 4$  die Relation

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 5 \cdot 4 = 4(4 + 1),$$

also eine erneute Bestätigung der Summenformel, und für den Flächeninhalt des Quadrates

$$4(1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2).$$



Figur 1.4

### 1.3 Mengentheoretische Formulierung der Axiome

Wir wollen die Peano-Axiome noch stärker *mengentheoretisch* umformulieren. Schreibt man mit  $n \in \mathbb{N}$  für den eindeutig bestimmten Nachfolger  $\nu(n) := n^\#$ , so definiert

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \nu(n) \end{cases}$$

eine *Abbildung* von  $\mathbb{N}$  in sich, und wir können die Peano-Axiome noch kürzer fassen:

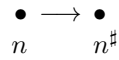
$\mathbb{N}$  ist eine Menge zusammen mit einem ausgezeichneten Element 0 und einer Abbildung  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so daß folgendes gilt:

- I)  $0 \in \mathbb{N}$ .
- II)  $0 \notin \nu(\mathbb{N})$ .
- III)  $n_1 \neq n_2 \implies \nu(n_1) \neq \nu(n_2)$ , d. h.  $\nu$  ist injektiv.

IV) Ist  $N \subset \mathbb{N}$  eine Teilmenge, die den folgenden Bedingungen genügt:

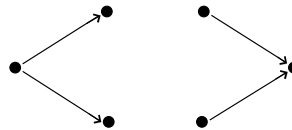
- a) (Induktionsanfang)  $0 \in N$ ,
  - b) (Induktionsschritt)  $n \in N \implies \nu(n) \in N$ ,
- so ist  $N = \mathbb{N}$ .

Symbolisieren wir die natürlichen Zahlen durch Punkte in der Ebene, und deuten wir durch einen Pfeil



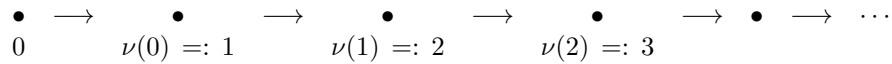
Figur 1.5

an, daß  $n^\# = \nu(n)$  ist, so sind nach den ersten Axiomen die folgenden Bilder verboten (denn im ersten Fall wäre  $\nu$  keine Abbildung, und im zweiten wäre  $\nu$  nicht injektiv):



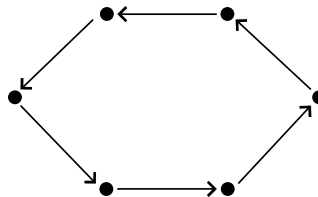
Figur 1.6

Wir haben „natürlich“ die folgende Vorstellung von den natürlichen Zahlen:



Figur 1.6

Aber ohne das Induktionsaxiom wären wesentlich „größere“ Konfigurationen denkbar, z. B. *zusätzlich* zu dem vorigen Schema noch Bilder wie



Figur 1.7

oder



Figur 1.8

Das *alles entscheidende* Induktionsaxiom verbietet aber nun gerade eine solche zusätzliche Komponente, denn die ursprüngliche Komponente allein erfüllt schon alle Axiome von Peano und muß daher gleich  $\mathbb{N}$  sein.

*Beispiel.* Die Mengen

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \nu(x) := x + 1,$$

und

$$\frac{1}{2}\mathbb{N} = \{q \in \mathbb{Q} : 2q \in \mathbb{N}\}, \quad \nu(q) := q + 1$$

erfüllen alle Axiome der natürlichen Zahlen außer der „Minimalitätseigenschaft“ IV.

Auf dieser axiomatischen Vorstellung aufbauend muß man sukzessive die Nachfolger von 0 *benennen* können. Es ist schlicht unsere kulturelle Tradition,  $0^\# = 1$ ,  $1^\# = 2$  etc. zu setzen. Wir kommen speziell auf die *Dezimalschreibweise* später noch zu sprechen.

## 1.4 Beweis einiger naheliegender Aussagen über Nachfolger

Um zu testen, ob unsere Axiome gut genug sind, müssen wir anschaulich oder intuitiv „richtige“ Aussagen auch beweisen können. Wir beginnen mit dem folgenden „Sätzchen“.

**Satz 1.1**  $\nu(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^* := \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$ . *M. a. W.: jede natürliche Zahl  $n \neq 0$  besitzt mindestens einen Vorgänger, oder in Symbolen*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists m \in \mathbb{N} : n = \nu(m).$$

*Bemerkungen.* 1. Wegen der Injektivität von  $\nu$  ist im vorigen Satz die Zahl  $m$  mit  $\nu(m) = n$  durch  $n$  *eindeutig* bestimmt. (Man schreibt hierfür  $\forall n \neq 0 \exists_1$  (oder  $\exists!$ ) (es gibt genau ein)  $m$ , s. d.  $n = \nu(m)$ ). Also gibt es zu  $\mathbb{N}$  auch eine *Vorgänger-Abbildung*  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$\nu \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{N}^*} : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*, \quad \varphi \circ \nu = \text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

2. Aus  $\nu(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  folgt sofort  $0 \notin \nu(\mathbb{N})$ . Also kann man das Axiom II (unter Beibehaltung der anderen) ersetzen durch:

$$\text{II}') \quad \nu(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*.$$

Ebenso kann man II) und III) ersetzen durch die einzige Aussage

$$\text{II} + \text{III}) \quad \nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \text{ ist bijektiv.}$$

*Beweis* (Satz 1). Die Aussage ist äquivalent zu  $N := \nu(\mathbb{N}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$ , da  $0 \notin \nu(\mathbb{N})$ . Nun ist nach Definition  $0 \in N$ , und ist  $n \in N$ , so ist  $\nu(n) \in \nu(\mathbb{N}) \subset N$ . Also folgt nach dem Induktionsaxiom die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 1.2** *Keine natürliche Zahl ist ihr eigener Nachfolger.*

*Beweis.* 0 ist überhaupt kein Nachfolger, also  $0 \in N := \{n \in \mathbb{N} : n \neq \nu(n)\}$ . Sei  $n \in N$ . Nehmen wir nun an, daß für ein  $n \in N$  der Nachfolger  $\nu(n) \notin N$  wäre. Aus  $\nu(n) = \nu(\nu(n))$  und der Injektivität von  $\nu$  ergäbe sich dann aber  $n = \nu(n)$  und also auch  $n \notin N$ . Dieser Widerspruch löst sich nur auf, wenn unsere Annahme nicht richtig war, d. h. wenn stets aus  $n \in N$  auch  $\nu(n) \in N$  folgt.  $\square$

## 1.5 Bemerkungen über gängige Schlußweisen

*Bemerkung.* Es dürfte schon an dieser Stelle angebracht sein, einige Worte über sogenannte „Schlußweisen“ zu verlieren. Sie beruhen sämtlich auf dem Prinzip des *tertium non datur*, also auf der Prämisse, daß jede Aussage entweder richtig (wahr) oder falsch (unwahr) ist: Für jede Aussage  $A$  ist entweder  $A$  selbst oder ihre *Negation*  $\neg A$  wahr.

Trotz der Verwendung des Wortes *Widerspruch* in dem obigen Beweis handelt es sich dabei tatsächlich nicht um einen *Widerspruchsbeweis* im eigentlichen Sinne. In Wahrheit haben wir einen *Schluß* oder *Beweis durch Kontraposition* durchgeführt. Sind  $A, B$  Aussagen, so ist die Aussage  $A \Rightarrow B$  dann und nur dann falsch, wenn  $A$  richtig und  $B$  falsch ist, denn aus etwas Richtigem kann nichts Falsches folgen, aus etwas Falschem aber kann alles geschlossen werden. Sie ist damit genau dann falsch, wenn  $\neg B$  richtig und  $\neg A$  falsch ist, also die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  falsch ist. Somit hat die Aussage  $A \Rightarrow B$  den gleichen „Wahrheitswert“ wie die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$ , unabhängig von den Wahrheitswerten von  $A$  und  $B$ , was dazu führt, daß die beiden Aussagen

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{und} \quad (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

stets richtig sind. Hierfür schreibt man dann natürlich

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

und nennt die beiden Aussagen  $A \Rightarrow B$  und  $\neg B \Rightarrow \neg A$  äquivalent. Insbesondere kann man statt der Aussage  $A \Rightarrow B$  immer auch die „Kontraposition“  $\neg B \Rightarrow \neg A$  beweisen. In dem obigen Beweis ist  $A$  die Aussage  $n \in N$ , und  $B$  ist  $\nu(n) \in N$ , und was wir tatsächlich gezeigt haben, ist  $\nu(n) \notin N \Rightarrow n \notin N$ . Ebenso einfach begründet man die Äquivalenzen

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B) \iff \neg(A \wedge \neg B)$$

und die Tatsache, daß die folgende Aussage stets richtig ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \implies (A \Rightarrow C).$$

(„Transitivität des Schließens“).

Ein echter *Beweis durch Widerspruch* liegt dann vor, wenn wir, um eine Aussage  $A$  zu beweisen, von der Negation  $\neg A$  ausgehend auf eine Aussage  $\neg C$  schließen können, von der wir schon aus anderen Gründen wissen oder voraussetzen, daß sie falsch ist, d. h. daß  $C$  richtig ist. Wir zeigen also die Gültigkeit von  $\neg A \Rightarrow \neg C$ , was nach den obigen Ausführungen aber zu  $C \Rightarrow A$  äquivalent ist. Da  $C$  als wahr bekannt ist, muß auch  $A$  wahr sein. Ein Beispiel eines solchen Widerspruchsbeweises findet man in beiden Teilen des Beweises von Satz 3 und im letzten Abschnitt des Beweises zu Satz 5.

Auf diesem Verfahren beruhen noch kompliziertere *Widerspruchsbeweise*. Will man z. B. zeigen, daß aus einer Aussage  $A$  die Aussage  $B$  folgt, so genügt es, aus  $A$  und der Negation  $\neg B$  von  $B$  zu schließen, daß (wie oben) eine Aussage  $\neg C$  richtig ist, obwohl uns das Gegenteil bekannt ist. Denn nach den oben begründeten Äquivalenzen ist der als richtig erkannte Schluß  $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C$  äquivalent zu  $C \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ , und ferner ist, wie oben schon bemerkt,  $\neg(A \wedge \neg B) \iff (\neg A \vee B)$ . Da wir wissen, daß die Aussage  $C$  wahr ist, ist auch die Aussage  $\neg A \vee B$ , also  $A \Rightarrow B$  wahr.

## 1.6 Äquivalente Formulierung des Induktionsaxioms

Das *Induktionsaxiom* kann in eine wesentlich andere Fassung gebracht werden. In unserer Vorstellung der natürlichen Zahlen besitzt jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  ein *kleinstes* Element, was wir nach Einführung einer geeigneten *Ordnung* auf  $\mathbb{N}$  auch tatsächlich beweisen werden (siehe Kapitel 2). Diese Eigenschaft können wir in einer abgeschwächten Form auch schon formulieren, ohne über Ordnungen zu reden:

IV') Für jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  gibt es ein Element  $m \in M$  mit  $m \notin \nu(M)$ .

**Satz 1.3** *Unter den Voraussetzungen I), II') und III) sind die Axiome IV) und IV') äquivalent.*

*Bemerkung* [20. 10. 2019]. In früheren Fassungen des Textes stand als Voraussetzung der Äquivalenz zwischen IV) und IV') versehentlich die Bedingung I), II) und III) anstelle von I) und II + III). Der Beweis benutzt die stärkeren Voraussetzungen, und die Aussage des Satzes ist unter den schwächeren Voraussetzungen tatsächlich falsch. Sie hierzu: Lars-Daniel Öhman: *Are induction and well-ordering equivalent?* The Mathematical Intelligencer, Volume 41, Number 3 (Fall 2019), pp. 33-40.

*Beweis.* Eine Äquivalenzaussage besteht immer aus zwei „Richtungen“. Zeigen wir also zuerst IV)  $\implies$  IV'), wozu wir das Prinzip der Kontraposition verwenden. Wenn IV') nicht richtig ist, gibt es eine nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  mit  $M \subset \nu(M)$ . Es genügt dann zu zeigen, daß  $N := \mathbb{N} \setminus M$  die Induktionsbedingungen erfüllt, denn da  $N$  nicht mit  $\mathbb{N}$  übereinstimmt, ist das Induktionsaxiom IV) verletzt. Tatsächlich ist  $0 \in N$ , da sonst  $0 \in M \subset \nu(M) \subset \nu(\mathbb{N})$  wäre im Widerspruch zu Axiom II). Für den Induktionsschritt  $n \in N \implies \nu(n) \in N$  wählen wir wieder das Prinzip der Kontraposition. Es sei also  $\nu(n) \notin N$ , also  $\nu(n) \in M \subset \nu(M)$ ; dann gibt es ein  $m \in M$  mit  $\nu(m) = \nu(n)$ , und wegen Axiom III) ist  $n = m \in M$ , d. h.  $n \notin N$ .

IV')  $\implies$  IV). Nach den oben begründeten Äquivalenzen von Aussagen genügt es zum Beispiel zu zeigen, daß nicht gleichzeitig IV') und die Negation von IV) richtig sein können. Nehmen wir dies dennoch an, so gibt es zunächst eine Teilmenge  $N \subset \mathbb{N}$ , die den Induktionsbedingungen genügt, aber nicht mit  $\mathbb{N}$  übereinstimmt. Dann ist aber die Differenzmenge  $M = \mathbb{N} \setminus N$  nicht leer und enthält wegen IV') ein Element  $m$  mit  $m \notin \nu(M)$ . Wegen  $0 \in N$  ist aber  $0 \notin M$  und damit  $m \neq 0$ ; also können wir nach Satz 1  $m = \nu(n)$  schreiben mit einem Element  $n \in \mathbb{N} \setminus M = N$ . Infolgedessen ist  $m \in M \cap \nu(N) \subset M \cap N = \emptyset$ . Widerspruch zu Satz 0.1 !  $\square$

*Bemerkung.* Zu einer weiteren (ordnungstheoretischen) Charakterisierung der natürlichen Zahlen siehe Satz 2.16.

## 1.7 Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen

Ich beweise jetzt noch einen Satz, dessen volle Bedeutung sich vermutlich erst später erschließen wird. Ich denke, daß wir alle von der Existenz „der“ natürlichen Zahlen überzeugt sind, aber wir alle tragen nur ein *Abbild* derselben in uns. Warum können wir uns dann überhaupt über diese Zahlen verständigen, ohne die Möglichkeit, die „Urzahlen“ aus dem platonischen Reich der Ideen direkt zu verwenden (wie z. B. das Urmeter in Paris in der Längenmessung)? - Der Grund liegt in dem folgenden

**Satz 1.4** *Erfüllen die beiden Systeme  $(\mathbb{N}, 0, \nu)$  und  $(\mathbb{N}', 0', \nu')$  die Axiome von Peano, so gibt es eine eindeutig bestimmte Bijektion*

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$$

mit  $\nu'(\alpha(n)) = \alpha(\nu(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , d. h.  $\nu' \circ \alpha = \alpha \circ \nu$ .

Die *Beweisidee* ist klar:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \nu(0) & \longrightarrow & \nu(\nu(0)) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0' & \longrightarrow & \nu'(0) & \longrightarrow & \nu'(\nu'(0)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Man kann dieses Schema leicht zu einem Beweis des Satzes ausbauen. Wir benötigen später aber noch einen verallgemeinerten Sachverhalt, der uns zum Beispiel *induktive Definitionen* erlaubt, und formulieren deshalb den folgenden Satz.

**Satz 1.5** *Es sei  $A$  eine nichtleere Menge mit einem fest gewählten Element  $a \in A$  und einer fest vorgegebenen Abbildung  $g : A \rightarrow A$ . Dann existiert genau eine Abbildung*

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

mit  $\alpha(0) = a$  und  $g(\alpha(n)) = \alpha(\nu(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , d. h.  $g \circ \alpha = \alpha \circ \nu$ .

Bevor wir diesen Satz beweisen, zeigen wir, daß aus ihm leicht der vorstehende Satz über die *Einzigkeit* der natürlichen Zahlen folgt. Es genügt in der Tat, nur noch zu zeigen, daß das Bild der  $0 \in \mathbb{N}$  unter  $\alpha$  gleich  $0'$  sein muß. Denn nach dem noch zu beweisenden Satz gibt es genau eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$  mit der gewünschten Eigenschaft  $\nu' \circ \alpha = \alpha \circ \nu$  und der zusätzlichen Bedingung  $\alpha(0) = 0'$ . Sind wir damit aber schon mit dem Beweis zu Ende? Leider nein, denn wir müssen noch begründen, warum die eindeutig bestimmte Abbildung  $\alpha$  auch *bijektiv* ist. Diese Erkenntnis gewinnt man aber leicht aus der *Symmetrie* der Situation: Durch Vertauschung der Rollen von  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}'$  begründet man ebenso die Existenz genau einer Abbildung  $\alpha' : \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\alpha' \circ \nu' = \nu \circ \alpha'$  und  $\alpha'(0') = 0$ . Die Zusammensetzung  $\iota := \alpha' \circ \alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bildet dann  $0$  in  $0$  ab und erfüllt die Bedingung  $\iota \circ \nu = (\alpha' \circ \alpha) \circ \nu = \alpha' \circ (\alpha \circ \nu) = \alpha' \circ (\nu' \circ \alpha) = (\alpha' \circ \nu') \circ \alpha = (\nu \circ \alpha') \circ \alpha = \nu \circ (\alpha' \circ \alpha) = \nu \circ \iota$ . Da die Identität  $\text{id}_{\mathbb{N}}$  aber auch diese Eigenschaften besitzt, muß nach der Eindeutigkeitsaussage  $\alpha' \circ \alpha = \iota = \text{id}_{\mathbb{N}}$  folgen. Genauso zeigt man  $\alpha \circ \alpha' = \text{id}_{\mathbb{N}'}$ . Also ist  $\alpha$  tatsächlich eine Bijektion mit den gewünschten Eigenschaften, und zwar die einzig mögliche.

Es bleibt also nur noch  $\alpha(0) = 0'$  zu zeigen. Wäre aber  $\alpha(0) \neq 0'$ , dann müßte es wegen der Bijektivität von  $\alpha$  ein  $n \neq 0$  geben mit  $\alpha(n) = 0'$ . Wegen  $n \neq 0$  gibt es aber ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n = \nu(m)$ . Also folgt  $0' = \alpha(n) = (\alpha \circ \nu)(m) = (\nu' \circ \alpha)(m) = \nu'(\alpha(m))$ . Widerspruch zu Axiom II!  $\square$

*Bemerkung.* Wir wollen an zwei Beispielen demonstrieren, wieso der 2. Teil in dem obigen Beweis tatsächlich notwendig ist.

1. Man finde die kleinste Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn es eine solche Zahl gibt, so muß sie notwendig auch gleich  $0$  sein:  $n_0 = 0$ . Und wenn wir jetzt nicht nachprüfen, ob  $0$  die geforderte Eigenschaft hat (sie hat sie natürlich nicht), so kommen wir in Teufels Küche.

2. Bestimme alle positiven reellen Zahlen  $x$  mit  $x^2 = -1$ . Wenn es eine solche gibt, so muß  $x^4 = 1$  und damit  $x = 1$  sein. Diese Zahl tut uns aber nicht den erhofften Gefallen.

*Beweis* von Satz 5. 1. Wir zeigen zuerst die *Eindeutigkeit* einer solchen Abbildung. Es seien also  $\alpha$  und  $\alpha'$  Abbildungen mit  $g \circ \alpha = \alpha \circ \nu$ ,  $g \circ \alpha' = \alpha' \circ \nu$ . Zu zeigen ist:

$$N := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha'(n)\} = \mathbb{N}.$$

Dies geschieht vermöge *vollständiger Induktion*. Wegen  $\alpha(0) = a = \alpha'(0)$  ist der Induktionsbeginn jedenfalls erfüllt. Ist aber  $\alpha(n) = \alpha'(n)$ , so folgt  $\alpha(\nu(n)) = g(\alpha(n)) = g(\alpha'(n)) = \alpha'(\nu(n))$ , also  $\nu(n) \in N$ .

2. Aus 1. ergibt sich, daß die Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A$  mit den gewünschten Eigenschaften die folgenden Bedingungen erfüllen muß:

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha(0) = a; \\ \alpha(\nu(n)) = g(\alpha(n)), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Man kann sich nun auf den Standpunkt stellen, daß durch dieses Schema tatsächlich eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A$  *induktiv* oder *rekursiv* definiert wird, indem man etwa die Menge  $N_1 := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \text{ ist definiert}\}$  betrachtet. Allerdings kann man auch Zweifel haben, ob der Ausdruck „ $\alpha(n)$  ist definiert“ eine präzise Bedeutung besitzt. Zudem wollten wir ja gerade mit diesem Satz das Prinzip der *induktiven* oder *rekursiven Definition* erst *begründen* und dürfen dieses somit nicht schon vorher durch die Hintertür einführen. Es gibt aber einen einwandfreien Beweis, den wir hier nur skizzieren: Man betrachte in  $\mathbb{N} \times A$  alle Teilmengen  $I$ , die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(*) \quad (0, a) \in I \text{ und } I \ni (n, c) \Rightarrow (\nu(n), g(c)) \in I.$$

Das System dieser Mengen ist nicht leer, da z. B. die volle Menge  $\mathbb{N} \times A$  diese Eigenschaften besitzt. Wir können somit den Durchschnitt aller dieser Mengen bilden, also die kleinste Teilmenge von  $\mathbb{N} \times A$



mit  $(*)$ , die wir mit  $\Gamma$  bezeichnen. Es ist nicht schwer, mit vollständiger Induktion nachzuweisen, daß  $\Gamma$  der Graph einer Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A$  ist, die die geforderten Eigenschaften besitzt.  $\square$

*Bemerkung.* Wir bezeichnen im folgenden mit  $\text{Abb}(A, B)$  weiterhin die Menge *aller* Abbildungen von  $A$  nach  $B$ . Hat man Mengen  $A, B, C, D$  und Abbildungen  $\alpha \in \text{Abb}(A, B)$ ,  $\beta \in \text{Abb}(B, D)$ ,  $\gamma \in \text{Abb}(A, C)$  und  $\delta \in \text{Abb}(C, D)$  gegeben, so deutet man diese Situation durch ein Diagramm der folgenden Art an:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

Man nennt ein solches Diagramm *kommutativ*, wenn  $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$ , die Kompositionen also vom „eingeschlagenen“ Weg unabhängig sind. In diesem Sinne ist die Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$  in Satz 4 die eindeutig bestimmte Bijektion, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{N} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{N}' & \xrightarrow{\nu'} & \mathbb{N}' \end{array}$$

kommutativ macht. Der Inhalt von Satz 5 drückt sich durch die Kommutativität des folgenden Diagramms aus.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{N} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch begründen, inwiefern Satz 5 uns dienlich sein kann zur *induktiven Definition*. Es sei  $H$  irgendeine (additiv geschriebene) Halbgruppe mit dem neutralen Element  $0$ , also z. B.  $\mathbb{N}$  selbst mit der Addition (siehe Kapitel 2 und, zu allgemeinen Halbgruppen mit neutralem Element, Kapitel 4). Ist dann  $h \in H$  ein fest gewähltes Element, so definiert dieses eine Abbildung  $g : H \rightarrow H$  mit  $h' \mapsto h' + h$ ,  $h' \in H$ . Wählt man nun  $a := 0 \in H$ , so liefert Satz 5 eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow H$  mit  $\alpha(0) = 0$  und  $\alpha(n+1) = \alpha(n) + h$ . Insbesondere ist

$$\alpha(1) = h, \alpha(2) = h + h \text{ etc. .}$$

Selbstverständlich schreibt man

$$nh := \alpha(n)$$

und führt normalerweise „induktiv“ dieses Symbol durch

$$0h := 0, (n+1)h := nh + h$$

ein.

Ist die Halbgruppe multiplikativ geschrieben mit neutralem Element  $e$ , so gewinnt man auf entsprechende Weise zu vorgegebenem  $h \in H$  eine Abbildung  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow H$  mit der „naiven“ Definition

$$h^0 := e, \quad h^{n+1} := h^n \cdot h.$$

Als Spezialfall kann man hier die Halbgruppe  $H := \text{Abb}(A)$  aller Abbildungen einer nichtleeren Menge  $A$  zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung (und dem neutralen Element  $\text{id}_A$ ) nehmen. Bei festem  $\varphi \in \text{Abb}(A)$  sind hierdurch dann die  $n$ -fachen Iterierten  $\varphi^{\circ n}$  von  $\varphi$  erklärt:

$$\varphi^{\circ 0} := \text{id}_A, \quad \varphi^{\circ(n+1)} := \varphi \circ \varphi^{\circ n}.$$

## Anhang: Wahrheitstafeln für logische Aussagen

Wer den logischen Argumenten im Text des vorigen Kapitels nicht traut, kann sich an Hand von etwas mühsam zu erstellenden „Wahrheitstafeln“ wie folgt von der Korrektheit der Behauptung überzeugen. Wir schreiben zunächst diese Tafeln für die einfachsten Verknüpfungen von Aussagen auf (hierbei steht  $r$  synonym für richtig, wahr und  $f$  für falsch, unwahr).

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
$r$	$r$	$r$	$r$	$r$
$r$	$f$	$f$	$r$	$f$
$f$	$r$	$f$	$r$	$r$
$f$	$f$	$f$	$f$	$r$

Hiermit „berechnet“ man z. B. sofort

$A$	$B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \vee B$
$r$	$r$	$f$	$r$
$r$	$f$	$r$	$f$
$f$	$r$	$r$	$r$
$f$	$f$	$r$	$r$

so daß man sofort die stets richtigen Aussagen

$$(A \vee B) \iff \neg(\neg A \wedge \neg B) \quad \text{und} \quad (A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$$

erhält. Mit anderen Worten: Man kann die logischen Verknüpfungen allein ausdrücken durch zwei von ihnen, nämlich  $\wedge$  und  $\neg$ .

Um beispielsweise die Gültigkeit der „Transitivität des Schließens“ nachzuprüfen, setzen wir  $F_1, F_2, F_3$  für  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$  bzw.  $A \Rightarrow C$  und  $D$  für  $F_1 \wedge F_2$ . Wir haben dann die folgende Tabelle, aus der wir sofort die Behauptung ablesen können.

$A$	$B$	$C$	$F_1$	$F_2$	$D$	$F_3$	$D \Rightarrow F_3$
$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$
$r$	$r$	$f$	$r$	$f$	$f$	$f$	$r$
$r$	$f$	$r$	$f$	$r$	$f$	$r$	$r$
$r$	$f$	$f$	$f$	$r$	$f$	$f$	$r$
$f$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$
$f$	$r$	$f$	$r$	$f$	$f$	$r$	$r$
$f$	$f$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$
$f$	$f$	$f$	$r$	$r$	$r$	$r$	$r$

## 2 Addition, Multiplikation und Anordnung natürlicher Zahlen

Bis hierher können wir die natürlichen Zahlen nur zum *Abzählen* gebrauchen. Es ist uns aber von Jugend an vertraut, daß man im Bereich der natürlichen Zahlen auch *addieren* und *multiplizieren* kann. Bezüglich der Addition kann man eine einfache Vorstellung durch „Hintereinanderausführung“ von Abmessungen mit einem Maßstab gewinnen. Wir wollen dabei auch unsere gewohnten Rechenregeln zur Verfügung haben. Diese legen dann auf  $(\mathbb{N}, \nu)$ , wie wir gleich sehen werden, die Addition und Multiplikation induktiv fest.

### 2.1 Die Addition natürlicher Zahlen

Mit  $\nu(0) := 1$ ,  $\nu(n) = n + 1$ , und dem erwünschten Assoziativgesetz<sup>4</sup>  $m + (n + 1) = (m + n) + 1$  hat man offenbar nur die folgende Möglichkeit der induktiven Definition der *Addition*.

*Definition.* Für  $m, n \in \mathbb{N}$  setzt man

$$\begin{aligned}m + 0 &:= m \\m + \nu(n) &:= \nu(m + n).\end{aligned}$$

Man macht sich leicht wie im vorigen Abschnitt klar, daß hierdurch für alle  $m$  und  $n$  ihre *Summe*  $m + n$  eindeutig definiert ist. Anders ausgedrückt: die Summenbildung definiert eine Abbildung

$$\text{add} : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (m, n) & \longmapsto & m + n \end{cases},$$

die wir auch als *Addition* bezeichnen.

Unserer Erfahrung entspricht auch die Tatsache, daß eine solche Addition weiteren Gesetzen genügt. Z. B. ist (oder sollte sein):

$$\begin{aligned}(m + n) + p &= m + (n + p), \\m + n &= n + m.\end{aligned}$$

Solche Aussagen dürfen wir jetzt aber nicht einfach hinnehmen, sondern müssen sie aufgrund unserer Definitionen und der Eigenschaften der natürlichen Zahlen *beweisen*. Man beachte, daß wir dabei immer  $\nu(n) = \nu(n + 0) = n + \nu(0) = n + 1$  setzen können.

**Satz 2.1** *In der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen gelten mit der oben definierten Addition die folgenden Gesetze :*

- a) (Assoziativität)  $(m + n) + p = m + (n + p)$
- b) (Kommutativität)  $m + n = n + m$ .  
*Insbesondere ist  $0 + m = m + 0 = m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .*

Die Hauptlast des *Beweises* verlagern wir auf das folgende Lemma.<sup>5</sup>

**Lemma 2.2** *Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt  $\nu(m + n) = \nu(m) + n$ .*

*Beweis* (Lemma 2). Wir führen Induktion nach  $n$ , betrachten also bei festem  $n$  die Aussage

$$A(n) : \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ gilt } \nu(m + n) = \nu(m) + n.$$

Somit lautet (und ist nach Definition richtig)

$$A(0) : \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ ist } \nu(m + 0) = \nu(m) = \nu(m) + 0.$$

Der Schluß von  $n$  auf  $\nu(n)$  gestaltet sich wie folgt:

<sup>4</sup>siehe hierzu auch die Bemerkung am Ende des Anhangs zu Kapitel 3

<sup>5</sup>Lemma (gr) = Stichwort, Merkwort. Wird in der Mathematik für einen Hilfssatz verwendet, der eine wesentliche Idee enthält.

$$\nu(m + \nu(n)) = \nu(\nu(m + n)) = \nu(\nu(m) + n) = \nu(m) + \nu(n). \quad \square$$

*Beweis* (Satz 1). a) Die Aussage ergibt sich mit Hilfe von Induktion nach  $p$ :

$$\begin{aligned} (m + n) + 0 &= m + n = m + (n + 0). \\ (m + n) + \nu(p) &= \nu((m + n) + p) = \nu(m + (n + p)) \\ &= m + \nu(n + p) = m + (n + \nu(p)). \end{aligned}$$

b) Induktion nach  $n$ . Der Induktionsbeginn lautet:

$$m = m + 0 = 0 + m.$$

Den Beweis hierfür führen wir durch Induktion nach  $m$  (Doppelinduktion!). Für  $m = 0$  ist  $0 + 0 = 0$ . Ist die Aussage für ein  $m$  schon bewiesen, so ergibt sich

$$0 + \nu(m) = \nu(0 + m) = \nu(m).$$

Schluß von  $n$  auf  $\nu(n)$ : Unter Verwendung des Lemmas erhält man

$$m + \nu(n) = \nu(m + n) = \nu(n + m) = \nu(n) + m. \quad \square$$

## 2.2 Die Multiplikation natürlicher Zahlen

Für die *Multiplikation* verfahren wir analog. Wir wollen natürlich erreichen, daß z. B.  $0 \cdot n = 0$ ,  $1 \cdot n = n$  erfüllt ist und das *Distributivgesetz*  $(m + p)n = mn + pn$ , also insbesondere  $(m + 1)n = (mn) + n$ . Deshalb geben wir die folgende induktive

*Definition*. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  setzt man

$$\begin{aligned} 0 \cdot n &= 0 \\ \nu(m) \cdot n &= m \cdot n + n. \end{aligned}$$

Hierdurch wird wieder eine Abbildung

$$\text{mult} : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) \longmapsto m \cdot n \end{cases}$$

definiert. Wie üblich schreibt man  $mn$  statt  $m \cdot n$  und vereinbart, daß die Multiplikation „stärker bindet“ als die Addition, d. h. daß unter

$$mn + p \quad \text{die Zahl} \quad (m \cdot n) + p$$

zu verstehen ist.

**Satz 2.3** *Es gelten für die Multiplikation die folgenden Gesetze :*

- a) (Assoziativität)  $(mn)p = m(np)$ .  
 b) (Kommutativität)  $mn = nm$ .  
*Insbesondere ist  $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$  und  $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ .*

*Ferner gilt in Verbindung mit der Addition :*

- c) (Distributivität)  $(m + p)n = mn + pn$ .

*Beweis.* Wir bemerken, daß

$$1 \cdot n = (0 + 1)n = 0 \cdot n + n = 0 + n = n$$

ist, und beweisen zuerst c) mit Induktion über  $p$ . Für  $p = 0$  hat man  $(m + 0)n = mn = mn + 0n$ . Induktionsschritt von  $p$  nach  $p + 1$ :

$$\begin{aligned} (m + (p + 1))n &= ((m + p) + 1)n = (m + p)n + n \\ &= (mn + pn) + n = mn + (pn + n) \\ &= mn + (p + 1)n. \end{aligned}$$

b) Wir führen Induktion nach  $n$ . Im Falle  $n = 0$  lautet die zu beweisende Aussage  $m \cdot 0 = 0$ . Diese erledigt man durch Induktion nach  $m$ : Es ist tatsächlich  $0 \cdot 0 = 0$  und  $(m + 1)0 = m0 + 0 = 0 + 0 = 0$ . Der Schluß von  $n$  nach  $n + 1$  vollzieht sich fast von selbst wie folgt:

$$\begin{aligned} m(n + 1) &= mn + m \quad \text{wegen Distributivgesetz} \\ &= nm + m \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= (n + 1)m \quad \text{nach Definition der Multiplikation.} \end{aligned}$$

a) Induktion nach  $m$ : Es gilt

$$(0n)p = 0p = 0 = 0(np)$$

und

$$\begin{aligned} ((m + 1)n)p &= (mn + n)p \\ &= (mn)p + np \quad \text{(Distributivgesetz)} \\ &= m(np) + np \\ &= (m + 1)(np). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen. □

Für spätere Verwendung notieren wir noch das

**Lemma 2.4** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten die folgenden Aussagen:

- i)  $m + n = 0 \iff m = n = 0$ ,
- ii)  $m + n = m \iff n = 0$ ,
- iii)  $mn = 0 \iff m = 0$  oder  $n = 0$  (Nullteilerfreiheit),
- iv)  $mn = 1 \iff m = n = 1$ .

*Beweis.* Nur die Richtungen  $\implies$  sind zu zeigen.

i) Es gelte nicht  $m = n = 0$ . Ohne Einschränkung (wegen der Kommutativität) ist dann  $n \neq 0$ , also  $n = n_1 + 1$  und folglich  $m + n = (m + n_1) + 1 \neq 0$ .

ii) folgt aus i) durch Induktion nach  $m$ .

iii) Es gelte nicht  $(m = 0 \vee n = 0)$ , d. h. es sei  $m \neq 0$ ,  $n \neq 0$ . Mit  $m = m_1 + 1$ ,  $n = n_1 + 1$  folgt dann  $mn = m(n_1 + 1) = mn_1 + m = (mn_1 + m_1) + 1 \neq 0$ .

iv) Wegen iii) sind  $m$  und  $n$  größer oder gleich 1. Ist eine der beiden Zahlen echt größer als 1, so auch ihr Produkt. □

### 2.3 Die Ordnung der natürlichen Zahlen

Wir können nun mit Hilfe der Addition natürlicher Zahlen bequem die schon früher erwähnte *Ordnung* in der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen einführen. Wegen allgemeiner Begriffsbildungen im Zusammenhang mit Ordnungen sei auf den Anhang zu diesem Kapitel verwiesen.

*Definition.* Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $a$  *kleiner oder gleich*  $b$ , wenn es ein  $x \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$a + x = b.$$

Wir schreiben hierfür  $a \leq b$ . Das Symbol  $a < b$  ( $a$  ist *echt kleiner als*  $b$ ) bedeutet  $a \leq b$  und  $a \neq b$ , also  $a + x = b$ ,  $x \neq 0$ . Das Zeichen  $b \geq a$  (*größer gleich*) steht synonym für  $a \leq b$  und  $b > a$  wenn *zusätzlich*  $b \neq a$ .

*Bemerkung.* Aus der Definition folgt unmittelbar  $0 \leq a$  für alle  $a \in \mathbb{N}$  und  $0 < a$  für alle  $a \in \mathbb{N}^*$ .

**Satz 2.5** a) (Transitivität)  $a \leq b$ ,  $b \leq c \implies a \leq c$ .

b) Ist in a) eine der Ungleichungen  $a \leq b$ ,  $b \leq c$  echt, d. h. ist  $a < b$  oder  $b < c$ , so ist auch  $a < c$ . Insbesondere ist  $a \leq b$ ,  $b \leq a$  gleichbedeutend mit  $a = b$ .

c)  $a < b \implies a + c < b + c$  für alle  $c \in \mathbb{N}$ .

d)  $a < b$ ,  $c > 0 \implies ac < bc$ .

*Beweis.* a)  $a + x = b$ ,  $b + y = c \implies a + (x + y) = (a + x) + y = b + y = c$ .

b) Ist  $x$  oder  $y$  nicht gleich Null, so auch nach Lemma 4.i) die Summe  $x + y$ .

c) Trivial wegen Kommutativität und Assoziativität.

d) Mit  $a + x = b$ ,  $x \neq 0$ , folgt aus dem Distributivgesetz

$$ac + xc = (a + x)c = bc.$$

Da nach dem früheren Lemma  $xc \neq 0$ , so folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.6** Sind  $a, b \in \mathbb{N}$ , so hat die Gleichung  $a + x = b$  höchstens eine Lösung  $x$ .

*Bemerkung.* Ist also  $a \leq b$ , so ist  $x$  mit  $a + x = b$  eindeutig bestimmt. Man schreibt dann  $x =: b - a$  (Differenz). Die Definition und der obige Satz liefern dann Aussagen wie

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= b, \\ (b - a) + (c - b) &= c - a, \\ c(b - a) &= cb - ca, \quad c \geq 0. \end{aligned}$$

*Beweis* (Lemma). Wir führen Induktion nach  $a$ .  $a = 0$ : Aus  $0 + x = b$  folgt  $x = b$ . Es sei nun  $(a + 1) + x_1 = b = (a + 1) + x_2$ , also  $(a + x_1) + 1 = (a + x_2) + 1$ ; dann ist wegen der Injektivität der Nachfolgerabbildung  $\nu$  auch  $a + x_1 = a + x_2$  und nach Induktionsvoraussetzung  $x_1 = x_2$ . □

**Satz 2.7** Für  $a, b \in \mathbb{N}$  besteht genau eine der Relationen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

*Beweis.* Bei festem  $a \in \mathbb{N}$  betrachten wir  $L_a = \{x \in \mathbb{N} : x < a\}$ ,  $R_a = \{x \in \mathbb{N} : x \geq a\}$ . Die Eindeutigkeitsaussage ist äquivalent zu der Gleichung

$$L_a \cap R_a = \emptyset \quad \text{für alle } a,$$

die unmittelbar einleuchtet: aus  $x \in L_a \cap R_a$  folgt  $x < a$ ,  $a \leq x$  und damit  $x < x$ . (Widerspruch!). Die Existenzaussage bedeutet

$$L_a \cup R_a = \mathbb{N} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{N}.$$

Wir führen hierzu Induktion nach  $a$ : Für  $a = 0$  ist die Aussage richtig wegen  $\mathbb{N} = R_0$ . Sei nun  $x \in \mathbb{N} = L_a \cup R_a$  für ein  $a \in \mathbb{N}$ . Ist dann  $x \in L_a$ , so ist  $x = x + 0 < x + 1 < a + 1$ , also  $x < a + 1$  und damit  $x \in L_{a+1}$ . Ist  $x \in R_a$ , so gibt es die Möglichkeiten

$$x = a, \quad \text{also } x < a + 1 \quad \text{d. h. } x \in L_{a+1}$$

oder  $x > a$ . In diesem Fall ist  $a + (y_1 + 1) = x$ , also  $a + 1 \leq x$  und  $x \in R_{a+1}$ .  $\square$

**Folgerung 2.8** *Besitzt die Gleichung  $a + x = b$  keine Lösung, so ist die Gleichung  $b + y = a$  lösbar.*

## 2.4 Eine weitere Induktionsvariante

Als erste Anwendung beweisen wir eine oft verwendete *Induktionsvariante*.

**Satz 2.9 (Induktion)** *Die Aussage  $A(n)$  sei richtig für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , und aus der Richtigkeit von  $A(n)$  für beliebiges  $n \geq n_0$  folge die Gültigkeit von  $A(n+1)$ . Dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \geq n_0$ .*

*Beweis.* Betrachte  $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist gültig}\}$  und  $M' := M \cup L_{n_0}$ . Wir brauchen nur zu zeigen, daß  $M' = \mathbb{N}$ , denn dann folgt aus  $\mathbb{N} = L_{n_0} \cup R_{n_0}$ ,  $L_{n_0} \cap R_{n_0} = \emptyset$  sofort  $R_{n_0} \subset M$ , welches unserer Behauptung entspricht. Es ist sicher  $0 \in L_{n_0}$ , da wir ohne Einschränkung  $n_0 > 0$  voraussetzen dürfen (sonst können wir das übliche Induktionsprinzip anwenden). Ist dann  $n \in M'$ , so gibt es die folgenden Möglichkeiten:

- a)  $n + 1 \in L_{n_0} \subset M'$ .
- b)  $n + 1 = n_0 \in M \subset M'$ .
- c)  $n + 1 > n_0$ , d. h.  $n \geq n_0$ ,  $n \in M$ . Dann ist  $n + 1 \in M \subset M'$ .

Also ist mit  $n$  auch stets  $n + 1 \in M'$ , und das Induktionsprinzip impliziert  $M' = \mathbb{N}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Man kann diese Variante auch eleganter ableiten aus dem folgenden, mit unseren Hilfsmitteln leicht zu beweisenden

**Satz 2.10** *Es sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  fest gewählt und*

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n + n_0 \end{cases}$$

*die Translation um  $n_0$ . Dann gilt:  $\tau$  ist injektiv,  $\tau(\mathbb{N}) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n_0\}$  und  $\tau(n+1) = \tau(n) + 1$ .*

*Hinweis.* Betrachte die Aussage  $B(n) = A(n + n_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 2.5 Wohlordnung der natürlichen Zahlen

Von großer Wichtigkeit ist der folgende Satz (siehe auch Satz 1.3).

**Satz 2.11 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen)** *Ist  $M \subset \mathbb{N}$  eine nichtleere Teilmenge, so besitzt  $M$  ein kleinstes Element, d. h. es existiert ein  $m_0 \in M$  mit  $m \geq m_0$  für alle  $m \in M$ . Wir schreiben in diesem Fall  $m_0 = \min M$ .*

*Beweis.* Es sei  $a \in M$ , also  $M' := L_{a+1} \cap M \neq \emptyset$ . Besitzt diese Menge ein kleinstes Element  $m_0$ , so ist insbesondere  $m_0 \leq a$  und  $m_0$  ein kleinstes Element von  $M$ . Wir können daher ohne Einschränkung

$$M \subset L_{a+1}$$

annehmen und Induktion über  $a$  führen.  $a = 0$ :  $\emptyset \neq M \subset L_1 = \{0\} \implies M = \{0\}$ . Sei  $M \subset L_{a+2}$ , dann ist entweder  $M = \{a+1\}$  oder  $M \cap L_{a+1} \neq \emptyset$ . Im zweiten Fall schließt man wie oben.  $\square$



## 2.6 Die Methode des unendlichen Abstiegs

Aus der Wohlordnung der natürlichen Zahlen folgt unmittelbar die folgende Aussage.

**Satz 2.12** Keine nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  besitzt die Eigenschaft, daß es zu jedem  $a \in M$  ein  $a' \in M$  gibt mit  $a' < a$ .

*Beweis.* Existierte doch eine solche Menge  $M$ , so besäße sie ein kleinstes Element  $a_0 \in M$ . Nach Voraussetzung gäbe es aber ein kleineres Element  $a'_0 \in M$ . Widerspruch!  $\square$

Mit anderen Worten bedeutet diese Aussage anschaulich, daß es nicht möglich ist „unendlich oft in einer nicht leeren Menge natürlicher Zahlen abzustiegen“.

Diese Eigenschaft wurde schon von den Griechen als Beweistechnik verwendet, später dann von Pierre de Fermat als „Methode des unendlichen Abstiegs“ virtuos eingesetzt. Er bewies damit z. B., daß in den Spezialfällen  $n = 3, 4$  seine berühmte Vermutung korrekt ist:

Eine Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

mit  $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq 3$  besitzt nur die trivialen Lösungen, also solche, in denen mindestens eine der Zahlen  $a, b, c$  gleich Null ist.<sup>6</sup>

*Bemerkung.* Im Grunde haben wir die Methode schon selbst angewandt beim Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$ . Wäre diese Wurzel nämlich rational, so wäre die Menge

$$M := \{a \in \mathbb{N} : \exists d \in \mathbb{N}, \text{ so daß } d^2 = 2a^2\}$$

der ganzzahligen Seitenlängen  $a$  von Quadraten mit ganzzahligen Diagonallängen  $d$  nicht leer. Dann folgt aber, daß jedes  $a \in M$  und das zugehörige  $d$  gerade sind und mit  $a = 2a'$ ,  $d = 2d'$  auch  $d'^2 = 2a'^2$  gilt. Mit  $a \in M$  wäre also auch  $a' < a$  in  $M$  gelegen.

*Bemerkung.* Erstaunlicherweise kommt man bei dem vorigen Argument sogar gänzlich ohne Teilbarkeitstheorie aus. Seien also  $d, a$  mit  $d^2 = 2a^2$  vorgegeben. Dann ist notwendig  $1 < a < d < 2a$  und

$$d(d - a) = d^2 - da = 2a^2 - da = a(2a - d),$$

also

$$(*) \quad \frac{d}{a} = \frac{2a - d}{d - a}.$$

Dies ist dann eine weitere Darstellung von  $\sqrt{2}$  mit  $a$  ersetzt durch  $d - a < a$ .  $\square$

*Bemerkung.* Entscheidend am vorigen Beweis ist, daß mit  $d^2 = 2a^2$  auch

$$(2a - d)^2 = 2(d - a)^2$$

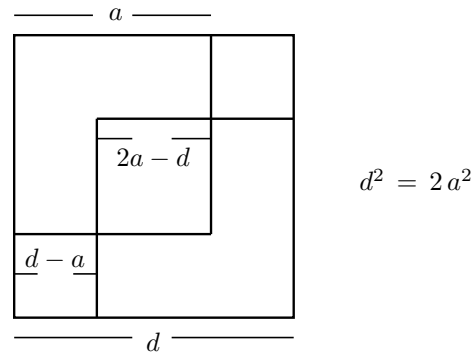
ist. Dies folgt durch Quadrieren der Gleichung (\*) oder (noch ein weiteres Mal) durch reines Nachrechnen:

$$(2a - d)^2 = 4a^2 - 4da + d^2 = 2a^2 - 4da + 2d^2 = 2(d - a)^2.$$

Geometrisch läßt sich dieser Sachverhalt an der folgenden Figur veranschaulichen:

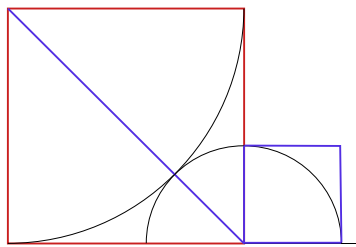
---

<sup>6</sup>Sie wurde erst in den Jahren 1993/95 von Andrew Wiles mit völlig anderen, vor allem wesentlich tieferen Methoden (Modulformen, elliptische Kurven) gezeigt.



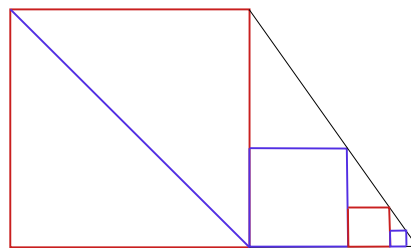
Figur 2.1

*Bemerkung.* Die Rationalität von  $\sqrt{2}$  hätte also zur Folge, daß die Iteration der folgenden Konstruktion von neuen Quadraten aus alten nach endlich vielen Schritten zu einem Ende kommen müßte:



Figur 2.2

Dies ist offensichtlich (sic!) nicht möglich:



Figur 2.3

## 2.7 Der goldene Schnitt und das reguläre Fünfeck

Eine Strecke  $c$  werde in zwei Teile mit  $a > b$  geteilt,  $c = a + b$ . Diese Teilung erfüllt die Bedingung des *goldenen Schnitts*, wenn sich die Gesamtstrecke zu der größeren Teilstrecke verhält wie die größere zu der kleineren:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Das Verhältnis

$$g := \frac{a}{b}$$

heißt der *goldene Schnitt* oder auch die *goldene Schnittzahl*. Aus der Bedingungsgleichung folgt unmittelbar

$$g = 1 + \frac{1}{g},$$

so daß  $g$  die quadratische Gleichung

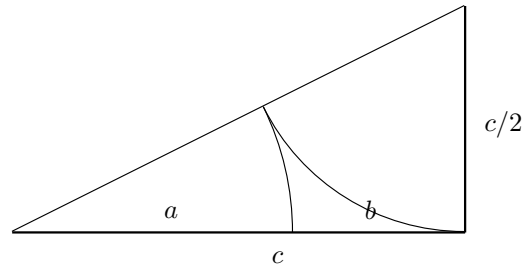
$$g^2 - g - 1 = 0$$

erfüllt. Von den beiden Lösungen ist nur eine positiv; also setzen wir

$$g := \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Da  $\sqrt{5}$  irrational ist, ist auch  $g$  eine *Irrationalzahl*. Wir werden dies weiter unten noch rein geometrisch an Hand des regulären Fünfecks begründen.

Will man eine vorgegebene Strecke im goldenen Verhältnis nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal teilen, so liefert der Satz des Pythagoras wegen  $2^2 + 1^2 = 5$  einen Hinweis zu einer Konstruktion:



Figur 2.4

Die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck hat die Länge

$$\frac{c\sqrt{5}}{2}$$

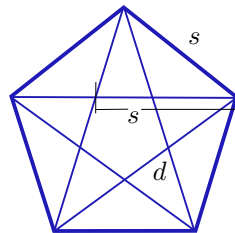
und folglich ist

$$a = \frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{und} \quad b = c - a = \frac{c}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Der Quotient  $g = a/b$  ist also tatsächlich

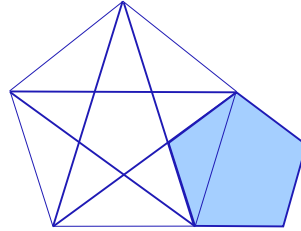
$$g = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Betrachten wir nun ein reguläres Fünfeck mit Seitenlänge  $s$  und Diagonallänge  $d$ . Es ist notwendig  $s < d < 2s$ . Da die Diagonalen parallel zu den gegenüber liegenden Seiten verlaufen, ist die eingezeichnete Teilstrecke der Diagonale ebenfalls von der Länge  $s$ .



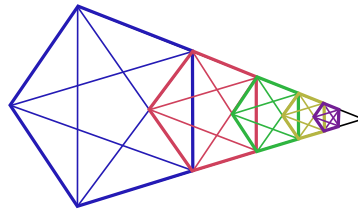
Figur 2.5

Somit entsteht z. B. rechts unten ein neues reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge  $d - s < s$  und der Diagonallänge  $s$ .



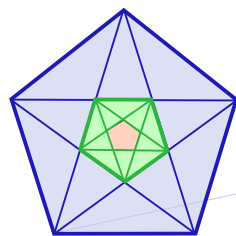
Figur 2.6

Mit der Methode des unendlichen Abstiegs folgt daraus wieder unmittelbar wie im Fall der Diagonalen im Quadrat, daß das Verhältnis von der Diagonalen zu der Seite eines regulären Fünfecks nicht rational sein kann.



Figur 2.7

*Bemerkung.* Führt man die oben skizzierte Methode zweimal durch, so erhält man ein reguläres Fünfeck mit Seitenlänge  $2s - d$  und Diagonallänge  $d - s$ . Ein solches findet man auch im Inneren des ursprünglichen Fünfecks und damit vielleicht noch eine schönere Illustration der Irrationalität des goldenen Schnitts.



Figur 2.8

*Bemerkung.* Das soeben angesprochene (inverse) Verhältnis ist selbstverständlich der goldene Schnitt  $g$ , womit dessen Irrationalität erneut nachgewiesen ist. Es ist aufgrund der Geometrie des Fünfecks tatsächlich

$$\frac{1}{g} := \frac{s}{d} = \frac{d - s}{s} = \frac{d}{s} - 1 = g - 1.$$

*Bemerkung.* Dem kritischen Leser wird nicht verborgen geblieben sein, daß unsere geometrischen Überlegungen erneut durch nichts gerechtfertigt wurden. Sie dienen tatsächlich auch nur der Anschauung. Wenn wir die komplexen Zahlen zur Verfügung haben, ist es ein Leichtes, das Verhältnis von Diagonallänge zur Seitenlänge eines regulären Fünfecks rein analytisch zu berechnen.

## 2.8 Ordnungstheoretische Induktion

Eine weitere Folgerung aus der Wohlordnung ist der Satz über die *ordnungstheoretische* Induktion.

**Satz 2.13** *Gilt  $A(0)$  und folgt aus  $A(m)$  für alle  $m \leq n$  die Gültigkeit der Aussage  $A(n+1)$ , so ist  $A(n)$  richtig für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Setze  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist nicht richtig}\}$ . Angenommen,  $M \neq \emptyset$ . Sei  $n_0 \in M$  ein kleinstes Element von  $M$ , also  $A(n_0)$  falsch und  $A(n)$  richtig für alle  $n < n_0$ . Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung. Es muß also unsere Annahme falsch sein und damit, wie gewünscht,  $M = \emptyset$  gelten.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Man kommt im Beweis von Satz 12 natürlich auch ohne den Wohlordnungssatz 11 aus. Man definiere nämlich

$$B(n) : A(m) \text{ ist richtig für alle } m \leq n .$$

Dann gilt  $B(0) = A(0)$ , und ist  $B(n)$  richtig, also  $A(0), \dots, A(n)$ , so auch  $A(n+1)$  und damit  $B(n+1)$ . Die übliche Form der vollständigen Induktion impliziert dann die Gültigkeit von  $B(n)$  und damit auch von  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Umgekehrt läßt sich übrigens das Prinzip der vollständigen Induktion auch aus Satz 12 zurückgewinnen.

2. Der Satz über die ordnungstheoretische Induktion wird oft in die folgende Form gegossen:

*Gilt für jede natürliche Zahl  $n$ , daß aus  $A(m)$  für alle  $m < n$  die (Richtigkeit der) Aussage  $A(n)$  folgt, so ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig.*

Da die Voraussetzung des Induktionsschritts für  $n = 0$  leer ist, schließt man auf die Richtigkeit von  $A(0)$ . Danach kann man weiter wie oben verfahren.

3. Die Abbildung  $\alpha : N \rightarrow N'$  aus Kapitel 1 respektiert selbstverständlich auch alle weiteren Strukturen, die wir auf  $N$  und  $N'$  eingeführt haben, d. h. (wenn wir darauf verzichten, die Zeichen für  $+$ ,  $\cdot$  und  $\leq$  in  $N'$  ebenfalls mit einem Akzent zu versehen):

$$\begin{aligned} \alpha(n+m) &= \alpha(n) + \alpha(m) \\ \alpha(nm) &= \alpha(n)\alpha(m) \\ n \leq m &\implies \alpha(n) \leq \alpha(m) . \end{aligned}$$

## 2.9 Division mit Rest

Wir beweisen schließlich noch den Satz über die *Division mit Rest* im Bereich der natürlichen Zahlen und fügen einige Bemerkungen über die sogenannte *g-adische Entwicklung* an.

**Satz 2.14** *Zu je zwei Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}^*$  gibt es genau eine Zerlegung*

$$n = qm + r$$

mit  $q \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq r < m$ .

*Beweis.* a) Zur Eindeutigkeit. Hat man zwei Zerlegungen

$$n = q_1 m + r_1 = q_2 m + r_2 ,$$

so ist (ohne Einschränkung sei  $q_1 \geq q_2$ ):

$$0 \leq (q_1 - q_2)m = r_2 - r_1,$$

aber  $r_2 - r_1 < m - 0 = m$ . Wäre  $q_1 \neq q_2$ , so wäre andererseits aber  $(q_1 - q_2)m \geq m$ . Also muß  $q_1 = q_2$  und  $r_1 = r_2$  sein.

b) Zur Existenz. Wir führen Induktion nach  $n \geq 1$ . Für  $n = 1$  ist  $n = 0 \cdot m + 1$  (falls  $m > 1$ ) und  $n = 1 \cdot m + 0$  (falls  $m = 1$ ). Sei nun für  $n \geq 1$  eine Zerlegung  $n = qm + r$  gegeben. Ist dann  $r = m - 1$ , so ist

$$n + 1 = qm + (r + 1) = (q + 1)m + 0$$

die gesuchte Zerlegung, und für  $r < m - 1$  tut

$$n + 1 = qm + (r + 1)$$

das Gewünschte. □

Bei der  $g$ -adischen oder  $g$ -al-Entwicklung natürlicher Zahlen gibt man sich eine Zahl  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g \geq 2$  fest vor. Zu  $n \in \mathbb{N}$  gibt es dann eindeutig bestimmte natürliche Zahlen  $r$  und  $a_0, \dots, a_r$  mit  $a_r \neq 0$  und  $0 \leq a_\rho < g$ , so daß

$$n = a_0 + a_1g + a_2g^2 + \dots + a_rg^r = \sum_{\rho=0}^r a_\rho g^\rho.$$

Man gewinnt die Ziffern  $a_\rho$  dieser Entwicklung von  $n$  rekursiv durch fortlaufende Division mit Rest nach dem folgenden Schema, wobei  $q_0 = n$  gesetzt wird:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_0 = q_1g + a_0, & 0 \leq a_0 < g, \\ q_1 = q_2g + a_1, & 0 \leq a_1 < g, \\ \vdots & \\ q_{r-1} = q_rg + a_{r-1}, & 0 \leq a_{r-1} < g, \\ q_r = a_r, & 0 < a_r < g. \end{array} \right.$$

Die Eindeutigkeit der Division mit Rest liefert die Eindeutigkeit dieser Ziffernfolge. Man schreibt manchmal auch

$$n = (a_r \dots a_0)_g.$$

Für  $g = 2, 10$  spricht man von der *Dual-* bzw. *Dezimalentwicklung* der Zahl  $n$ .

Umgekehrt gewinnt man die Zahl  $n$  aus der Darstellung  $(a_r \dots a_0)_g$  am schnellsten rekursiv durch

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = a_r \\ n_1 = n_0g + a_{r-1} (= a_rg + a_{r-1}) \\ \vdots \\ n_{r-1} = n_{r-2}g + a_1 (= a_rg^{r-1} + a_{r-1}g^{r-2} + \dots + a_1) \\ n_r = n_{r-1}g + a_0 = n. \end{array} \right.$$

Ausgeschrieben lautet dieses Rekursionsverfahren:

$$n = (((\dots((a_rg + a_{r-1})g + a_{r-2}) + \dots)g + a_1)g + a_0).$$

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall des bekannten *HORNER-Schemas*, mit dem man ein Polynom vom Grad  $r$  an einer festen Stelle mit einem Minimum an Multiplikationen auswerten kann. (Man benötigt, wenn alle Koeffizienten des Polynoms ungleich Null sind, tatsächlich nur die Hälfte der Multiplikationen, die nötig wären, um alle Potenzen der Variablen einzeln auszurechnen).

## Anhang 1: Relationen und Ordnungen

Wir haben schon jetzt mehrfach Situationen angetroffen, in denen Elemente einer Menge zu denen einer anderen oder derselben in einer gewissen *Relation* stehen. Wir wollen diesen Begriff formalisieren.

*Definition.* Es seien  $A, B$  Mengen (oder sogar Klassen). Eine *Relation* zwischen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge (Teilklass)  $R \subset A \times B$ .

Gilt  $A = B$ , so heißt  $R$  auch eine Relation *auf*  $A$ . Man sagt,  $a \in A$  stehe in der Relation  $R$  zu  $b \in B$ , in Zeichen  $aRb$ , wenn  $(a, b) \in R$ . Im speziellen Kontext verwendet man statt  $aRb$  andere Zeichen (siehe die anschließenden Beispiele).

*Beispiele.* 1.  $\Delta = \{(a_1, a_2) \in A \times A : a_1 = a_2\}$  definiert die Relation der *Gleichheit* auf  $A$ . Selbstverständlich schreibt man nicht  $a_1 \Delta a_2$ , sondern  $a_1 = a_2$ .

2. Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{P}(M)$  die *Potenzmenge*. Dann definiert

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) : A \subset B\}$$

die *Enthaltenseinsrelation*.

3. Eine *Abbildung*  $\Gamma \subset A \times B$  definiert eine spezielle Relation:  $(a, b) \in \Gamma \iff a$  wird durch  $\Gamma$  auf  $b$  abgebildet.

4. Auf  $\mathbb{N}$  haben wir die Relationen  $\leq$  und  $<$ .

*Definition.* Eine Relation  $R$  auf  $A$  heißt

- i) *reflexiv*, wenn stets  $aRa$  gilt,
- ii) *symmetrisch*, wenn  $aRb \implies bRa$ ,
- iii) *transitiv*, wenn  $a_1Ra_2, a_2Ra_3 \implies a_1Ra_3$  gilt.

Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften wird auch eine *Äquivalenzrelation* genannt.

*Definition.* Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge (oder Klasse)  $M$ . Man nennt dann die  $a \in M$  zugeordnete Menge (Klasse)

$$[a] := \{x \in M : x \sim a\} \subset M$$

die *Äquivalenzklasse* von  $a$  (auch dann, wenn  $M$  eine *Menge* ist), und bezeichnet mit

$$M/\sim \quad (M \text{ modulo } \ddot{\text{A}}\text{quivalenzrelation})$$

die Menge der Äquivalenzklassen:

$$M/\sim = \{[a] : a \in M\} \subset \mathcal{P}(M).$$

**Lemma 2.15** *Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , und es seien  $a, b \in M$ . Dann sind äquivalent:*

- i)  $a \sim b$ ;
- ii)  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ;
- iii)  $[a] = [b]$ .

*Beweis.* i)  $\implies$  iii)  $a \sim b, c \in [a] \implies a \sim b, c \sim a$ , und damit  $c \sim b$ , also  $[a] \subset [b]$ . Aus  $b \sim a$  folgt genauso  $[b] \subset [a]$ .

iii)  $\implies$  ii) ist völlig banal.

ii)  $\implies$  i) Ist  $c \in [a] \cap [b]$ , so ist  $c \sim a$ , also auch  $a \sim c$ , und  $c \sim b$  und damit  $a \sim b$ .  $\square$

*Bemerkung.* Offensichtlich gilt

$$M = \bigcup_{A \in M/\sim} A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad \text{wenn } A_1 \neq A_2 \text{ in } M/\sim.$$

Eine Äquivalenzrelation zerlegt daher  $M$  *disjunkt* in die Äquivalenzklassen; wir schreiben dann auch

$$M = \bigsqcup_{A \in M/\sim} A.$$

(Manche Autoren verwenden auch das Symbol  $\dot{\sqcup}$  anstelle von  $\bigsqcup$ ). Ist umgekehrt  $I$  eine Menge und  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{P}(M)$ ,  $\iota \mapsto A_\iota$ , eine Abbildung mit

$$M = \bigsqcup_{\iota \in I} A_\iota, \quad \text{d. h. } A_\iota \cap A_\kappa = \emptyset, \quad \iota \neq \kappa, \quad \bigcup_{\iota \in I} A_\iota = M,$$

so wird durch  $a \sim b : \iff \exists \iota \in I$  mit  $a, b \in A_\iota$  eine Äquivalenzrelation erklärt.

Man nennt eine Relation  $R$  eine *Ordnung* auf  $M$  und  $M$  eine durch  $R$  *geordnete* Menge, wenn sie

i) *reflexiv* ist, d. h. wenn  $aRa$  für alle  $a \in M$  gilt;

ii) *antisymmetrisch* ist, d. h.  $aRb \wedge bRa \implies a = b$ ;

iii) *transitiv* ist:  $aRb \wedge bRc \implies aRc$ .

Wir schreiben dann meist  $a \leq b$  anstelle von  $aRb$ , wenn dies zu keinen Mißverständnissen führen kann. (Man beachte z. B., daß in diesem Sinne auch  $\geq$  eine Ordnung auf  $\mathbb{N}$  ist). Man schreibt  $a < b$  für  $a \leq b$ ,  $a \neq b$ . Ferner steht  $b \geq a$  für  $a \leq b$  und  $b > a$  für  $a < b$ .

Auf jeder Teilmenge  $A \subset M$  wird durch eine Ordnung  $\leq$  auf  $M$  eine solche auf  $A$  induziert; man nennt sie die *induzierte Ordnung* auf  $A$ .

*Beispiele.* 1.  $\mathcal{P}(M)$  mit den Ordnungen  $\subset$  und  $\supset$ .

2.  $\mathbb{N}$  mit  $\leq$  und  $\geq$ .

*Definition.* a) Elemente  $a, b \in M$  heißen bzgl.  $\leq$  *vergleichbar*, wenn  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt und damit genau eine der Relationen  $a = b$ ,  $a < b$ ,  $b < a$  besteht.

b) Eine *Ordnung* heißt eine *totale* oder *lineare Ordnung*, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind.

*Bemerkung.* Manche Autoren verwenden den Begriff „Ordnung“ nur für „totale Ordnung“; die bei uns „Ordnung“ genannten Relationen werden dann als „Halbordnungen“ oder „partielle Ordnungen“ bezeichnet.

*Beispiele.* 1.  $\mathcal{P}(M)$  mit der Relation  $\subset$  ist i. a. *keine* totale Ordnung. (Gerade deshalb muß man auch Ordnungen im obigen Sinne betrachten).

2.  $\mathbb{N}$  wird durch  $\leq$  (und ebenso durch  $\geq$ ) total geordnet.

3. Man kann  $\mathbb{N}$  auch auf ganz andere Weisen total ordnen:

$$0 < 2 < 1 < 4 < 3 < 6 < 5 < \dots$$

oder

$$\dots < 4 < 3 < 2 < 1 < 0$$

oder

$$0 < 2 < 4 < 6 < \dots < 1 < 3 < 5 < 7 < \dots$$



Es gibt aber auch Ordnungen auf  $\mathbb{N}$ , die nicht linear sind, z. B.

$$\begin{cases} 0 < 2 < 4 < \dots, \\ 1 < 3 < 5 < \dots. \end{cases}$$

*Definition.* Ist  $R$  eine Ordnungsrelation auf  $M$ , so ist die zu  $R$  entgegengesetzte Relation  $R^{-1}$

$$aR^{-1}b \iff bRa$$

ebenfalls eine Ordnungsrelation auf  $M$ . Sie heißt auch die *inverse* Ordnung.

*Definition.* Es sei  $(M, \leq)$  eine Ordnung und  $A \subset M$  eine nichtleere Teilmenge. Ein Element  $a_0 \in A$  heißt ein *minimales* Element von  $A$  (schreibt man die Ordnung mit dem Zeichen  $\geq$ , so sagt man natürlich *maximales* Element), wenn

$$\{a \in A : a < a_0\} = \emptyset.$$

In dem letzten Beispiel hat  $\mathbb{N}$  selbst *zwei* minimale Elemente. In  $\mathcal{P}(M) \setminus \{0\}$  sind alle einelementigen Mengen minimal bzgl. der Inklusion.

*Bemerkung.* Ist  $\leq$  eine totale Ordnung, so besitzt  $A \neq \emptyset$  *höchstens ein* minimales Element  $a_0$ . Wenn es existiert, so schreiben wir

$$\min A := a_0$$

und nennen es *das* minimale oder *kleinste* Element von  $A$ .

*Definition.* Eine total geordnete Menge  $(M, \leq)$  heißt *wohlgeordnet*, wenn für alle  $A \subset M$ ,  $A \neq \emptyset$ , das minimale Element  $\min A$  existiert.  $\leq$  heißt dann auch eine *Wohlordnung*.

Wir haben in Satz 11 gezeigt, daß die Menge der natürlichen Zahlen wohlgeordnet ist. Man kann diese Erkenntnis auch zur ordnungstheoretischen Charakterisierung der natürlichen Zahlen heranziehen.

**Satz 2.16 (Erhard Schmidt)** *Es sei  $(N, \leq)$  eine (nichtleere) wohlgeordnete Menge mit den Eigenschaften:*

1. *Jedes  $n \neq 0 := \min N$  besitzt einen Vorgänger, d. h. es existiert  $\varphi(n) < n$  und aus  $m < n$  folgt  $m = \varphi(n)$  oder  $m < \varphi(n)$ .*
2.  *$N$  besitzt kein größtes Element.*

*Dann ist  $N$  als geordnete Menge „isomorph“ zu  $\mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren in  $N$  eine *Nachfolgeabbildung*. Es sei  $n \in N$  gegeben; dann ist wegen der Eigenschaft 2. die Menge

$$\{m \in N : n < m\}$$

nicht leer, denn andernfalls wäre  $n$  ein größtes Element. Wir bezeichnen das Minimum dieser Menge mit  $\nu(n)$ . Aus 1. folgt sofort  $0 \notin \nu(N)$ , und da nach Definition  $n$  ein (stets eindeutig bestimmter) Vorgänger von  $\nu(n)$  ist, ist  $\nu$  injektiv. Ferner gilt:  $\nu \circ \varphi = \text{id}$ .

Es sei weiter  $M \subset N$  eine Teilmenge mit  $0 \in M$  und  $m \in M \implies \nu(m) \in M$ . Wäre  $M \neq N$ , so existierte das Minimum  $n_0 := \min(N \setminus M)$ . Somit ist  $\varphi(n_0) \in M$  und  $n_0 = \nu(\varphi(n_0)) \in M$ . Widerspruch!  $\square$

*Bemerkung.* Der Beweis benutzt keine Induktion. Somit kann man die Peano-Axiome ersetzen durch die Schmidtschen Axiome.

## Anhang 2: Das Zornsche Lemma

Wir fügen noch einige der merkwürdigen Konsequenzen aus dem Auswahlaxiom an, die die in ihm schlummernde Problematik erkennen lassen. Man folgert leicht aus dem ZORNschen Lemma (1935) (siehe unten), das zu dem Auswahlaxiom äquivalent ist, daß z. B. jeder Vektorraum (über einem beliebigen Körper  $\mathbb{K}$ ) eine Basis besitzt. Es ist bis heute nicht gelungen und wohl auch nicht möglich, eine solche HAMELSche Basis für den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$  *konstruktiv* anzugeben. Akzeptiert man die Existenz einer solchen Basis, so findet man z. B. *additive* Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die nicht  $\mathbb{R}$ -linear sind. Noch gravierender ist, daß der *Wohlordnungssatz* aus dem Auswahlaxiom abgeleitet werden kann.

*Definition.* Sei  $M$  eine geordnete Menge. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt eine *Kette*, wenn die von  $M$  auf  $A$  induzierte Ordnung tatsächlich eine lineare Ordnung ist.  $M$  heißt *induktiv* geordnet, wenn jede Kette  $A$  in  $M$  eine *obere Schranke* besitzt, d. h. wenn es zu  $A$  ein Element  $m \in M$  gibt mit  $a \leq m$  für alle  $a \in A$ .

*Bemerkung.* Da in einer induktiv geordneten Menge insbesondere die leere Kette eine obere Schranke besitzt, ist eine solche niemals leer.

**Satz 2.17 (Zornsches Lemma)** *Sei  $M$  eine induktiv geordnete Menge. Dann gibt es in  $M$  (mindestens) ein maximales Element.*

*Bemerkung.* Dieser Satz ist, wie von ZORN gezeigt wurde, auf der Grundlage der ZERMELO-FRAENKEL-Axiome der Mengenlehre äquivalent zu dem Auswahlaxiom. Zorn war auch der erste, der diesen Satz auf algebraische Fragen anwandte. Sein eigentlicher Entdecker ist aber KURATOWSKI. Siehe hierzu und zu weiteren äquivalenten Sätzen (wie z. B. den von ZERMELO stammenden *Wohlordnungssatz*) Redéi [27].

**Satz 2.18 (Wohlordnungssatz)** *Jede nichtleere Menge  $M$  kann so angeordnet werden, daß jede nichtleere Teilmenge  $N \subset M$  ein kleinstes Element besitzt.*

*Bemerkung.* Die Menge  $\mathbb{N}$  ist in der *üblichen* Ordnung wohlgeordnet, die Menge  $\mathbb{R}$  jedoch nicht, wie man an  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  sofort sieht. Im Lichte dieses Beispiels ist die Existenz einer Wohlordnung auf  $\mathbb{R}$  durchaus fragwürdig. Die Tatsache, daß man eine solche bis heute nicht konstruktiv angeben konnte, führt einige Mathematiker dazu, die Berechtigung des Auswahlaxioms zu negieren. Unsere Haltung im vorliegenden Text besteht jedoch darin, das Prinzip anzuerkennen, aber nur anzuwenden, wenn es unbedingt erforderlich ist.

Wir wollen stellvertretend für das Arbeiten mit dem Zornschen Lemma zwei bekannte Anwendungen besprechen.

**Satz 2.19** *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

*Beweis.* Es sei der Vektorraum  $V$  von Null verschieden (der triviale Vektorraum hat per definitionem die leere Menge als Basis). Man betrachte dann das System  $\mathcal{L}$  aller linear unabhängigen Teilmengen von  $V$ . Dieses System ist nicht leer und bezüglich der Mengeninklusion geordnet, und für eine vorgegebene Kette sieht man sofort, daß die Vereinigung aller ihrer Mitglieder eine obere Schranke ist. Das nach dem Zornschen Lemma existierende maximale Element ist, wovon man sich schnell überzeugt, eine Basis.  $\square$

*Bemerkung.* Auf genau die gleiche Weise leitet man den *Basisergänzungssatz* ab.

**Satz 2.20** *Jeder von Null verschiedene Ring  $R$  mit Einselement besitzt mindestens ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$ , d. h. ein von  $R$  verschiedenes Ideal mit der Eigenschaft, daß jedes andere,  $\mathfrak{m}$  umfassende Ideal  $\mathfrak{a}$  mit  $\mathfrak{m}$  oder mit  $R$  übereinstimmt.*

*Beweis.* Zur Erinnerung (der noch nicht initiierte Leser findet die wesentlichen Begriffe im Kapitel 5 erläutert): Ein Ideal  $\mathfrak{a}$  in dem Ring  $R$  ist eine Teilmenge, die unter Addition und Multiplikation mit Elementen aus  $R$  abgeschlossen ist. Die Menge  $\mathcal{I}$  aller von  $R$  verschiedenen Ideale ist *nicht leer*, da das

*Nullideal* stets in diesem System enthalten ist, und *geordnet* bezüglich mengentheoretischer Inklusion. Ferner besitzt eine Kette von Idealen stets eine obere Schranke, nämlich die Vereinigung aller ihrer Mitglieder, von der man leicht die Idealeigenschaft nachweist und zeigt, daß sie nicht ganz  $R$  sein kann. Jedes *maximale Element* in der Menge  $\mathfrak{J}$  ist dann ein maximales Ideal.  $\square$

### 3 Endliche und unendliche Mengen

#### 3.1 Gleichmächtigkeit

*Definition.* Zwei Mengen  $A, B$  heißen nach CANTOR *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt. Wir schreiben in diesem Fall  $A \approx B$ .

*Bemerkung.* Die leere Menge  $\emptyset$  ist nur zu sich selbst gleichmächtig.

**Satz 3.1** *Es seien  $A, B, C$  Mengen. Dann gelten die folgenden Regeln für Gleichmächtigkeit :*

- i)  $A \approx A$  (Reflexivität)
- ii)  $A \approx B \implies B \approx A$  (Symmetrie)
- iii)  $(A \approx B \wedge B \approx C) \implies A \approx C$  (Transitivität)

*Mit anderen Worten: Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* i)  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  ist eine Bijektion.

ii) Sei  $f : A \rightarrow B$  bijektiv. Dann ist auch  $f^{-1}$  bijektiv.

iii) Mit  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  ist auch  $g \circ f : A \rightarrow C$  bijektiv. □

#### 3.2 Endliche und unendliche Mengen

*Definition.* Es seien  $m, n$  natürliche Zahlen mit  $m \leq n$ . Dann sei  $[m, n] := \{x \in \mathbb{N} : m \leq x \leq n\}$ . Eine Menge  $M$  heißt *endlich*, wenn sie leer oder zu einer Menge  $[1, n]$ ,  $n \geq 1$  gleichmächtig ist. Wenn dies nicht der Fall ist, so heißt sie *unendlich*. Ist  $M \approx \mathbb{N}$ , so nennt man  $M$  *abzählbar unendlich*, da man  $M$  aufschreiben kann in der Form

$$M = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Endliche nichtleere Mengen schreiben wir entsprechend

$$M = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Man nennt  $M$  *höchstens abzählbar*, wenn  $M$  endlich oder abzählbar unendlich ist.

Es ist a priori nicht klar, daß Endlichkeit und abzählbare Unendlichkeit verschiedene Begriffe sind. Dies soll im folgenden geklärt werden. Außerdem werden wir zeigen, daß je zwei unendliche Mengen nicht notwendig gleichmächtig sein müssen. Dies hat als erster CANTOR (1845–1918) bemerkt und damit seine Theorie der Kardinalzahlen begründet, in der es ganze Hierarchien von „Unendlichkeiten“ gibt.

Wir beginnen mit einem völlig harmlosen

**Lemma 3.2** *Ist  $\varphi : [1, m] \rightarrow [1, n]$  injektiv, so ist notwendig  $m \leq n$ .*

*Beweis* (Induktion nach  $m \geq 1$ ). Für  $m = 1$  ist nichts zu zeigen. Es sei also  $\Phi : [1, m+1] \rightarrow [1, n]$  injektiv mit  $m \geq 1$ . Setze  $\Phi(m+1) =: j$ . Wir betrachten dann die Abbildung  $\tau : [1, n] \rightarrow [1, n]$  mit

$$\tau(j) = n, \quad \tau(n) = j, \quad \tau(i) = i, \quad i \in [1, n] \setminus \{j, n\}.$$

(Ist  $j = n$ , so ist  $\tau = \text{id}_{[1, n]}$ ). Offensichtlich ist  $\tau$  bijektiv und damit  $\tau \circ \Phi : [1, m+1] \rightarrow [1, n]$  injektiv mit  $(\tau \circ \Phi)(m+1) = n$ . Es ist notwendig  $n \geq 2$  und die Einschränkung

$$\varphi = \tau \circ \Phi|_{[1, m]} : [1, m] \rightarrow [1, n-1]$$

injektiv. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $m \leq n-1$ , also  $m+1 \leq n$ . □

Nur eine Umformulierung dieses Lemmas ist das

**Lemma 3.3 (Schubfach-Prinzip)** Verteilt man  $m$  Gegenstände auf  $n < m$  Schubkästen, so enthält ein Kasten mindestens zwei Gegenstände.

Eine wichtige Folgerung ist der

**Satz 3.4** Ist  $M$  endlich und  $M \approx [1, n]$ , so ist die Zahl  $n$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Aus  $M \approx [1, n]$  und  $M \approx [1, m]$  folgt  $[1, m] \approx [1, n]$  und wegen des obigen Lemmas  $m \leq n \leq m$ , also  $m = n$ .  $\square$

*Definition.* In der vorigen Situation nennt man die natürliche Zahl  $n \geq 1$  die *Anzahl* oder *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* von  $M$  und schreibt  $\#M = n$  oder  $|M| = n$  oder  $\text{card } M = n$ . Man setzt  $\text{card } \emptyset = 0$ . Ist  $M$  unendlich, so schreiben wir  $\text{card } M = \infty$ . (Wir verwenden das Symbol  $\text{card } M$  aber auch differenzierter als *Kardinalzahl* von  $M$ ; siehe den Anhang zu diesem Kapitel).

Man kann (nichtleere) endliche Mengen und ihre Kardinalität auch wie folgt charakterisieren.

**Satz 3.5** Es sei  $M \neq \emptyset$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- a)  $M$  ist endlich ;
- b) es existiert eine surjektive Abbildung  $\sigma : [1, n_1] \rightarrow M$  ;
- c) es existiert eine injektive Abbildung  $\iota : M \rightarrow [1, n_2]$  ;
- d) es gibt keine injektive Abbildung  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow M$ .

Die Kardinalität von  $M$  ist das Minimum der möglichen natürlichen Zahlen in b) bzw. c).

*Beweis.* Wir argumentieren erneut vermittels eines Ringschlusses. Wenn  $M$  endlich ist, so ist b) mit  $n_1 = n := \#M$  erfüllt. Insbesondere ist  $\min \{n_1\} \leq n$ . Wird die Aussage b) vorausgesetzt, so gibt es eine Abbildung  $\iota : M \rightarrow [1, n_1]$  mit  $\sigma \circ \iota = \text{id}_M$ , die notwendigerweise injektiv ist (siehe Satz 0.3 und die Diskussion im Anschluß an den Beweis zu Satz 0.5). In unserer speziellen endlichen Situation läßt sich die Abbildung  $\iota$  sogar sehr konkret angeben: man ordne jedem Element  $x \in M$  das Minimum der nichtleeren Teilmenge  $\sigma^{-1}(x) \subset [1, n_1] \subset \mathbb{N}$  zu. Somit ist c) für  $n_2 = n_1$  erfüllt; insbesondere hat man  $\min \{n_2\} \leq \min \{n_1\}$ . Wenn wir an dieser Stelle schon annehmen, daß aus c) auch wieder a) folgt, so gewinnt man mit Lemma 2 und den vorstehenden Überlegungen die Ungleichungskette

$$n \leq \min \{n_2\} \leq \min \{n_1\} \leq n,$$

aus der sich sofort die letzte Bemerkung im Satz ergibt.

Es verbleibt noch der Nachweis der Implikationen c)  $\implies$  d) und d)  $\implies$  a). Nehmen wir dazu zuerst an, daß c) richtig sei, aber nicht d). Dann erhält man durch Komposition eine injektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow [1, n_2]$  und mit der Inklusion  $[1, n_2 + 1] \subset \mathbb{N}$  auch eine injektive Abbildung  $[1, n_2 + 1] \rightarrow [1, n_2]$ , was im Widerspruch zum Schubfachprinzip steht.

Wir beweisen die Kontraposition  $\neg a) \implies \neg d)$ . Es sei also  $M$  nicht endlich.  $M$  ist dann insbesondere nicht leer; wähle also ein  $x_0 \in M$ . Angenommen, wir hätten schon paarweise verschiedene Elemente  $x_0, \dots, x_n$  in  $M$  gefunden. Da  $M$  nicht endlich ist, ist

$$M \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \neq \emptyset.$$

Wähle  $x_{n+1} \in M \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Dann sind auch  $x_0, \dots, x_{n+1}$  paarweise verschieden, und die hierdurch induktiv definierte Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow M \\ n \longmapsto x_n \end{cases}$$

ist injektiv.  $\square$

**Folgerung 3.6** *Teilmengen und Bilder endlicher Mengen sind endlich.*

Im folgenden Satz wird gezeigt, daß sich die *Endlichkeit* einer Menge durch „innere Eigenschaften“, also ohne Bezugnahme auf die natürlichen Zahlen feststellen läßt.

**Satz 3.7** *Es sei  $M \neq \emptyset$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent :*

- a)  $M$  ist endlich ;
- b)' jede surjektive Abbildung  $\beta : M \rightarrow M$  ist schon bijektiv ;
- c)' jede injektive Abbildung  $\alpha : M \rightarrow M$  ist schon bijektiv.

*Beweis.* a)  $\implies$  b)' Es sei ohne Einschränkung  $M = [1, n]$  und  $\beta : [1, n] \rightarrow [1, n]$  surjektiv. Wäre  $\beta$  nicht injektiv, so ließe sich sofort eine surjektive Abbildung  $\beta' : [1, n-1] \rightarrow [1, n]$  konstruieren, was wegen Satz 5 den Unsinn  $\#[1, n] \leq n-1$  zur Folge hätte.

b)'  $\implies$  c)' Die injektive Abbildung  $\alpha$  besitzt nach Satz 0.5 eine (surjektive) Linksinverse, die wegen b)' bijektiv ist. Somit ist auch  $\alpha$  bijektiv.

c)'  $\implies$  d) (aus Satz 5). Sei  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow M$  injektiv. Schreibe dann  $M = \Gamma \cup (M \setminus \Gamma)$ ,  $\Gamma = \gamma(\mathbb{N})$ , und definiere  $\alpha : M \rightarrow M$  durch

$$\alpha : \begin{cases} \gamma(n) \mapsto \gamma(n+1), & n \geq 0 \\ x \mapsto x, & x \in M \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Dann ist  $\alpha$  injektiv, aber nicht surjektiv, da  $\gamma(0) \notin \alpha(M)$ . □

*Bemerkung.* Die Eigenschaften b)' bzw. c)' im vorigen Satz nehmen nur Bezug auf die beteiligte Menge, nicht aber auf die natürlichen Zahlen. Im mengentheoretischen Aufbau geht man daher von einer dieser Eigenschaften als *Definition* der endlichen Mengen aus und führt die natürlichen Zahlen als Äquivalenzklassen bzgl. der Gleichmächtigkeit von solchen endlichen Mengen ein.

Wir fassen noch einmal die charakterisierenden Eigenschaften von *unendlichen* Mengen zusammen. (Man verneine die Aussage c)' in Satz 7 bzw. d) in Satz 5).

**Folgerung 3.8** *Eine Menge  $M$  ist genau dann unendlich, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie eine abzählbar unendliche Teilmenge besitzt. Insbesondere sind abzählbar unendliche Mengen tatsächlich unendlich.*

### 3.3 Höchstens abzählbare Mengen

Wir können jetzt auch die *höchstens abzählbaren* Mengen charakterisieren.

**Satz 3.9** *Es sei  $M \neq \emptyset$ . Äquivalent sind :*

- i)  $M$  ist höchstens abzählbar ;
- ii)  $M$  ist zu einer Teilmenge von  $\mathbb{N}$  gleichmächtig ;
- iii) es gibt eine surjektive Abbildung  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow M$ .

*Beweis.* Wir zeigen i)  $\implies$  iii)  $\implies$  ii)  $\implies$  i). i)  $\implies$  iii) folgt sofort aus der Definition. iii)  $\implies$  ii) ergibt sich wie im Beweis von Satz 5: Zu  $\beta$  existiert eine ganz konkret angebbare (injektive) Rechtsinverse  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{N}$ , so daß also  $M \approx \alpha(M) \subset \mathbb{N}$ . ii)  $\implies$  i) ist der Inhalt des folgenden Satzes. □

**Satz 3.10** *Jede unendliche Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist abzählbar unendlich.*

*Beweis.* Es sei  $M \subset \mathbb{N}$  eine unendliche Teilmenge. Also existiert  $x_0 = \min M$ ; m. a. W.:

$$M \cap \{x \in \mathbb{N} : x \leq x_0\} = \{x_0\}.$$

Es seien nun  $x_0 < \dots < x_n$  schon konstruiert mit

$$M \cap \{x \in \mathbb{N} : x \leq x_n\} = \{x_0, \dots, x_n\};$$

dann ist die Menge  $M \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ , und mit ihrem Minimum  $x_{n+1}$  gilt  $x_{n+1} > x_n$  und

$$M \cap \{x \in \mathbb{N} : x \leq x_{n+1}\} = \{x_0, \dots, x_{n+1}\}.$$

Durch diese Konstruktion erhält man eine injektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit  $\varphi(\mathbb{N}) \subset M$ . Es bleibt zu zeigen, daß

$$\varphi(\mathbb{N}) = M.$$

Dazu bemerken wir als erstes, daß aus  $x_0 < x_1 < \dots$  sofort  $x_n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt. Folglich ist

$$M \subset \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [0, n] \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} [0, x_n] \subset \mathbb{N}$$

und damit jedes  $x \in M$  enthalten in mindestens einer Menge  $[0, x_n]$ . Es folgt

$$x \in M \cap [0, x_n] = \{x_0, \dots, x_n\},$$

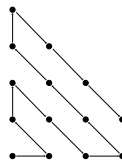
also

$$x = x_j = \varphi(j) \in \varphi(\mathbb{N}), \quad j \in [0, n]. \quad \square$$

Wir fügen noch einige Aussagen über höchstens abzählbare Mengen an. Sie sind allesamt Folgerungen aus dem nachstehenden Lemma.

**Lemma 3.11**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$ .

*Beweis.* Man kann leicht eine Bijektion  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  angeben, etwa nach dem folgenden Schema (die Details überlassen wir dem Leser):



Figur 3.1

**Folgerung 3.12** Sind  $A_1, \dots, A_n$  abzählbar unendlich, so auch  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

*Beweis.* Induktion nach  $n$ . □

**Satz 3.13** *Es sei  $I$  eine höchstens abzählbare Indexmenge, und für jedes  $\iota \in I$  sei die Menge  $A_\iota$  höchstens abzählbar. Dann ist auch die Vereinigungsmenge*

$$A := \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$$

*höchstens abzählbar.*

*Beweis.* Es seien  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow I$  und  $\beta_\iota : \mathbb{N} \rightarrow A_\iota$  surjektive Abbildungen. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow & A \\ (m, n) \longmapsto & \beta_{\gamma(m)}(n) \end{cases}$$

surjektiv. Schaltet man noch eine Bijektion  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vor, so folgt die Behauptung. □

**Satz 3.14**  *$\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abzählbare Mengen.*

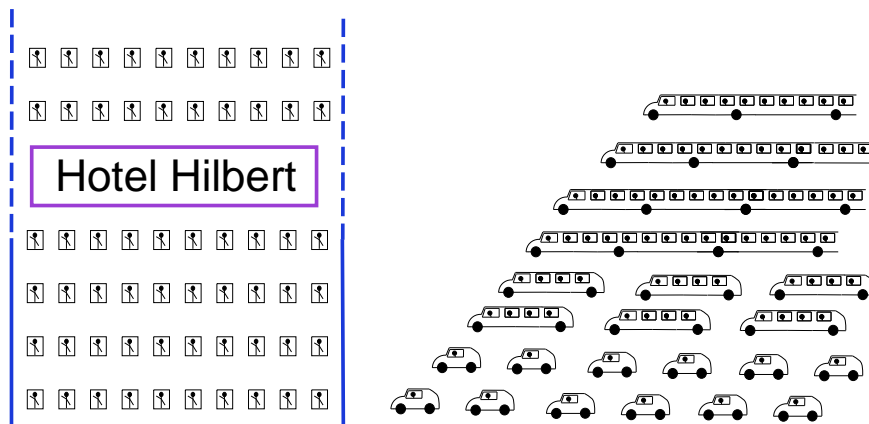
*Beweis.* Wegen  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$  ist  $\mathbb{Z}$  abzählbar. Da die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (a, b) \longmapsto & \frac{a}{b} \end{cases}$$

surjektiv ist, ist auch  $\mathbb{Q}$  abzählbar. □

### 3.4 Hilberts Hotel

Die vorstehenden Ergebnisse werden gern scherzhaft mit HILBERTS *Hotel* veranschaulicht. Dieses berühmte Hotel in Göttingen besitzt abzählbar unendlich viele Einzelzimmer, die alle belegt sind. Es haben sich aber noch weitere voll besetzte Kleinbusse (mit endlich vielen) und moderne Großbusse (mit abzählbar vielen Sitzplätzen) angemeldet. Sogar, wenn abzählbar viele von diesen Bussen ankommen, können alle ihre Insassen im Hotel untergebracht werden !



Figur 3.2



### 3.5 Überabzählbare Mengen

Bisher kennen wir außer den endlichen nur höchstens abzählbar unendliche Mengen. Cantor hat aber als erster entdeckt, daß wir mit dem Teufel der Unendlichkeit von  $\mathbb{N}$  weit schlimmeren Ungeheuern erlauben, sich in der Mathematik zu tummeln.

**Satz 3.15 (Cantor 1899)** *Besitzt  $A$  mindestens zwei Elemente, so ist die Menge  $A^{\mathbb{N}} = \text{Abb}(\mathbb{N}, A)$  der Folgen in  $A$  überabzählbar, d. h. weder endlich noch abzählbar unendlich.*

*Beweis.* Sei  $\mathbb{N} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$  eine surjektive Abbildung. Wir bezeichnen mit  $a^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots)$  das Bild von  $j \in \mathbb{N}$  in  $A^{\mathbb{N}}$ . Somit schreibt sich jedes  $a \in A^{\mathbb{N}}$  als  $a^{(j)}$  für mindestens ein  $j$ . Betrachte nun ein Element  $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$  mit  $\alpha_j \neq a_j^{(j)}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  (ein solches existiert nach Voraussetzung an  $A$ ). Dann ist  $\alpha$  von allen  $a^{(j)}$  verschieden, denn  $\alpha = a^{(j)}$  impliziert insbesondere  $\alpha_j = a_j^{(j)}$ . Widerspruch!  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Man nennt die Beweisidee aus naheliegenden Gründen das Cantorsche *Diagonalverfahren*.

2. Mit diesem Verfahren folgt auch, daß die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen und, da die Menge  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, auch die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  der *irrationalen Zahlen* überabzählbar ist (denn sonst wäre  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  doch abzählbar). *Irrationalzahlen* kann man leicht angeben. Es sei z. B. eine quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

gegeben. Dann sind die Wurzeln von der Form

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{\Delta}),$$

also nur dann reell, wenn  $\Delta := a^2 - 4b \geq 0$ . Ist  $\Delta$  keine Quadratzahl in  $\mathbb{Q}$ , also z. B.

$$\Delta = 2 \quad (a = 1, b = -\frac{1}{4}) \quad \text{oder} \quad \Delta = 5 \quad (a = 1, b = -1),$$

so ist  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q}$  und damit auch  $x_{1,2}$  irrational. Man sieht leicht, daß in diesem Fall

$$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{a + b\sqrt{\Delta} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ein  $\mathbb{Q}$  echt umfassender Unterkörper von  $\mathbb{R}$  ist (ein sogenanntes *quadratischer Erweiterungskörper* von  $\mathbb{Q}$ ).

Allgemeiner sagen wir:  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist eine *algebraische Zahl* (vom Grad  $\leq n$ ,  $n \geq 1$ ), wenn es ein *normiertes* Polynom  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Q}[x]$  vom Grad  $\deg P = n$  gibt, so daß  $P(\alpha) = 0$ . Nun ist

$$\{P \in \mathbb{Q}[x] : P \text{ normiert, } \deg P = n\} \approx \mathbb{Q}^n,$$

also abzählbar, und jedes Polynom  $P$  mit  $\deg P = n$  hat höchstens  $n$  reelle Nullstellen. Infolgedessen ist die Menge

$$\mathbb{A}_n = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist algebraisch vom Grad } \leq n\}$$

eine abzählbare Menge; speziell ist  $\mathbb{A}_1 = \mathbb{Q}$ . Man kann ziemlich elementar beweisen, daß die Menge

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n$$

der algebraischen Zahlen einen Unterkörper von  $\mathbb{R}$  bildet. Da auch  $\mathbb{A}$  abzählbar ist, ist sogar die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$  der *transzendenten* Zahlen überabzählbar. Prominente Beispiele sind die Zahlen  $e$  und  $\pi$ .

### 3.6 Unendliche Mengen verschiedener Mächtigkeit

Mit derselben Methode wie bei Satz 15 beweist man die folgende Verschärfung.

**Satz 3.16** *Es sei  $M \neq \emptyset$  und  $\text{card } A \geq 2$ . Dann gilt :*

- a) *es gibt eine Injektion  $M \rightarrow A^M$ ,*
- b)  *$M$  und  $A^M$  sind nicht gleichmächtig.*

*Beweis.* a) Man ordne jedem Element  $m \in M$  die Abbildung  $\chi_m \in A^M = \text{Abb}(M, A)$  zu, die durch

$$\chi_m(n) = \begin{cases} a_1, & n = m \\ a_2, & n \neq m \end{cases}$$

definiert ist, wobei  $a_1, a_2 \in A$ ,  $a_1 \neq a_2$ , fest gewählt seien. Die Abbildung

$$\begin{cases} M \longrightarrow A^M \\ m \longmapsto \chi_m \end{cases}$$

ist injektiv, da  $\chi_{m_1} = \chi_{m_2}$ ,  $m_1 \neq m_2$ , zu dem Widerspruch  $a_1 = \chi_{m_1}(m_1) = \chi_{m_2}(m_1) = a_2$  führt.

b) Wären  $M$  und  $A^M$  gleichmächtig, so könnte man  $A^M$  in der Form  $\Phi = \{\varphi_m : m \in M\}$  schreiben. Eine solche Menge kann aber niemals alle Abbildungen von  $M$  nach  $A$  enthalten; denn ist  $n \in M$  gegeben, so definiere man  $\varphi(n) \in A$  so, daß  $\varphi(n) \neq \varphi_n(n)$ . Die hierdurch gegebene Abbildung  $\varphi : M \rightarrow A$  kann aber mit keinem  $\varphi_m$  übereinstimmen, denn wäre  $\varphi = \varphi_m$ , also  $\varphi(n) = \varphi_m(n)$  für alle  $n$ , so wäre insbesondere  $\varphi(m) = \varphi_m(m)$  im Widerspruch zur Definition von  $\varphi$ .  $\square$

**Folgerung 3.17** *Es sei  $M \neq \emptyset$ . Dann ist die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  nicht zu  $M$  gleichmächtig.*

*Beweis.* Ist  $A \subset M$  eine Teilmenge, so definiere man die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}$  durch

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & m \in A \\ 0, & m \notin A. \end{cases}$$

Man überzeugt sich sofort davon, daß die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0, 1\}^M \\ A \longmapsto \chi_A \end{cases}$$

bijektiv ist. Der Rest folgt dann aus dem vorigen Satz.  $\square$

*Bemerkung.* Zu jeder überabzählbaren Menge kann man also, anschaulich gesprochen, Mengen von noch „größerer“ Kardinalität angeben (siehe auch den Anhang zu diesem Kapitel).

### 3.7 Elementare kombinatorische Formeln

Wir beschäftigen uns am Ende dieses Kapitels mit einigen *Grundfragen der Kombinatorik*. Die erste Grundfrage lautet: Wie oft kann man  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge auswählen,  $0 \leq k \leq n$ , oder schlicht mathematisch formuliert: man bestimme

$$A(n, k) := \text{card} \{ A \in \mathcal{P}([1, n]) : \text{card } A = k \} \in \mathbb{N}^* .$$

Es ist, auch für  $n = 0$ ,  $A(n, 0) = 1$  und, wegen unseres Hauptlemmas für endliche Mengen (Lemma 2), auch  $A(n, n) = 1$ . Hat man nun eine  $k$ -elementige Teilmenge  $A$  von  $[1, n+1]$  mit  $1 \leq k \leq n$ , so ist entweder  $n+1 \notin A$  und damit  $A \subset [1, n]$   $k$ -elementig oder  $n+1 \in A$  und  $A \setminus \{n+1\} \subset [1, n]$   $(k-1)$ -elementig. Es ergibt sich die Rekursionsformel

(\*) 
$$A(n + 1, k) = A(n, k) + A(n, k - 1),$$

aus der man mittels des Pascalschen Dreiecks alle Werte  $A(n, k)$  sukzessiv berechnen kann:

				1						
				1	1					
			1	2	1					
		1	3	3	1					
	1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1					
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Führt man die *Fakultät* einer natürlichen Zahl  $n$  induktiv ein durch

$$0! = 1, \quad (n + 1)! = n!(n + 1),$$

so gewinnt man aus der obigen Rekursionsformel leicht die Beziehung

$$k!(n - k)! A(n, k) = n!.$$

Also ist  $n!$  in  $\mathbb{N}^*$  immer durch  $k!(n - k)!$  teilbar, und man kann schreiben

$$A(n, k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Offensichtlich ist dann auch  $A(n, n - k) = A(n, k)$ . Man schreibt diese Zahlen auch symbolisch in der Form

$$\binom{n}{k} := A(n, k)$$

(gelesen „ $n$  über  $k$ “) und nennt sie dann die *Binomialkoeffizienten* wegen ihres Auftretens in der *binomischen Formel* (siehe Kapitel 5).

Auch  $n!$  läßt sich leicht kombinatorisch interpretieren. Fragt man, auf wieviele verschiedene Weisen man  $n$  Dinge anordnen kann, so fragt man nach  $\text{card Perm}([1, n])$ , also nach der *Ordnung*<sup>7</sup> der *symmetrischen Gruppe*  $\mathfrak{S}_n$  (zu dieser Bezeichnung siehe Kapitel 4). Es ist sofort einzusehen, daß  $\text{card } \mathfrak{S}_n = n!$ .

---

<sup>7</sup>Der Begriff der Ordnung einer endlichen Gruppe hat nichts zu tun mit dem Ordnungsbegriff, den wir im Anhang zu Kapitel 2 diskutiert haben.

## Anhang: Kardinalzahlen und Kontinuumshypothese

Wir wollen hier noch kurz auf die Konstruktion der *Kardinalzahlen* eingehen, ohne die Einzelheiten ausführlich zu erläutern. Der interessierte Leser sei wieder auf das Buch [23] verwiesen.

Wir haben oben gesehen, daß in der Klasse  $\mathfrak{M}$  aller Mengen durch die Relation  $\approx$  der Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die entsprechende Äquivalenzklasse einer Menge  $M$  bezeichnen wir mit  $\text{card } M$  und nennen sie die *Kardinalzahl* von  $M$ . Es ist also  $\text{card } M_1 = \text{card } M_2 \iff M_1 \approx M_2$ . In der Klasse der Kardinalzahlen ist die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen enthalten: man identifiziert 0 mit  $\text{card } \emptyset$ , und ist  $n$  mit  $\text{card } M$  identifiziert, so ordne man dem Nachfolger  $n'$  die Kardinalzahl  $\text{card } M \cup \{M\}$  zu. Mit anderen Worten: man identifiziert die Elemente von  $\mathbb{N}$  mit den Mächtigkeitsklassen von

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

Tatsächlich kann man auf diese Weise die natürlichen Zahlen aus der Mengentheorie begründen, wobei man allerdings Vorsicht walten lassen muß, indem man die Gültigkeit eines Axioms voraussetzen hat, das die Existenz von sogenannten *induktiven Mengen* garantiert (siehe loc. cit.).

Man sagt,  $M_1$  sei von *höchstens gleicher Mächtigkeit* wie  $M_2$ , wenn  $M_1$  zu einer Teilmenge von  $M_2$  gleichmächtig ist, wenn es also eine Injektion  $M_1 \hookrightarrow M_2$  gibt. Wir schreiben dann  $M_1 \lesssim M_2$ . Da diese Aussage bei Übergang zu gleichmächtigen Mengen erhalten bleibt, können wir eine entsprechende Relation  $\text{card } M_1 \preceq \text{card } M_2$  für Kardinalzahlen einführen. Diese Relation ist offensichtlich reflexiv und transitiv. Sie ist tatsächlich eine *Ordnung*, da der folgende Satz von BERNSTEIN richtig ist (er wurde schon von CANTOR vermutet und unabhängig voneinander von F. BERNSTEIN, E. SCHRÖDER und R. DEDEKIND im Jahre 1897 bewiesen).

**Satz 3.18** *Für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  gilt:*

$$M_1 \lesssim M_2, M_2 \lesssim M_1 \implies M_1 \approx M_2.$$

*Beweis.* Siehe loc. cit. □

Durch  $\preceq$  wird auf der Klasse der Kardinalzahlen sogar eine *totale Ordnung* definiert. Aus dem Zornschen Lemma kann man nämlich das folgende Ergebnis ableiten, das seinerseits zu dem *Auswahlaxiom* äquivalent ist.

**Satz 3.19** *Für je zwei Mengen  $M_1, M_2$  gilt  $M_1 \lesssim M_2$  oder  $M_2 \lesssim M_1$ .*

*Beispiel.* Die Mengen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  sind nicht endlich. Man schreibt  $\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$  („Aleph“ 0),  $\text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$  ( $\mathfrak{c}$  für *Continuum*). Es gilt tatsächlich  $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ . Unsere frühere Schreibweise  $\text{card } \mathbb{N} = \infty$  und  $\text{card } \mathbb{R} = \infty$  bedeutet also nur, daß die Kardinalzahlen  $\text{card } \mathbb{N}$  und  $\text{card } \mathbb{R}$  nicht in  $\mathbb{N}$  liegen, nicht aber, daß sie gleich sind.

Aus der Folgerung 17 ergibt sich sofort die Beziehung

$$\text{card } M \prec \text{card } A^M$$

für  $M \neq \emptyset$  und mindestens zweielementiges  $A$  und insbesondere

$$\text{card } M \prec \text{card } \mathcal{P}(M)$$

wegen  $\mathcal{P}(M) \approx \{0, 1\}^M$ . Man schreibt deshalb auch (siehe weiter unten):

$$2^{\text{card } M} := \text{card } \mathcal{P}(M).$$

Insbesondere folgt aus der Dualentwicklung reeller Zahlen, daß  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ . Konstruiert man nun induktiv, ausgehend von  $M_0 := \mathbb{N}$ , sukzessive die Mengen  $M_{n+1} := \mathcal{P}(M_n)$ , so gewinnt man schon eine (abzählbar) unendliche Vielfalt von Unendlichkeiten.

*Bemerkung.* Es ist mit diesen Erläuterungen leicht, Cantors Argument für die Nichtexistenz der *Allmenge*  $\mathfrak{M}$  zu verstehen: aus  $\mathcal{P}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$  würde folgen:

$$\text{card } \mathcal{P}(\mathfrak{M}) \preceq \text{card } \mathfrak{M} \prec \text{card } \mathcal{P}(\mathfrak{M}) . \quad \text{Widerspruch !}$$

Die (*spezielle*) *Kontinuumshypothese* besagt, daß eine Menge, die mächtiger als  $\mathbb{N}$  ist, mindestens die Mächtigkeit von  $\mathbb{R}$  besitzen muß:

$$\aleph_0 \prec \text{card } M \implies \mathfrak{c} \preceq \text{card } M .$$

Offensichtlich ist sie äquivalent zu der Aussage: ist  $A \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge, so gibt es entweder eine Injektion  $A \hookrightarrow \mathbb{N}$  oder eine Injektion  $\mathbb{R} \hookrightarrow A$ . Wegen  $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$  kann man sie verallgemeinern zu der *allgemeinen Kontinuumshypothese*: Ist  $M$  eine unendliche Menge, so gibt es keine Menge, deren Kardinalzahl echt zwischen  $\text{card } M$  und  $\text{card } \mathcal{P}(M)$  liegt. Zu einer eleganteren Formulierung der allgemeinen Kontinuumshypothese braucht man wesentlich mehr Begriffe aus der allgemeinen Mengentheorie, insbesondere den Begriff der *Ordinalzahlen* und deren Arithmetik, auf die wir hier nicht eingehen wollen (siehe loc.cit). Es sei nur soviel gesagt, daß sich jede *unendliche* Kardinalzahl in der Form  $\aleph_\alpha$  mit einer Ordinalzahl  $\alpha$  schreiben läßt; wegen Folgerung 8 ist insbesondere  $\aleph_0 \preceq \aleph_\alpha$  für alle  $\alpha$ . Die allgemeine Kontinuumshypothese entspricht dann der Aussage

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} .$$

*Bemerkung.* Aus Arbeiten von Gödel (1939) und Cohen (1963) folgt, daß - unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der mengentheoretischen Axiome - weder eine Widerlegung noch ein Beweis der (speziellen und allgemeinen) Kontinuumshypothese möglich ist (siehe hierzu die Bemerkung im Abschnitt über das Auswahlaxiom nach Satz 0.3).

Man kann übrigens auch mit Kardinalzahlen wie mit den natürlichen Zahlen rechnen. Sind  $M$  und  $N$  Mengen, so existieren Mengen  $M'$  und  $N'$  mit  $M' \approx M$ ,  $N' \approx N$  und  $M' \cap N' = \emptyset$ . Man definiere z. B.  $M' := M \times \{0\}$ ,  $N' := N \times \{1\}$ . Daher sind die folgenden Definitionen unabhängig von den Repräsentanten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{card } M + \text{card } N := \text{card } (M \cup N) , \quad M \cap N = \emptyset \\ \text{card } M \cdot \text{card } N := \text{card } (M \times N) , \\ \text{card } M^{\text{card } N} := \text{card } \text{Abb}(N, M) . \end{array} \right.$$

Dann ist  $\text{card } \emptyset$  neutrales Element bzgl. der Addition,  $\text{card } \{\emptyset\}$  neutral bzgl. Multiplikation etc. Man mache sich weiter klar, daß sich die Kardinalzahlen z. B. bzgl. der Addition genauso wie die natürlichen Zahlen verhalten, d. h. daß z. B. das Assoziativ- und das Kommutativgesetz gelten. Diese sind nur Ausfluß der uns schon bekannten Regeln der Assoziativität und Kommutativität für die Vereinigung von zwei beliebigen Mengen und der daraus leicht abzuleitenden Implikation

$$A \cap B = \emptyset, (A \cup B) \cap C = \emptyset \implies B \cap C = \emptyset \text{ und } A \cap (B \cup C) = \emptyset .$$

## 4 Verknüpfungen, Halbgruppen und Gruppen

### 4.1 Magmen

*Definition.* Eine *Verknüpfung* (oder *Komposition*) auf einer nichtleeren Menge  $M$  ist eine Abbildung

$$v: M \times M \longrightarrow M,$$

die also jedem geordneten Paar  $(a, b)$ ,  $a, b \in M$ , ein neues Element  $v(a, b) \in M$  zuordnet. (Eigentlich müßten wir  $v((a, b))$  anstelle von  $v(a, b)$  schreiben). Wir verwenden oft auch Bezeichnungen wie  $avb$  („ $a$  verknüpft mit  $b$ “) oder  $a*b$  oder ähnliches. Betrachtet man  $M$  zusammen mit einer Verknüpfung  $v$ , so drücken wir dies durch das Symbol  $(M, v)$  aus („die Menge  $M$  zusammen mit der Verknüpfung  $v$ “). Man nennt  $(M, v)$  ein *Magma*.

*Beispiele.* 1.  $(\mathbb{N}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sind Magmen.

2. Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $\text{Abb}(X) := \text{Abb}(X, X)$  ein Magma mit der Verknüpfung

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \psi \circ \varphi.$$

Man beachte die Umkehrung der Reihenfolge in der Schreibweise! Selbstverständlich wird auch durch  $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi$  eine Magmastruktur auf  $\text{Abb}(A)$  erklärt.

3. Ist  $\emptyset \neq M' \subset M$ , so ist  $(M', v' := v|_{M' \times M'})$  genau dann ein Magma, wenn  $v(M' \times M') \subset M'$ . Man sagt dann auch, die Teilmenge  $M'$  sei *abgeschlossen* unter der Verknüpfung  $v$ , und nennt  $(M', v')$  ein *Untermagma* von  $(M, v)$ .

4. Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \geq 2$ , und  $\ell\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = \ell m\} = \{0, \ell, 2\ell, 3\ell, \dots\}$ . Dann sind  $(\ell\mathbb{N}, +)$  und  $(\ell\mathbb{N}, \cdot)$  Untermagmen von  $(\mathbb{N}, +)$  bzw.  $(\mathbb{N}, \cdot)$ .

5. Es sei  $P := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  die Menge der Primzahlen. Wegen  $3 + 5 = 8 \notin P$ ,  $3 \cdot 5 \notin P$  liefert die Einschränkung der Addition bzw. Multiplikation von natürlichen Zahlen auf  $P$  keine Magmastrukturen.

6. Es sei  $\text{Bij}(X) \subset \text{Abb}(X)$  die Menge der bijektiven Abbildungen einer nichtleeren Menge  $X$ . Da mit  $\varphi, \psi$  auch  $\psi \circ \varphi$  bijektiv ist, ist  $(\text{Bij}(X), \circ)$  ein Magma. Man schreibt hierfür auch  $\text{Perm}(X)$  oder  $\text{Sym}(X)$  und speziell  $\mathfrak{S}_n$ , wenn  $X = [1, n] \subset \mathbb{N}$  (auch die *symmetrische Gruppe in  $n$  Elementen* genannt).

7. Es sei  $X$  eine Menge und  $M := \mathcal{P}(X)$ . Dann sind  $(M, \cup)$  und  $(M, \cap)$  Magmen.

### 4.2 Halbgruppen

*Definition.* Ein Magma  $(M, *)$  heißt

- a) *assoziativ* oder auch eine *Halbgruppe*, wenn  $(a * b) * c = a * (b * c)$  für alle  $a, b, c \in M$  gilt;
- b) *kommutativ*, wenn  $a * b = b * a$  für alle  $a, b \in M$  gilt.

*Bemerkungen.* 1. Alle oben angeführten Magmen sind assoziativ. Im Falle von  $\text{Abb}(X)$  oder  $\text{Sym}(X)$  ergibt sich dies aus

$$(\chi \circ (\psi \circ \varphi))(x) = \chi((\psi \circ \varphi)(x)) = \chi(\psi(\varphi(x))),$$

$$((\chi \circ \psi) \circ \varphi)(x) = (\chi \circ \psi)(\varphi(x)) = \chi(\psi(\varphi(x))).$$

2. Ist ein Magma assoziativ (kommutativ), so auch jedes Untermagma.

3. In der Analysis treten fast nur assoziative Magmen auf. Wir können daher im Prinzip ohne den Begriff des *Magma*s auskommen und nur von Halbgruppen sprechen.

4. Alle oben angegebenen Magmen sind kommutativ, mit Ausnahme von

$$\begin{aligned} \text{Abb}(X), & \quad \text{wenn} \quad \text{card } X \geq 2, \\ \text{Bij}(X), & \quad \text{wenn} \quad \text{card } X \geq 3. \end{aligned}$$

Im ersten Fall seien  $x_1, x_2 \in X$  verschieden,  $\varphi$  vertausche  $x_1$  und  $x_2$  und  $\psi$  bilde  $x_1, x_2$  auf  $x_1$  ab. Dann gilt  $(\psi \circ \varphi)(x_j) = x_1$  und  $(\varphi \circ \psi)(x_j) = x_2$ ,  $j = 1, 2$ . Im zweiten Fall seien  $x_1, x_2, x_3 \in X$  paarweise verschieden.  $\varphi$  vertausche die  $x_j$  zyklisch, d. h.  $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$ , und  $\psi$  vertausche  $x_1$  und  $x_2$  (alle anderen Elemente bleiben fest, so daß  $\varphi$  und  $\psi$  tatsächlich bijektiv sind.) Dann gilt  $\psi \circ \varphi(x_1) = x_1$ , aber  $\varphi \circ \psi(x_1) = x_3$ .

### 4.3 Produkte von endlich vielen Elementen

*Definition.* Es seien Elemente  $a_1, \dots, a_n$  in einem Magma  $(M, *)$  gegeben. Man definiert dann induktiv für  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \leq n$ :

$$\prod_{j=1}^1 a_j := a_1, \quad \prod_{j=1}^k a_j := \left( \prod_{j=1}^{k-1} a_j \right) * a_k.$$

*Bemerkung.* Unser Satz 1.5 zur Begründung der induktiven Definition reicht in diesem Falle nicht aus. Wenn man päpstlicher als der Papst sein will, muß man die folgende Verallgemeinerung herleiten, was aber keine besonderen zusätzlichen Schwierigkeiten macht.

**Satz 4.1** *Es seien nichtleere Mengen  $A_j$  und Abbildungen  $g_j : A_j \rightarrow A_{j+1}$  vorgegeben,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es zu vorgegebenem  $a \in A_0$  genau eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A := \bigcup A_j$  mit  $\alpha(0) = a$ ,  $\alpha(n+1) = (g_n \circ \alpha)(n)$ .*

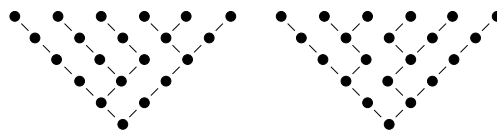
Nach Definition steht  $\prod_{j=1}^n a_j$  für das „Produkt“  $(\cdot \cdot ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4) \cdot \cdot \cdot$ , wofür man i. a. einfach  $a_1 * a_2 * \dots * a_n$  schreibt. Im Falle einer multiplikativ geschriebenen Verknüpfung läßt man oft die „Mal-Punkte“ einfach fort, im Falle einer additiv geschriebenen Komposition schreibt man  $a_1 + \dots + a_n$  bzw.  $\sum_{j=1}^n a_j$  für die entsprechende Bildung  $(\cdot \cdot ((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + \dots$ . Diese Schreibweise wird im assoziativen Fall (und nur dort !) gerechtfertigt durch den folgenden

**Satz 4.2** *Ist  $(M, *)$  eine Halbgruppe, so ist das Produkt  $a_1 * a_2 * \dots * a_n$  unabhängig von jeder Klammerung.*

*Bemerkung.* Der Satz impliziert insbesondere, daß in (additiv bzw. multiplikativ geschriebenen) Halbgruppen die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=m+1}^n a_j = \sum_{j=1}^n a_j, \quad \prod_{j=1}^m a_j \cdot \prod_{j=m+1}^n a_j = \prod_{j=1}^n a_j.$$

*Beweis* von Satz 2. Wir können Beklammerungen von  $n$ -elementigen Produkten durch „Graphen“ des folgenden Typs (nicht notwendig eindeutig) beschreiben:

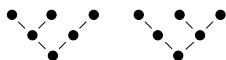


Figur 4.1

In beiden Beispielen ist die Beklammerung jeweils gegeben durch

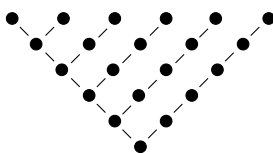
$$((a_1 * (a_2 * a_3)) * ((a_4 * a_5) * a_6)) .$$

Das Assoziativgesetz besagt, daß man Teilgraphen des folgenden Typs austauschen kann:



Figur 4.2

Das Ziel ist, mit diesen Operationen aus jedem zulässigen Graphen den folgenden zu machen:



Figur 4.3

Dies sieht man aber sofort durch Induktion. Es muß immer ein Paar  $a_i, a_{i+1}$  in einer Klammer auftreten, im obigen Beispiel sind dies  $a_2, a_3$ , aber auch  $a_4, a_5$ . Schreibt man  $b_i = a_i a_{i+1}$ , so gewinnt man ein neues geklammertes Paar mit  $n - 1$  Faktoren. Im obigen Beispiel hat man z. B. (bei ungeschickter Wahl)

$$(a_1 (a_2 a_3)) (b_4 a_6) .$$

Nach Induktionsvoraussetzung kann man hier beliebig umklammern:

$$(((a_1 a_2) a_3) b_4) a_6 .$$

Für unsere Graphen bedeutet dies, daß sie nach Induktionsvoraussetzung nach endlich vielen Anwendungen des Assoziativgesetzes die folgende Gestalt annehmen:

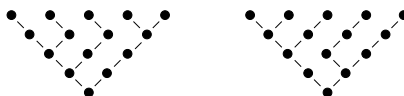


Figur 4.4

Für  $i = 1$  sind wir dann schon fertig, und bei  $i = 2$  brauchen wir nur noch einmal das Assoziativgesetz anzuwenden. Dies ist auch für  $i \geq 2$  der Fall: In unserem Beispiel ist ja

$$((a_1 a_2) a_3) b_4 = ((a_1 a_2) a_3) (a_4 a_5) = (((a_1 a_2) a_3) a_4) a_5 .$$

Im allgemeinen Fall muß man sich nur klar machen, daß die beiden folgenden Graphen die gleiche Beklammerung erzeugen:



Figur 4.5

und der letzte Graph wird mit einmaliger Anwendung des Assoziativgesetzes in die gewünschte Standardform gebracht. □



#### 4.4 Verallgemeinertes Assoziativ - Kommutativ - Gesetz

Ist die Halbgruppe  $(M, *)$  sogar kommutativ, so wird die Situation noch besser, da man dann die Produkte beliebig umordnen kann. Wir nennen die Elemente der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  (zu dieser Bezeichnung siehe oben) auch *Permutationen* von 1 bis  $n$ , denn ist  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , so ist die Folge  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  eine Permutation, d. h. eine *Umordnung* der Zahlen  $1, \dots, n$ .

**Satz 4.3 (Verallgemeinertes Assoziativ - Kommutativ - Gesetz)** *Ist das Magma  $M$  mit der Verknüpfung  $*$  eine kommutative Halbgruppe, so gilt für beliebige Elemente  $a_1, \dots, a_n \in M$  und jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , daß*

$$a_{\sigma(1)} * \dots * a_{\sigma(n)} = a_1 * \dots * a_n .$$

*Bemerkung.* Für  $n = 2$  folgt aus diesem Gesetz mit der Permutation  $1 \leftrightarrow 2$  das Kommutativgesetz

$$a_2 a_1 = a_1 a_2 .$$

Wählt man die Permutation  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  für  $n = 3$ , so erhält man unter Verwendung des Kommutativgesetzes

$$(a_1 a_2) a_3 = (a_2 a_3) a_1 = a_1 (a_2 a_3) ,$$

also auch das Assoziativgesetz.

Zum *Beweis* von Satz 3 können wir  $n \geq 3$  und  $\sigma(1) = j \neq 1$  voraussetzen. Es genügt dann zu zeigen, daß wir in dem Produkt  $a_1 \dots a_j$ ,  $j \geq 2$ , das Element  $a_j$  an die erste Stelle schaffen können. Dies geht induktiv wie im Beweis des vorigen Satzes:

$$\begin{aligned} a_1 \dots a_j &= (a_1 \dots a_{j-2}) (a_{j-1} \cdot a_j) = (a_1 \dots a_{j-2}) (a_j a_{j-1}) \\ &= (a_1 \dots a_{j-2} a_j) a_{j-1} = \dots = a_j (a_1 \dots a_{j-1}) . \end{aligned} \quad \square$$

*Bemerkung.* In einer (additiv geschriebenen) kommutativen Halbgruppe (wie  $(\mathbb{N}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$  etc.) gilt für Elemente  $a_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, n$ , die „Vertauschungsregel“:

$$\sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{jk} \right) .$$

Man kann also mit  $I = [1, m] \times [1, n] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  einfach

$$\sum_{(j,k) \in I} a_{jk}$$

schreiben.

#### 4.5 Neutrale Elemente in Magmen

*Definition.* Ein Element  $e$  in einem Magma  $(M, *)$  heißt ein *neutrales* Element, wenn

$$e * a = a * e = a \quad \text{für alle } a \in M .$$

Ein assoziatives Magma (also eine Halbgruppe), die ein neutrales Element besitzt, wird von manchen Autoren auch als *Monoid* bezeichnet.

*Beispiele.* 1. Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $\text{Abb}(X)$  mit der Komposition  $\circ$  eine Halbgruppe mit neutralem Element  $\text{id}_X$ .

2.  $(\mathbb{N}, +)$  besitzt das neutrale Element 0.

3.  $(\mathbb{N}, \cdot)$  und  $(\mathbb{N}^*, \cdot)$  besitzen 1 als neutrales Element.

4. Ist  $\mathbb{K}$  ein Körper (z. B.  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ ), so bezeichne  $\text{End}(\mathbb{K}^n)$  die Menge der *linearen* Abbildungen

$\alpha : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ . In der linearen Algebra wird gezeigt, daß die Komposition  $\beta \circ \alpha$  zweier linearer Abbildungen wieder linear ist.  $\text{End}(\mathbb{K}^n)$  wird dann zu einer Halbgruppe mit neutralem Element  $\text{id}_{\text{End}(\mathbb{K}^n)}$ . Repräsentiert man lineare Abbildungen  $\alpha$  (relativ zu einer Basis von  $\mathbb{K}^n$ ) durch eine  $n \times n$ -Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ , so entspricht der Komposition die Matrizenmultiplikation  $BA$  und dem neutralen Element die Einheitsmatrix

$$E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung.* In einem Magma ist das neutrale Element, wenn existent, tatsächlich eindeutig bestimmt. Sind nämlich  $e, e'$  neutral, so folgt

$$e' = e' e = e.$$

*Definition.* Eine Halbgruppe  $(H, *)$  heißt *kommutativ* oder *abelsch* (nach N. H. ABEL 1802 - 1829), wenn das unterliegende Magma kommutativ ist. In diesem Fall schreibt man meistens die Verknüpfung als Addition und 0 für das neutrale Element, sofern dieses existiert. Schreibt man die Verknüpfung als Multiplikation, so verwendet man meistens das Symbol 1 für das neutrale Element. Manche Autoren schreiben z. B.  $\mathbb{I}_n$  anstelle  $E_n$  für die Einheitsmatrix.

In einer kommutativen Halbgruppe  $(H, *)$  mit neutralem Element  $e$  ist für jede endliche Menge  $J$  und jede Abbildung  $\alpha : J \rightarrow H, j \mapsto \alpha(j) =: a_j$  das Produkt

$$\prod_{j \in J} a_j$$

wohldefiniert. Ist  $J = \emptyset$ , so setzt man

$$\prod_{j \in J} a_j := e.$$

Sind  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , so versteht man *im Allgemeinen* unter

$$\prod_{j=n_1}^{n_2} a_j \quad \text{das Produkt} \quad \prod_{j \in [n_1, n_2]} a_j.$$

Ist  $n_1 > n_2$ , so ist das Produkt also gleich  $e$  zu setzen; es bedeutet somit

$$\sum_{j=10}^1 a_j = 0, \quad a_j \in \mathbb{N}.$$

## 4.6 Invertierbare und inverse Elemente

*Definition.* Ein Element  $a$  in einer Halbgruppe  $H$  mit neutralem Element  $e$  heißt *invertierbar*, wenn es ein  $b \in H$  gibt mit  $b * a = a * b = e$ .

**Lemma 4.4** *Ist  $a$  invertierbar, so gibt es genau ein  $b$  mit  $b * a = a * b = e$ . Insbesondere ist auch  $b$  invertierbar.*

*Beweis.* Sei  $b'$  ein weiteres Inverses, so folgt

$$b' = b' * e = b' * (a * b) = (b' * a) * b = e * b = b. \quad \square$$

*Definition.* Man nennt  $b$  das *Inverse* von  $a$  und schreibt  $b = a^{-1}$  bei multiplikativer und  $b = -a$  bei additiver Schreibweise. Es ist also

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \text{und} \quad (-a) + a = a + (-a) = 0.$$

Im kommutativen Fall schreibt man bei invertierbarem  $b$  auch

$$b^{-1}a = ab^{-1} =: \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad (-b) + a = a + (-b) =: a - b.$$

Es gilt  $(a^{-1})^{-1} = a$  und  $-(-a) = a$ .

**Satz 4.5** *Es sei  $(H, *)$  eine Halbgruppe mit Einselement  $e$ . Dann ist*

$$G := \{ a \in H : a \text{ ist invertierbar} \}$$

eine Unterhalbgruppe von  $H$  mit Einselement  $e$ , d. h. es ist  $e \in G$  und aus  $a, b \in G$  folgt  $a * b \in G$ .

*Beweis.* Aus  $e * e = e$  folgt, daß  $e$  invertierbar ist mit  $e^{-1} = e$ . Ferner implizieren die Gleichungen  $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$  und  $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$ , daß  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .  $\square$

*Beispiele.* 1. In  $(\mathbb{N}, +)$  ist nur die 0 invertierbar, in  $(\mathbb{N}, \cdot)$  nur die 1.

2. Die invertierbaren Elemente von  $\text{Abb}(X)$  bilden die Menge  $\text{Perm}(X)$ .

3. Die invertierbaren Elemente von  $\text{End}(\mathbb{K}^n)$  sind die als Abbildungen invertierbaren linearen Abbildungen

$$\text{End}(\mathbb{K}^n) \cap \text{Perm}(\mathbb{K}^n) =: \text{Aut}(\mathbb{K}^n).$$

Nach Wahl eines Koordinatensystems werden diese repräsentiert durch die Matrizen in

$$\begin{aligned} \text{GL}(n, \mathbb{K}) &= \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \exists B \text{ mit } BA = E_n \} \\ &= \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \det A \neq 0 \}. \end{aligned}$$

## 4.7 Gruppen

*Definition.* Eine Halbgruppe  $(G, *)$  mit neutralem Element  $e$ , in der jedes Element invertierbar ist, heißt eine *Gruppe*.

**Lemma 4.6** *Die invertierbaren Elemente einer Halbgruppe mit Einselement bilden eine Gruppe.*

*Beispiele.* Man nennt

$\text{Perm}(X)$  die *Permutationsgruppe* auf  $X$ ,

$\mathfrak{S}_n$  die *symmetrische Gruppe* in  $n$  Elementen,

$\text{Aut}(\mathbb{K}^n)$  die (lineare) *Automorphismengruppe* von  $\mathbb{K}^n$ ,

$\text{GL}(n, \mathbb{K})$  die *allgemeine lineare Gruppe* vom Rang  $n$  über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

*Beispiel.* Es sei  $1 \leq k \leq n$ , und  $i_1, i_2, \dots, i_k$  seien paarweise verschiedene natürliche Zahlen in  $[1, n]$ . Dann bezeichnet man mit  $(i_1 i_2 \dots i_k)$  die Permutation  $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1, i \mapsto i, i \neq i_\kappa, \kappa = 1, \dots, k$ . Klar ist: jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  schreibt sich (bis auf Reihenfolge eindeutig) als Produkt solcher *Zyklen*, die paarweise „elementfremd“ sind. Einen Zyklus der Form  $(ij), i \neq j$ , nennt man eine *Transposition*. Wir haben schon mehrfach benutzt (und im Prinzip bewiesen): jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  ist ein Produkt  $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell$  mit

$$\tau_\lambda \in \{ (12), (13), \dots, (1n) \}, \quad \lambda = 1, \dots, \ell.$$

Erstaunlicherweise lassen sich die Gruppen-Axiome wesentlich vereinfachen.

**Satz 4.7** *Eine Halbgruppe  $(G, *)$  ist genau dann eine Gruppe, wenn folgendes gilt :*

- i) es existiert  $e \in G$  mit  $ea = a$  für alle  $a \in G$  (linksneutrales Element);  
 ii) für alle  $a \in G$  existiert ein Linksinverses  $b : ba = e$ .

*Beweis.* In jeder Gruppe gelten i) und ii). Seien umgekehrt i) und ii) erfüllt. Wähle zu  $a$  ein  $b$  mit  $ba = e$  und zu  $b$  ein  $c$  mit  $cb = e$ . Dann folgt  $ab = eab = cbab = ceb = cb = e$  und  $ae = aba = ea = a$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ebenso kann man zeigen, daß die Existenz eines rechtneutralen Elementes und von Rechtsinversen schon genügt. Dagegen reicht z. B. die Existenz eines linksneutralen Elementes und von Rechtsinversen i. a. nicht aus!

## 4.8 Reguläre Halbgruppen

Die Halbgruppen  $(\mathbb{N}, +)$  und  $(\mathbb{N}^*, \cdot)$  besitzen neutrale Elemente, sind aber weit davon entfernt, Gruppen zu sein. Damit sie zu Gruppen „erweitert“ werden können, müssen sie einer notwendigen Bedingung genügen.

**Satz 4.8** *Es sei  $H$  eine Unterhalbgruppe mit neutralem Element in der Gruppe  $(G, *)$ , d. h. das neutrale Element  $e$  von  $G$  ist in  $H$  enthalten, und für  $a, b \in H$  ist das (in  $G$  gebildete) Produkt  $ab \in H$ . Dann erfüllt  $H$  die beiden folgenden äquivalenten Bedingungen:*

- i) für  $a, b \in H$  besitzen die Gleichungen

$$ax = b, \quad ya = b.$$

jeweils höchstens eine Lösung in  $H$ ;

- ii) (Kürzungsregel) Für  $a \in H$  gilt:  $ax_1 = ax_2 \implies x_1 = x_2$  und  $y_1a = y_2a \implies y_1 = y_2$ . Oder mit anderen Worten: Die Abbildungen  $x \mapsto ax$  und  $y \mapsto ya$  auf  $H$  sind injektiv.

*Definition.* Eine Halbgruppe mit neutralem Element, die der Kürzungsregel genügt, heißt auch eine reguläre Halbgruppe.

*Beweis.* Es gelte  $ax_1 = ax_2$ ,  $a, x_1, x_2 \in H$ . Da  $a$  in  $G$  ein Linksinverses  $a^{-1}$  besitzt, kann man mit diesem von links multiplizieren und erhält  $x_1 = x_2$ . Die andere Gleichung behandelt man ebenso.  $\square$

**Satz 4.9**  $(\mathbb{N}, +)$  und  $(\mathbb{N}^*, \cdot)$  sind reguläre Halbgruppen.

*Beweis.* Nach einem früheren Lemma hat die Gleichung  $a + x = b$  höchstens eine Lösung  $x$  in  $\mathbb{N}$ . Also ist  $(\mathbb{N}, +)$  eine reguläre Halbgruppe (mit 0 als neutralem Element).

Es gelte weiter  $ax_1 = ax_2$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$ , und ohne Einschränkung  $x_1 \leq x_2$ , d. h.  $x_1 + s = x_2$ . Dann ergibt sich

$$ax_1 = ax_2 = ax_1 + as,$$

also nach dem Vorhergehenden  $as = 0$  und wegen der Nullteilerfreiheit von  $\mathbb{N}^*$  auch  $s = 0$ , d. h.  $x_1 = x_2$ .  $\square$

*Bemerkung.*  $(\mathbb{N}, \cdot)$  ist keine reguläre Halbgruppe.

## Anhang: Untergruppen, Normalteiler und Homomorphismen

Ist  $G$  eine Gruppe, so interessieren wir uns für die Frage, wann eine Teilmenge  $H \subset G$  mit der von  $G$  induzierten Verknüpfung selbst wieder eine Gruppe ist. Dazu muß zunächst  $H$  ein Unter magma von  $G$  sein, d. h.  $H$  muß abgeschlossen unter der gegebenen Verknüpfung sein:  $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ . Dies ist selbstverständlich nicht ausreichend, wie das Beispiel  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$  zeigt. Hierbei besitzt die Teilmenge nicht einmal ein neutrales Element. Also müssen wir die Existenz eines neutralen Elementes fordern. Nennen wir es  $f \in H$ , so ergibt sich aus  $f^2 = f$  und Multiplikation mit dem Inversen  $f^{-1} \in G$ , daß notwendigerweise  $f = e$ , wobei  $e$  das neutrale Element von  $G$  bezeichnet. Ebenso erkennt man sofort, daß das Inverse von  $a \in H$  mit dem Inversen  $a^{-1} \in G$  übereinstimmen muß. Somit ist das Unter magma  $H \subset G$  genau dann eine Gruppe unter der induzierten Verknüpfung, wenn  $e \in H$  und  $a^{-1} \in H$  für alle  $a \in H$ .

*Definition.* Unter den vorstehenden Voraussetzungen heißt  $H$  eine *Untergruppe* von  $G$ . Die nur aus dem neutralen Element bestehende Teilmenge ist eine Untergruppe; sie heißt die *triviale* Untergruppe von  $G$ .  $H$  wird eine *echte* Untergruppe von  $G$  genannt, wenn  $H$  nicht trivial und von  $G$  verschieden ist.

Man kann die obigen Bedingungen für Untergruppen auch anders formulieren.

**Lemma 4.10** *Eine nichtleere Teilmenge  $H$  der Gruppe  $G$  ist genau dann eine Untergruppe, wenn aus  $a, b \in H$  folgt, daß  $ab^{-1} \in H$ .*

*Beweis.* Das angegebene Kriterium ist offensichtlich notwendig. Ist umgekehrt dieses Kriterium erfüllt und  $a \in H$  ein beliebiges Element, so ist notwendig  $e = aa^{-1} \in H$  und dann auch  $a^{-1} = ea^{-1} \in H$ .  $\square$

*Beispiel.* Jede *endliche* Gruppe läßt sich als Untergruppe einer *symmetrischen* Gruppe realisieren.

Durch eine Untergruppe  $H \subset G$  werden auf natürliche Weise zwei Äquivalenzrelationen auf  $G$  definiert:  $a_1 \equiv a_2 : \Leftrightarrow a_1 a_2^{-1} \in H$  bzw.  $a_1^{-1} a_2 \in H$ . Im ersten Fall ist die Äquivalenzklassen eines Elementes  $b \in G$  die Menge

$$Hb := \{ab : a \in H\},$$

die man auch eine *Rechtsnebenklasse* von  $H$  nennt. Entsprechend ist die Äquivalenzklasse von  $b \in G$  bzgl. der zweiten Äquivalenzrelation die *Linksnebenklasse*

$$bH := \{ba : a \in H\}.$$

Die Identität  $\text{id} := \text{id}_{H \subset G}$  hat für eine Untergruppe  $H \subset G$  trivialerweise die Eigenschaft, daß  $\text{id}(ab) = \text{id}(a) \text{id}(b)$  für alle  $a, b \in H$ .

*Definition.* Eine Abbildung  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  von Gruppen  $G_1, G_2$  heißt ein *Gruppenhomomorphismus* oder kurz ein *Homomorphismus*, wenn  $\alpha(ab) = \alpha(a) \alpha(b)$  für alle  $a, b \in G_1$ . Das Urbild  $\alpha^{-1}(e_2)$  des Einselementes  $e_2 \in G_2$  heißt der *Kern* von  $\alpha$ , in Zeichen  $\ker \alpha$ ; das Bild von  $\alpha$  wird auch mit  $\text{im } \alpha$  bezeichnet. Ein *Gruppenisomorphismus* ist per definitionem ein *bijektiver* Gruppenhomomorphismus, ein *Gruppenautomorphismus* ein Gruppenisomorphismus einer Gruppe  $G$  in sich selbst.

**Lemma 4.11** *Bild und Kern eines Homomorphismus  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  sind Untergruppen von  $G_2$  bzw.  $G_1$ .  $\alpha$  ist genau dann injektiv, wenn  $\ker \alpha$  die triviale Untergruppe von  $G_1$  ist. Für einen Gruppenisomorphismus  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  ist auch die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$  ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* Aus  $(\alpha(e_1))^2 = \alpha(e_1) \alpha(e_1) = \alpha(e_1^2) = \alpha(e_1)$  folgt unmittelbar  $\alpha(e_1) = e_2$ . Insbesondere sind Bild und Kern von  $\alpha$  nicht leer. Ebenso leicht gewinnt man aus  $\alpha(a) \alpha(a^{-1}) = \alpha(aa^{-1}) = \alpha(e_1) = e_2$  die Erkenntnis, daß  $(\alpha(a))^{-1} = \alpha(a^{-1})$ . Hieraus folgt sofort, daß Bild und Kern Untergruppen sind. Ist ferner  $\alpha$  injektiv, so kann der Kern von  $\alpha$  nur aus dem neutralen Element  $e_1$  bestehen. Umgekehrt folgt aus der Trivialität des Kerns und  $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$  mit dem eben Bewiesenen, daß dann auch  $\alpha(a_1 a_2^{-1}) = e_2$  und damit  $a_1 a_2^{-1} = e_1$ , d. h.  $a_1 = a_2$ . Zum Nachweis der

letzten Behauptung genügt zu zeigen, daß  $\alpha^{-1}$  ein Homomorphismus ist. Sind nun  $a_2, b_2 \in G_2$  und  $a_1, b_1 \in G_1$  ihre Urbilder unter  $\alpha$ , so ist nach Definition  $\alpha(a_1 b_1) = \alpha(a_1) \alpha(b_1) = a_2 b_2$  und damit  $\alpha^{-1}(a_2 b_2) = a_1 b_1 = \alpha^{-1}(a_2) \alpha^{-1}(b_2)$ .  $\square$

Kerne von Homomorphismen haben noch eine stärkere Eigenschaft: Ist  $a \in \ker \alpha$  und  $b \in G_1$  beliebig, so ist auch  $b^{-1} a b \in \ker \alpha$  (dies ist natürlich im kommutativen Fall automatisch erfüllt), denn es ist  $\alpha(b^{-1} a b) = \alpha(b^{-1}) \alpha(a) \alpha(b) = \alpha(b^{-1}) e_2 \alpha(b) = e_2$ .

*Definition.* Eine Untergruppe  $H$  einer Gruppe  $G$  heißt *normal* oder ein *Normalteiler*, wenn  $b^{-1} a b \in H$  für alle  $a \in H$ ,  $b \in G$ .

**Satz 4.12** *Eine Untergruppe  $H \subset G$  ist genau dann ein Normalteiler, wenn für jedes Element  $b \in G$  die Rechtsnebenklasse  $Hb$  mit der Linksnebenklasse  $bH$  übereinstimmt. Auf dem Raum  $G/H$  dieser Nebenklassen kann man dann (auf genau eine Weise) eine Gruppenstruktur so erklären, daß die kanonische Restklassenabbildung  $p : G \rightarrow G/H$  ein (surjektiver) Gruppenhomomorphismus wird, dessen Kern gerade  $H$  ist.*

Den (elementaren) *Beweis* überlassen wir den Lesern.  $\square$

*Definition.* Der Quotientenraum  $G/H$  mit der oben erklärten Gruppenstruktur heißt auch die *Quotientengruppe* oder *Faktorgruppe* von  $G$  nach dem Normalteiler  $H$ .

Aus diesem Ergebnis kann man noch den sogenannten *1. Homomorphiesatz* ableiten. Es sei dazu  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  ein Gruppenhomomorphismus. Man sieht dann sofort, daß  $\alpha$  sich über die Faktorgruppe  $G_1/\ker \alpha$  „faktorisieren“ läßt; d. h.: es gibt einen (notwendig injektiven) Gruppenhomomorphismus  $\alpha' : G_1/\ker \alpha \rightarrow G_2$  mit  $\alpha = \alpha' \circ p$ , wobei  $p$  die kanonische Projektion  $G_1 \rightarrow G_1/\ker \alpha$  bezeichnet. Da aber das Bild von  $\alpha'$  mit dem von  $\alpha$  übereinstimmt, induziert  $\alpha'$  einen kanonischen Gruppenisomorphismus von  $G_1/\ker \alpha$  nach im  $\alpha$ .

**Satz 4.13 (1. Homomorphiesatz)** *Ist  $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$  ein Gruppenhomomorphismus, so sind die Gruppen  $G_1/\ker \alpha$  und im  $\alpha$  kanonisch isomorph.*



## 5 Ringe, Körper, Vektorräume

### 5.1 Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$

Ein Manko der natürlichen Zahlen ist, daß man nicht uneingeschränkt subtrahieren (und auch nicht dividieren) kann. Wenn wir *formal* mit Differenzen operieren, so sollte gelten:

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

und

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2).$$

Dies führt zunächst auf die Idee, Paare  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  zu betrachten und die folgende Relation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  einzuführen:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

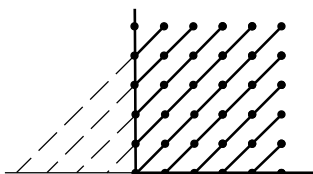
**Lemma 5.1** *Durch  $\sim$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert.*

*Beweis.* Reflexivität und Symmetrie sind klar. Sind  $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$  und  $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$ , so gilt  $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$  und  $a_2 + b_3 = a_3 + b_2$ . Es folgt

$$a_1 + b_3 + b_2 = a_2 + b_3 + b_1 = a_3 + b_1 + b_2$$

und wegen der Kürzungsregel  $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$  □

Man kann sich nun leicht die Äquivalenzklassen von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  unter der obigen Äquivalenzrelation  $\sim$  veranschaulichen:



Figur 5.1

Klar ist:

$$a \geq b \iff (a, b) \sim (a - b, 0), \quad a < b \iff (a, b) \sim (0, b - a).$$

Wir schreiben  $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$  als Menge mit den Elementen

$$\overline{(a, b)} = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \sim (a, b) \}$$

Aufgrund der Eingangsbemerkung können wir versuchen, auf die folgende Weise eine Addition in  $\mathbb{Z}$  zu erklären:

$$\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a_2, b_2)} := \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}.$$

Wir müssen uns aber klar machen, daß diese Definitionen unabhängig von den Repräsentanten der Klassen sind. Wir behaupten also die Gültigkeit des folgenden Lemmas:

**Lemma 5.2**  $(x_1, y_1) \sim (a_1, b_1), (x_2, y_2) \sim (a_2, b_2) \implies (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \sim (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$

*Beweis.*  $x_1 + b_1 = y_1 + a_1, x_2 + b_2 = y_2 + a_2 \implies (x_1 + x_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + (y_1 + y_2).$   
□



**Satz 5.3**  $(\mathbb{Z}, +)$  bildet eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $\overline{(0, 0)}$  und Inverse  $\overline{(b, a)}$  zu  $\overline{(a, b)}$ . Die Abbildung

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \overline{(n, 0)} \end{cases}$$

ist injektiv und erfüllt  $\alpha(m + n) = \alpha(m) + \alpha(n)$ . Insbesondere ist  $\alpha(0) = 0 := \overline{(0, 0)}$ .

*Beweis.* Die ersten Aussagen sind leicht nachzurechnen. Z. B. ist

$$\overline{(b, a)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a + b, a + b)} = \overline{(0, 0)},$$

also  $-\overline{(a, b)} = \overline{(b, a)}$ .

Aus  $\alpha(n_1) = \alpha(n_2)$  folgt  $(n_1, 0) \sim (n_2, 0)$ , also  $n_1 = n_1 + 0 = n_2 + 0 = n_2$ . Ferner ist

$$\alpha(m) + \alpha(n) = \overline{(m, 0)} + \overline{(n, 0)} = \overline{(m + n, 0)} = \alpha(m + n). \quad \square$$

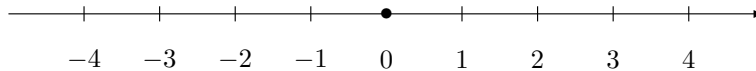
*Bemerkung.* Wegen der Eigenschaften von  $\alpha$  ist  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$  „eingebettet“, und wir können gefahrlos  $\alpha(n) = \overline{(n, 0)}$  durch das Symbol  $n$  ersetzen. Die Elemente

$$\overline{(0, n)} = -\overline{(n, 0)}$$

sind, außer im Fall  $n = 0$ , nicht in  $\mathbb{N}$  enthalten. Wir bezeichnen sie einfach mit  $-n \in \mathbb{Z}$  (beachte, daß  $0 = -0$ ). Nach einer früheren Bemerkung ist dann

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

eine vollständige Aufzählung von  $\mathbb{Z}$  (ohne Wiederholung), und als Bild sollte man sich vorstellen:



Figur 5.2

## 5.2 Erweiterung von regulären Halbgruppen

*Bemerkung.* Der vorstehende Beweis läßt sich fast wortwörtlich übernehmen, um den folgenden allgemeinen Satz einzusehen. Wir formulieren ihn aus Gründen der späteren Anwendung in der multiplikativen Fassung.

**Satz 5.4** Es sei  $(H, *)$  eine kommutative reguläre Halbgruppe mit neutralem Element  $f$ . Dann gibt es eine Gruppe  $(G, *)$  mit neutralem Element  $e$  und eine injektive Abbildung  $\alpha : H \rightarrow G$ , s. d.  $\alpha(f) = e$ ,  $\alpha(a * b) = \alpha(a) * \alpha(b)$  und sich jedes Element  $c \in G$  in der Form  $c = \alpha(a) * \alpha(b)^{-1}$ ,  $a, b \in H$ , schreibt. Ist  $G'$  eine weitere solche Gruppe mit neutralem Element  $e'$  und injektiver Abbildung  $\alpha' : H \rightarrow G'$  wie oben, so gibt es genau einen Gruppenisomorphismus

$$\beta : G \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad \alpha' = \beta \circ \alpha.$$

*Beweis.* Nur der letzte Teil bedarf der Begründung. Es sei  $c = \alpha(a) * \alpha(b)^{-1} \in G$  mit  $a, b \in H$  gegeben. Wenn es eine Abbildung  $\beta$  der gewünschten Art überhaupt gibt, so muß wegen  $\alpha' = \beta \circ \alpha$  notwendig

$$(*) \quad \beta(c) = \alpha'(a) * \alpha'(b)^{-1}$$

sein. Es kann also höchstens eine Abbildung  $\beta$  der gewünschten Art geben. Zeigen wir zuerst, daß durch  $(*)$  tatsächlich eine Abbildung definiert wird. Dazu müssen wir uns davon überzeugen, daß die Definition nicht von der Auswahl der Elemente  $a, b \in H$  abhängt. Es sei also  $c = \alpha(a') * \alpha(b')^{-1}$ , d. h.  $\alpha(a * b') = \alpha(a) * \alpha(b') = \alpha(a') * \alpha(b) = \alpha(a' * b)$  und wegen der Injektivität von  $\alpha$  auch  $a * b' = a' * b$ . Hieraus folgt, daß

$$c' := \beta(c) = \alpha'(a) * \alpha'(b)^{-1} = \alpha'(a') * \alpha'(b')^{-1}$$

wohldefiniert ist. Man rechnet leicht nach, daß die Abbildung  $c \mapsto c' = \beta(c)$  ein Gruppenhomomorphismus von  $G$  nach  $G'$  ist. Nach Vertauschung der Rollen von  $G$  und  $G'$  gewinnt man auch einen Homomorphismus  $\beta' : G' \rightarrow G$  mit  $\beta' \circ \alpha' = \alpha$ . Insbesondere ist dann  $(\beta' \circ \beta) \circ \alpha = \alpha$  und damit wegen der Eindeutigkeitsaussage des Satzes notwendig  $\beta' \circ \beta = \text{id}_G$ . Genauso schließt man, daß  $\beta \circ \beta' = \text{id}_{G'}$ .  $\square^8$

### 5.3 Die Ringstruktur auf $\mathbb{Z}$

Wir führen jetzt noch die Multiplikation in  $\mathbb{Z}$  ein. Wenn wir die üblichen Vorzeichenregeln bei der Multiplikation und das Distributivgesetz bewahrt wissen wollen, müssen wir

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1),$$

setzen, und es bleibt uns keine andere Wahl, als den Ansatz

$$\overline{(a_1, b_1)} \overline{(a_2, b_2)} := \overline{(a_1a_2 + b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)}$$

für  $\overline{(a_1, b_1)}, \overline{(a_2, b_2)} \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$  zu machen. Es ist dann insbesondere  $\alpha(n) \cdot \alpha(m) = \alpha(nm)$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  mit der Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  aus Satz 3. Die Multiplikation ist in der Tat wohldefiniert. Auch die meisten der folgenden Aussagen bedürfen nur des (langweiligen) Nachrechnens.

**Satz 5.5**  $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$  ist eine kommutative reguläre Halbgruppe mit neutralem Element  $1 = \overline{(1, 0)}$ . Es gilt bzgl. der Addition das Distributivgesetz

$$a(b + c) = ab + ac.$$

*Beweis.* Wir zeigen nur die Regularität. Aus  $ax = ay$  folgt natürlich  $a(x - y) = 0$ . Wir brauchen also nur die Nullteilerfreiheit zu zeigen:

$$\overline{(a, b)} \overline{(x, y)} = 0$$

bedeutet  $ax + by = 0$  und  $ay + bx = 0$ . Da alle hier auftretenden Zahlen natürlich sind, folgt nach einem früheren Lemma

$$ax = bx = ay = by = 0.$$

Ist nun  $\overline{(a, b)} \neq 0$ , also  $a < b$  oder  $a > b$ , so folgt wegen der Nullteilerfreiheit von  $\mathbb{N}$  sowohl  $x = 0$  als auch  $y = 0$ , d. h.  $\overline{(x, y)} = 0$ .  $\square$

*Definition.* Eine Menge  $R$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  heißt ein *Ring*, wenn

1.  $(R, +)$  eine kommutative Gruppe (mit neutralem Element  $0$ ) ist;
2.  $(R, \cdot)$  eine Halbgruppe darstellt;
3. die Distributivgesetze gelten:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

<sup>8</sup>Die formale Ähnlichkeit des vorstehenden Beweises mit dem von Satz 1.4 sollte augenfällig sein.

Ein Ring  $R$  heißt *kommutativ*, wenn  $(R, \cdot)$  kommutativ ist.  $R$  heißt ein Ring mit *Eins*, wenn es ein Element  $1 \in R$ ,  $1 \neq 0$ , gibt, das neutral bzgl. Multiplikation ist:  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in R$ .  $R$  heißt *nullteilerfrei*, wenn aus  $ab = 0$  folgt, daß  $a = 0$  oder  $b = 0$  ist. Ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1 heißt auch ein *Integritätsring* oder *Integritätsbereich*. Ein Integritätsring heißt ein *Körper*, wenn jedes Element  $a \neq 0$  bzgl. der Multiplikation invertierbar ist.

**Lemma 5.6** *In jedem Ring  $R$  (insbesondere in jedem Körper) gilt*

- i)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ ,  $a \in R$ ,
- ii)  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ ,  $(-a)(-b) = ab$ ,  $a, b \in R$ .

*Bemerkung.* Das Nullelement 0 und das Einselement 1 (sofern vorhanden) sind nach früheren Bemerkungen eindeutig bestimmt.

*Beweis.*  $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \implies 0a = 0$ . Für  $a0$  schließt man genauso. Aus

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0$$

ergibt sich  $(-a)b = -(ab)$ , ebenso  $a(-b) = -(ab) = (-a)b$ , und hieraus, wenn  $b$  durch  $-b$  ersetzt wird,  $ab = (-a)(-b)$ .  $\square$

*Beispiele.* 1.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein Integritätsring, aber kein Körper, da die Gleichung  $2 \cdot x = 1$  nicht lösbar ist. Man hat in  $\mathbb{Z}$  die Anordnung  $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{N}$ .

2. (Der Körper  $\mathbb{F}_2$  mit 2 Elementen).  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ,  $0 \neq 1$ , ist die kleinstmögliche Menge, die eine Körperstruktur besitzen kann. Aufgrund der Körperaxiome ist die Multiplikationstabelle eindeutig festgelegt (siehe das vorstehende Lemma). Bei der Additionstabelle ist a priori der Wert von  $1 + 1$  noch frei. Es folgt jedoch aus  $1 + 1 = 1$  sofort der Widerspruch  $1 = 1 + 0 = 1 + (1 + (-1)) = (1 + 1) + (-1) = 1 + (-1) = 0$ , so daß auch die Additionstabelle wohlbestimmt ist:

$$\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß durch diese Festlegungen tatsächlich eine Körperstruktur definiert wird. - Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels wird im folgenden Beispiel gegeben.

3. (Restklassen modulo  $m$ ). Es sei  $m \geq 2$  eine natürliche Zahl. Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  schreiben wir  $a \equiv b \pmod{m}$ , wenn  $a - b$  in  $\mathbb{Z}$  durch  $m$  teilbar ist, d. h. wenn es ein  $x \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $a - b = xm$ . Wegen

$$\begin{aligned} a - a &= 0 = 0 \cdot m \\ a - b = xm &\implies b - a = (-x)m \\ a - b = xm, \quad b - c = ym &\implies a - c = (x + y)m \end{aligned}$$

liegt eine Äquivalenzrelation vor. Wir schreiben i. f. kurz  $\equiv_m$  für diese *Äquivalenz modulo  $m$*  und  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  für die Menge der Äquivalenzklassen  $\mathbb{Z}/\equiv_m$ . Es ist leicht einzusehen, daß für die Restklassen  $[a] = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv_m a\}$  durch

$$\begin{cases} [a_1] + [a_2] = [a_1 + a_2] \\ [a_1] \cdot [a_2] = [a_1 a_2] \end{cases}$$

eine Addition und Multiplikation wohldefiniert sind, s. d.  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ein kommutativer Ring mit Einselement  $[1]$  wird.

Nun gilt in  $\mathbb{Z}$  Division mit Rest, d. h. für alle  $a \in \mathbb{Z}$  gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zahl  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $xm \leq a < (x + 1)m$ , also  $0 \leq a - xm < m$ . Somit besitzt  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  genau die  $m$  Restklassen  $[0], [1], \dots, [m - 1]$  als Elemente. Ist nun  $m$  keine Primzahl, so ist  $m = m_1 m_2$  mit  $2 \leq m_1, m_2 < m$  und damit  $[m_1] \cdot [m_2] = [m] = [0]$ , d. h.  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ist nicht nullteilerfrei, also insbesondere kein Körper.

Ist dagegen  $m = p$  eine Primzahl, so ist für jedes  $1 \leq q < p$  der größte gemeinsame Teiler  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , und wegen des euklidischen Divisionsalgorithmus gibt es ganze Zahlen  $a, b$  mit  $aq + bp = 1$  (siehe den Anhang zu diesem Kapitel). Rechnet man modulo  $p$ , so folgt hieraus

$$[a] \cdot [q] = [1].$$

M. a. W.: ist  $p$  eine Primzahl, so ist  $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper mit  $p$  Elementen.

*Bemerkung.* Man kann leicht zeigen, daß jeder endliche Körper  $p^n$  Elemente mit einer Primzahl  $p$  besitzen muß.

## 5.4 Die binomische Formel in kommutativen Ringen

Bevor wir uns weiteren Konzepten und Beispielen zuwenden, wollen wir zuerst die *binomische Formel* in allgemeinem Kontext herleiten. Beachte hierbei, daß für eine additive Gruppe  $G$  und ein  $a \in G$  ein wohlbestimmter Homomorphismus

$$\varphi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow G$$

existiert mit  $\varphi_a(1) = a$ . M. a. W.: Setzt man  $\varphi_a(n) =: na$ , so sind die  $na \in G$  wohlbestimmte Objekte (auch wenn  $\mathbb{Z}$  nicht als Teilmenge von  $G$  aufgefaßt werden kann) mit

$$(n + m)a = na + ma,$$

speziell  $0a = 0$ ,  $(-m)a = -(ma)$ . (Beachte aber, daß  $na$  durchaus 0 sein kann für  $n \neq 0$ . Es gilt z. B.  $p\bar{n} = \bar{0}$  für alle  $\bar{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ).

**Satz 5.7 (Binomische Formel)** *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Dann gilt für alle  $a, b \in R$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die Formel*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^{n-k} b^k$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$c_{n,k} = A(n, k) = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$$

*Beweis.* Die Formel ist richtig für  $n = 0$  wegen

$$(a + b)^0 = 1 = c_{0,0}.$$

Unter der Annahme der Richtigkeit für  $n$  ergibt sich

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \left( \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^{n-k} b^k \right) (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= c_{n,0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n c_{n,k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^n c_{n,k-1} a^{(n+1)-k} b^k + c_{n,n} b^{n+1} \\ &= c_{n+1,0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (c_{n,k} + c_{n,k-1}) a^{(n+1)-k} b^k + c_{n+1,n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1,k} a^{(n+1)-k} b^k \end{aligned}$$

wegen  $c_{n,0} = c_{n+1,0} = c_{n,n} = c_{n+1,n+1} = 1$  und  $c_{n+1,k} = c_{n,k} + c_{n,k-1}$  (siehe Kapitel 3).  $\square$

## 5.5 Unterringe, Ringhomomorphismen und Ideale

Analog wie bei Gruppen im Anhang zu Kapitel 4 wollen wir uns fragen, unter welchen Bedingungen eine nichtleere Teilmenge  $R_0$  eines Ringes  $R$  eine Ringstruktur erbt. Offensichtlich reicht dazu, daß mit  $a, b \in R_0$  auch  $a - b$  und  $ab$  in  $R_0$  liegen. Man nennt dann  $R_0$  einen *Unterring* von  $R$  und  $R$  einen *Oberring* von  $R_0$ . Besitzt  $R$  ein Einselement, so muß dies jedoch nicht in  $R_0$  enthalten sein (man betrachte z. B.  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ). Selbstverständlich vererbt sich die Nullteilerfreiheit von  $R$  auf  $R_0$ . Ist  $R$  ein Körper, so ist ein Unterring  $R_0 \subset R$  schon dann ein Körper, also ein *Unterkörper* von  $R$ , wenn  $R_0$  ein von Null verschiedenes Element enthält und  $a, b \in R_0^* := R_0 \setminus \{0\}$  impliziert, daß  $ab^{-1} \in R_0$ .

Genauso wie bei Gruppen geben wir die folgende

*Definition.* Eine Abbildung  $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$  von Ringen heißt ein *Ringhomomorphismus*, wenn  $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$  und  $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$  für alle  $a, b \in R_1$ . Ist  $\alpha$  zusätzlich bijektiv, so spricht man auch von einem *Ringisomorphismus*. Wir bezeichnen mit  $\ker \alpha \subset R_1$  das Urbild der Null in  $R_2$  und mit  $\text{im } \alpha \subset R_2$  das Bild von  $R_1$  unter  $\alpha$ . Beide sind Unterringe von  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Allerdings enthält  $\ker \alpha$  das Einselement von  $R_1$ , falls dieses existiert, dann und nur dann, wenn  $\alpha$  die Nullabbildung ist. Auch das Bild von  $R_1$  braucht nicht das Einselement von  $R_2$  zu enthalten. Ferner ist das Bild eines Integritätsringes  $R_1$  nicht notwendig nullteilerfrei, wie der kanonische Homomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  zeigt, wenn  $n \in \mathbb{N}$  nicht prim ist.

Der Kern eines Ringhomomorphismus hat aber eine stärkere Eigenschaft. Er ist nicht nur (eine Untergruppe bzgl. der additiven Struktur und) abgeschlossen unter Multiplikation seiner Elemente, sondern auch abgeschlossen unter Multiplikation mit beliebigen Elementen  $b \in R_0$ , denn mit  $\alpha(a) = 0$  ist ja auch  $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = 0$  für alle  $b \in R_0$ . Diese Eigenschaft verdient einen Namen, analog zum Begriff des Normalteilers bei Gruppen.

*Definition.* Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{a} \subset R$  eine nichtleere Teilmenge.  $\mathfrak{a}$  heißt ein *Ideal*<sup>9</sup> in  $R$ , wenn

- a)  $a_1, a_2 \in \mathfrak{a} \implies a_1 - a_2 \in \mathfrak{a}$ ,
- b)  $a \in \mathfrak{a}, b \in R \implies ba \in \mathfrak{a}$ .

Besitzt  $R$  ein Einselement, so genügt in a) auch die Forderung  $a_1 + a_2 \in \mathfrak{a}$ , denn aus b) schließt man, daß mit  $a_2$  auch  $-a_2 = (-1)a_2$  in  $\mathfrak{a}$  liegt. Ein von  $R$  und dem Nullideal verschiedenes Ideal wird als *eigentlich* bezeichnet.

Wir geben jetzt noch einige weitere *Beispiele* von Ringen und Ringhomomorphismen.

4. (Restklassen modulo einem Ideal). Ein Beispiel eines Ideals ist  $m\mathbb{Z} = \{mx : x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ . Die Äquivalenzrelation in Beispiel 3 kann man auch so formulieren:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a - b \in m\mathbb{Z}.$$

Man sieht sofort, daß für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset R$  entsprechend durch  $a \equiv b \pmod{\mathfrak{a}} \iff a - b \in \mathfrak{a}$  eine Äquivalenzrelation definiert wird. Genau wie oben konstruiert man den *Restklassenring*  $R/\mathfrak{a}$  von  $R$  modulo  $\mathfrak{a}$ . Wie bei Gruppen kann man den 1. Homomorphiesatz beweisen: Ist  $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$  ein Ringhomomorphismus, so ist der Restklassenring  $R_1/\ker \alpha$  kanonisch isomorph zu  $\text{im } \alpha$ .

*Bemerkung.* Da in einem Körper  $\mathbb{K}$  jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, gibt es in  $\mathbb{K}$  keine *eigentlichen* Ideale. Damit ist ein Homomorphismus  $\alpha : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$  zwischen Körpern entweder die Nullabbildung oder injektiv. Im zweiten Fall induziert der Homomorphismus  $\alpha$  eine Körperisomorphie zwischen  $\mathbb{K}_1$  und dem Unterkörper  $\text{im } \alpha \subset \mathbb{K}_2$ .

5. (Polynomring). Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Unter einem *Polynom* in einer Unbestimmten  $x$  mit Koeffizienten in  $R$  versteht man einen formalen Ausdruck

$$P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

<sup>9</sup>Ideale traten zuerst in der Zahlentheorie auf, wo sie als „ideale Zahlen“ angesehen wurden.

Ist  $Q = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  ein weiteres Polynom, so schreibt man

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n,$$

wenn ohne Einschränkung  $m \leq n$  ist und  $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$  gesetzt wird. Ferner schreibt man

$$PQ = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + a_nb_mx^{n+m},$$

also genauer

$$PQ = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell x^\ell, \quad c_\ell = \sum_{j+k=\ell} a_j b_k.$$

Man schreibt  $R[x]$  für diese Menge zusammen mit der so definierten Addition und Multiplikation und nennt  $R[x]$  den *Polynomring* über  $R$  in einer *Unbestimmten*  $x$ . Man zeigt leicht:

**Satz 5.8**  $R[x]$  ist ein kommutativer Ring mit 1. Ist  $R$  nullteilerfrei, so auch  $R[x]$ .  $R[x]$  ist niemals ein Körper (auch wenn  $R$  ein Körper ist).

*Beweis.* Durch  $a \mapsto a + 0 \cdot x$  wird  $R$  in  $R[x]$  als Unterring „eingebettet“. Die 1 in  $R$  ist dann auch neutral in  $R[x]$ . Sind  $P, Q$  von Null verschieden, so auch ihre „höchsten“ Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$ . Wegen  $a_nb_m \neq 0$  folgt auch  $PQ \neq 0$ . Offensichtlich kann  $x$  kein multiplikatives Inverses besitzen.  $\square$

## 5.6 Polynomringe und formale Potenzreihen - Ringe über Ringen

*Bemerkung.* Die obige formale Einführung des Polynomrings ist konzeptionell unbefriedigend. Sie läßt sich aber logisch einwandfrei formulieren. Man betrachte alle Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow R$$

mit  $\alpha(n) =: a_n = 0$  für „fast alle“  $n \in \mathbb{N}$ , d. h. für alle bis auf endlich viele  $n$ . Wir bezeichnen die Gesamtheit aller solchen Abbildungen (endlichen Folgen) mit

$$\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R) \subset \text{Abb}(\mathbb{N}, R).$$

Nun lassen sich auf  $\text{Abb}(\mathbb{N}, R)$  eine Addition und Multiplikation erklären durch

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(n) &= \alpha(n) + \beta(n), \\ (\alpha \cdot \beta)(n) &= \sum_{j+k=n} \alpha(j)\beta(k). \end{aligned}$$

Unter diesen Verknüpfungen ist  $\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$  abgeschlossen, und es ist unmittelbar klar, daß mit ihnen zusammen die Mengen  $\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$  und  $\text{Abb}(\mathbb{N}, R)$  zu kommutativen Ringen werden. Ferner liefert die Zuordnung

$$R \ni r \mapsto \alpha_r \in \text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$$

mit  $\alpha_r(0) = r$ ,  $\alpha_r(n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , einen injektiven Ringhomomorphismus, d. h. wir haben eine Kette von Unterringen

$$R \subset \text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R) \subset \text{Abb}(\mathbb{N}, R).$$

Wir schreiben nun  $x$  für die Folge  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  (dies ist also ein ganz konkretes Element!). Dann wird  $x^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots)$  und  $x^n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$  mit KRONECKERS *Delta-Symbol*

$$\delta_{nk} = 1, \quad n = k, \quad \delta_{nk} = 0, \quad n \neq k.$$

In  $\text{Abb}(\mathbb{N}, R)$  ist damit für alle  $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  und alle  $n$ :

$$\alpha = \sum_{j=0}^n a_j x^j + (0, 0, \dots, 0, a_{n+1}, \dots),$$

und wir schreiben (wieder formal)

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j .$$

Für  $\alpha \in \text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R)$  ist diese Summe aber endlich und damit wohldefiniert. Man setzt dann (mit diesen Ringstrukturen)

$$\begin{aligned} R[x] &:= \text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, R) && \text{Polynomring} \\ R\{\{x\}\} &= \text{Abb}(\mathbb{N}, R) && \text{Ring der formalen Potenzreihen.} \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Wir werden uns im Falle  $R = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  mit einem wichtigen Zwischenring beschäftigen, nämlich dem Ring  $R\{x\}$  der *konvergenten* Potenzreihen.

## 5.7 Vektorräume, Moduln etc.

*Beispiel* (Vektorräume von Abbildungen). Ist  $\mathbb{K}$  ein Körper, so definiert man für eine beliebige Menge  $X$  auf  $\text{Abb}(X, \mathbb{K})$  eine *Addition* durch

$$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$$

und eine (*äußere*) *Multiplikation* oder *Skalarenmultiplikation* mit Elementen von  $\mathbb{K}$  durch

$$(c\alpha)(x) := c \cdot \alpha(x), \quad c \in \mathbb{K}, \alpha \in \text{Abb}(X, \mathbb{K}).$$

Dies sind Beispiele von  $\mathbb{K}$ -*Vektorräumen*: Ist  $V$  eine abelsche Gruppe bzgl. einer Verknüpfung  $+$  und gibt es (mit einem Körper  $\mathbb{K}$ ) eine Abbildung  $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ , die man i. a. multiplikativ schreibt:

$$\mathbb{K} \times V \ni (c, v) \mapsto cv \in V,$$

so heißt  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -*Vektorraum* (bzgl. der vorgegebenen Verknüpfungen), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- i)  $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$ ;
- ii)  $c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$ ;
- iii)  $1v = v$ .

*Beispiel.* Ist speziell  $X = [1, n] \subset \mathbb{N}$ , so besteht  $\text{Abb}(X, \mathbb{K})$  genau aus den  $n$ -tupeln  $(a_1, \dots, a_n)$  mit Elementen  $a_j \in \mathbb{K}$  (man identifiziere eine Abbildung  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{K}$  mit den Werten  $a_j := \alpha(j)$ ). Die obige Addition und Skalarenmultiplikation reduziert sich dann auf die gewöhnliche *komponentenweise* Addition und Skalarenmultiplikation von  $n$ -tupeln. Den hierdurch definierten Vektorraum bezeichnet man stets mit  $\mathbb{K}^n$ .

*Bemerkung.* Ersetzt man in der obigen Definition den Körper  $\mathbb{K}$  durch eine *kommutativen Ring*  $R$  mit 1 und hat man eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einer Abbildung  $R \times M \rightarrow M$  gegeben, so daß die drei Axiome i), ii) und iii) erfüllt sind, so spricht man von einem *Modul* über dem Ring  $R$  oder kurz von einem  $R$ -*Modul*.

*Beispiel* (Polynomiale Abbildungen). Ist  $S$  ein beliebiger kommutativer Ring, so wird für beliebiges  $X \neq \emptyset$  auch  $\text{Abb}(X, S)$  ein solcher durch

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x) &:= \alpha(x) + \beta(x) \\ (\alpha\beta)(x) &:= \alpha(x) \cdot \beta(x). \end{aligned}$$

Hat  $S$  ein Einselement, so auch  $\text{Abb}(X, S)$ , nämlich die Abbildung  $x \mapsto 1$  für alle  $x \in X$ . Ist speziell  $X = S$ , so trägt  $\text{Abb}(S)$  sogar noch die Struktur eines  $S$ -Moduls:

$$(s\alpha)(x) := s \cdot \alpha(x).$$

*Warnung.* Ist  $S$  ein Körper, so ist  $\text{Abb}(X, S)$  nur dann ein Körper, wenn  $X$  einpunktig ist.

Ist  $R \subset S$  ein Unterring, so wird durch

$$\left\{ \begin{array}{l} R[x] \longrightarrow \text{Abb}(S) \\ P = \sum_{j=0}^n r_j x^j \longmapsto \alpha_P \end{array} \right.$$

mit  $\alpha_P(s) = \sum_{j=0}^n r_j s^j \in S$  ein Ringhomomorphismus erklärt. Man nennt sein Bild  $\text{Pol}_R(S) \subset \text{Abb}(S)$

den Ring der über  $R$  definierten *polynomialen Abbildungen* von  $S$ . (Dieser ist nur ein  $R$ -Modul, i. a. kein  $S$ -Modul).

*Bemerkung.* Ist  $R = S = \mathbb{K}$  ein Körper mit *unendlich vielen* Elementen (z. B.  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ), so ist die Abbildung

$$\mathbb{K}[x] \longrightarrow \text{Abb}(\mathbb{K})$$

*injektiv*, da ein Polynom vom Grad  $n$  höchstens  $n$  Nullstellen besitzen kann (siehe den Anhang zu Kapitel 8); also ist in diesem Fall  $\mathbb{K}[x] \cong \text{Pol}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ ; wir können also die polynomialen Abbildungen mit den Polynomen identifizieren. Für *endliche* Körper kann dies nicht richtig sein, da  $\text{Abb}(\mathbb{K})$  endlich ist, aber nicht  $\mathbb{K}[x]$ . Z. B. hat man für den Körper  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2$ :  $P_1(x) = x$  und  $P_2(x) = x^2$  sind als Polynome verschieden, aber nicht als polynomialen Abbildungen.

*Beispiel* (Endomorphismenring).  $\text{Abb}(S)$  trägt natürlich noch eine weitere Verknüpfung, nämlich die Komposition von Abbildungen. Ist  $S$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so sei  $\text{End}(S) \subset \text{Abb}(S)$  die Teilmenge der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen. Diese bilden unter der Addition und Komposition einen i. a. nicht kommutativen Ring, der zusätzlich eine  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur trägt. Eine solche Struktur nennt man auch eine  $\mathbb{K}$ -Algebra.

Hat  $S$  die Dimension  $n$ , so kann man nach Wahl einer Basis  $\text{End}(S)$  identifizieren mit dem *Matrizenring*

$$M(n \times n, \mathbb{K}).$$

Ist  $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ ,  $B = (b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ , so gilt

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk}), \quad cA = (ca_{jk}), \quad c \in \mathbb{K},$$

und

$$AB = (c_{jk}) \quad \text{mit} \quad c_{jk} = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} b_{\ell k}.$$

## 5.8 Konstruktion von Quotientenkörpern

In  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  können wir immer noch nicht uneingeschränkt dividieren, d. h. der Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen ist kein Körper. Dieses Manko können wir wie bei der Addition durch eine geeignete Konstruktion ausräumen. Dazu brauchen wir nur die Eigenschaft von  $\mathbb{Z}$ , ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit 1, also ein Integritätsbereich zu sein.

Es sei also i. f.  $R$  ein solcher Ring, z. B. also auch  $R = \mathbb{K}[x]$ ,  $\mathbb{K}$  ein Körper. Wir bilden dann zunächst wieder formale Brüche

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in R, b \neq 0$$

und werden diese als gleich ansehen,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

genau dann, wenn  $a_1 b_2 = a_2 b_1$ .



**Lemma 5.9** Auf  $R \times R^*$  wird durch  $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\iff a_1 b_2 = a_2 b_1$  eine Äquivalenzrelation erklärt. Auf der Menge der Äquivalenzklassen

$$Q(R) := R \times R^* / \sim$$

hat man die natürliche Multiplikation

$$\overline{(a_1, b_1)} \overline{(a_2, b_2)} = \overline{(a_1 a_2, b_1 b_2)}$$

mit dem Nullelement  $\overline{(0, b)} =: \bar{0}$ , und  $Q^*(R) = Q(R) \setminus \{\bar{0}\}$  ist eine kommutative Gruppe mit dem Einselement  $\overline{(1, 1)}$  und dem Inversen  $\overline{(b, a)}$  zu  $\overline{(a, b)} \neq \bar{0}$ . Die natürliche Abbildung

$$R \ni a \xrightarrow{\alpha} \overline{(a, 1)} \in Q(R)$$

ist injektiv und erfüllt  $\alpha(a_1 a_2) = \alpha(a_1) \alpha(a_2)$ . Jedes Element in  $Q(R)$  schreibt sich in der Form

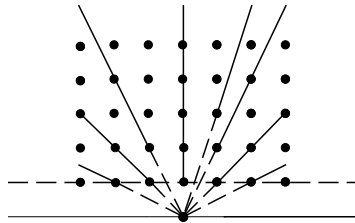
$$\alpha(a) \alpha(b)^{-1}.$$

*Beweis.* Wir zeigen nur die Transitivität von  $\sim$ . Es sei also  $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ ,  $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$ , also  $a_1 b_2 = a_2 b_1$  und  $a_2 b_3 = a_3 b_2$ . Hieraus folgt

$$(a_1 b_3) b_2 = (a_1 b_2) b_3 = (a_2 b_1) b_3 = (a_3 b_1) b_2$$

und wegen der Nullteilerfreiheit  $a_1 b_3 = a_3 b_1$ . Ebenso leicht ist der Nachweis, daß die Multiplikation wohldefiniert ist. Weiter gilt  $(0, b) \sim (a_1, b_1)$  genau dann, wenn  $a_1 = 0$ ; also ist  $\bar{0} := \overline{(0, 1)} = \{(0, b) : b \in R^*\}$ . Nimmt man diese Klasse aus  $R \times R^*$  heraus, so behält man  $R^* \times R^*$  über, und die gegebene Äquivalenzrelation reduziert sich auf unsere allgemeine Situation für die Halbgruppe  $(R^*, \cdot)$ .  $\square$

*Beispiel.* Im Falle  $R = \mathbb{Z}$  kann man sich die obige Äquivalenzrelation wie folgt veranschaulichen:



Figur 5.3

Wir müssen jetzt noch die Addition in  $Q(R)$  als Erweiterung der Addition in  $R \xrightarrow{\alpha} \alpha(R)$  einführen. Wenn wir das Distributivgesetz erhalten wollen, haben wir keine Wahl bei der Addition:

$$b_1 b_2 \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \right) = a_1 b_2 + a_2 b_1 \implies \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2},$$

und dies ist sinnvoll wegen  $(a_1, b_1) \sim (a_1 b_2, b_1 b_2)$  etc. Man macht sich leicht klar, daß die Addition wohldefiniert ist und

$$\alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} = \frac{a_1 + a_2}{1} = \alpha(a_1 + a_2)$$

gilt. Wir überlassen dem Leser den ermüdenden Nachweis der weiteren Eigenschaften.

**Satz 5.10**  $Q(R)$  ist bzgl. Addition und Multiplikation ein Körper.

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{Q} := Q(\mathbb{Z})$  heißt der Körper der rationalen Zahlen.

2.  $\mathbb{K}(x) := Q(\mathbb{K}[x])$  heißt der Körper der rationalen Funktionen über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

### 5.9 Die Unzulänglichkeit von $\mathbb{Q}$

Wir wollen abschließend noch einmal eine Begründung dafür geben, warum der Körper  $\mathbb{Q}$  nicht einmal für die Belange der Geometrie ausreicht. Wir zeigen mit Hilfe der im Anhang dargestellten Teilbarkeits-theorie, daß es keine rationale Zahl  $a/b$  gibt, deren Quadrat eine Primzahl  $p$  ist. (Dies verallgemeinert die früher schon behandelten Fälle  $p = 2$  und  $p = 5$ ).

Wären nämlich  $a, b$  ohne Einschränkung teilerfremd, und hätte man

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = p,$$

also  $a^2 = pb^2$ , so würde  $p$  die Zahl  $a^2$  und damit auch  $a$  teilen. Schreibt man  $a = p\alpha$ , so folgt  $p^2\alpha^2 = pb^2$  und damit  $p\alpha^2 = b^2$ . Also teilt  $p$  auch  $b$ . Widerspruch!

Genauer hat man sogar den folgenden

**Satz 5.11** *Die Quadratwurzel  $c$  aus einer natürlichen Zahl  $m$  ist nur dann rational, wenn  $c$  ganz ist, d. h. wenn  $m$  eine Quadratzahl in  $\mathbb{N}$  ist:  $m = c^2$  mit  $c \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Wir nehmen wie oben an, daß  $a^2 = mb^2$  mit  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Alle Primfaktoren von  $a$  bzw.  $b$  treten in  $a^2$  bzw.  $b^2$  von gerader Potenz auf, und wegen der vorstehenden Gleichung müssen alle Primfaktoren von  $b$  auch in  $a$  vorkommen. Folglich wird schon  $a$  durch  $b$  in  $\mathbb{N}$  geteilt, so daß  $m = c^2$  mit  $c = a/b$ .  $\square$

*Bemerkung.* Wir geben später noch einen rein analytischen Beweis für diese Aussage.

*Bemerkung.* Eine zentrale Aussage der Analysis besteht darin, daß im Körper der *reellen Zahlen* jedes positive Element für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$   $n$ -te Wurzeln besitzt. Dies schließen wir aus der *Vollständigkeit* der reellen Zahlen. Allerdings erfüllt auch der weiter oben besprochene Körper  $\mathbb{A}$  der *algebraischen Zahlen*, der echt zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  liegt, diese Eigenschaft.

## Anhang: Teilbarkeitstheorie in euklidischen Ringen

Es sei  $R$  ein Integritätsbereich, d. h. ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit  $1$ , wie z. B.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{K}[x]$  etc.

*Definition.* Es seien  $a, b \in R$ . Man sagt,  $a$  teilt  $b$ , in Zeichen  $a|b$ , wenn es ein  $q \in R$  gibt mit  $b = qa$ .  $u \in R$  heißt eine *Einheit*, wenn es ein  $v$  gibt mit  $vu = 1$ ,  $a, b \in R \setminus \{0\}$  heißen *assoziiert*, wenn es eine Einheit  $u$  mit  $b = ua$  gibt.

*Bemerkungen.* 1. Es gilt  $a|0$  für alle  $a$  und  $0 \nmid b$  für  $b \neq 0$ .

2. In Körpern ist dieser Begriff uninteressant.

**Lemma 5.12** *Es seien  $a, b \in R \setminus \{0\}$  gegeben mit  $a|b$  und  $b|a$ . Dann sind  $a$  und  $b$  assoziiert.*

*Beweis.*  $b = q_1 a, a = q_2 b \implies (1 - q_1 q_2)ab = 0$ . Da  $ab \neq 0$ , so ist  $q_1 q_2 = 1$ , und  $q_1, q_2$  sind Einheiten.  $\square$

*Definition.* Es seien  $a, b \in R$  gegeben.  $d \in R$  heißt ein *größter gemeinsamer Teiler* von  $a$  und  $b$ , wenn  $d|a$  und  $d|b$ , und wenn aus  $d'|a, d'|b$  folgt, daß  $d'|d$ .  $a$  und  $b$  heißen *teilerfremd*, wenn  $1$  größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist.

*Bemerkung.* Sind  $d$  und  $d'$  größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  (nicht beide gleich Null, so daß auch  $d$  und  $d'$  von  $0$  verschieden sind), so sind  $d$  und  $d'$  assoziiert. In  $\mathbb{Z}$  sind die einzigen Einheiten  $1$  und  $-1$ . Entscheidet man sich dann für den positiven der beiden möglichen Werte  $d, -d$ , so nennt man diesen *den* größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$  und schreibt dafür

$$\text{ggT}(a, b).$$

Wir wollen die Frage beantworten, in welchen Integritätsringen stets der ggT existiert.

*Definition.* Ein Integritätsring  $R$  heißt ein *euklidischer Ring*, falls es eine Funktion

$$\beta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

gibt, so daß für je zwei Elemente  $x, y \in R, y \neq 0$ , eine Darstellung

$$x = qy + r$$

existiert mit  $r = 0$  oder  $\beta(r) < \beta(y)$ . Man spricht dann auch von *Division mit Rest* (bzgl.  $\beta$ ).

*Beispiele.* 1. Es sei  $R = \mathbb{Z}$  und

$$\beta(r) = |r| := \begin{cases} r & , r \geq 0 \\ -r & , r < 0. \end{cases}$$

Dann läßt sich Division mit Rest bzgl.  $\beta$  leicht nachweisen (*euklidischer Algorithmus*; siehe Satz 2.13).

2. Auf  $R = \mathbb{K}[x]$ ,  $\mathbb{K}$  ein Körper, hat man die *Grad-Funktion*

$$\deg P := n, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$$

Ist  $S \neq 0$  und  $\deg S = 0$ , so ist  $S = a_0 \in \mathbb{K}^*$  eine Einheit und

$$P = QS + R \quad \text{mit} \quad Q = a_0^{-1}P \quad \text{und} \quad R = 0.$$

Es sei also  $m := \deg S > 0$  und  $n \geq m$  (denn sonst wähle man  $Q = 0, R = P$ ). Wir schreiben die Monome höchsten Grades von  $P$  und  $S$  in der Form  $a_n x^n$  bzw.  $b_m x^m, a_n \neq 0, b_m \neq 0$ , und setzen  $P_1 := P - c x^{n-m} S$  mit  $c = a_n b_m^{-1}$ , so daß  $P_1 = 0$  oder  $\deg P_1 < n$ . Nach Induktionsvoraussetzung hat man eine Darstellung

$$P_1 = Q_1 S + R, \quad R = 0 \quad \text{oder} \quad \deg R < \deg S,$$

aus der sich die Darstellung

$$P = (Q_1 + c x^{n-m}) S + R$$

ergibt.  $\square$

**Satz 5.13** In einem euklidischen Ring  $R$  besitzen je zwei Elemente  $a, b$  einen größten gemeinsamen Teiler  $c = \text{ggT}(a, b)$ .  $c$  läßt sich in der Form schreiben:

$$c = q_1 a + q_2 b, \quad q_1, q_2 \in R.$$

*Beweis.* Ist  $b = 0$ , so ist  $a$  ein größter gemeinsamer Teiler. Es kann also  $b \neq 0$  vorausgesetzt und Induktion nach  $\beta(b)$  durchgeführt werden (wobei wir  $\beta(0) = 0$  setzen). Wir schreiben

$$a = qb + r \quad \text{mit} \quad r = 0 \quad \text{oder} \quad \beta(r) < \beta(b).$$

Ist  $r = 0$ , so ist  $b$  ein größter gemeinsamer Teiler. Im anderen Fall existiert ein größter gemeinsamer Teiler  $d$  von  $b$  und  $r$ . Dieser teilt auch  $a$ , und teilt  $d'$  sowohl  $a$  und  $b$ , so auch  $r$ , so daß  $d'|d$  gilt. Also ist  $d$  auch größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Aus

$$d = q_1 b + q_2 r$$

folgt zusätzlich

$$d = q_1 b + q_2 (a - qb) = q_2 a + (q_1 - qq_2) b. \quad \square$$

Man kann die Teilbarkeitstheorie auch ideal-theoretisch umformulieren. Sind  $a_1, \dots, a_n \in R$ , so ist

$$\{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R \}$$

ein Ideal in  $R$ , und zwar das bzgl. Inklusion kleinste Ideal von  $R$ , das  $a_1, \dots, a_n$  enthält. Man schreibt hierfür

$$Ra_1 + \dots + Ra_n \quad \text{oder} \quad (a_1, \dots, a_n).$$

Ein Ideal der Form  $Ra = (a)$  heißt ein *Hauptideal*.

**Satz 5.14** Sei  $R$  ein Integritätsring.

- i) Für  $a, b \in R$  gilt  $a|b$  genau dann, wenn  $(b) \subset (a)$ .
- ii)  $a, b \in R \setminus \{0\}$  sind genau dann assoziiert, wenn  $(a) = (b)$ .
- iii)  $u \in R$  ist genau dann eine Einheit, wenn  $(u) = R$ .
- iv)  $d$  teilt  $a_1, \dots, a_n$  genau dann, wenn

$$(a_1, \dots, a_n) \subset (d).$$

- v)  $d$  ist größter gemeinsamer Teiler von  $a_1, \dots, a_n$  genau dann, wenn

$$(a_1, \dots, a_n) = (d).$$

Die Existenz von größten gemeinsamen Teilern in euklidischen Ringen ist dann Ausdruck des folgenden allgemeinen Satzes.

**Satz 5.15** Jeder euklidische Ring  $R$  ist ein Hauptidealring, d. h. jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  ist ein Hauptideal:

$$\mathfrak{a} = (a).$$

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{a}$  das Nullideal, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall existiert

$$\min M, \quad M = \{ \beta(b) : b \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \}.$$

Es sei  $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$  so gewählt, daß  $\beta(a) = \min M$ . Dann ist per definitionem  $(a) \subset \mathfrak{a}$ . Sei umgekehrt  $b \in \mathfrak{a}$  beliebig und  $b = qa + r$ . Wäre  $r \neq 0$ , so wäre  $r = b - qa \in \mathfrak{a}$ , aber  $\beta(a) < \beta(r)$ . Somit folgt  $b = qa \in (a)$  und damit  $\mathfrak{a} \subset (a)$ .  $\square$

In Integritätsbereichen gibt es zwei a priori verschiedene Begriffe von „Unzerlegbarkeit“ von Elementen.

*Definition.* Es sei  $R$  ein Integritätsbereich und  $p$  eine Nichteinheit,  $p \neq 0$ .

- i)  $p$  heißt *irreduzibel*, wenn aus  $p = xy$  folgt, daß  $x$  oder  $y$  eine Einheit sind.  
 ii)  $p$  heißt *prim* (oder ein *Primelement*), wenn

$$p|ab, \quad ab \neq 0 \implies p|a \quad \text{oder} \quad p|b.$$

**Lemma 5.16** a) *Jedes Primelement ist irreduzibel.*

- b) *Ist  $R$  ein Hauptidealring (also z. B. ein euklidischer Ring), so ist jedes irreduzible Element auch prim.*

*Beweis.* a) Sei  $p$  ein Primelement und  $p = xy$ ; dann gilt ohne Einschränkung  $p|x$ . Da auch trivialerweise  $x|p$ , so ist  $y$  eine Einheit.

b) Es sei  $p$  irreduzibel, und es gelte  $p|ab$ , d. h.  $ab = pq$ , aber nicht  $p|b$ . Es sei  $d$  ein Erzeuger des Ideals  $(p, b)$ . Dann ist sicher  $d \neq 0$  eine Einheit, denn sonst wären  $p$  und  $d$  assoziiert, da  $p$  irreduzibel ist, und  $p|b$ . Somit existieren  $r, s \in R$  mit  $rp + sb = 1$ , also  $a = rap + sab = rap + spq = p(ra + sq)$ , d. h.  $p|a$ .  $\square$

Insbesondere fallen also im Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen die beiden Begriffe zusammen. Unter *Primzahlen* in  $\mathbb{Z}$  versteht man traditionell aber nur die *positiven* Primelemente

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

Die Zahl 1 ist keine Primzahl, da nach Definition Primelemente keine Einheiten sind.

Wir wollen noch die *Unendlichkeit* der Anzahl der Primzahlen beweisen; der Beweis geht ebenfalls auf EUKLID zurück. Über die genaue Verteilung der Primzahlen macht der sogenannte *Primzahlsatz* eine Aussage (siehe meine Vorlesungsausarbeitung *Funktionentheorie I*, Hamburg 1993).

**Satz 5.17 (Euklid)** *Die Menge  $P$  aller Primzahlen ist unendlich.*

*Beweis* (durch Widerspruch). Angenommen,  $P$  sei endlich, so daß wir die Menge  $P$  *durchnumerieren* können:  $P = \{p_0, \dots, p_n\}$ . Betrachte dann die natürliche Zahl

$$m = p_0 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Da  $m \geq 2$  ist, läßt sich  $m$  als Produkt von Primzahlen  $q_1 \leq \dots \leq q_r$ ,  $r \geq 1$  darstellen. Man sieht sofort, daß  $q_1$  nicht unter den Zahlen  $p_0, \dots, p_n$  vorkommen kann. Also ist  $q_1 \notin P$ . Widerspruch!  $\square$

*Bemerkung.* In Teil b) des obigen Lemmas kann die Bedingung, daß  $R$  ein Hauptidealring ist, nicht weggelassen werden. So ist

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{m + n\sqrt{-3}, m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

ein Integritätsring, in dem die Zahl 2 irreduzibel ist, aber nicht prim, denn  $2|4$  und  $4 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ , aber 2 teilt weder  $1 + \sqrt{-3}$  noch  $1 - \sqrt{-3}$ . Außerdem hat 4 zwei wesentlich verschiedene „Primfaktor“-Zerlegungen.

**Satz 5.18 (Teilerkettensatz)** *Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $a_0, a_1, a_2, \dots$  eine Teilerkette in  $R$ , d. h.*

$$a_{j+1} | a_j \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}.$$

*Dann wird die Kette „stationär“, d. h. es gibt  $j_0 \in \mathbb{N}$ , s. d.  $a_j$  assoziiert zu  $a_{j_0}$  ist für alle  $j \geq j_0$ .*

*Beweis.* Die Teilerkette induziert eine aufsteigende Idealkette

$$(a_0) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \dots$$

Dann ist  $\mathfrak{a} = \bigcup_{j=0}^{\infty} (a_j)$ , wie man sich leicht überlegt, ein Ideal in  $R$ , also  $\mathfrak{a} = (d)$ . Sei  $j_0$  ein Index mit  $d \in (a_{j_0})$ . Dann gilt  $(d) = (a_j)$  für alle  $j \geq j_0$ .  $\square$

**Folgerung 5.19 (Primfaktor - Zerlegung)** *In einem Hauptidealring  $R$  ist jede Nichteinheit  $a \neq 0$  Produkt von endlich vielen Primelementen. Die Zerlegung in Primfaktoren ist bis auf Reihenfolge und Einheiten eindeutig.*

*Beweis.* a) *Existenz.* Es sei  $a \neq 0$ . Ist  $a$  irreduzibel, so auch prim, und wir sind fertig. Ist  $a$  nicht irreduzibel, so hat  $a$  eine Zerlegung  $a = a_0 a_1$  mit Nichteinheiten  $a_0, a_1$ . Mit  $a_0$  und  $a_1$  verfahren wir genauso, und nach endlich vielen Schritten müssen alle Faktoren irreduzibel sein, denn sonst erhält man einen Widerspruch zum Teilerkettensatz.

b) *Eindeutigkeit.* Es gelte  $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$  mit Primelementen  $p_1, \dots, p_r$  und  $q_1, \dots, q_s$  und ohne Einschränkung  $r \geq s$ . Mit  $r = 1$  ist dann  $s = 1$  und  $p_1 = q_1$ . Es sei die Eindeutigkeit für  $r - 1$  schon bewiesen. Aus  $p_r | q_1 \cdot \dots \cdot q_s$  folgt  $p_r | q_\sigma$  für ein  $\sigma$ , ohne Einschränkung  $p_r | q_s$ , also  $q_s = u p_r$  mit einer Einheit  $u$ . Daraus folgt

$$b := p_1 \cdot \dots \cdot (u^{-1} p_{r-1}) = q_1 \cdot \dots \cdot q_{s-1},$$

und wir können auf  $b$  die Induktionsvoraussetzung anwenden. □

*Bemerkung.* Speziell in Polynomringen  $\mathbb{K}[x]$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  gilt der Satz über die Primfaktorzerlegung. In dieser Situation nennt man die Primelemente *irreduzible Polynome*, was in Einklang mit Lemma 15 steht. Der *Fundamentalsatz der Algebra* besagt (siehe p. 84), daß die *Linearfaktoren* genau die irreduziblen Polynome in  $\mathbb{C}[x]$  sind. Für den euklidischen Ring  $\mathbb{R}[x]$  der *reellen* Polynome muß man zu den Linearfaktoren noch die quadratischen Polynome ohne reelle Nullstellen hinzufügen.



# Teil II: Grundlagen der Analysis

## 6 Angeordnete und bewertete Körper

Der Körper  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen* besitzt noch eine weitere wichtige Eigenschaft: er „erbt“ von den natürlichen Zahlen eine *Anordnung*, die mit der Addition und Multiplikation *verträglich* ist. Wir formalisieren diese (uns sehr wohl vertraute) Beobachtung in dem folgenden Abschnitt.

### 6.1 Positivitätsbereiche und Anordnungen in Ringen und Körpern

*Definition.* Ein (nicht notwendig) kommutativer Ring  $R$  (insbesondere ein Körper  $\mathbb{K}$ ) heißt *angeordnet*, wenn es eine Teilmenge  $P = P_R \subset R$  (Menge der *positiven Elemente* oder *Positivitätsbereich*) gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- i)  $0 \notin P$ ,  $P \cap (-P) = \emptyset$ ,  $R = (-P) \cup \{0\} \cup P$ , wobei  $-P := \{a \in R : -a \in P\}$  die Menge der *negativen* Elemente bezeichnet;
- ii)  $a, b \in P \implies a + b, ab \in P$ .

Die Rechenregeln für die Vorzeichen von Produkten in Ringen implizieren sofort  $P \cdot (-P) \subset (-P)$ ,  $(-P) \cdot P \subset (-P)$ ,  $(-P) \cdot (-P) \subset P$ . Insbesondere ist ein Produkt  $ab$  genau dann positiv, wenn  $a$  und  $b$  positiv oder beide negativ sind.

Ein angeordneter Ring heißt *archimedisch* angeordnet, wenn es für alle  $a, b \in P$  eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}^*$  gibt mit  $na - b \in P$ .

In einem angeordneten Ring schreibt man  $a < b$  genau dann, wenn  $b - a \in P$ , und (selbstverständlich, d. h. notwendigerweise)  $a \leq b$ , wenn  $b - a \in P \cup \{0\}$ . Aufgrund unserer Axiome i) und ii) ist dies eine *totale Ordnung* im früheren abstrakten Sinne, und es gilt  $P = \{a \in R : a > 0\}$  und  $-P = \{a \in R : a < 0\}$ . In dieser Notation läßt sich das Archimedische Axiom wie folgt umformulieren: Für alle *positiven*  $a, b \in R$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $na > b$ .

Um zu zeigen, daß der Ring  $\mathbb{Z}$  genau eine (archimedische) Anordnung besitzt, beweisen wir die folgende Aussage.

**Lemma 6.1** *Jeder angeordnete Ring  $R$  ist nullteilerfrei. Alle Quadrate  $a^2$ ,  $a \neq 0$ , sind positiv. Besitzt  $R$  ein Einselement, so ist insbesondere dieses positiv.*

*Beweis.* Es seien  $a, b \in R^*$ . Da das Produkt  $ab$  mit  $a$  und  $b$  jeweils das Vorzeichen ändert, so kann man  $a, b \in P$  voraussetzen. Dann ist aber  $ab \in P$  und somit  $ab \neq 0$ . Wegen  $a^2 = (-a)^2$  folgt auch die zweite Behauptung. Die letzte ist trivial wegen  $1 = 1^2$ .  $\square$

**Folgerung 6.2** *Der Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen besitzt genau eine (notwendig archimedische) Anordnung.*

*Beweis.* Ist  $P$  ein Positivitätsbereich für  $\mathbb{Z}$ , so muß nach dem vorstehenden Lemma und der Bedingung  $P + P \subset P$  die Menge  $\mathbb{N}^*$  in  $P$  enthalten sein. Wegen  $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}^*) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$  ist dann aber notwendig  $P = \mathbb{N}^*$ . Umgekehrt erfüllt  $P = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$  alle Eigenschaften eines Positivitätsbereiches.  $\square$

In jedem angeordneten Ring gelten die uns geläufigen Regeln für den *Umgang mit Ungleichungen*. Ist z. B.  $a < b$  und  $b \leq c$ , so ist automatisch  $a < c$ . Aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$  für alle  $c$  und  $ac < bc$ , falls  $c > 0$ . Ist schließlich  $a \in R$  *invertierbar*, so ist mit  $a$  auch  $a^{-1}$  positiv wegen  $aa^{-1} = 1 > 0$ , und gilt zusätzlich  $0 < a < b$  mit invertierbarem  $b$ , so ist  $a^{-1} > b^{-1}$ .



## 6.2 Angeordnete Ober- und Unterringe

*Definition.* Ist  $(S, P_S)$  ein angeordneter Ring und  $R \subset S$  ein *Unterring*, so wird durch  $P_R := P_S \cap R$  offensichtlich eine Anordnung auf  $R$  induziert. Man nennt  $R$  mit dieser Anordnung einen *angeordneten Unterring* von  $S$ . Umgekehrt sagt man auch, daß sich die Anordnung von  $R$  nach  $S$  *fortsetzt*, und nennt  $S$  einen *angeordneten Oberring* von  $R$ .

*Bemerkung.* Wir werden später zeigen, daß der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen der „größte“ archimedisch angeordnete Körper ist, d. h. daß jeder archimedisch angeordnete Körper als angeordneter Unterkörper von  $\mathbb{R}$  „realisiert“ werden kann.

**Satz 6.3** *Ist  $R$  ein angeordneter kommutativer Ring, so gibt es auf dem Quotientenkörper  $Q := Q(R)$  genau eine Anordnung, die diejenige von  $R$  fortsetzt. Ist die Anordnung von  $R$  archimedisch, so auch die von  $Q$ .*

**Folgerung 6.4**  $\mathbb{Q}$  *besitzt genau eine (notwendig archimedische) Anordnung.*

*Beweis* (Satz 3). Ist  $a/b := ab^{-1} \in Q$  positiv bezüglich irgendeiner Anordnung, so muß auch  $ab = (a/b)b^2 \in R$  positiv sein und umgekehrt. Man hat also keine andere Wahl, als

$$P_Q := \left\{ \frac{a}{b} \in Q : ab \in P = P_R \right\}$$

zu setzen. Diese Menge ist tatsächlich wohldefiniert, denn  $a_1/b_1 = a_2/b_2$  impliziert

$$(a_1 b_1) b_2^2 = (a_2 b_2) b_1^2,$$

und hieraus folgt  $a_1 b_1 \in P \iff a_2 b_2 \in P$ . Da  $P$  ein Positivitätsbereich für  $R$  ist, hat man für jedes Element  $a/b \in Q$  die drei, sich gegenseitig ausschließenden Fälle  $ab = 0$ ,  $ab \in P$ ,  $ab \in -P$ . Im ersten Fall ist aber  $a/b = 0$ , im zweiten ist  $a/b \in P_Q$ , und im dritten ist  $(-a)b \in P$  und damit  $-(a/b) = (-a)/b \in P_Q$ . Dies liefert die disjunkte Vereinigung  $Q = (-P_Q) \cup \{0\} \cup P_Q$ . Die Eigenschaften i) und ii) rechnet man einfach nach: Sind nämlich  $r = a_1/b_1$ ,  $s = a_2/b_2 \in P_Q$ , so ist

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1)(b_1 b_2) = (a_1 b_1) b_2^2 + (a_2 b_2) b_1^2 \in P \quad \text{und} \quad (a_1 a_2)(b_1 b_2) = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \in P$$

und damit

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \in P_Q, \quad \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \in P_Q.$$

Es sei schließlich  $R$  archimedisch angeordnet. Um nachzuweisen, daß es für positive  $r, s \in Q$  eine natürliche Zahl  $n$  gibt mit  $nr > s$ , reicht es, den Fall  $r = 1$  zu behandeln (man ersetze  $s$  durch  $s/r$ ). Hierzu braucht man aber nur eine natürliche Zahl  $n$  zu wählen mit  $nb_1 > a_1$ , wobei  $s = a_1/b_1$ .  $\square$

Der folgende Satz besagt insbesondere, daß der Körper der rationalen Zahlen in jedem *angeordneten* Körper enthalten ist.

**Satz 6.5** *Für einen angeordneten Ring  $R$  mit Einselement ist die Abbildung  $\mathbb{N} \ni n \mapsto n \cdot 1 \in R$  injektiv. Somit enthält  $R$  (einen zu)  $\mathbb{Z}$  (isomorphen Ring) als angeordneten Unterring; insbesondere besitzt  $R$  unendlich viele Elemente.*

*Jeder angeordnete Körper enthält (einen zu)  $\mathbb{Q}$  (isomorphen Körper) als angeordneten Unterkörper.*

*Bemerkung.* Aufgrund des vorstehenden Satzes identifizieren wir das Element  $n \in \mathbb{Z}$  mit dem Element  $n \cdot 1$  in dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$ . Auf diese Weise können und werden wir stets annehmen, daß  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$  als angeordneter Unterkörper.

**Folgerung 6.6** *Endliche Körper können nicht angeordnet werden.*

*Beweis* (Satz 5). Die Abbildung

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow R \\ n \longmapsto n \cdot 1 \end{cases}$$

ist injektiv, da  $\alpha(n+1) - \alpha(n) = 1 = 1^2 > 0$ , also  $0 = \alpha(0) < 1 = \alpha(1) < \alpha(2) < \dots$ . Wegen  $\alpha(n_1 + n_2) = \alpha(n_1) + \alpha(n_2)$ ,  $\alpha(n_1 n_2) = \alpha(n_1) \alpha(n_2)$  können wir  $\mathbb{N}$  zusammen mit der natürlichen Addition und Multiplikation als Teilmenge von  $R$  auffassen:  $\mathbb{N} \subset R$ . Der kleinste Unterring (Unterkörper)  $R_0$  von  $R$ , der  $\mathbb{N}$  enthält, existiert (man nehme einfach den Durchschnitt aller Unterringe (Unterkörper) von  $R$ , die  $\mathbb{N}$  enthalten) und besteht, wie man sich sofort überlegt, aus allen Elementen der Form  $\pm a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ , bzw.  $\pm a b^{-1}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ . Damit konstruiert man sofort einen Ringisomorphismus (Körperisomorphismus)  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} R_0$  bzw.  $\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R_0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Man zeigt leicht: ist  $\mathbb{K}$  ein Körper, so ist die Menge  $\{n \in \mathbb{N}^* : n \cdot 1 = 0\}$  leer oder ihr Minimum eine Primzahl  $p$ , und  $\mathbb{K}$  enthält im zweiten Fall den Körper  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Man sagt dann auch,  $\mathbb{K}$  besitze die Charakteristik  $p$ . Dies ist z. B. der Fall für endliche Körper. Im ersten Fall ist dagegen  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ , und man nennt  $\mathbb{K}$  von der Charakteristik 0. Wegen der Hauptidealeigenschaft von  $\mathbb{Z}$  kann es keine weiteren Möglichkeiten geben.

### 6.3 Existenz angeordneter Ringe und Induktionsaxiom

Ist ein angeordneter Ring  $R$  mit Eins gegeben, so ist a priori die oben verwendete Abbildung  $\mathbb{N} \ni n \mapsto n \cdot 1 \in R$  per vollständiger Induktion zu definieren; man setzt damit die Existenz der natürlichen Zahlen im Sinne der Peano-Axiome schon voraus. Allerdings kann man zeigen, wie wir gleich erläutern werden, daß die Existenz eines solchen angeordneten Ringes die Existenz eines Modells für die Peano-Axiome nach sich zieht. Führt man also z. B. die reellen Zahlen axiomatisch ein, so verlangt man damit implizit, daß eine abzählbar unendliche Menge existiert.

Um dieses einzusehen, definiert man: Eine Teilmenge  $M \subset R$  heißt *induktiv*, falls  $0 \in M$  und  $r \in M$  impliziert, daß auch  $r + 1 \in M$ . Selbstverständlich gibt es Mengen mit dieser Eigenschaft, z. B.  $R$  selbst oder  $P \cup \{0\}$ . Da offensichtlich beliebige Durchschnitte von induktiven Mengen wieder induktiv sind, ist der Durchschnitt  $N$  aller induktiven Teilmengen von  $R$  eine induktive Teilmenge, die in jeder anderen enthalten ist. Daraus folgt sofort, daß  $N$  dem *Induktionsaxiom* genügt (bzgl. der Nachfolger-Relation  $n \mapsto n^\# := n + 1$ ).

### 6.4 Arithmetisches und geometrisches Mittel

*Definition* (Arithmetisches und geometrisches Mittel). In jedem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  erklärt man das *arithmetische Mittel* zweier *positiver* Elemente  $a, b \in \mathbb{K}$  durch

$$\text{AM}(a, b) := \frac{a + b}{2}.$$

Existiert ein positives Element  $G \in \mathbb{K}$  mit  $G^2 = ab$ , so heißt  $G$  das *geometrische Mittel*  $\text{GM}(a, b)$  von  $a$  und  $b$ .

*Bemerkung.* Das Element  $G$  ist, wenn es ein solches Element überhaupt gibt, in der Tat *eindeutig* bestimmt, wie man leicht zeigen kann. Da wir im Körper der reellen Zahlen stets die Wurzel aus positiven Elementen ziehen können, ist das geometrische Mittel zweier positiver *reeller* Zahlen definiert. Siehe dazu auch 9.2.

*Bemerkung.* Es ist stets

$$\text{AM}(a, b) = \text{AM}(b, a), \quad \text{AM}(ta, tb) = t \text{AM}(a, b) \text{ für } t > 0.$$

Entsprechendes gilt auch für das geometrische Mittel.

Das arithmetische Mittel ist eindeutig bestimmt durch die Beziehung

$$\text{AM}(a, b) - a = b - \text{AM}(a, b),$$

wenn man ohne Einschränkung  $a \leq b$  voraussetzt, und das geometrische Mittel durch

$$\frac{\text{GM}(a, b)}{a} = \frac{b}{\text{GM}(a, b)}.$$

Wir zeigen nun, daß in einem beliebigen *angeordneten* Körper das geometrische Mittel niemals größer als das arithmetische Mittel sein kann.

**Lemma 6.7** *Es gilt stets*

$$\text{GM}(a, b) \leq \text{AM}(a, b).$$

*Gleichheit gilt nur dann, wenn  $a = b$ .*

Wir können zum *Beweis* annehmen, daß  $a \leq G := \text{GM}(a, b) \leq b$ ; denn sind z. B.  $a$  und  $b$  kleiner als  $G$ , so ist notwendig auch  $ab < G^2$ . Unter dieser Zusatzannahme folgt aber

$$0 \leq (G - a)(b - G) = (a + b)G - (G^2 + ab) = (a + b)G - 2G^2.$$

Also ist  $2G^2 \leq (a + b)G$ , und durch Division mit  $2G > 0$  folgt die Behauptung. Besteht in der behaupteten Ungleichung aber Gleichheit, so ist in der oben stehenden eingerückten Formel die rechte Seite gleich Null, und deshalb müssen alle Ausdrücke Null sein, insbesondere  $(G - a)(b - G)$ . Somit ist  $a = G = b$ .  $\square$

*Bemerkung.* Im Allgemeinen wird man nicht erwarten können, daß in einem *beliebigen* angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  das geometrische Mittel zweier *allgemeiner* positiver Elemente  $a, b$  existiert. Man hat dann aber auf jeden Fall immer noch die obige Ungleichung in der „quadrierten“ Form.

**Lemma 6.8** *In einem beliebigen angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  besteht für je zwei positive Elemente  $a, b$  die Ungleichung*

$$ab \leq \text{AM}^2(a, b) = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

*In dieser herrscht Gleichheit genau dann, wenn  $a = b$ .*

*Beweis.* Es ist

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \geq 0$$

und  $= 0$  nur dann, wenn  $a = b$ .  $\square$

## 6.5 Existenz nichtarchimedischer Anordnungen

Wir wollen noch kurz demonstrieren, daß auch *nichtarchimedische* Anordnungen auf ganz natürliche Weise auftreten.

**Satz 6.9** *Besitzt der Ring  $R$  eine (archimedische oder nichtarchimedische) Anordnung, so läßt sich diese zu einer nichtarchimedischen Anordnung auf dem Polynomring  $R[x]$  fortsetzen.*

*Beweis.* Man nenne ein Polynom  $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  *positiv*, wenn der höchste Koeffizient  $a_n$  in  $P = P_R$  liegt. Hierdurch wird offensichtlich eine Anordnung auf  $R[x]$  definiert, die die Ordnung auf  $R$  nach  $R[x]$  fortsetzt. Diese Ordnung auf  $R[x]$  ist jedoch nicht archimedisch, da  $na < x$  für alle  $a \in R$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

*Bemerkung.* Man kann den Polynomring  $\mathbb{Q}[x]$  und damit auch seinen Quotientenkörper, den Körper der *rationalen Funktionen*, den man i. a. mit  $\mathbb{Q}(x)$  bezeichnet, jedoch auch (sogar auf unendlich viele verschiedene Weisen) *archimedisch* anordnen, so daß die Anordnung von  $\mathbb{Q}$  fortgesetzt wird. Hierzu

braucht man nur eine *transzendente* Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  zu wählen (siehe Kapitel 3) und den Ringhomomorphismus<sup>10</sup>

$$\mathbb{Q}[x] \ni P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto P(\alpha) := a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \in \mathbb{R}$$

zu betrachten. Dieser ist automatisch injektiv und bildet  $\mathbb{Q}[x]$  bzw.  $\mathbb{Q}(x)$  isomorph auf einen Unterring bzw. Unterkörper von  $\mathbb{R}$  ab. Man wähle dann die von  $\mathbb{R}$  auf diesem Unterring bzw. Unterkörper induzierte Anordnung.

## 6.6 Bemerkenswerte Eigenschaften archimedischer Ringe

Wir beweisen zunächst den überraschenden

**Satz 6.10** *Ein archimedisch angeordneter Ring  $R$  ist notwendig kommutativ.*

*Beweis.* Es seien  $a, b \in R$  und ohne Einschränkung beide positiv. Dann gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}^*$  ein  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $ma < nb$ . Wählt man  $n$  minimal, so ist sogar

$$(n-1)b \leq ma < nb.$$

Man rechnet sofort nach, daß

$$m(ab - ba) < nb^2 - (n-1)b^2 = b^2.$$

Da dies für alle  $m \in \mathbb{N}^*$  gilt, muß  $ab - ba \leq 0$  sein. Durch Vertauschung der Rollen von  $a$  und  $b$  erhält man  $ab - ba = 0$ .  $\square$

Mit der gleichen Beweismethode leitet man eine weitere eigenartige Aussage über *archimedisch angeordnete Ringe* ab, die wir (im Falle von angeordneten Körpern) zum Beweis der *Eindeutigkeit* des reellen Zahlenkörpers benötigen.

**Satz 6.11** *Ein archimedisch angeordneter Ring  $R$  mit Einselement besitzt nur die Identität als ordnungserhaltenden Ringisomorphismus.*

*Beweis.* Wir schreiben  $e$  für das Einselement von  $R$ . Für beliebiges positives  $a \in R$  erhält man wie im obigen Beweis zu Satz 8 zu vorgegebenem  $m \in \mathbb{N}^*$  ein  $n$  mit  $(n-1)e \leq ma < ne$ . Ist  $\alpha: R \rightarrow R$  ein ordnungserhaltender Ringisomorphismus, so gilt notwendig  $\alpha(e) = e$  und  $\alpha(n) = n$  für alle  $n \in \mathbb{N} \subset R$ . Somit gilt auch

$$(n-1)e \leq m\alpha(a) < ne.$$

Durch Subtraktion beider Ungleichungsketten ergibt sich

$$-e < m(\alpha(a) - a) < e$$

für alle  $m \in \mathbb{N}^*$ , woraus sofort  $\alpha(a) = a$  folgt. Dies ist dann auch für negative  $a$  richtig wegen  $\alpha(a) = -\alpha(-a) = -(-a) = a$ .  $\square$

## 6.7 Beträge in angeordneten Ringen

Für die Analysis grundlegend ist die folgende

*Definition.* In einem angeordneten Ring  $R$  definiert man den *Betrag* eines Elementes  $a$  durch

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

d. h.  $|a| = \max(a, -a)$ .

<sup>10</sup>Die Anzahl der mathematischen Symbole ist beschränkt. Es darf die Leserin/den Leser dieses Textes nicht verwirren, daß in demselben Kapitel die Bezeichnung  $P$  sowohl für ein *Polynom* als auch für einen *Positivitätsbereich* steht. Die jeweilige Bedeutung muß sich jeweils aus dem Kontext erschließen (lassen).

**Satz 6.12** In angeordneten Ringen gelten die folgenden Regeln :

- i) Es ist stets  $|a| \geq 0$ , und  $|a| = 0$  gilt genau dann, wenn  $a = 0$ .
- ii)  $|ab| = |a||b|$ .
- iii) (Dreiecksungleichung)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

*Beweis.* Nur die Dreiecksungleichung bedarf einer Begründung. Ist  $a + b \geq 0$ , so ist  $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ . Im anderen Fall ist  $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$ .  $\square$

## 6.8 Intervalle in angeordneten Ringen und Körpern

*Definition.* Es sei  $R$  ein angeordneter Ring, und  $a, b$  seien Elemente in  $R$ . Man setzt dann

- i)  $[a, b] := \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ ,
- ii)  $(a, b) := \{x \in R : a < x < b\}$ ,
- iii)  $(a, b] := \{x \in R : a < x \leq b\}$ ,
- iv)  $[a, b) := \{x \in R : a \leq x < b\}$

und nennt diese Mengen (*beschränkte*) *Intervalle* in  $R$ . Genauer heißen die Intervalle vom Typ i) *abgeschlossen* (im Falle  $R = \mathbb{R}$  auch *kompakt*), die vom Typ ii) *offen*, die restlichen *links offen und rechts abgeschlossen* bzw. umgekehrt oder kurz *halboffen*.

Die *unbeschränkten* Intervalle sind die Mengen der Form

- v)  $(a, \infty) := \{x \in R : a < x\}$ ,
- vi)  $(-\infty, b) := \{x \in R : x < b\}$ ,
- vii)  $[a, \infty) := \{x \in R : a \leq x\}$ ,
- viii)  $(-\infty, b] := \{x \in R : x \leq b\}$ ,
- ix)  $(-\infty, \infty) := R$ .

Manchmal fügt man  $R$  zwei Symbole  $-\infty, \infty$  als *ideelle* Elemente hinzu und schreibt

$$\bar{R} := R \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Man vereinbart

$$-\infty < x < \infty$$

für alle  $x \in R$ <sup>11</sup>. Das Symbol  $(a, \infty)$  besitzt dann a priori zwei Bedeutungen, die aber offensichtlich übereinstimmen. Weiter ist z. B.

$$(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}, \quad \text{etc.}$$

*Bemerkungen.* 1. Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen wird später als ein archimedisch angeordneter Körper eingeführt, für den ein *zusätzliches* Axiom gültig ist, z. B. das (schwache) Axiom der *Intervallschachtelung*: Sind  $I_j := [a_j, b_j]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{K}$  mit  $I_{j+1} \subset I_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so ist ihr Durchschnitt nicht leer. Diese Bedingung ist, wie wir sehen werden, für den Körper der *rationalen*

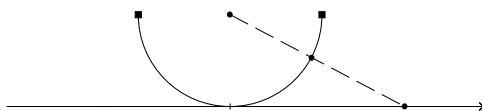
<sup>11</sup>Dagegen sind die *algebraischen* Operationen  $+$  und  $\cdot$  weiterhin nur auf den Ring  $R$  beschränkt. Es ist insbesondere völlig abwegig, Ausdrücken wie

$$\infty - \infty, \quad 0\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

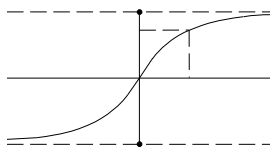
einen Sinn geben zu wollen.

Zahlen verletzt.

2. Im Falle  $R = \mathbb{R}$  nennt man  $\overline{\mathbb{R}}$  auch die *erweiterte Zahlengerade*. Man bekommt einfache Modelle von  $\overline{\mathbb{R}}$  durch die folgenden Konstruktionen (wobei man im zweiten Fall etwa die Funktion  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$  oder  $x \mapsto \arctan x$  heranziehen kann).



Figur 6.1



Figur 6.2

## 6.9 Quadratwurzel aus $-1$

Wegen Lemma 1 kann man in einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$  aus einem Element  $x$  höchstens dann die Wurzel ziehen, wenn  $x \geq 0$  (und für  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$  wird dies auch immer möglich sein, wie wir später beweisen werden). Man kann diesen Defekt für  $x = -1$  durch eine geeignete *Körpererweiterung*  $\mathbb{K}$  von  $\mathbb{K}_0$  beheben, notgedrungen aber nur unter Preisgabe der Anordnungsfähigkeit.

Zur Konstruktion dieser Erweiterung gehen wir zuerst wieder *formal* vor. Wir nehmen an, es existiere ein Element  $i \in \mathbb{K}$  mit  $i^2 = -1$ , und jedes Element  $c \in \mathbb{K}$  möge sich eindeutig in der Form

$$c = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{K}_0$$

schreiben lassen. Dann gilt für die Addition und Multiplikation ( $c_j = a_j + b_j i$ ,  $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ c_1 c_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \end{aligned}$$

insbesondere ist das Nullelement in  $\mathbb{K}$  notwendig gleich  $0 + 0i$ . Es sei nun  $c = a + bi \neq 0$  und  $c^{-1} = \alpha + \beta i$  ein multiplikatives Inverses von  $c$ . Dann folgt aus  $cc^{-1} = 1$  durch Multiplikation mit  $\bar{c} := a - bi$  wegen  $c\bar{c} = a^2 + b^2$ :

$$(a^2 + b^2)(\alpha + \beta i) = a - bi.$$

Also muß notwendig  $a^2 + b^2 \neq 0$  sein. Dies ist auch hinreichend, wie der folgende Satz zeigt, dessen Beweis dem Leser aufgrund der Vorbemerkungen überlassen werden kann.

**Satz 6.13** *Es sei  $\mathbb{K}_0$  ein Körper mit  $a^2 + b^2 \neq 0$  für alle  $a, b \in \mathbb{K}_0$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ , z. B. ein angeordneter Körper. Dann wird auf  $\mathbb{K} := \mathbb{K}_0^2$  durch*

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1)(a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

eine Körperstruktur erklärt. Schreibt man  $a$  statt  $(a, 0)$  und  $i$  statt  $(0, 1)$ , so läßt sich jedes Element  $c \in \mathbb{K}$  eindeutig in der Form

$$c = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{K}_0, \quad i^2 = -1,$$

darstellen. Für  $c \neq 0$  ist das multiplikative Inverse gegeben durch die Formel

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{c\bar{c}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Die injektive Abbildung

$$\mathbb{K}_0 \ni a \mapsto a + 0i \in \mathbb{K}$$

bettet  $\mathbb{K}_0$  als Unterkörper in  $\mathbb{K}$  ein.

*Beispiele.* 1. Für  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$  heißt der oben konstruierte Körper der Körper  $\mathbb{Q}[i]$  der GAUSSschen Zahlen.

2. Für den reellen Zahlkörper  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$  heißt der entsprechende Körper der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen. Man nennt in der eindeutigen Darstellung  $c = a + bi$  die Zahl  $a \in \mathbb{R}$  den Realteil und  $b \in \mathbb{R}$  den Imaginärteil von  $c \in \mathbb{C}$ ; in Zeichen  $a = \operatorname{Re} c$ ,  $b = \operatorname{Im} c$ .

**Folgerung 6.14** Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen kann nicht angeordnet werden.

Denn sonst wäre  $0 < i^2 = -1 < 0$ .

*Bemerkung.* Man kann übrigens zeigen, daß man auf  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 3$  keine Körperstruktur erklären kann. Immerhin hat man auf  $\mathbb{R}^4$  noch eine nichtkommutative „Schiefkörper“-Struktur (Hamiltonsche Quaternionen), und für  $n = 8$  und  $16$  gibt es weitere interessante algebraische Strukturen (von sogenannten Divisionsalgebren. Siehe hierzu z. B. [20]).

*Definition.* Die Abbildung  $a + bi = c \mapsto \bar{c} := a - bi$  heißt die Konjugation auf  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{c}$  wird die zu  $c$  konjugierte komplexe oder konjugiert-komplexe Zahl genannt. Die Konjugation ist involutorisch, d. h. daß zweifaches Anwenden wieder zum Ausgangswert zurückführt:  $\bar{\bar{c}} = c$ .

**Lemma 6.15** Die Konjugation ist ein involutorischer Körperautomorphismus von  $\mathbb{C}$  bzw. von  $\mathbb{Q}[i]$ .

*Beweis.* Trivial. □

*Bemerkung.* In den beiden obigen Beispielen ist  $c\bar{c} = a^2 + b^2 \geq 0$ , und man kann die (positive) Wurzel

$$|c| := \sqrt{c\bar{c}} \in \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$$

ziehen.  $|c|$  heißt der Betrag oder Absolutbetrag von  $c$ ; er stimmt natürlich mit dem ursprünglichen Betrag überein, wenn  $c \in \mathbb{R}$ . Man beachte aber, daß im ersten Beispiel für  $c \in \mathbb{Q}[i]$  i. a. der Betrag  $|c|$  nicht in  $\mathbb{Q}$ , sondern nur in  $\mathbb{R}$  liegt.

**Lemma 6.16** In  $\mathbb{C}$  (und damit erst recht in  $\mathbb{Q}[i]$ ) gilt :

- i)  $|c| \geq 0$ , und  $|c| = 0$  genau dann, wenn  $c = 0$  ;
- ii)  $|c_1 c_2| = |c_1| |c_2|$  ;
- iii) (Dreiecksungleichung)  $|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|$ .

*Beweis.* i) ist trivial. ii):  $|c_1 c_2|^2 = (c_1 c_2)(\overline{c_1 c_2}) = (c_1 \bar{c}_1)(c_2 \bar{c}_2) = |c_1|^2 |c_2|^2 = (|c_1| |c_2|)^2$ .

iii). Es ist zu zeigen (wir benutzen hierbei die Monotonie der reellen Wurzel; der Beweis wird später erbracht), daß

$$|c_1 + c_2|^2 = (c_1 + c_2)(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) \leq c_1 \bar{c}_1 + 2|c_1| |c_2| + c_2 \bar{c}_2 = (|c_1| + |c_2|)^2,$$

also

$$(\bar{c}_1 c_2 + c_1 \bar{c}_2)^2 \leq 4c_1 \bar{c}_1 c_2 \bar{c}_2$$

gilt. Dies ist gleichbedeutend mit  $\lambda^2 \leq 0$  für  $\lambda := \bar{c}_1 c_2 - c_1 \bar{c}_2$ . Nun ist aber  $\bar{\lambda} = c_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2 = -\lambda$ , also  $\lambda = ai$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , und folglich tatsächlich  $\lambda^2 = -a^2 \leq 0$ . □

## 6.10 Bewertete Körper

Der Absolutbetrag in dem komplexen Körper  $\mathbb{C}$  hat seine Werte in dem angeordneten Körper  $\mathbb{R}$ . Man kann diese Situation noch verallgemeinern.

*Definition.* Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine *Bewertung* auf  $\mathbb{K}$  mit Werten in dem *angeordneten* Körper  $\mathbb{K}_0$  ist eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}_0$  mit den Eigenschaften:

- i)  $\varphi(x) \geq 0$ , und  $\varphi(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ;
- ii)  $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1) \varphi(x_2)$ ;
- iii)  $\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ .

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir  $|x|$  anstelle von  $\varphi(x)$ .

*Beispiele.* 1. Jeder angeordnete Körper  $\mathbb{K}_0$  besitzt den natürlichen Betrag als Bewertung (mit Werten in  $\mathbb{K}_0$  selbst). Insbesondere sind  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  auch bewertete Körper.

2.  $\mathbb{C}$  ist mit dem üblichen Absolutbetrag  $\mathbb{C} \ni c \mapsto |c| \in \mathbb{R}$  ein bewerteter Körper.

3. Es existiert auf jedem Körper die *triviale* Bewertung  $|x| = 1$ ,  $x \neq 0$ . Die endlichen Körper können nur trivial bewertet werden, wie wir weiter unten beweisen werden.

4. Auf  $\mathbb{Q}$  gibt es neben der üblichen noch weitere Bewertungen. Es sei  $p$  eine Primzahl; dann läßt sich jedes von Null verschiedene Element  $x$  in  $\mathbb{Q}$  eindeutig schreiben in der Form

$$\frac{a}{b} p^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid a, p \nmid b.$$

Man setzt dann

$$|x|_p := p^{-n} \quad \text{und} \quad |0|_p := 0,$$

so daß  $|x_1 x_2|_p = |x_1|_p |x_2|_p$  und  $|x_1 + x_2|_p \leq \max(|x_1|_p, |x_2|_p)$  („verschärfte Dreiecksungleichung“). Man nennt  $|\cdot|_p$  die *p-adische Bewertung* auf  $\mathbb{Q}$ .

5. Man schreibt auch manchmal  $|x|_\infty$  für den natürlichen Betrag auf  $\mathbb{Q}$ . Nach einem Satz von OSTROWSKI sind  $|\cdot|_\infty$  und  $|\cdot|_p$ ,  $p$  Primzahl, (im wesentlichen) die einzigen nichttrivialen Bewertungen auf  $\mathbb{Q}$ .

**Lemma 6.17** *In jedem bewerteten Körper gelten zusätzlich die folgenden Regeln :*

- i)  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ ,  
(hierbei tritt das Betragszeichen auf der rechten Seite evtl. in zwei verschiedenen Bedeutungen auf);
- ii)  $|-x| = |x|$ ;
- iii)  $|1| = 1$ ;
- iv)  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ ,  $x \neq 0$ .

*Beweis.* iii) Wegen  $|1||1| = |1 \cdot 1| = |1|$  folgt  $|1| = 1$ .

ii) Wie in iii) ergibt sich  $|-1| = 1$ . Dies liefert zusammen mit der Bedingung ii) in der Definition die Behauptung.

iv) folgt aus ii) in der Definition und iii) aus diesem Lemma wegen  $xx^{-1} = 1$ .

i) Aus  $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$  folgt

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

Durch Vertauschung der Rollen von  $x$  und  $y$  schließt man unter Verwendung von ii) auf i).  $\square$



**Folgerung 6.18** *In jedem bewerteten Körper haben Einheitswurzeln die Bewertung 1. Insbesondere können endliche Körper nur trivial bewertet werden.*

*Beweis.* Es sei  $x$  eine Einheitswurzel, also ein Element mit  $x^n = 1$  für eine natürliche Zahl  $n$ . Wäre  $|x| \neq 1$ , so können wir  $|x| > 1$  voraussetzen, da mit  $x$  auch  $1/x$  eine Einheitswurzel ist. Wir schreiben dann  $|x| = 1 + \delta$  mit einem positiven Element  $\delta$  in  $\mathbb{K}_0$ . Dann ist  $|x^n| = (1 + \delta)^n > 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$ , wie man unmittelbar aus der binomischen Formel abliest. Somit kann  $x^n$  niemals gleich 1 sein.

Ist  $n$  die Ordnung einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe mit neutralem Element  $e$ , so gilt  $a^n = e$  für jedes Element  $a$  (Übungsaufgabe). Folglich ist in einem endlichen Körper jedes Element eine Einheitswurzel.  $\square$

## 6.11 Polynomringe über Körpern

Wir wenden nun die Überlegungen des Anhangs von Kapitel 5 auf Polynomringe über Körpern, insbesondere über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  an. Als erste Folgerung leiten wir den folgenden Satz ab, der die *Injektivität* der Abbildung  $\mathbb{K}[x] \rightarrow \text{Abb}\mathbb{K}$  für beliebige unendliche Körper  $\mathbb{K}$  impliziert, und den *Identitätssatz* für reelle und komplexe Polynome.

**Satz 6.19** *Es sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper und  $P \in \mathbb{K}[x]$  vom Grad  $n \geq 1$ . Dann hat  $P$  höchstens  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{K}$ .*

*Beweis.* Es sei  $x_1 \in \mathbb{K}$  eine Nullstelle von  $P$ . Durch Division mit Rest erhält man

$$P = (x - x_1)P_1 + R_1,$$

wobei  $\deg P_1 = n - 1$  und  $\deg R_1 \leq 0$ , d. h.  $R_1 \in \mathbb{K}$ . Setzt man  $x = x_1$ , so folgt  $R_1 = 0$ . Somit erhält man induktiv eine Darstellung

$$P = (x - x_1) \cdots (x - x_\ell) P_\ell, \quad P_\ell \in \mathbb{K}[x], \quad \deg P_\ell = n - \ell, \quad \ell \leq n,$$

und  $P_\ell(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{K}$ . Ist nun  $x \notin \{x_1, \dots, x_\ell\}$ , so ist  $P(x) \neq 0$ .  $\square$

**Folgerung 6.20** *Hat der Körper  $\mathbb{K}$  unendlich viele Elemente, so ist jedes Polynom vom Grad  $n$  bestimmt durch seine Werte an  $n + 1$  paarweise verschiedenen Stellen.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen: Zu  $n + 1$  paarweise verschiedenen Stellen  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  und Werten  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  gibt es ein Polynom  $Q$  vom Grad  $\leq n$ , so daß  $Q(x_j) = y_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Denn hat das Polynom  $P$  vom Grade  $n$  die Werte  $y_j = P(x_j)$ , so bilde man das zugehörige Polynom  $Q$ ; die Differenz  $P - Q$  ist dann höchstens vom Grade  $n$ , besitzt aber mindestens die  $n + 1$  Nullstellen  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , und muß daher gleich Null sein.

Man kann nach NEWTON ein effektives Verfahren für die Existenz und Berechnung des (eindeutig bestimmten) Polynoms  $Q$  angeben: Man macht den Ansatz

$$Q(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

und erhält die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0, & y_1 &= A_0 + A_1(x_1 - x_0), & y_2 &= A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \dots \\ y_n &= A_0 + A_1(x_n - x_0) + A_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + A_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

aus denen man sukzessive die Koeffizienten  $A_0, \dots, A_n$  bestimmen kann.  $\square$

*Definition und Bemerkung.* Das Polynom  $Q$  im Beweis des vorigen Satzes heißt auch das *Interpolationspolynom* zu den *Stützstellen*  $x_j$  und *Werten*  $y_j$ . Man kann für  $Q$  auch eine explizite Formel angeben, die auf LAGRANGE zurückgeht: Es ist

$$Q(x) = \psi(x) \left[ \frac{y_0}{(x - x_0)\psi'(x_0)} + \cdots + \frac{y_n}{(x - x_n)\psi'(x_n)} \right],$$

wobei  $\psi(x) := (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  und  $\psi'(x_j) = \prod_{k \neq j} (x_j - x_k)$ .

Eine wesentliche Verschärfung des vorigen Satzes ist der *Identitätssatz*.

**Satz 6.21 (Identitätssatz für reelle und komplexe Polynome)** *Es sei  $\mathbb{K}$  gleich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und  $P, Q \in \mathbb{K}[x]$  seien Polynome, die als Funktionen auf einem Intervall bzw. einer Kreisscheibe*

$$D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0 \text{ fest,}$$

*übereinstimmen. Dann gilt  $P = Q$ , d. h. alle Koeffizienten von  $P$  stimmen mit den entsprechenden Koeffizienten von  $Q$  überein.*

*Beweis.* Bildet man  $R := P - Q$ , so braucht man nur zu zeigen: Ist  $R$  ein Polynom und  $R(x) = 0$  für alle  $x \in D_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , so ist  $R$  das Nullpolynom. Nun enthält aber  $D_\varepsilon$  abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene Elemente der Form

$$x_0 + \frac{1}{n}, \quad n \geq n_0 > 0. \quad \square$$

*Bemerkung.* Offensichtlich bleibt der vorstehende Satz auch richtig für jeden *archimedisch* angeordneten oder bewerteten Körper (zu dem letzten Begriff siehe den Anhang zu Kapitel 7).

Wir beweisen später auf unterschiedliche Weisen den folgenden grundlegenden Satz.

**Satz 6.22 (Fundamentalsatz der Algebra)** *Der Körper  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen, d. h. jedes Polynom  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $P \neq 0$ , schreibt sich (bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig) in der Form*

$$P(z) = a(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n), \quad n = \deg P, \quad a \neq 0.$$

*Ist  $P \in \mathbb{R}[x]$  und  $z_0$  eine Nullstelle in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist wegen*

$$P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0$$

*auch  $\bar{z}_0 \neq z_0$  eine Nullstelle. Das quadratische Polynom  $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 - (z_0 + \bar{z}_0)x + z_0 \bar{z}_0$  liegt in  $\mathbb{R}[x]$  und hat keine reelle Nullstelle. Also schreibt sich jedes reelle Polynom  $P \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$  in der Form*

$$P = a(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_\ell) Q_1(x) \cdot \dots \cdot Q_r(x), \quad a \in \mathbb{R}^*$$

*mit den reellen Nullstellen  $x_1, \dots, x_\ell$  und quadratischen Polynomen*

$$Q_\rho(x) \in \mathbb{R}[x]$$

*ohne reelle Nullstellen.*

*Bemerkung.* Man kann sich sofort davon überzeugen, daß diese Darstellung eine *Primfaktorzerlegung* und damit im wesentlichen eindeutig bestimmt ist. Natürlich gilt

$$\ell + 2r = n = \deg P.$$

Anders ausgedrückt: Die Primelemente in dem komplexen Polynomring  $\mathbb{C}[x]$  sind (bis auf Einheiten) die *Linearformen*

$$x + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

In  $\mathbb{R}[x]$  muß man zu den reellen Linearformen  $x + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , noch die *quadratischen Formen*

$$x^2 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

hinzunehmen, die in  $\mathbb{R}$  keine Nullstellen besitzen, für die also  $a^2 - 4b < 0$  gilt.

**Folgerung 6.23** *Jedes reelle Polynom  $P \in \mathbb{R}[x]$  mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.*

*Bemerkung.* Wir werden diese Folgerung schon bald mit *elementarer* reeller Analysis auch ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra beweisen.

### 6.12 Der goldene Schnitt und das reguläre Fünfeck

Wir zeigen zum Abschluß dieses Kapitels noch einmal mit Hilfe der komplexen Zahlen, daß man das Verhältnis  $g$  des *goldenen Schnitts* und damit die Irrationalzahl  $\sqrt{5}$  im regulären Fünfeck wiederfindet, ausgerechnet also in dem Wappensymbol der Pythagoräer, von denen die Rationalität aller Längenverhältnisse zum philosophischen Prinzip erhoben worden war.

Der goldene Schnitt  $g$  wird, wie wir schon früher dargelegt haben, durch die Gleichung

$$\frac{1}{g} + 1 = g$$

bestimmt.  $g$  erfüllt also die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5}).$$

Da  $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$  ist, ist nur die Lösung mit dem Plus-Zeichen positiv und damit

$$g = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Wir setzen weiter

$$h := \frac{1}{g} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1), \quad k := \sqrt{4 - h^2}$$

und

$$\zeta := \frac{1}{2} (h + ik).$$

Man rechnet dann leicht nach, daß

$$|\zeta|^2 = \frac{1}{4} (h^2 + 4 - h^2) = 1$$

und somit  $|\zeta| = 1$ . Ferner ist

$$\zeta^2 = -\frac{1}{2} (h + 1) + \frac{1}{2} hki = \bar{\zeta}^2,$$

$\zeta^4 = \bar{\zeta}$  und  $\zeta^5 = 1$ . Weiter hat man

$$|\zeta^{j+1} - \zeta^j| = |\zeta^j| |\zeta - 1|$$

für alle  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ . Mit anderen Worten: die Potenzen  $\zeta^j$  bilden die Ecken eines *regelmäßigen Fünfecks* in der komplexen Ebene.

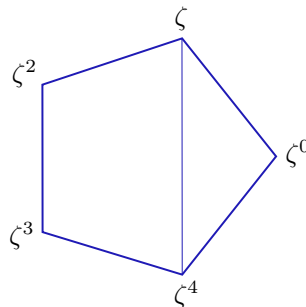


Figure 6.3

Der goldene Schnitt ergibt sich hierbei als das Verhältnis der Diagonallänge zu der Seitenlänge:

$$\frac{|\zeta - \zeta^4|}{|\zeta - 1|} = g .$$

## Anhang: Partialbruch - Zerlegung rationaler Funktionen

Für die Untersuchung reeller rationaler Funktionen, insbesondere zur Bestimmung ihrer Stammfunktionen, benötigt man ihre Darstellung als Summe sogenannter *Partialbrüche*, die wir hier kurz erläutern wollen.

Es sei also  $R = P/Q$  eine reelle rationale Funktion, wobei die reellen Polynome  $P$  und  $Q$  von vornherein als *teilerfremd* angenommen werden können. Nach Division mit Rest schreibt sich überdies  $R$  in der Form

$$P_1 + \frac{P_2}{Q},$$

wobei  $P_1$  ein Polynom und der Grad von  $P_2$  kleiner als der von  $Q$  ist. Man nennt das Polynom  $P_1$  auch die *Asymptote* von  $R$ , da der Rest  $P_2/Q$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen Null konvergiert (siehe Kapitel 12). Wir können und werden uns daher im folgenden auf *echt gebrochene rationale* Funktionen  $R = P/Q$ ,  $\deg P < \deg Q$ , beschränken können. Unter einem *Partialbruch* versteht man nun echt gebrochene rationale Funktionen von den folgenden beiden Typen:

$$\frac{A}{(x - x_0)^k} \quad \text{oder} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^k},$$

wobei das quadratische Polynom  $x^2 + bx + c$  keine reellen Nullstellen besitzt, also  $b^2 - 4c < 0$  ist.

Die Partialbruch-Entwicklung einer echt gebrochenen rationalen Funktion bestimmt sich nun leicht aus der Primelement-Zerlegung des Nenners  $Q$ :

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} (Q_1(x))^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (Q_m(x))^{\ell_m}$$

mit den paarweise verschiedenen reellen Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$  von  $Q$  und den paarweise verschiedenen quadratischen Polynomen  $Q_\mu(x) = x^2 + b_\mu x + c_\mu \in \mathbb{R}[x]$  ohne reelle Nullstellen.

**Satz 6.24** *Unter den vorstehenden Bezeichnungen besitzt die echt gebrochene rationale Funktion  $R = P/Q$  eine eindeutig bestimmte Partialbruch-Zerlegung der Form*

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{A_{\nu,1}}{x - x_\nu} + \dots + \frac{A_{\nu,k_\nu}}{(x - x_\nu)^{k_\nu}} \right) + \sum_{\mu=1}^m \left( \frac{B_{\mu,1}x + C_{\mu,1}}{x^2 + b_\mu x + c_\mu} + \dots + \frac{B_{\mu,\ell_\mu}x + C_{\mu,\ell_\mu}}{(x^2 + b_\mu x + c_\mu)^{\ell_\mu}} \right).$$

*Beweis.* Man mache einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten, wie in der Behauptung angegeben, und multipliziere mit dem Hauptnenner  $Q$ . Koeffizientenvergleich der Polynome auf beiden Seiten führt dann auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten.  $\square$

## 7 Konvergente Folgen in metrischen Räumen

Der Körper der reellen Zahlen soll nicht nur (archimedisch) angeordnet sein, sondern zusätzlich *vollständig* (und ist durch diese Eigenschaften - bis auf Isomorphie - eindeutig bestimmt). Wir wollen in diesem Kapitel den Begriff der *Konvergenz* von Folgen einführen und studieren, der uns überhaupt erst in die Lage versetzt, von der *Vollständigkeit* eines Körpers zu reden. Hierzu benötigen wir einen *Abstandsbegriff*, der es uns ermöglicht, das „Nahebeinanderliegen“ von Körperelementen mathematisch exakt zu fassen. Wir beschränken uns dabei nicht nur auf *angeordnete* und *bewertete* Körper  $\mathbb{K}$ , bei denen man den Betrag  $|a - b|$  als einen solchen Abstand zwischen den Elementen  $a$  und  $b$  ansehen kann, sondern formulieren die Ergebnisse gleich für die Klasse der *normierten Vektorräume* und verallgemeinern dieses Konzept noch weiter auf  $\mathbb{K}_0$ -*metrische Räume* über einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$  und (im Anhang) auf beliebige *topologische Räume*.

### 7.1 Normierte Vektorräume

*Definition.* Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und  $\mathbb{K}$  sei bewertet mit Bewertung in dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$ . Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K}_0 \\ v \longmapsto \|v\| \end{cases}$$

heißt eine *Norm* auf  $V$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

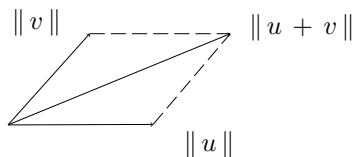
- i)  $\|v\| > 0$  für  $v \neq 0$ ;
- ii)  $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$ ,  $c \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$ ;
- iii)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

Das Paar  $(V, \|\cdot\|)$  heißt dann ein *normierter Vektorraum*.

*Bemerkung.* Aus der Bedingung ii) ergibt sich unmittelbar, daß der Nullvektor stets die Norm 0 besitzt. Für einen beliebigen Vektor  $v \in V$  ist  $0v = 0$ , wobei mit 0 links die Null im Grundkörper und rechts der Nullvektor gemeint ist<sup>12</sup>, und damit

$$\|0\| = \|0v\| = |0| \|v\| = 0 \|v\| = 0.$$

Die Beziehung iii) heißt die *Dreiecksungleichung*, da sie (in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ ) der Tatsache Ausdruck verleiht, daß in einem Dreieck die Länge einer Seite höchstens gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist.



Figur 7.1

*Hinweis.* Man beachte, daß (Funktional-) *Analytiker* eher die Bezeichnungen  $E, F, \dots$  anstelle von  $V, W, \dots$  für normierte Vektorräume wählen.

*Beispiele.* 1. Es sei  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper; aufgefaßt als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum besitzt er dann die Bewertung  $|\cdot|$  als Norm. Dies gilt insbesondere für angeordnete Körper mit der Betragsbewertung. Die Leserin und der Leser, die sich von der Abstraktheit unserer Überlegungen abgeschreckt fühlen, sollten zunächst nur

<sup>12</sup>Solche „Mehrdeutigkeiten“ im Gebrauch des gleichen Symbols für verschiedene Objekte sind für den Anfänger verwirrend, lösen sich aber i. a. bei genauem Hinsehen aus dem Kontext heraus auf. Man beachte, daß wir auch schon in Ringen das Symbol 1 sowohl für die natürliche Zahl 1 als auch für das multiplikative neutrale Element verwendet haben.

an diesen Fall denken, speziell an  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$ , und überall in den Formeln und Beweisen das *Norm-Zeichen*  $\|$  durch das *Betrags-Zeichen*  $|$  ersetzen.

2. Es seien  $V_1, V_2$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Normen  $\|\cdot\|_1$  bzw.  $\|\cdot\|_2$ . Dann wird durch

$$\|v\|_{\max} := \max(\|v_1\|_1, \|v_2\|_2), \quad v = v_1 + v_2, \quad v_j \in V_j, \quad j = 1, 2,$$

eine Norm auf  $V_1 \oplus V_2$  definiert. (Beachte, daß in  $V_1 \oplus V_2$  die Darstellung  $v = v_1 + v_2$  eindeutig ist). Die Eigenschaften i) und ii) sind trivialerweise erfüllt. iii) folgt mit  $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$  und  $v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)$  wegen

$$\begin{aligned} \|v + w\| &= \max(\|v_1 + w_1\|_1, \|v_2 + w_2\|_2) \leq \max(\|v_1\|_1 + \|w_1\|_1, \|v_2\|_2 + \|w_2\|_2) \\ &= \|v_1\|_1 + \|w_1\|_1 \quad (\text{ohne Einschränkung}) \\ &\leq \max(\|v_1\|_1, \|v_2\|_2) + \max(\|w_1\|_1, \|w_2\|_2) = \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

3. Speziell auf  $V = \mathbb{K}^n$  mit der üblichen *Vektor-Addition*

$$v = (v_1, \dots, v_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n) \mapsto v + w = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

und *Skalarenmultiplikation*

$$cv = (cv_1, \dots, cv_n), \quad c \in \mathbb{K}$$

hat man die *Maximumnorm*

$$\|v\|_{\max} := \|v\|_{\infty} := \max(|v_1|, \dots, |v_n|).$$

4. Ist  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$ , so hat man auf  $V_1 \oplus V_2$  die *euklidische Norm*

$$\|v\| = \sqrt{\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2}, \quad v = v_1 + v_2, \quad v_j \in V_j.$$

Auch hier sind die Eigenschaften i) und ii) trivial erfüllt. Für die Dreiecksungleichung brauchen wir die Beziehung

$$(\|v_1 + w_1\|_1^2 + \|v_2 + w_2\|_2^2)^{1/2} \leq (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2)^{1/2} + (\|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_2^2)^{1/2}.$$

Wegen  $\|v_1 + w_1\|_1^2 \leq (\|v_1\|_1 + \|w_1\|_1)^2$  folgt dies (nach Quadrieren) aus

$$\|v_1\|_1 \|w_1\|_1 + \|v_2\|_2 \|w_2\|_2 \leq (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2)^{1/2} (\|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_2^2)^{1/2}.$$

Dies ist ein Spezialfall der *CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung*, die wir anschließend formulieren.

5. Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Man definiert für  $v, w \in \mathbb{K}^n$  das Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{v}_j w_j.$$

Es gilt  $\langle v, w + c\tilde{w} \rangle = \langle v, w \rangle + c\langle v, \tilde{w} \rangle$  und  $\langle v + c\tilde{v}, w \rangle = \langle v, w \rangle + \bar{c}\langle \tilde{v}, w \rangle$ . Damit ist das Skalarprodukt eine *Bilinearform* für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und eine sogenannte *Sesquilinearform* im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nach Definition ist ferner

$$\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle};$$

d. h. das Skalarprodukt ist *symmetrisch* ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) bzw. *hermitesch* ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Auf jeden Fall ist

$$\langle v, v \rangle = \sum_{j=1}^n |v_j|^2 > 0 \quad \text{für } v \neq 0.$$

Damit induziert das Skalarprodukt die *euklidische Norm*

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \left( \sum_{j=1}^n |v_j|^2 \right)^{1/2}$$

auf  $\mathbb{K}^n$ .

**Satz 7.1 (Cauchy - Schwarzsche Ungleichung)** Für  $v, w \in \mathbb{K}^n$  gilt stets

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

*Bemerkung.* Ein euklidischer ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) bzw. unitärer ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) Vektorraum ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen (hermiteschen) Bi- (Sesqui-) Linearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , die zusätzlich positiv-definit ist, d. h. für die (wegen  $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$  ist stets  $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$ ) gilt:

$$\langle v, v \rangle > 0, \quad v \neq 0.$$

Dann gilt immer die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in der Form

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$$

(den einfachen Beweis findet man im zweiten Teil meiner *Lineare Algebra* [41], siehe auch den Anhang zu Kapitel 19), und durch  $\|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$  wird eine Norm auf  $V$  erklärt.

In einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum hat man nicht nur *Längen* von Vektoren, sondern auch *Winkel* zwischen Vektoren. Sind  $v$  und  $w$  zwei von Null verschiedene Vektoren, so ist der Ausdruck

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \|w\|}$$

nur abhängig von den linearen Erzeugnissen  $\mathbb{K}v$  und  $\mathbb{K}w$  und liegt zwischen 0 und 1. Damit wird durch ihn genau ein Winkel  $\varphi$  zwischen 0 und  $\pi/2$  bestimmt, dessen Cosinus er ist:

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cos \varphi.$$

Man nennt  $\varphi$  den (*nichtorientierten*) Winkel zwischen  $v$  und  $w$ . Wenn man den Betrag auf der linken Seite wegläßt, erhält man einen wohldefinierten *orientierten* Winkel  $\varphi$  mit  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , der dann tatsächlich von der Reihenfolge des Paares  $(v, w)$  abhängig ist. Insbesondere hat man in solchen Räumen den Begriff des *Senkrechtstehens*:

$$v \perp w \iff \varphi = \frac{\pi}{2} \iff \langle v, w \rangle = 0.$$

6. Man kann für jede natürliche Zahl  $p \neq 0$  auf  $\mathbb{K}^n$  eine Norm erklären durch

$$\|v\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |v_j|^p \right)^{1/p}.$$

Man nennt sie die *p-Norm* (der Beweis für die Gültigkeit der Dreiecksungleichung wird in einem späteren Kapitel nachgetragen). Für  $p = 2$  ist sie gerade die euklidische Norm, für  $p = 1$  die *Manhattan-Norm*. Man kann zeigen, daß

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_p = \|v\|_{\max}.$$

Dies ist der Grund, weswegen man die Maximumnorm auch mit  $\|\cdot\|_{\infty}$  bezeichnet.

## 7.2 Grenzwerte, Konvergenz

Wir schreiben

$$\mathcal{F}_V := \text{Abb}(\mathbb{N}, V)$$

für die Menge der (*unendlichen*) Folgen mit Gliedern in  $V$ ; Folgen selbst bezeichnen wir mit  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  oder kurz mit  $(a_j)$ . Wir wählen die Bezeichnung  $a$  anstatt  $v$  für Vektoren in  $V$ , um dem Leser die



oben empfohlene Spezialisierung auf den Fall  $V = \mathbb{K}$  zu erleichtern. Man kann in  $\mathcal{F}_V$  eine Addition und eine Skalaren-Multiplikation mit Elementen aus  $\mathbb{K}$  definieren:

$$\begin{cases} (a_j) + (b_j) := (a_j + b_j) \\ c(a_j) := (ca_j), \end{cases}$$

die  $\mathcal{F}_V$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum machen (siehe Kapitel 5). Dieser kann übrigens für einen nichttrivialen normierten Vektorraum  $V \neq 0$  niemals endlich-dimensional sein, da die abzählbar vielen Folgen  $(a, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, a, 0, \dots)$  etc. bei festem  $a \in V$ ,  $a \neq 0$ , linear unabhängig über  $\mathbb{K}$  sind. Insbesondere ist schon der Polynomring  $\mathbb{K}[x]$ , aufgefaßt als  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum  $\mathbb{K}[x] = \text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , nicht endlich-dimensional ist (man setzt z. B.  $a = 1$  und erhält die abzählbar vielen über  $\mathbb{K}$  linear unabhängigen Elemente  $x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3, \dots$ ).

*Definition.* 1. Eine Folge  $(a_j)$  in dem normierten Vektorraum  $V$  heißt *konvergent* gegen ein Element  $a \in V$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$ , eine *endliche* Menge  $J = J_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ , gibt, so daß

$$(+) \quad \|a_j - a\| < \varepsilon$$

für alle  $j \in \mathbb{N} \setminus J$  ist. Man sagt dann auch, (+) gelte für *fast alle*  $j$ . Die Zahl  $a$  nennt man auch einen *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.

2. Besitzt die Folge  $(a_j)$  *keinen* Grenzwert, so heißt sie *divergent*.

*Bemerkungen.* 1. Bei der obigen Definition kommt es *nicht* darauf an, zu vorgegebenem  $\varepsilon$  die *exakte* Menge  $J_\varepsilon$  der Indizes  $j$  zu finden, für die (+) nicht gilt. Man kann daher und sollte i. A. auch aus „Ökonomiegründen“ großzügig bei der Wahl von  $J_\varepsilon$  sein; insbesondere darf man eine schon als ausreichend erkannte Menge  $J_\varepsilon$  vergrößern.

2. Da jede endliche Menge natürlicher Zahlen enthalten ist in einem Intervall  $[0, N - 1] \subset \mathbb{N}$ , ist die obige Bedingung somit gleichbedeutend mit der Aussage:

*Zu jedem  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$ , gibt es eine von  $\varepsilon$  abhängige Zahl  $N \in \mathbb{N}$  s. d. (+) für alle  $j \geq N$  gilt.*

Um die Abhängigkeit der Zahl  $N$  von  $\varepsilon$  anzudeuten, schreibt man oft auch kurz: *Zu  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$ , gibt es eine Zahl  $N = N(\varepsilon)$  mit ...*. Hiermit ist aber nicht, wie oben schon gesagt, gemeint, daß  $N$  *explizit* als Funktion von  $\varepsilon$  anzugeben ist.

3. Statt der im folgenden sehr häufig auftretenden Formulierung „ $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$ “ werden wir, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, auch kurz „ $\varepsilon > 0$ “ schreiben.

4. Es genügt zur Konvergenz einer Folge auch der Nachweis, daß

$$\|a_j - a\| < C\varepsilon$$

gilt für alle  $j \geq N' = N'(\varepsilon)$ , wobei die positive Konstante  $C$  nicht von  $\varepsilon$  abhängt. Denn mit

$$N(\varepsilon) := N'(\varepsilon/C)$$

gewinnt man hieraus die Bedingung in 2.

5. Wählt man speziell  $C = 2 > 0$ , so schließt man aus 4. und  $\varepsilon < 2\varepsilon$ , daß man die Bedingung (+) auch ersetzen kann durch

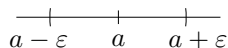
$$(++) \quad \|a_j - a\| \leq \varepsilon$$

für alle  $j \geq N''$ . Genauso kann man in allen Formulierungen „ $j \geq N$ “ ersetzen durch „ $j > N$ “ etc.

6. Man kann sich die Bedingung der *Konvergenz* leicht *geometrisch* veranschaulichen, wenn man beachtet, daß die Menge

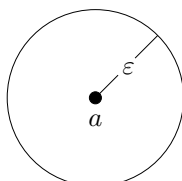
$$\{x \in \mathbb{K} : |x - a| < \varepsilon\}$$

im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  das *Intervall*  $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ , also  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$  bezeichnet:



Figur 7.2

und im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die *Kreisscheibe*  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ :

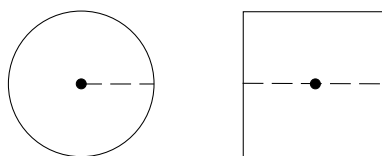


Figur 7.3

Im Falle  $V = \mathbb{R}^3$  mit der *euklidischen Norm* ist die Menge

$$\{a \in V : \|x - a\| < \varepsilon\}$$

eine *Kugel* mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\varepsilon$ , und mit der *Maximumnorm* ist sie ein *Würfel* mit Mittelpunkt  $a$  und Kantenlänge  $2\varepsilon$ .



Figur 7.4

7. Man kann aus einer konvergenten Folge beliebige *unendliche* Teilfolgen auswählen, ohne die Konvergenz und den Grenzwert zu verlieren. Hierbei heißt die Folge  $(b_k)$  eine unendliche Teilfolge der Folge  $(a_j)$ , wenn es eine streng monoton aufsteigende Folge

$$j_0 < j_1 < j_2 < \dots$$

natürlicher Zahlen gibt mit  $b_k = a_{j_k}$ . Ist nämlich  $\|a_j - a\| < \varepsilon$  für alle  $j \notin J$ ,  $J$  eine endliche Menge, so ist  $\|b_k - a\| < \varepsilon$  für alle  $k \notin K$  mit der *endlichen* Menge  $K := J \cap \{j_0, j_1, j_2, \dots\}$ . Ebenso darf man *endlich* viele Glieder einer konvergenten Folge hinzufügen oder weglassen oder abändern.

8. Ferner darf man konvergente Folgen auch *permutieren*, d. h. von  $(a_j)$  übergehen zu  $(b_k)$ , wobei  $b_k := a_{\pi(k)}$  mit einer Permutation  $\pi \in \text{Perm}(\mathbb{N})$ . Dies sieht man sofort mit der ursprünglichen Definition, indem man die endliche Menge  $J = J_\varepsilon$  durch  $K = \pi^{-1}(J)$  ersetzt.

### 7.3 Eindeutigkeit von Grenzwerten

Wir zeigen nun als ersten allgemeinen Satz, daß Grenzwerte, wenn sie überhaupt existieren, eindeutig bestimmt sind.

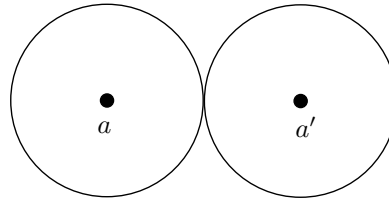
**Lemma 7.2** *Eine Folge  $(a_j)$  besitzt höchstens einen Grenzwert  $a$ .*

*Beweis.* Es seien  $a$  und  $a'$  zwei verschiedene Grenzwerte; dann ist  $\varepsilon := \|a - a'\| > 0$ . Seien  $J$  und  $J'$  die zu  $\varepsilon/2$  gehörenden endlichen Indextmengen. Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{N} \setminus (J \cup J')$ :

$$\varepsilon = \|a - a'\| = \|(a_j - a') - (a_j - a)\| \leq \|a_j - a'\| + \|a_j - a\| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Widerspruch! □

Die *Beweisidee* zu dem vorigen Lemma spiegelt sich im folgenden Bild wider:



Figur 7.5

*Definition.* Ist die Folge  $(a_j)$  konvergent gegen  $a$ , so schreibt man wegen der eindeutigen Bestimmtheit von  $a$  aufgrund des vorigen Lemmas

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$$

und nennt  $a$  auch *den* Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_j)$  für  $j$  gegen Unendlich. Außerdem benutzt man manchmal die suggestive Schreibweise

$$a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a.$$

Man nennt speziell  $(a_j)$  eine *Nullfolge*, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0.$$

## 7.4 Beschränkte Folgen

Wir geben als erstes ein *notwendiges*, i. a. aber keineswegs hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge an.

*Definition.* Eine Folge  $(a_j)$  in einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl  $K \in \mathbb{K}$  gibt mit  $a_j \leq K$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Sie heißt *nach unten beschränkt*, wenn die Folge  $(-a_j)$  nach oben beschränkt ist. Sie heißt schließlich *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist, wenn es also ein  $K \in \mathbb{K}$  gibt mit  $|a_j| \leq K$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Die letzte Formulierung ist auch auf Folgen in bewerteten Körpern und normierten Vektorräumen sinnvoll übertragbar.

*Beispiel.* Die Folge  $1, -1, 1, -1, \dots$  rationaler (oder reeller) Zahlen ist beschränkt, aber nicht konvergent.

**Satz 7.3** *Eine konvergente Folge ist notwendig beschränkt.*

*Beweis.* Es sei  $a$  der Grenzwert der vorliegenden Folge. Für  $\varepsilon_0 = 1$  gibt es dann eine natürliche Zahl  $N_0$ , so daß  $\|a_j - a\| < 1$  für alle  $j > N_0$  gilt. Insbesondere ist dann

$$\|a_j\| < K_0 := \|a\| + 1$$

für diese  $j$ . Mit

$$K := \max \{ K_0, \|a_0\|, \dots, \|a_{N_0}\| \}$$

folgt die Behauptung. □

## 7.5 Bestimmt divergente Folgen in angeordneten Körpern

Wir sind mit diesen einfachen Begriffen und Ergebnissen schon in der Lage, für *angeordnete* Körper  $\mathbb{K}$  die Eigenschaft, *archimedisch* zu sein, mit Hilfe des Konvergenzbegriffes umzuformulieren.

*Definition.* Besitzt eine Folge  $(a_j)$  in dem *angeordneten* Körper  $\mathbb{K}$  die Eigenschaft, daß es zu jedem  $K \in \mathbb{K}$  eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $a_j \geq K$  für alle  $j \geq N$ , so ist sie unbeschränkt und insbesondere divergent. Man nennt sie in diesem Fall *bestimmt divergent* (oder auch *uneigentlich konvergent*)<sup>13</sup> *gegen Unendlich* und schreibt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j := \infty .$$

Dies ist sicher dann der Fall, wenn die Folge *monoton aufsteigend* ist, d. h. wenn  $a_j \leq a_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt, und wenn sie *nach oben unbeschränkt* ist. Gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} (-a_j) := \infty$ , so schreibt man auch  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j := -\infty$ .

Wir überlassen der Leserin und dem Leser den Beweis des folgenden Satzes als Übungsaufgabe.

**Satz 7.4** *In einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  sind die folgenden Aussagen für eine beliebige Folge  $(a_j)$  mit  $a_j \neq 0$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , äquivalent :*

- i)  $(a_j)$  ist eine Nullfolge ;
- ii) die Folge  $(1/|a_j|)$  ist bestimmt divergent gegen  $\infty$  .

Hieraus folgt unmittelbar eine weitere Charakterisierung *archimedisch* angeordneter Körper.

**Satz 7.5** *Für einen angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent :*

- o)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch angeordnet ;
- i) die Folge  $(n1)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unbeschränkt ;
- ii) die Folge  $(n1)_{n \in \mathbb{N}}$  ist bestimmt divergent gegen  $\infty$  ;
- iii) die Folge  $(1/n1)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ist gegen 0 konvergent.

*Bemerkung.* Statt  $(n1)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(1/n1)_{n \in \mathbb{N}^*}$  schreiben wir im folgenden auch kurz  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  .

*Beweis.* Die Implikation o)  $\implies$  i) folgt direkt aus der klassischen Formulierung des Archimedischen Axioms. Nach dem vorstehenden Satz und der Bemerkung am Ende der Definition hat man auch sofort die Implikationen i)  $\implies$  ii)  $\implies$  iii). Wir brauchen daher nur noch iii)  $\implies$  o) nachzuweisen. Es gelte also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Sind dann  $a, b > 0$  in  $\mathbb{K}$  gegeben, so ist  $\varepsilon := \frac{a}{b} > 0$ , und es gibt mindestens ein  $n$  mit

$$\frac{1}{n} < \frac{a}{b}, \quad \text{also} \quad b < na . \quad \square$$

Wir geben für spätere Verwendung noch die

*Definition.* Ein bewerteter Körper  $\mathbb{K}$  heißt *archimedisch bewertet*, wenn die Folge  $(|n|)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist. In diesem Fall muß seine Charakteristik  $\text{char } \mathbb{K}$  gleich 0 sein. Diese Definition stimmt also im Falle eines angeordneten Körpers aufgrund des vorigen Satzes mit unserer früheren überein. Wir werden einige merkwürdige Eigenschaften nichtarchimedisch bewerteter Körper (mit archimedischem Bewertungskörper) in dem Anhang zu diesem Kapitel besprechen.

*Bemerkung.* Der Körper  $\mathbb{C}$  ist archimedisch bewertet. Dagegen ist  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ,  $p$  eine Primzahl, nicht-archimedisch bewertet.

<sup>13</sup>Das Symbol  $\infty$  ist, wie wir früher schon betont haben, kein Element von  $\mathbb{K}$ . Von daher ist eine uneigentlich gegen  $\infty$  konvergente Folge keine konvergente Folge in dem Körper  $\mathbb{K}$ ! Insofern ist der Begriff der „bestimmten Divergenz“ vorzuziehen. Andererseits wird die Sprechweise, daß eine Folge uneigentlich gegen  $\infty$  „konvergiert“, gerechtfertigt durch die Modelle der erweiterten Zahlengerade (siehe die Figuren 6.1 und 2).

## 7.6 Konvergenz und Nullfolgen

Die Konvergenz von Folgen in normierten Vektorräumen läßt sich vollständig mittels *Nullfolgen* in  $\mathbb{K}_0$  ausdrücken, denn offensichtlich hat man das folgende

**Lemma 7.6** Für eine Folge  $(a_j)$  in  $V$  sind die folgenden Aussagen äquivalent :

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow \infty} a_j &= a, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} (a_j - a) &= 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \|a_j - a\| &= 0.\end{aligned}$$

Nun gibt es aber Körper, die überhaupt keine interessanten Nullfolgen besitzen. Wird z. B. ein beliebiger Körper  $\mathbb{K}$  *trivial* bewertet, so sind die einzigen Nullfolgen die Folgen  $(a_j)$  mit  $a_j = 0$  für fast alle  $j \in \mathbb{N}$ . Entsprechend gilt dann  $\lim a_j = a$ , falls  $a_j = a$  für fast alle  $j \in \mathbb{N}$ . Es ist zwar erheblich schwerer, aber dennoch möglich, auch *angeordnete* Körper mit diesem Manko zu konstruieren (siehe den Anhang zu Kapitel 9). Solche Körper, in denen es nur die *trivialen* Nullfolgen gibt, sind für die (klassische) Analysis belanglos.

*Definition.* Wir sagen, der normierte Vektorraum  $V$  besitze die Eigenschaft (\*), wenn er *nichttriviale* Nullfolgen besitzt, also Folgen  $(a_j)$  mit  $a_j \neq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ . In diesem Fall besitzt auch der Bewertungskörper  $\mathbb{K}_0$  notwendig diese Eigenschaft, da  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|a_j\| = 0$  gilt. Wir können dann offensichtlich annehmen, daß es in  $\mathbb{K}_0$  sogar eine *monoton absteigende* Nullfolge gibt:

$$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0.$$

Hierfür schreiben wir dann symbolisch

$$\varepsilon_j \searrow 0.$$

Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz einer monoton aufsteigenden, bestimmt nach  $\infty$  divergenten Folge in  $\mathbb{K}_0$ . Man nennt  $\mathbb{K}_0$  dann auch einen *abzählbar cofinalen* angeordneten Körper.

Aus unseren obigen Überlegungen folgt unmittelbar:

**Lemma 7.7** Jeder archimedisch angeordnete Körper besitzt die Eigenschaft (\*).

*Bemerkung.* Die Menge der angeordneten Körper mit nichttrivialen Nullfolgen enthält aber auch interessante *nichtarchimedische* Vertreter. So erfüllt jeder Körper  $\mathbb{K}(x)$  von rationalen Funktionen über dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  mit seiner nichtarchimedischen Anordnung die Bedingung (\*), da  $1/x, 1/x^2, 1/x^3, \dots$  eine nichttriviale Nullfolge ist. (Siehe hierzu ebenfalls den Anhang zu Kapitel 9).

Für (bewertete Körper und) normierte Vektorräume  $V$ , deren Bewertungskörper  $\mathbb{K}_0$  die Eigenschaft (\*) besitzt, läßt sich die Konvergenz einer beliebigen Folge auch folgendermaßen formulieren.

**Satz 7.8** Es sei  $\varepsilon_n \searrow 0$  eine fest gewählte monoton absteigende Nullfolge in  $\mathbb{K}_0$ . Dann gilt  $\lim a_j = a$  für eine Folge  $(a_j)$  in  $V$  genau dann, wenn es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\|x_j - a\| < \varepsilon_n$  für alle  $j \geq N$ .

Denn ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $n$  mit  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ , und damit ist für alle  $j \geq N$  auch  $\|x_j - a\| < \varepsilon_n \leq \varepsilon$ .  $\square$

## 7.7 Bernoullische Ungleichung

Aufgrund des vorigen Satzes ist die Existenz von weiteren Beispielen von *Nullfolgen* in speziellen angeordneten Körpern von Interesse. Wir beweisen dazu eine wichtige Ungleichung, die noch öfters zur Anwendung gelangen wird. Sie wurde von Jacob Bernoulli im Jahre 1689 bewiesen; ein früherer Beweis aus dem Jahre 1670 stammt aber schon von Isaac Barrow.

**Satz 7.9 (Bernoullische Ungleichung)** *Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $x \in \mathbb{K}$  mit  $x \geq -1$  vorgegeben. Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Für  $n = 0$  ist die Aussage richtig. Durch vollständige Induktion folgt wegen  $1+x \geq 0$ :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \quad \square$$

*Bemerkung.* Wir geben noch einen zweiten Beweis für die Bernoullische Ungleichung, die wir in der Form

$$x^n \geq 1+n(x-1), \quad x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

aufschreiben. Er kommt nur scheinbar ohne vollständige Induktion aus. Man hat die offensichtliche Identität

$$x^n - 1 - n(x-1) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 - n),$$

und die rechte Seite ist nicht negativ, da die rechte Klammer auf der rechten Seite größer oder gleich Null ist für  $x \geq 1$  und kleiner oder gleich Null für  $0 < x \leq 1$ .

**Folgerung 7.10** *Es sei  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper mit archimedisch angeordnetem Bewertungskörper  $\mathbb{K}_0$ . Ist dann  $b \in \mathbb{K}$  ein Element mit  $|b| < 1$ , so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0.$$

*Ist dagegen  $|b| > 1$ , so ist die Folge  $(b^n)$  unbeschränkt und folglich nicht konvergent.*

*Beweis.* Es sei zunächst  $|b| > 1$  und  $K > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  beliebig vorgegeben. Sei dann  $x := |b| - 1$ , also  $x > 0$ , so daß nach Bernoulli

$$|b^n| = |b|^n = (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Da  $\mathbb{K}_0$  archimedisch angeordnet ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $1+Nx > K$ . Also ist die Folge  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  unbeschränkt.

Sei andererseits  $|b| < 1$  und ohne Einschränkung  $b \neq 0$ . Nach dem vorstehenden Abschnitt des Beweises gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{1}{|b|^N} > K := \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N$ :

$$|b^n| = |b|^n = |b|^{n-N} |b|^N \leq |b|^N < \varepsilon. \quad \square$$

*Bemerkung.* Mit Hilfe dieses Satzes gewinnt man noch einmal ohne jeglichen Bezug zur Teilbarkeits-theorie die schon früher gewonnene Aussage:

**Satz 7.11** *Die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl  $n$  ist nur dann rational, wenn sie ganz, d. h. wenn  $n$  eine Quadratzahl  $n = m^2$  ist.*

*Beweis.* Wir wählen die natürliche Zahl  $m$  so, daß  $m \leq \sqrt{n} < m+1$ . Mit  $q := \sqrt{n} - m$  ist  $0 \leq q < 1$  und folglich

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q^j = 0.$$

(Der Beweis funktioniert in jedem archimedisch angeordneten Körper  $\mathbb{K}$ ). Nun ist  $q^2 = -2m\sqrt{n} + (n+m^2)$ , und hieraus folgt unmittelbar durch vollständige Induktion, daß für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$q^j \in \sqrt{n}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \text{d. h. } q^j = a_j \sqrt{n} + b_j \text{ mit } a_j, b_j \in \mathbb{Z}.$$

Nehmen wir nun an,  $\sqrt{n}$  sei rational, also von der Form  $r/s$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Dann konvergiert auch die ganzzahlige Folge

$$a_j r + b_j s = q^j s$$

gegen Null, was aber nur dann der Fall ist, wenn fast alle Glieder Null sind. Also gilt für mindestens ein  $j \geq 1$ , daß  $q^j s = 0$ , so daß notwendig  $q = 0$  und  $n = m^2$ .  $\square$

## 7.8 Metrische Räume, Beispiele

Die Betrachtung von *konvergenten Folgen* kann in noch weit allgemeineren Situationen vorgenommen werden. Wir extrahieren zu diesem Zwecke aus den vorhergehenden Überlegungen als wesentliche Essenz den Begriff einer *Abstandsfunktion* oder *Metrik* auf einer beliebigen nichtleeren Menge  $X$ .

**Lemma 7.12** *Ist  $V$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\| \in \mathbb{K}_0$ , so gelten für die durch*

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

*definierte Funktion  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{K}_0$  die folgenden Regeln:*

- i)  $d(u, v) > 0$ ,  $u \neq v$ ,  $d(u, u) = 0$ ;
- ii)  $d(v, u) = d(u, v)$ ;
- iii)  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$  (Dreiecksungleichung).

*Beweis.* Es ist  $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0$  und  $\|-u\| = |-1| \|u\| = \|u\|$ . Daraus folgen i) und ii). Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w). \quad \square$$

*Definition.* Es sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge und  $\mathbb{K}_0$  ein angeordneter Körper. Eine *Metrik* auf  $X$  (mit Werten in  $\mathbb{K}_0$ ) ist eine Abbildung („Distanz, Abstandsfunktion“)

$$d =: X \times X \longrightarrow \mathbb{K}_0,$$

so daß für alle  $x_1, x_2, x_3 \in X$  die folgenden Relationen erfüllt sind:

- i)  $d(x_1, x_2) \geq 0$  und  $d(x_1, x_2) = 0$  genau dann, wenn  $x_1 = x_2$ ;
- ii)  $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ ;
- iii)  $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ .

Die dritte Eigenschaft bezeichnet man wieder als *Dreiecksungleichung*. Um die Bedeutung von  $X$  hervorzuheben, schreiben wir manchmal  $d_X$  anstelle von  $d$ . Das Paar  $(X, d_X)$  nennen wir einen  *$\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum*.

*Bemerkung.* In der Standardliteratur spricht man von einem *metrischen* Raum nur dann, wenn der Körper  $\mathbb{K}_0$  archimedisch angeordnet ist (und der damit, da man ihn ohne Bedenken „vergrößern“ darf, durch  $\mathbb{R}$  ersetzt werden kann). Wir haben diesen allgemeineren Rahmen gewählt, um später bequem alle relevanten „Vervollständigungssätze“ formulieren und beweisen zu können.

**Lemma 7.13** *Man kann die Axiome i), ii) und iii) für eine Metrik ersetzen durch*

- i)°  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- ii)°  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ .

Denn setzt man in ii)°  $z = x$ , so ergibt sich  $d(x, y) \leq d(y, x)$  und durch Vertauschung der Rollen von  $x$  und  $y$  auch  $d(y, x) \leq d(x, y)$ , also  $d(y, x) = d(x, y)$ . Daraus folgt sofort auch die Dreiecksungleichung in der Fassung iii). Schließlich erhält man nochmals mit ii)°, daß

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

und somit  $d(x, y) \geq 0$ . □

*Bemerkung.* Genauso kann man sich davon überzeugen, daß man bei der Definition einer *Norm* das erste Axiom ersetzen darf durch  $i)^\circ : \|v\| = 0 \iff v = 0$ .

*Beispiele.* 1. Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper mit Bewertung in dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$ , speziell  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$  mit der Betragsbewertung  $|\cdot|$ . Dann ist

$$d(a, b) := |a - b|$$

eine Metrik auf  $\mathbb{K}$ . Allgemeiner ist dies richtig für die durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

auf einem *normierten Vektorraum*  $V$  erklärte Metrik.

2. Jede Menge  $X \neq \emptyset$  besitzt die *triviale* (oder *diskrete*) Metrik

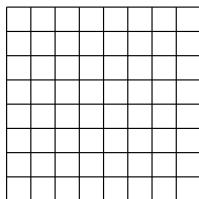
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Diese Metrik ist ziemlich „blind“: sie kann nur unterscheiden, ob zwei Elemente verschieden oder gleich sind. Diese erhält man auf dem Körper  $\mathbb{K}$ , wenn man  $\mathbb{K}$  mit der trivialen Bewertung versieht.

3. Auf  $\mathbb{R}^2$  wird durch

$$d(x, y) = \|x - y\|_1 := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

eine Metrik erklärt, die man aus ersichtlichen Gründen die *Kyoto-* oder *Mannheim-* oder *Manhattan-Straßenmetrik* nennt.



Figur 7.6

4. Das vorige Beispiel kann auf Produkte von metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  verallgemeinert werden, indem man für Elemente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$  definiert:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Andere Metriken auf  $X \times Y$  sind die *Maximummetrik*

$$\max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

und die *euklidische Metrik* (hier muß  $K_0 = \mathbb{R}$  sein):

$$\sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

5. Ist  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  fest und

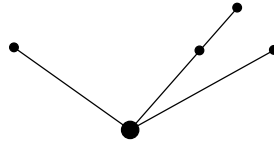
$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2,$$

falls  $x_1, x_2$  auf einer Geraden durch  $x_0$  liegen, bzw.

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_0\|_2 + \|x_2 - x_0\|_2,$$

falls dies nicht der Fall ist, so erhält man den manchmal etwas spöttisch *Französische Eisenbahnmetrik* genannten Distanzbegriff (er könnte genauso gut *Hamburger U-Bahnmetrik* heißen).





Figur 7.7

6. Das vorige Beispiel läßt sich wie folgt auf beliebige Mengen  $X$  verallgemeinern. Es sei  $x_0 \in X$  fest gewählt. Man definiere

$$d(x, y) = 0, \text{ wenn } x = y,$$

$$d(x, x_0) = d(x_0, x) = 1, \text{ wenn } x \neq x_0,$$

$$d(x, y) = d(y, x) = 2, \text{ wenn } x, y, x_0 \text{ paarweise verschieden sind.}$$

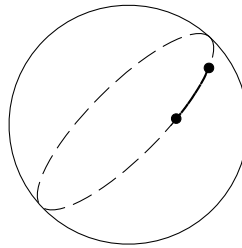
Dann ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

7. Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  der Körper mit zwei Elementen und  $X = \mathbb{F}_2^n$ , so wird für  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in X$  durch

$$\text{card} \{j \in \{1, \dots, n\} : \xi_j \neq \eta_j\}$$

die sogenannte *HAMMING-Distanz* erklärt, die in der *Codierungstheorie* eine wichtige Rolle spielt.

8.  $X = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$  ist die *Einheitssphäre* in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sie ist Teil eines Vektorraumes, selbst aber kein solcher. Deshalb macht der Begriff einer Norm keinen Sinn. Trotzdem gibt es neben der von der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten weitere vernünftige *Metriken* auf  $S^n$ :



Figur 7.8

Dies ist ein spezielles Beispiel für eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, die uns später noch öfter begegnen werden.

Daß Metriken i. a. nicht „kanonisch“ gegeben sind, besagt u. a. das folgende

**Lemma 7.14** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann sind auch*

$$\delta(x, y) := \min(d(x, y), 1)$$

und

$$\Delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

*Metriken auf  $X$ .*

Der *Beweis* ist so einfach, daß er als leichte Übungsaufgabe dienen mag.  $\square$

Ist  $X = (X, d_X)$  ein metrischer Raum, so läßt sich jede Teilmenge  $Y \subset X$  auf kanonische Weise mit der Struktur eines metrischen Raumes versehen.

**Lemma 7.15** *Ist  $Y \subset X$ ,  $Y \neq \emptyset$ , so ist  $d_Y := d_X|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{K}_0$  eine Metrik auf  $Y$ .*

*Definition.* Unter der Voraussetzung des vorigen Lemmas heißt  $d_Y$  die durch  $d_X$  auf  $Y$  induzierte Metrik und  $(Y, d_Y)$  ein *metrischer Unterraum* von  $(X, d_X)$ .

## 7.9 Offene und abgeschlossene Kugeln in metrischen Räumen

Nachdem wir nunmehr so viele Beispiele von metrischen Räumen kennengelernt haben, können wir uns weiteren allgemeinen Begriffsbildungen zuwenden. Grundlegend z. B. für alle Fragen der *Konvergenz* und der *Stetigkeit* ist der Begriff der (*offenen*) *Kugeln*.

*Definition.* In einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt

$$B(a, R) := \{x \in X : d(x, a) < R\}$$

die *offene Kugel* und

$$\bar{B}(a, R) := \{x \in X : d(x, a) \leq R\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit *Mittelpunkt*  $a \in X$  und *Radius*  $R \in \mathbb{K}_0$ ,  $R \geq 0$ .

*Bemerkung.* Für  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$  sind dies natürlich *Intervalle*:

$$\begin{aligned} B(a, R) &= \{x \in \mathbb{K}_0 : |x - a| < R\} = (a - R, a + R), \\ \bar{B}(a, R) &= \{x \in \mathbb{K}_0 : |x - a| \leq R\} = [a - R, a + R]; \end{aligned}$$

für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  *Kreisscheiben*, für  $\mathbb{K}^n$  mit der euklidischen Norm, wenn  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , *Kugeln* mit Mittelpunkt  $a$ , für  $\mathbb{K}^n$  mit der Maximumnorm *Würfel*, wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\prod_{j=1}^n (a_j - R, a_j + R) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{j=1}^n [a_j - R, a_j + R],$$

bzw. *Polyzyylinder*, d. h. Produkte von Kreisscheiben, wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 7.10 Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen

*Definition.* Eine *Umgebung*  $V$  eines Punktes  $a \in X$  ist eine Menge, für die es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß  $B(a, \varepsilon) \subset V$ . Insbesondere ist  $a \in V$ . Eine Menge  $U \subset X$  heißt *offen*, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d. h. wenn es zu jedem Punkt  $a \in U$  eine Kugel mit positivem Radius  $\varepsilon = \varepsilon(a)$  gibt, die ganz in  $U$  liegt:

$$B(a, \varepsilon) \subset U.$$

Eine Menge  $A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

*Bemerkung.*  $X$  selbst und die leere Menge sind sowohl offen als auch abgeschlossen. In  $\mathbb{R}^n$  sind dies (bzgl. der Maximum- und der euklidischen Norm) auch die einzigen Mengen mit dieser Eigenschaft, wie wir später beweisen werden.

**Lemma 7.16** *Offene (abgeschlossene) Kugeln sind offene (abgeschlossene) Mengen.*

*Beweis.* Es sei  $b \in B(a, R)$ . Dann ist  $d(b, a) < R$ ; setze  $r := R - d(b, a) > 0$ . Für  $x \in B(b, r)$  gilt dann  $d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < r + d(b, a) = R$ . Somit ist  $B(b, r) \subset B(a, R)$ .

Es sei umgekehrt  $b \notin \bar{B}(a, R)$ , also  $d(b, a) > R$ . Man schließt wie eben, daß

$$B(b, r) \subset X \setminus \overline{B}(a, R), \quad r = d(b, a) - R > 0. \quad \square$$

*Bemerkung.* Damit ist eine Menge  $V$  genau dann eine Umgebung von  $a$ , wenn sie eine *offene* Umgebung  $U$  von  $a$  enthält.

**Lemma 7.17**

- i) *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.*
- ii) *Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

**Folgerung 7.18** *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Umgebungen eines Punktes  $a$  sind wieder Umgebungen von  $a$ .*

Die *Beweise* sind völlig elementar. □

## 7.11 Konvergente Folgen in metrischen Räumen

*Definition.* Eine Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in dem metrischen Raum  $(X, d_X)$  heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* oder *Limes*  $a \in X$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$x_j \in B(a, \varepsilon) \quad \text{für alle } j \geq N$$

(man sagt dann - wie früher auch schon -  $B(a, \varepsilon)$  enthalte *fast alle* Folgenglieder).

Die *eindeutige Bestimmtheit* des Grenzwertes ist eine Folge der Dreiecksungleichung.

**Satz 7.19** *Eine Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in dem metrischen Raum  $(X, d_X)$  kann höchstens einen Grenzwert besitzen.*

*Beweis.* Wären  $a, b$  verschiedene Grenzwerte, so müßten für jedes  $\varepsilon > 0$  sowohl  $B(a, \varepsilon)$  als auch  $B(b, \varepsilon)$  fast alle Folgenglieder enthalten. Dies führt aber für  $2\varepsilon = d(a, b) > 0$  zu einem Widerspruch, da

$$B(a, \varepsilon) \cap B(b, \varepsilon) = \emptyset. \quad \square$$

*Bemerkung.* Wir schreiben wieder mit vollem Recht

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a,$$

wenn der Grenzwert der Folge existiert.

Erneut stellen wir fest, daß die Konvergenz einer Folge in dem metrischen Raum  $X$  übersetzt werden kann in Aussagen über die Konvergenz von Folgen in dem Grundkörper  $\mathbb{K}_0$ .

**Satz 7.20** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent :*

- a)  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a$ ;
- b) *jede Umgebung  $V$  von  $a$  enthält fast alle Folgenglieder ;*
- c)  $\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, a) = 0$  in  $\mathbb{K}_0$ .

*Beweis.* a)  $\implies$  b). Zu  $V$  gibt es per definitionem ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B(a, \varepsilon) \subset V$ . Da  $B(a, \varepsilon)$  schon fast alle Folgenglieder enthält, ist dies auch für  $V$  richtig.

b)  $\implies$  c). Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $B(a, \varepsilon)$  eine offene Umgebung von  $a$ . Also gibt es ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $x_j \in B(a, \varepsilon)$ , d. h.  $0 \leq d(x_j, a) < \varepsilon$  für alle  $j \geq N$ .

c)  $\implies$  a). Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_j, a) < \varepsilon$ , d. h.  $x_j \in B(a, \varepsilon)$  für alle  $j \geq N$ .  $\square$

**Satz 7.21** *Es sei  $X \times Y$  mit der Maximumnorm*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

*versehen. Dann gilt*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_j, y_j) = (a, b) \iff \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = b.$$

*Beweis.* Trivial.  $\square$

*Bemerkung.* Wir werden später beweisen, daß alle Normen auf endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen *äquivalent* sind, was insbesondere impliziert, daß die Systeme der offenen Mengen nicht von den Normen abhängen. Somit ist Konvergenz in diesem Fall nicht von der speziellen Norm abhängig, und der obige Satz ist immer richtig für  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Die Situation ist jedoch völlig anders in unendlich-dimensionalen Vektorräumen.

Als notwendige, durchaus aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Folgen in normierten Vektorräumen haben wir ihre *Beschränktheit* erkannt. Diese Aussage bleibt auch in  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Räumen richtig.

**Satz 7.22** *Es sei  $M$  eine nichtleere Teilmenge eines  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raumes  $(X, d)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) *es gibt ein  $R \in \mathbb{K}_0$  mit  $d(x, x') \leq R$  für alle  $x, x' \in M$  ;*
- ii) *es gibt ein  $a \in X$  und ein positives  $R \in \mathbb{K}_0$ , so daß  $M \subset \overline{B}(a, R)$  ;*
- iii) *für alle  $b \in X$  gibt es ein positives  $R_b \in \mathbb{K}_0$ , so daß  $M \subset \overline{B}(b, R_b)$ .*

*Beweis.* i)  $\implies$  ii) Man braucht nur irgendein  $a = x' \in M$  zu wählen.

ii)  $\implies$  iii) Mit  $M \subset \overline{B}(a, R)$  ist für beliebiges  $b \in X$  auch  $M \subset \overline{B}(b, R_b)$ , wobei  $R_b = R + d(a, b)$ .

iii)  $\implies$  i) Wähle  $x, x' \in M$  beliebig und setze  $x' = b$ .  $\square$

*Definition.* Eine Menge  $M$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt *beschränkt*, wenn sie eine (und dann alle) der Eigenschaften des vorigen Satzes erfüllt.

**Lemma 7.23** *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.*

*Beweis.* Es sei  $a$  der Grenzwert der vorgegebenen Folge. Ist dann z. B.  $\varepsilon_0 = 1$ , so ist  $x_j \in B(a, 1)$  für alle  $j \geq N = N(\varepsilon_0)$ . Setzt man

$$R := \max\{d(a, x_1), \dots, d(a, x_{N-1}), 1\},$$

so ist  $x_j \in \overline{B}(a, R)$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 7.12 Häufungspunkte von Folgen in metrischen Räumen

*Definition.* Ein Element  $a \in X$  heißt *Häufungspunkt* der Folge  $(x_j)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Indizes  $j$  gibt mit  $d(x_j, a) < \varepsilon$ . Bei Folgen in einem Körper  $\mathbb{K}$  spricht man auch von *Häufungswerten*.

*Beispiel.* Die Folge  $x_j = (-1)^j \in \mathbb{K}_0$ ,  $\mathbb{K}_0$  ein angeordneter Körper, besitzt die beiden Häufungspunkte 1 und  $-1$  (und keine anderen).

Aufgrund der Definitionen ist klar, daß eine konvergente Folge nur ihren Grenzwert als Häufungspunkt besitzt. Die Umkehrung gilt unter einer zusätzlichen Voraussetzung.

*Definition.* Man sagt, in dem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum  $X$  gelte der *Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS*, wenn jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält.

*Beispiele.* Wir werden im übernächsten Kapitel zeigen, daß unter den angeordneten Körpern genau der reelle diese Eigenschaft besitzt. Daraus folgt die Gültigkeit dieses Kriteriums auch für den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen und die mit einer beliebigen Norm versehenen endlich-dimensionalen Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ .

**Satz 7.24** *In dem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum  $X$  gelte der Satz von BOLZANO - WEIERSTRASS. Dann ist jede beschränkte Folge, die genau einen Häufungspunkt besitzt, konvergent.*

*Beweis.*  $a$  sei Häufungspunkt der beschränkten Folge  $(x_j)$ . Ist  $a$  nicht Limes der Folge (kein anderer Wert kann Grenzwert der Folge sein), so gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und unendlich viele  $j$  mit  $d(x_j, a) \geq \varepsilon_0$ . Nach Voraussetzung an  $X$  gibt es dann eine unendliche Teilfolge  $x'_k$  mit  $\lim x'_k = a'$ . Für hinreichend große  $k$  ist

$$d(a', a) \geq d(x'_k, a) - d(x'_k, a') \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

also  $a'$  ein von  $a$  verschiedener Häufungspunkt. □

Wir wollen das Konzept des *Häufungspunktes* einer Folge noch umformulieren. Klar ist (und oben indirekt schon benutzt worden), daß Limites von Teilfolgen Häufungspunkte der Folge sind.

**Satz 7.25** *Erfüllt der Wertekörper  $\mathbb{K}_0$  die Bedingung (\*), so sind die Häufungspunkte einer Folge genau die Limites konvergenter Teilfolgen.*

*Beweis.* Sei  $a$  ein Häufungspunkt der Folge  $(x_j)$  und  $\varepsilon_k \searrow 0$  eine streng monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{K}_0$ . Dann konstruiert man induktiv eine Teilfolge  $(x'_k)$  mit  $d(x'_k, a) < \varepsilon_k$  und damit  $d(x'_\ell, a) < \varepsilon_k$  für alle  $\ell \geq k$ . Somit ist  $\lim x'_k = a$ . □

Man kann damit den Satz von Bolzano–Weierstraß umformulieren: er gilt in einem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum  $X$ ,  $\mathbb{K}_0$  mit der Bedingung (\*), genau dann, wenn *jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt*.

Wir zeigen jetzt noch die auf den ersten Blick sicherlich verblüffende Bemerkung, daß es in jedem archimedisch angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$  eine Folge gibt, die jedes Element in  $\mathbb{K}_0$  als Häufungswert hat. Dazu genügt es zu beweisen, daß es eine *rationale* Folge gibt, deren Menge der Häufungspunkte gleich  $\mathbb{R}$  ist, denn, wie wir später zeigen werden, kann  $\mathbb{K}_0$  als angeordneter Teilkörper von  $\mathbb{R}$  angesehen werden. Wähle dazu eine bijektive Abbildung:

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto (p_n, q_n) \end{cases}$$

und setze  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ . Da mit  $(p_n, q_n)$  auch alle  $(mp_n, mq_n)$  in dieser Folge vorkommen, wird der Quotient  $r_n$  unendlich oft angenommen. Da jede reelle Zahl  $x$  Limes einer Folge rationaler Zahlen ist (siehe Satz 8.16),  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} r_{n_j}$ , kann man nach Konstruktion der Folge  $(r_n)$  die Folge  $(n_j)$  streng monoton wachsend wählen:  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ . Also ist  $x$  Häufungspunkt der obigen Folge<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>Es reicht für dieses Argument aber auch vollständig, wenn man als Folge  $(r_n)$  eine beliebige Abzählung  $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Q}$  des Körpers  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen wählt.

### 7.13 Abgeschlossene und folgenabgeschlossene Mengen

Unter gewissen Umständen kann man die Abgeschlossenheit einer Menge (und damit auch die Offenheit des Komplements) mit Hilfe konvergenter Folgen testen.

*Definition.* Eine Menge  $A$  in einem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum  $X$  wird *folgenabgeschlossen* genannt, wenn Grenzwerte  $a = \lim a_j \in X$  von Folgen mit Gliedern  $a_j \in A$  in  $A$  liegen.

*Beispiel.* Ist  $\mathbb{K}_0$  archimedisch angeordnet und  $A = (0, 1]$ , so liegt die Folge  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  in  $A$ . Ihr Grenzwert 0 ist jedoch nicht in  $A$  enthalten. Offensichtlich ist aber wegen der Monotonie von Grenzwerten (siehe Satz 8.4) jedes abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  folgenabgeschlossen.

Die letzte Bemerkung spiegelt einen allgemeinen Sachverhalt wieder.

**Satz 7.26** *Jede abgeschlossene Menge in einem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum ist folgenabgeschlossen. Die Umkehrung ist jedenfalls dann gültig, wenn der Körper  $\mathbb{K}_0$  der Bedingung (\*) genügt.*

*Beweis.* Ist  $A \subset X$  abgeschlossen und  $a = \lim a_j \in U := X \setminus A$ , so liegen wegen der Offenheit von  $U$  fast alle Folgenglieder  $a_j$  in  $U$ , also nicht in  $A$ .

Es sei  $A$  folgenabgeschlossen und  $U := X \setminus A$ . Ist  $U$  nicht offen, so gibt es ein Element  $a \in U$ , so daß jede Kugel  $B(a, \varepsilon)$  Punkte mit  $A$  gemeinsam hat. Wähle nun eine monoton fallende Nullfolge  $(\varepsilon_j)$  in  $\mathbb{K}_0$  und Elemente  $a_j \in A \cap B_j$ ,  $B_j := B(a, \varepsilon_j)$ . Dann ist  $a$  der Grenzwert der Folge der  $a_j$  und müßte also doch zu  $A$  gehören.  $\square$

Wir wollen uns abschließend in diesem Kapitel mit einigen weiteren grundlegenden *topologischen* Begriffen in  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Räumen auseinandersetzen.

### 7.14 Berührungspunkte und abgeschlossene Hüllen

*Definition.* Es sei  $A \subset X$  eine nichtleere Teilmenge. Ein Punkt  $a \in X$  heißt ein *Berührungspunkt* von  $A$ , wenn jede Umgebung  $U = U(a)$  Punkte mit  $A$  gemeinsam hat:  $U(a) \cap A \neq \emptyset$ . Selbstverständlich ist jeder Punkt  $a \in A$  Berührungspunkt von  $A$ .

**Lemma 7.27** *Gibt es eine Folge  $a_j \in A$  mit  $\lim a_j = a$ , so ist  $a$  Berührungspunkt von  $A$ . Die Umkehrung gilt, wenn  $\mathbb{K}_0$  der Bedingung (\*) genügt.*

*Beweis.* In jeder Umgebung  $U = U(a)$  liegen fast alle  $a_j$ , also ist  $A$  Berührungspunkt. Es sei umgekehrt  $a$  Berührungspunkt von  $A$ , aber  $a \notin A$  (sonst wähle  $a_j = a$  für alle  $j$ ). Sei  $\varepsilon_j > 0$  eine monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{K}_0$ . Man konstruiert dann leicht per vollständiger Induktion eine Folge  $a_j \in A \setminus \{a\}$  mit  $0 < d(a_{j+1}, a) \leq \min(d(a_j, a), \varepsilon_{j+1})$ ; somit ist  $\lim a_j = a$ .  $\square$

*Definition.* Es sei  $A \subset X$  eine Teilmenge. Wir bezeichnen mit  $\bar{A}$  die Menge der Berührungspunkte von  $A$  und nennen sie den *Abschluß* oder die *abgeschlossene Hülle* der Menge  $A$  (in  $X$ ).

Diese Definition wird gerechtfertigt durch den

**Satz 7.28** *Es gelten die folgenden Aussagen :*

- i)  $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $A = \bar{A}$ .
- ii)  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ .
- iii)  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ .
- iv)  $\bar{A}$  ist die (bzgl. Inklusion) kleinste,  $A$  umfassende abgeschlossene Menge.

*Beweis.* i) Es sei  $A$  abgeschlossen. Ist  $a \notin A$ , also  $a \in U := X \setminus A$ , so ist  $U$  eine (offene) Umgebung von  $a$ , die mit  $A$  keinen Punkt gemeinsam hat. Dann ist  $a$  kein Berührungspunkt von  $A$  und damit  $\bar{A} \subset A$ . Ist umgekehrt  $\bar{A} = A$ , aber  $A$  nicht abgeschlossen, so gibt es mindestens einen Punkt  $a \notin A = \bar{A}$ , so daß jede Umgebung  $U$  von  $a$  die Menge  $A$  trifft, da ja  $X \setminus A$  nicht offen ist.

ii) Jeder Berührungspunkt von  $A$  ist per definitionem auch Berührungspunkt von  $B$ .

iii) Es sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $\bar{A}$ . Dann trifft jede und damit erst recht jede offene Umgebung  $U$  von  $a$  die Menge  $\bar{A}$ : Es gibt  $a' \in U \cap \bar{A}$ . Nun ist aber  $U$  als offene Menge auch Umgebung von  $a'$ , so daß auch  $U \cap A \neq \emptyset$ . Damit ist  $a$  auch Berührungspunkt von  $A$ , womit wir die Inklusion  $\bar{A} \subset \bar{A}$  gezeigt haben. Die umgekehrte Inklusion folgt aus  $A \subset \bar{A}$  und ii).

iv) Da beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind, existiert die kleinste,  $A$  umfassende abgeschlossene Menge und ist gleich

$$\bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abg.}}} B$$

Ist nun  $B$  abgeschlossen und  $B \supset A$ , so ist  $B = \bar{B} \supset \bar{A}$ , also auch  $\bar{A}$  in dem obigen Durchschnitt enthalten. Auf der anderen Seite ist nach iii)  $\bar{A}$  selbst schon abgeschlossen und enthält  $A$ . Somit ist

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abg.}}} B. \quad \square$$

Ein wichtiges Beispiel dokumentieren wir in Form eines Lemmas.

**Lemma 7.29** Für einen normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , ist (in beliebiger Norm) die abgeschlossene Kugel  $\bar{B}(a, R)$  der Abschluß  $\bar{B}(a, R)$  von  $B(a, R)$ .

*Beweis.* Es sei  $\partial B := \bar{B}(a, R) \setminus B(a, R)$ , also  $x \in \partial B \iff \|x - a\| = R$ . Sei weiter

$$x_n = \frac{1}{n+1} a + \frac{n}{n+1} x, \quad n \geq 0, \quad \text{insbesondere also } x_0 = a.$$

Dann ist

$$\|x_n - a\| = \frac{n}{n+1} \|x - a\| < R,$$

also  $x_n \in B(a, R)$ , und aus

$$\|x_n - x\| = \frac{1}{n+1} \|x - a\|$$

deduziert man  $\lim x_n = x$ . Somit ist  $x$  Berührungspunkt von  $B(a, R)$ . Da andererseits  $\bar{B}(a, R)$  abgeschlossen ist und die offene Kugel enthält, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung.* Genauso schließt man im vorigen Beispiel, daß  $x \in \bar{B}(a, R) \setminus B(a, R)$  auch Berührungspunkt von  $X \setminus \bar{B}(a, R)$  ist, oder, mit anderen Worten, daß

$$\overline{X \setminus \bar{B}(a, R)} = X \setminus B(a, R),$$

und daß für die Sphäre

$$\partial B(a, R) := \{x \in V : \|x - a\| = R\}$$

und jede Menge  $B$  mit  $B(a, R) \subset B \subset \bar{B}(a, R)$  die Beziehung

$$\partial B(a, R) = \bar{B} \cap \overline{X \setminus B}$$

besteht.

### 7.15 Randpunkte von Mengen

Das vorige Beispiel gibt Anlaß zu der folgenden allgemeinen Definition.

*Definition.* Ein Punkt  $a \in X$  heißt *Randpunkt* der Menge  $A$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad B(a, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset,$$

wenn also  $a$  sowohl Berührungspunkt von  $A$  als auch von dem Komplement von  $A$  ist. Die Menge  $\partial A$  der Randpunkte heißt der *Rand* von  $A$ .

**Satz 7.30** *Für die Operation der Randbildung gelten die folgenden Aussagen:*

- i)  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ ; insbesondere ist  $\partial A$  abgeschlossen und  $\partial A = \partial(X \setminus A)$ .
- ii)  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .
- iii)  $\overset{\circ}{A} := A \setminus \partial A$  ist die größte, in  $A$  enthaltene offene Menge.

*Definition.* Man nennt  $\overset{\circ}{A}$  den *inneren Kern* von  $A$ .

*Beweis.* i) ist nur eine Umformulierung der Definition.

ii) Wegen i) ist  $A \cup \partial A \subset \overline{A}$ . Umgekehrt ist offensichtlich  $\overline{A} \setminus A \subset \partial A$ , also  $\overline{A} \subset A \cup \partial A$ .

iii)  $X \setminus (A \setminus \partial A) = (X \setminus A) \cup \partial A = (X \setminus A) \cup \partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A}$  ist die kleinste,  $X \setminus A$  umfassende abgeschlossene Menge; also ist  $A \setminus \partial A$  die größte, in  $A$  enthaltene offene Menge.  $\square$

*Definition.* Es sei  $A \subset X$  eine nichtleere Teilmenge. Ein Punkt  $a \in X$  heißt ein *Häufungspunkt* von  $A$ , wenn jede Umgebung  $U = U(a)$  unendlich viele Punkte mit  $A$  gemeinsam hat.

*Bemerkung.* Selbstverständlich ist nicht jeder Punkt  $a \in A$  notwendig ein Häufungspunkt von  $A$ , z. B. dann nicht, wenn  $A = \{a\}$ . Ein Häufungspunkt ist immer ein Berührungspunkt.

*Bemerkung.* Man muß wohl unterscheiden zwischen Häufungspunkten der Folge  $(x_j)$  und Häufungspunkten der unterliegenden Menge  $\{x_j : x \in \mathbb{N}\}$ . Ein Häufungspunkt der Menge ist natürlich auch Häufungspunkt der Folge, aber nicht notwendig umgekehrt.

**Satz 7.31** *Es sei  $A \subset X$  und  $a \in X$  gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i)  $a$  ist Häufungspunkt von  $A$ ;
- ii)  $a$  ist Häufungspunkt von  $A \setminus \{a\}$ ;
- iii)  $a$  ist Berührungspunkt von  $A \setminus \{a\}$ .

Jede dieser Aussagen folgt aus :

- iv) es gibt eine Folge  $a_j \in A$ ,  $a_j \neq a$ , mit  $\lim a_j = a$ .

Besitzt  $\mathbb{K}_0$  die Eigenschaft (\*), so sind alle vier Aussagen äquivalent.

*Beweis.* Die Richtungen i)  $\implies$  ii)  $\implies$  iii) sind trivial.

iv)  $\implies$  i): Angenommen,  $a$  ist kein Häufungspunkt von  $A$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U = U(a)$ , s. d.  $U \cap A$  endlich ist. Da in  $U$  fast alle Folgenglieder  $a_j$  liegen, kann die Folge  $(a_j)$  nur endlich viele Werte annehmen. Also ist  $d(a_j, a) \geq \varepsilon_0 > 0$  für ein  $\varepsilon_0$  und alle  $j$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

iii)  $\implies$  i): Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  konstruiert man induktiv eine Folge  $a_j \in A$  mit  $d(a_0, a) < \varepsilon$  und  $0 < d(a_{j+1}, a) < d(a_j, a)$ . Damit enthält jede Umgebung von  $a$  unendlich viele Punkte aus  $A$ .

iii)  $\implies$  iv) folgt unter der Voraussetzung (\*) wie in dem vorigen Abschnitt, wenn man mit einer nichttrivialen Nullfolge  $\varepsilon_j > 0$  zusätzlich  $0 < d(a_{j+1}, a) < \varepsilon_j$  fordert.  $\square$



*Beispiel.* Ist  $I$  ein nichttriviales Intervall in einem angeordneten Körper, so ist jeder Punkt in  $I$  ein Häufungspunkt von  $I$ . Den leichten Beweis überlassen wir dem Leser.

Wir fügen im Zusammenhang mit den vorstehend erläuterten Begriffsbildungen noch zwei weitere topologische Begriffe an, die häufiger in der Analysis verwendet werden.

*Definition und Bemerkung.* Eine oft auftretende Situation ist die, daß für Mengen  $D \subset A \subset X$  jeder Punkt in  $A$  Häufungspunkt von  $D$  ist. Man sagt dann, daß die Menge  $D$  in  $A$  *dicht* liegt. Dies ist gleichbedeutend mit  $A \subset \overline{D}$  und wegen  $D \subset A$  auch mit  $\overline{D} = \overline{A}$ . Aufgrund dieser Definition liegt jede Menge  $A \subset X$  dicht in ihrem Abschluß  $\overline{A}$ .

*Definition.* Ein Punkt  $a \in A$  heißt ein *isolierter* Punkt von  $A$ , wenn es eine Umgebung  $U = U(a)$  gibt mit  $U \cap A = \{a\}$ , d. h. wenn  $a$  kein Berührungspunkt von  $A \setminus \{a\}$  (oder, unter der Voraussetzung (\*), kein Häufungspunkt von  $A$ ) ist. Eine Menge  $A \subset X$  heißt *diskret*, wenn sie nur aus isolierten Punkten besteht.

## 7.16 Merkwürdige topologische Eigenschaften nichtarchimedisch bewerteter Körper

Wir betrachten zum Abschluß noch kurz Körper  $\mathbb{K}$  mit einer *nichtarchimedischen* Bewertung in einem archimedisch angeordnetem Körper  $\mathbb{K}_0$ , in denen überaus seltsame topologische Verhältnisse herrschen. Es gilt das

**Lemma 7.32** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für den bewerteten Körper  $\mathbb{K}$  mit archimedischem Wertekörper  $\mathbb{K}_0$ :*

- i)  $\mathbb{K}$  ist nichtarchimedisch bewertet, d.h. die Folge  $(n \cdot 1)$  ist beschränkt in  $\mathbb{K}$ ;
- ii) es gilt  $|n| \leq 1$  für alle  $n = n \cdot 1 \in \mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;
- iii) es gilt die verschärfte Dreiecksungleichung  $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$ ,  $a, b \in \mathbb{K}$ .

Besitzt zudem  $\mathbb{K}$  die Charakteristik Null, so ist jede dieser Eigenschaften äquivalent zu der folgenden Aussage:

- iv) die Folge  $(1/n)$ ,  $n \geq 1$ , konvergiert nicht gegen Null in  $\mathbb{K}$ .

*Beweis.* Die Aussage ii)  $\implies$  i) ist völlig trivial. Wegen  $|1| = 1$  impliziert iii) sofort ii). Besitzt  $\mathbb{K}$  die Charakteristik 0, so ist  $1/n \in \mathbb{K}$  für  $n \geq 1$ , und wegen  $1 = |1| = \left| n \frac{1}{n} \right| = |n| \left| \frac{1}{n} \right|$  folgt  $|1/n| \geq 1$  mit ii). Also ist die Folge  $(1/n)_{n \geq 1}$  nicht gegen Null konvergent. Umgekehrt folgt aus der Annahme, daß die Folge  $(1/n)_{n \geq 1}$  nicht gegen Null konvergiert, die Beschränktheit der Folge  $(n)$ .

Es bleibt somit nur zu zeigen: Aus  $|n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt die verschärfte Dreiecksungleichung. Wir betrachten dazu bei beliebigen  $a, b \in \mathbb{K}$  die Potenzen

$$\begin{aligned} |a + b|^n &= |(a + b)^n| = \left| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \right| \leq \sum_{j=0}^n \left| \binom{n}{j} \right| |a|^{n-j} |b|^j \\ &\leq M(n + 1)m^n \end{aligned}$$

mit  $m = \max(|a|, |b|)$ . Ohne Einschränkung sei  $m > 0$ . Der Beweis ist dann beendet, wenn wir das folgende Lemma einsehen können (man setze  $\gamma := m^{-1}|a + b|$ ).

**Lemma 7.33** *Gilt  $\gamma^n \leq M(n + 1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\gamma$  und  $M$  nichtnegative Konstanten in  $\mathbb{K}_0$  sind, so ist  $\gamma \leq 1$ .*

*Beweis.* Angenommen, es wäre  $\gamma > 1$ , also  $\gamma = 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Aus der Binomischen Formel folgt dann für  $n \geq 2$ :

$$n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 \leq \gamma^n \leq M(n+1).$$

Nun ist für hinreichend große  $n$ :

$$n\delta > M, \quad \frac{n-1}{2}\delta^2 > M$$

und damit  $M(n+1) < M(n+1)$ . Widerspruch! □

Die merkwürdigen „topologischen“ Eigenschaften von solchen nichtarchimedisch bewerteten Körpern  $\mathbb{K}$ , insbesondere ihr *totaler Nichtzusammenhang*, beruhen darauf, daß wegen der verschärften Dreiecksungleichung die *abgeschlossene* Menge  $\overline{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{K} : |x - a| \leq r\}$  gleichzeitig *offen* ist: gilt nämlich  $|x_1 - a| \leq r$  und  $|x_2 - x_1| < r$ , so ist

$$|x_2 - a| = |(x_2 - x_1) + (x_1 - a)| \leq \max(|x_2 - x_1|, |x_1 - a|) \leq r.$$

## Anhang: Topologische Räume

Man kommt im Zusammenhang mit der Konvergenz von Folgen mit noch weniger Voraussetzungen aus. Es dürfte aufgrund der obigen Darlegungen klar sein, daß nur der Begriff der *offenen Menge* relevant ist.

*Definition.* Eine Teilmenge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  der Potenzmenge von  $X \neq \emptyset$  heißt eine *Topologie* auf  $X$  (und das Paar  $(X, \mathcal{T})$  ein *topologischer Raum*), wenn die folgenden Aussagen erfüllt sind:

- i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ;
- ii) sind  $U_\iota, \iota \in J$ , Elemente von  $\mathcal{T}$ ,  $J$  eine beliebige Indexmenge, so ist auch ihre Vereinigung

$$\bigcup_{\iota \in J} U_\iota$$

in  $\mathcal{T}$  enthalten;

- iii) sind  $U_1, U_2$  Elemente von  $\mathcal{T}$ , so auch ihr Durchschnitt  $U_1 \cap U_2$ .

Die Mengen  $U \in \mathcal{T}$  heißen dann *offene* Teilmengen von  $X$ .

*Beispiele.* 1. In diesem Sinne bildet die Gesamtheit der offenen Mengen in einem *metrischen* Raum eine Topologie.

2. Auf einer beliebigen Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  stets eine Topologie. Sie heißt die *diskrete Topologie*. Sie wird erzeugt von der *diskreten Metrik* auf  $X$ .

3. Auf einer beliebigen Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$  stets eine Topologie. Sie heißt die *indiskrete Topologie*.

4. Ist  $(X, \mathcal{T}_X)$  ein topologischer Raum und ist  $Y \subset X$  eine nichtleere Teilmenge, so wird durch

$$\mathcal{T}_Y \ni V : \iff \exists U \in \mathcal{T}_X \text{ mit } V = U \cap Y$$

eine Topologie auf  $Y$  erklärt. Sie heißt die von  $X$  auf  $Y$  *induzierte* Topologie oder die *Relativtopologie*, und zusammen mit dieser heißt  $Y$  ein *topologischer Unterraum* von  $X$ . Wird die Topologie auf  $X$  von einer *Metrik* erzeugt, so stimmt die induzierte Topologie auf  $Y$  mit der von der auf  $Y$  eingeschränkten Metrik erzeugten Topologie überein. Die Mengen in  $\mathcal{T}_Y$  nennen wir dann auch *offen in  $Y$* . Man beachte, daß diese als Teilmengen von  $X$  im allgemeinen *nicht* offen sind. Dies ist nur dann der Fall, wenn  $Y$  selbst eine offene Teilmenge von  $X$  ist.

Viele der Begriffe und Sätze in metrischen Räumen lassen sich in dem allgemeineren Rahmen von *topologischen Räumen* formulieren.

*Definition.* Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $a \in X$  fest. Eine Menge  $V \subset X$  heißt eine *Umgebung* von  $a$ , wenn es eine offene Menge  $U \subset X$  gibt mit  $a \in U \subset V$ .

*Bemerkung.* In diesem Sinne sind Umgebungen eines Punktes in einem *metrischen* Raum auch Umgebungen bzgl. der unterliegenden Topologie.

*Definition.* Eine Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in einem topologischen Raum  $X$  heißt *konvergent* gegen  $a \in X$ , wenn jede Umgebung  $V$  von  $a$  fast alle Folgenglieder  $x_j$  enthält.

*Bemerkung.* In metrischen Räumen stimmt diese Definition, wovon man sich sofort überzeugt, mit unserer früheren Definition überein.

Allerdings sind nicht mehr *alle* der früheren Ergebnisse richtig bzw. sinnvoll. Z. B. kann man in diesem sehr allgemeinen Rahmen nicht mehr definieren, wann eine Folge oder Menge *beschränkt* ist. Auch die *Eindeutigkeit* des Grenzwertes geht verloren.

*Beispiele.* 1. In der *diskreten* Topologie ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie (schließlich) konstant (also trivial) ist.

2. In der *indiskreten* Topologie ist *jede* Folge konvergent und besitzt *jeden* Wert  $a \in X$  als Grenzwert.

Die Pathologie in 2. kann nicht auftreten, wenn der topologische Raum eine geeignete *Trennungseigenschaft* erfüllt.

*Definition.* Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das HAUSDORFFSche *Trennungsaxiom* (oder kurz:  $X$  ist *hausdorffsch*), wenn es zu je zwei Punkten  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , Umgebungen  $V_1, V_2$  von  $x_1$  bzw.  $x_2$  gibt mit  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

*Bemerkung.* Die einem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum unterliegende Topologie genügt dem Hausdorffschen Trennungsaxiom. Sind nämlich  $x_1, x_2 \in X$  zwei verschiedene Punkte, also  $2r := d_X(x_1, x_2) > 0$ , so ist  $B(x_1, r) \cap B(x_2, r) = \emptyset$ .

Genau wie in dem Fall  $\mathbb{K}_0$ -metrischer Räume beweist man den folgenden Satz.

**Satz 7.34** *Genügt der topologische Raum  $(X, \mathcal{T})$  dem Trennungsaxiom von Hausdorff, so besitzt jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.*

*Topologien* auf Mengen  $X$  lassen sich genauso gut sowohl durch das System der *abgeschlossenen* Mengen als auch durch den *Umgebungsbegriff* einführen und charakterisieren.

*Definition.* Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Menge  $A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement in  $X$  offen ist.

*Beispiel.* Einpunktige Mengen in  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Räumen sind abgeschlossen. Dies ist aber in allgemeinen topologischen Räumen nicht immer der Fall.

Aufgrund der zur Offenheit komplementären Definition der Abgeschlossenheit ist klar, daß *beliebige Durchschnitte* und *endliche Vereinigungen* abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Das System  $\mathcal{T}'$  der abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum  $X$  erfüllt also die folgenden Axiome:

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}'$ ,  $X \in \mathcal{T}'$ ;
2.  $A_\iota \in \mathcal{T}'$ ,  $\iota \in J \implies \bigcap_{\iota \in J} A_\iota \in \mathcal{T}'$ ;
3.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}' \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{T}'$ .

*Bemerkung.* Man kann auch durch die obigen Axiome für das System  $\mathcal{T}'$  der *abgeschlossenen* Mengen eine Topologie auf  $X$  erklären, wobei eine Menge als *offen* zu gelten hat, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.

*Definition.* Man sagt, der topologische Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfülle das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es zu jedem Punkt  $a \in X$  abzählbar viele Umgebungen  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von  $a$  gibt, so daß jede Umgebung von  $a$  mindestens eine Umgebung  $U_n$  enthält.

**Lemma 7.35** *Ein  $\mathbb{K}_0$ -metrischer Raum  $(X, d)$  genügt dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn der angeordnete Körper  $\mathbb{K}_0$  nichttriviale Nullfolgen besitzt.*

*Bemerkung.* Die Umkehrung im vorstehenden Lemma gilt i. A. nicht. Denn für jede *diskrete* Metrik ist das 1. Abzählbarkeitsaxiom gültig unabhängig von der Wahl des Wertekörpers  $\mathbb{K}_0$ .

*Beweis.* Es sei  $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{K}_0$ . Dann bilden die  $B_j := B(x, \varepsilon_j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine abzählbare Umgebungsbasis des Punktes  $x \in X$ .  $\square$

Dies ist der Grund für die früher bewiesene Äquivalenz von abgeschlossenen und folgenabgeschlossenen Mengen in solchen metrischen Räumen. Es gilt nämlich der folgende Satz, dessen (einfachen) Beweis wir dem Leser überlassen.

**Lemma 7.36** *Abgeschlossene Mengen in beliebigen topologischen Räumen sind folgenabgeschlossen. Die Umkehrung ist erfüllt für topologische Räume, die dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügen.*

Steht einem das 1. Abzählbarkeitsaxiom nicht zur Verfügung, muß man sich von der Vorstellung verabschieden, daß man alle Begriffe der Topologie auf die Konvergenz–Untersuchung von Folgen reduzieren kann. Es sind dann i. a. die Begriffspaare „*abgeschlossen - folgenabgeschlossen*“, „*stetig - folgenstetig*“, „*kompakt - folgenkompakt*“ etc. keineswegs als jeweiliger Ausdruck desselben Sachverhalts anzusehen. Besitzt z. B. der angeordnete Körper keine nichttrivialen Folgen, so ist *jede* Abbildung  $f : \mathbb{K} \rightarrow X$  von  $\mathbb{K}$  in einen topologischen Raum  $X$  folgenstetig, aber i. A. nicht stetig. Abhilfe schafft hier die konsequente Verwendung des Begriffs eines *Filters* und seiner Konvergenz. Da wir in diesem einführenden Werk hiervon jedoch nicht ernsthaft Gebrauch machen wollen, sei nur kurz auf die Definition eingegangen. Der interessierte Leser sei auf die Literatur, z. B. [39], verwiesen.

*Definition.* Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt ein *Filter*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- i)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ,  $X \in \mathcal{F}$ ;
- ii) ist  $V \in \mathcal{F}$  und  $V \subset U$ , so ist auch  $U \in \mathcal{F}$ ;
- iii) mit  $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$  gehört auch der Durchschnitt  $V_1 \cap V_2$  zu  $\mathcal{F}$ .

*Bemerkung.* Es ist unmittelbar klar, daß die Umgebungen eines festen Punktes  $a$  in einem topologischen Raum  $X$  einen Filter bilden. Man nennt ihn den *Umgebungsfilter* von  $a \in X$ .

Es sei umgekehrt jedem Punkt  $a$  einer Menge  $X$  ein Filter  $\mathcal{U}(a)$  zugeordnet mit  $a \in V$  für alle  $V \in \mathcal{U}(a)$ . Nennt man dann eine Menge  $U \subset X$  *offen*, wenn es zu jedem  $a \in U$  eine Menge  $V \in \mathcal{U}(a)$  gibt mit  $V \subset U$ , so wird hierdurch offensichtlich eine Topologie auf  $X$  erklärt, deren Umgebungsfilter gerade die Systeme  $\mathcal{U}(a)$  sind.

Sehr oft kommt man mit kleineren Systemen als den Umgebungsfiltern aus.

*Definition.* Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  eines Filters  $\mathcal{F}$  heißt eine *Filterbasis*, wenn es zu jedem  $V \in \mathcal{F}$  ein  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $B \subset V$ . Der Filter  $\mathcal{F}$  besteht dann aus allen Mengen, die ein Element von  $\mathcal{B}$  enthalten. Ein nichtleeres System  $\mathcal{B}$  von nichtleeren Teilmengen von  $X$  ist offenbar genau dann eine Filterbasis, wenn es zu je zwei Mengen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ein Element  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $B \subset B_1 \cap B_2$ . Eine Basis eines Umgebungsfilters nennt man auch eine *Umgebungsbasis*.

*Bemerkung.* Offensichtlich reicht für den Nachweis der Konvergenz einer Folge  $(x_j)$  gegen  $a$ , daß jedes Element  $B$  einer *Umgebungsbasis*  $\mathcal{B}$  fast alle Folgenglieder enthält.

*Beispiel.* Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so bilden die Kugeln  $B(a, r)$ ,  $r > 0$ , eine Basis des Umgebungsfilters  $\mathcal{U}(a)$ . Ebenso alle solche Kugeln mit  $r \leq r_0$  bei festem  $r_0 > 0$ , z. B.  $r_0 = 1$ .

*Bemerkung.* Das 1. Abzählbarkeitsaxiom läßt sich mit diesen Begriffen wie folgt umformulieren: Jeder Umgebungsfilter  $\mathcal{U}(a)$  besitzt eine *abzählbare* Basis.

*Definition.* Ein Filter  $\mathcal{F}$  heißt *konvergent* gegen  $a \in X$ , wenn  $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{F}$ .  $a$  heißt *Berührungspunkt* des Filters  $\mathcal{F}$ , wenn  $F \cap U \neq \emptyset$  für alle  $U \in \mathcal{U}(a)$ ,  $F \in \mathcal{F}$ . Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, und ist  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$ , so gibt es einen eindeutig bestimmten Filter auf  $Y$ , der die Gesamtheit der Bilder  $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$  als Basis besitzt. Man nennt ihn den *Bildfilter*  $f(\mathcal{F})$ .

Mit diesen Notationen gilt z. B. der folgende Satz, dessen Beweis wir dem interessierten Leser überlassen können (sofern er mit den Begriffen der *Stetigkeit* und *Kompaktheit* schon vertraut ist).

**Satz 7.37** *Es seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subset X$  sei eine Teilmenge und  $a$  ein Punkt in  $X$ . Man hat dann die folgenden Aussagen :*

- i)  $a \in \bar{A}$  dann und nur dann, wenn ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  existiert mit  $A \in \mathcal{F}$ , der gegen  $a$  konvergiert.

- ii) *Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig in  $a$  genau dann, wenn das Bild eines jeden gegen  $a$  konvergierenden Filters konvergent gegen  $f(a)$  ist.*
- iii)  *$X$  ist kompakt genau dann, wenn jeder Filter auf  $X$  einen Berührungspunkt besitzt.*

## 8 Konvergente Folgen und Reihen in normierten Vektorräumen

In einem Vektorraum  $V$  bildet die Menge  $\mathcal{F}_V$  der Folgen auf natürliche Weise selbst wieder einen Vektorraum. Ist  $V$  zudem normiert, so kann man sich die Frage stellen, ob die Menge der *konvergenten* Folgen mit dieser algebraischen Struktur verträglich ist. Dies ist, wie wir gleich sehen werden, der Fall. Außerdem kann man aus Folgen durch Addition ihrer Glieder neue Folgen bilden, die man *Reihen* nennt. Auch deren wichtigsten Eigenschaften sollen in diesem Kapitel besprochen werden. Einen weiteren Schwerpunkt stellt die Untersuchung von sogenannten *CAUCHY-Folgen* und *-Reihen* dar.

### 8.1 Algebraische Eigenschaften von Limiten

Wir beweisen sogleich den wichtigen

**Satz 8.1** *Es gelte in einem normierten Vektorraum  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = b$ . Dann gilt auch*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (a_j + b_j) = a + b, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} c a_j = c a, \quad c \in \mathbb{K}.$$

*M. a. W. : Die Menge der konvergenten Folgen  $\mathcal{KF}_V \subset \mathcal{F}_V$  bildet einen  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum von  $\mathcal{F}_V$ , und die Abbildung*

$$\lim : \begin{cases} \mathcal{KF}_V \longrightarrow V \\ (x_j) \longmapsto \lim x_j \end{cases}$$

*ist  $\mathbb{K}$ -linear.*

*Beweis.* Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist auch  $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$ , und es gibt  $M', N' \in \mathbb{N}$  mit

$$\|a_j - a\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j \geq M', \quad \|b_j - b\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j \geq N'.$$

Wählt man  $N := \max(M', N')$ , so gilt für alle  $j \geq N$ :

$$\|(a_j + b_j) - (a + b)\| = \|(a_j - a) + (b_j - b)\| \leq \|a_j - a\| + \|b_j - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Im zweiten Fall ist entweder  $c = 0$  und die Aussage trivial oder man kann  $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$  wählen und entsprechend wie oben verfahren.  $\square$

Auch für die *Multiplikation* in dem Körper  $\mathbb{K}$  gilt ein entsprechender Satz. Wir formulieren gleich eine Verallgemeinerung für normierte Vektorräume.

**Satz 8.2** *Es seien  $(c_j)$  und  $(a_j)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{K}$  bzw. in  $V$ . Es gelte  $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = c \in \mathbb{K}$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a \in V$ . Dann gilt*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (c_j a_j) = c a.$$

*Die Folge  $(c_j a_j)$  ist schon dann eine Nullfolge, wenn die Folge  $(a_j)$  in  $V$  gegen Null konvergiert und die Folge  $(c_j)$  zumindest beschränkt in  $\mathbb{K}$  ist oder umgekehrt.*

*Beweis.* Man setze im Falle des Zusatzes einfach formal  $c = 0$  oder  $a = 0$ . Es gilt dann in jedem Fall

$$\|c_j a_j - c a\| = \|c_j (a_j - a) + (c_j - c) a\| \leq |c_j| \|a_j - a\| + |c_j - c| \|a\|.$$

Nun ist  $|c_j| \leq K$  für alle  $j$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|a_j - a\| = 0$  oder umgekehrt. Damit läßt sich der erste Ausdruck auf der rechten Seite beliebig klein, also z. B. kleiner als  $\varepsilon/2$  machen. Der zweite ist noch einfacher zu behandeln.  $\square$

**Folgerung 8.3** Gilt  $\lim c_j = c \neq 0$ ,  $\lim a_j = a$ , so ist  $c_j \neq 0$  für fast alle  $j$ , und es gilt (unter evtl. Weglassung von endlich vielen Gliedern)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{c_j} = \frac{a}{c}.$$

*Beweis.* Wegen des vorstehenden Satzes braucht man nur  $\lim_{j \rightarrow \infty} 1/c_j = 1/c$  zu beweisen. Wählt man  $\varepsilon_0 = \frac{|c|}{2}$ , so gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|c_j - c| < \frac{|c|}{2}, \quad j \geq N;$$

also ist  $|c_j| \geq \frac{|c|}{2}$  (denn sonst wäre  $\frac{1}{2}|c| < |c| - |c_j| \leq |c_j - c| < \frac{1}{2}|c|$ ), insbesondere  $c_j \neq 0$ , und  $\left| \frac{1}{c_j} \right| \leq \frac{2}{|c|}$ . Es folgt für diese  $j$ :

$$\left| \frac{1}{c_j} - \frac{1}{c} \right| = \frac{|c - c_j|}{|c||c_j|} \leq \frac{2}{|c|^2} |c_j - c|$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Der Grenzwertbegriff in *angeordneten* Körpern ist mit der Anordnung verträglich. Dies besagt der folgende Satz über die *Monotonie* von Grenzwerten.

**Satz 8.4** Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper. Für die konvergenten Folgen  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gelte  $a_j \leq b_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch

$$a := \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \leq \lim_{j \rightarrow \infty} b_j =: b.$$

*Warnung.* Das Beispiel  $0 =: a_j < b_j := 1/j$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ , zeigt, daß man aus  $a_j < b_j$  für alle  $j$  nicht auf  $a < b$  schließen kann.

*Beweis.* Es ist nur zu zeigen, daß aus  $a_j \geq 0$  auch  $a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \geq 0$  folgt. Wäre nämlich  $a < 0$ , also insbesondere  $\varepsilon := |a| > 0$ , so wäre für  $j \geq N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ :

$$a_j = a + (a_j - a) < a + \frac{\varepsilon}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a < 0.$$

Widerspruch!  $\square$

**Folgerung 8.5** Ist  $(a_j)$  eine monoton aufsteigende konvergente Folge, so gilt  $a_k \leq a := \lim_{j \rightarrow \infty} a_j$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Im Falle von normierten Vektorräumen hat man nur die folgende schwächere Aussage.

**Lemma 8.6** Ist  $(a_j)$  eine konvergente Folge in  $V$ , so gilt

$$\left\| \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \right\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|a_j\|.$$

Ist insbesondere  $\|a_j\| \leq K$  für fast alle  $j$ , so ist auch

$$\left\| \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \right\| \leq K.$$

*Beweis.* Ist  $a$  der Grenzwert der Folge, so ergibt sich die Behauptung aus der Dreiecksungleichung in der Form  $\left| \|a_j\| - \|a\| \right| \leq \|a_j - a\|$ .  $\square$



## 8.2 Intervallschachtelungen

Grundlegend für das axiomatische Verständnis der reellen Zahlen ist der Begriff der *Intervallschachtelung*. Darunter versteht man eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $I_j := [a_j, b_j]$  in einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$ , die im folgenden Sinne „ineinandergeschachtelt“ sind:  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . Manche Autoren knüpfen an den Begriff der Intervallschachtelung aber noch die zusätzliche Forderung, daß die Folge  $b_j - a_j$  der *Längen* dieser Intervalle gegen 0 geht. Da die Längenfolge per definitionem monoton absteigend ist, ist diese zusätzliche Bedingung äquivalent zu der Aussage:

( $\times$ ) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $N$  mit  $b_N - a_N < \varepsilon$ .

Die *Vollständigkeit* eines angeordneten Körpers  $\mathbb{K}$  manifestiert sich in der Bedingung, daß der Durchschnitt solcher Intervalle *genau ein Element enthält* (siehe Kapitel 9). Mit anderen Worten: Eine Intervallschachtelung mit ( $\times$ ) zeichnet *genau eine Zahl* in dem Körper aus.

Im Allgemeinen haben wir nur das folgende Resultat, das dennoch wesentliche Einsichten liefert.

**Lemma 8.7** *Es sei  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $I_j = [a_j, b_j]$ , eine Intervallschachtelung in dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  mit der Eigenschaft ( $\times$ ). Dann enthält der Durchschnitt  $\bigcap I_j$  höchstens ein Element des Körpers. Ist in dem Durchschnitt tatsächlich ein Element  $\xi$  enthalten, so ist notwendig*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \xi.$$

*Beweis.* Es seien  $\xi$  und  $\xi'$  in dem Durchschnitt enthalten. Ohne Einschränkung sei  $\xi' - \xi =: \varepsilon_0 > 0$ . Nach Voraussetzung gibt es dann eine natürliche Zahl  $N$  mit  $b_N - a_N < \varepsilon_0$  und  $a_N \leq \xi < \xi' \leq b_N$ , was offensichtlich unmöglich ist. Ferner folgt aus  $b_j - a_j < \varepsilon$  für alle  $j \geq N = N(\varepsilon)$  und  $a_j \leq \xi \leq b_j$  auch  $0 \leq b_j - \xi < \varepsilon$  und  $0 \leq \xi - a_j < \varepsilon$  für alle  $j \geq N$  und damit die zweite Behauptung.  $\square$

## 8.3 Reihen in normierten Vektorräumen

Als nächstes wollen wir auf den Begriff einer *Reihe* von Elementen in einem bewerteten Körper oder einem normierten Vektorraum zu sprechen kommen.

*Definition.* Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in dem Vektorraum  $V$ . Man ordnet dieser dann die *Partialsommen*  $s_n$  zu:

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j.$$

Das Symbol  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  bezeichnet dann die *Folge* der Partialsommen; man bezeichnet es auch als die *unendliche Reihe* mit den *Gliedern*  $a_j$ . Ist  $V$  normiert, so schreibt man

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = s$$

und nennt  $s$  den *Grenzwert* oder *Limes* (manchmal auch nur kurz den *Wert* oder die *Summe*) der Reihe, wenn

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

existiert, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n a_j = s$$

gilt.

*Bemerkung.* Ist  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $V$  und  $b_0 := a_0$ ,  $b_j := a_j - a_{j-1}$ ,  $j \geq 1$ , so gilt offensichtlich für die Folge  $s_n$  der Partialsummen der Reihe  $\sum b_j$ , daß  $s_n = a_n$ . D. h.: jede Folge in einem Vektorraum läßt sich auch als Reihe (eine sogenannte *Teleskopreihe*) auffassen (und umgekehrt auch jede Reihe als Folge ihrer Partialsummen).

Ein sehr einfaches, aber zentrales Beispiel wird durch die sogenannte *geometrische Reihe* geliefert.

**Lemma 8.8 (Geometrische Reihe)** *Es sei  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper mit archimedisch angeordnetem Bewertungskörper  $\mathbb{K}_0$ . Ist dann  $q \in \mathbb{K}$  mit  $|q| < 1$  gegeben, so gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

*Beweis.* Bezeichnet  $s_n$  die  $n$ -te Partialsumme der vorgelegten Reihe, so ist

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1},$$

also

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Nun ist  $\lim |q^{n+1}| = \lim |q|^{n+1} = 0$  nach Folgerung 7.10 und damit  $\lim q^{n+1} = 0$ . Der Rest erledigt sich mit dem algebraischen Satz 1.  $\square$

Eine weitere unmittelbare Folgerung aus Satz 1 ist

**Satz 8.9** *Es gelten für Reihen die folgenden Formeln :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} c a_j = c \sum_{j=0}^{\infty} a_j,$$

*sofern die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.*

## 8.4 Cauchy-Folgen und -Reihen

Wir wollen jetzt eine wichtige Eigenschaft konvergenter Folgen ableiten, zu deren Formulierung man die Kenntnis des *Grenzwertes* nicht benötigt. Wir werden sehen, daß diese *Verdichtungsbedingung* notwendig, i. a. aber nicht hinreichend ist. Die Definition der Vollständigkeit wird dann so getroffen, daß sie auch hinreicht.

*Definition.* Eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in einem normierten Vektorraum  $V$  heißt eine *CAUCHY-Folge*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt, so daß

$$\|a_j - a_k\| < \varepsilon \quad \text{für alle } j, k \geq N.$$

Eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  heißt eine *CAUCHY-Reihe* (besser: sie genügt dem *CAUCHY-Kriterium*), wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen eine Cauchy-Folge bildet, d. h.: zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , s. d. für alle  $n \geq m \geq N$  gilt:

$$\left\| \sum_{j=m}^n a_j \right\| < \varepsilon.$$

**Satz 8.10** *Konvergente Folgen und Reihen genügen der Cauchy-Bedingung. Eine Cauchy-Folge ist schon dann konvergent, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.*

*Beweis.* Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergent gegen  $a$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon/2)$  mit  $\|a_j - a\| < \varepsilon/2$  für alle  $j \geq N$ , und es ist für  $j, k \geq N$ :

$$\|a_j - a_k\| = \|(a_j - a) - (a_k - a)\| \leq \|a_j - a\| + \|a_k - a\| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für Reihen schließt man genauso, wenn man beachtet, daß für  $N < m \leq n$  gilt:

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{j=m}^n a_j.$$

Zum Nachweis der zweiten Aussage wähle man eine gegen  $a$  konvergente Teilfolge  $(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots)$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  findet man dann ein  $N$  mit

$$\|a_j - a_k\| < \varepsilon/2, \quad j, k \geq N$$

und

$$\|a_{j_\ell} - a\| < \varepsilon/2, \quad \ell \geq N.$$

Nun ist  $j_0 < j_1 < \dots$  und folglich  $j_\ell \geq \ell$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Es ergibt sich damit für alle  $\ell \geq N$ :

$$\|a_\ell - a\| \leq \|a_\ell - a_{j_\ell}\| + \|a_{j_\ell} - a\| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Korollar 8.11** In einer konvergenten Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  ist die Folge der Glieder  $(a_j)$  notwendig eine Nullfolge.

*Beweis.* Es ist  $a_j = s_j - s_{j-1}$ ,  $j \geq 1$ . □

*Warnung.* Das letzte Kriterium (aus dem Korollar) ist keineswegs hinreichend, da in jedem archimedisch angeordneten Körper die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*divergent*, also *nicht* konvergent ist, obwohl die Folge  $1/n$  der Glieder gegen Null konvergiert. Dies sieht man wie folgt: Man betrachte die Teilfolge der Partialsummen, die durch die folgende Klammerung entsteht:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots.$$

Dann ist jede Klammer größer oder gleich

$$2^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 2.$$

Ist nun  $K > 0$  und  $N \geq 2K$ , so ist mit Sicherheit

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{N-1}{2} = 1 + \frac{N}{2} > K,$$

also die Folge der Partialsummen unbeschränkt.

## 8.5 Klammern und Entklammern in Reihen

Da wir in dem vorstehenden Beispiel schon mit „Klammersetzen in Reihen“ argumentiert haben, wollen wir hier einige grundsätzliche Anmerkungen zu dieser Problematik einschieben. Wir starten mit einer (konvergenten oder divergenten) Reihe  $\sum_j a_j$  in einem normierten Vektorraum und bilden zu einer Teilfolge  $j_0 := 0 < j_1 < \dots$  der natürlichen Zahlen die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad b_n := a_{j_n} + a_{j_{n+1}} + \dots + a_{j_{n+1}-1},$$

die durch Klammersetzen aus der ursprünglichen Reihe entsteht:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = (a_0 + a_1 + \dots + a_{j_1-1}) + (a_{j_1} + a_{j_1+1} + \dots + a_{j_2-1}) + \dots.$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe  $\sum_n b_n$  ist eine Teilfolge der Folge der Partialsummen der Reihe  $\sum_j a_j$ . Somit ist die folgende Aussage unmittelbar klar.

**Lemma 8.12** *Durch Klammersetzen gewinnt man aus einer konvergenten Reihe wieder eine konvergente Reihe mit dem gleichen Grenzwert.*

Dagegen kann mit diesem Prozeß aus einer *divergenten* Reihe durchaus eine *konvergente* werden. Verschiedene Klammersetzungen können sogar zu verschiedenen Grenzwerten führen. Ein typisches Beispiel hierfür ist die (offensichtlich) divergente Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j$$

mit den konvergenten Klammerungen

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots = 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1.$$

Mit anderen Worten: Durch *Fortlassen* von Klammern kann aus einer konvergenten Reihe eine divergente werden!

Der anschließende Satz gibt Auskunft darüber, unter welchen Umständen das „Entklammern“ für die Konvergenz unerheblich ist.

**Satz 8.13** *Es seien die Reihen  $\sum_j a_j$  und  $\sum_n b_n$  wie oben gegeben. Ist dann die Reihe der  $b_n$  konvergent gegen  $s$  und ist überdies die Folge der*

$$B_n := \|a_{j_n}\| + \|a_{j_{n+1}}\| + \dots + \|a_{j_{n+1}-1}\|$$

*eine Nullfolge, so ist auch die Reihe der  $a_j$  konvergent gegen  $s$ . Dies ist zum Beispiel schon dann der Fall, wenn die Folge  $(a_j)$  der Reihenglieder gegen Null konvergiert und die Folge der „Klammerlängen“  $j_{n+1} - j_n$  beschränkt ist.*

*Beweis.* Es sei  $(t_m)$  die Folge der Partialsummen der Reihe  $\sum_n b_n$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $M$ , so daß  $\|t_m - s\| < \varepsilon/2$  für alle  $m \geq M - 1$ . Sei nun  $N \geq j_M$  so groß gewählt, daß auch  $B_n < \varepsilon/2$  für alle  $n \geq N$ . Zu  $k \geq N$  gibt es dann ein maximales  $M' \geq M$  mit  $k \geq j_{M'}$ , und die Partialsumme  $s_k$  der Reihe  $\sum_j a_j$  schreibt sich in der Form

$$s_k = t_{M'-1} + \beta_{M'},$$

wobei  $\beta_{M'}$  eine Teilsumme von  $b_{M'}$  ist. Hieraus folgt sofort die Behauptung: Für alle  $k \geq N$  gilt

$$\|s_k - s\| \leq \|t_{M'-1} - s\| + \|\beta_{M'}\| < \varepsilon/2 + B_{M'} = \varepsilon. \quad \square$$

## 8.6 Algebraische Eigenschaften von Cauchy - Folgen und Vollständigkeit

Wir wenden uns nun der Untersuchung der algebraischen Eigenschaften von *Cauchy-Folgen* zu. Fast wörtlich wie im Fall der konvergenten Folgen kann man die folgenden Aussagen über Cauchy-Folgen in normierten Vektorräumen beweisen. Wir überlassen die Ausführung der Leserin und dem Leser.

**Satz 8.14** 1. *Cauchy-Folgen sind beschränkt.*

2. *Summen von Cauchy-Folgen sind wieder Cauchy-Folgen.*

3. *Das Produkt einer Cauchy-Folge mit einer Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  ist wieder eine Cauchy-Folge.*

*Insbesondere bildet die Menge  $\mathcal{CF}_V$  der Cauchy-Folgen in  $V$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, der  $\mathcal{KF}_V$  als Untervektorraum enthält und seinerseits in dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{BF}_V$  der beschränkten Folgen enthalten ist.*

*Bemerkung.* Der Begriff der *Cauchy-Folge* läßt sich in jedem  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raum  $(X, d)$  einführen (nicht aber in beliebigen *topologischen* Räumen!). Die Folge  $(x_j)$  in  $X$  heißt dabei eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $d(x_j, x_k) < \varepsilon$  für alle  $j, k \geq N$ . Auch hier gilt:

1. Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

2. Cauchy-Folgen sind beschränkt.

3. Besitzt eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent, und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Intuitiv ist klar, daß die *Lückenlosigkeit* des Körpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen auch ihren Ausdruck darin finden sollte, daß jede Cauchy-Folge reeller Zahlen tatsächlich konvergiert. Diesen Wunsch kleiden wir in eine allgemeine Definition.

*Definition.* Ein angeordneter Körper (bewerteter Körper, normierter Vektorraum) heißt *vollständig* oder genauer *CAUCHY-vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Vollständige normierte  $\mathbb{R}$ - bzw.  $\mathbb{C}$ -Vektorräume nennt man auch *BANACH-Räume*.

*Beispiele.*  $\mathbb{R}$  ist (per definitionem) ein vollständig angeordneter Körper,  $\mathbb{Q}$  dagegen nicht, wie wir sogleich am Beispiel der Nichtexistenz von Wurzeln nachweisen werden.  $\mathbb{C}$  ist ein vollständig bewerteter Körper. Alle *endlich-dimensionalen* Vektorräume über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sind bzgl. beliebig vorgegebener Norm vollständig.

## 8.7 Existenz von Quadratwurzeln und Vollständigkeit

Der folgende Satz ist nicht so sehr im Hinblick auf die eben erwähnte Nichtexistenz von Wurzeln in  $\mathbb{Q}$ , sondern viel entscheidender für die *Existenz von Wurzeln* in  $\mathbb{R}$  bedeutsam.

**Satz 8.15** *Es seien  $a > 0$  und  $x_0 > 0$  Elemente in dem archimedisch angeordneten Körper  $\mathbb{K}$ . Dann ist die Folge*

$$x_{j+1} = \frac{1}{2} \left( x_j + \frac{a}{x_j} \right)$$

*wohldefiniert in  $\mathbb{K}$ . Sie genügt der Cauchy-Bedingung, und wenn sie konvergiert, so ist ihr Grenzwert die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung  $x^2 = a$ .*

**Folgerung 8.16** *In  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$  gibt es Cauchy-Folgen, die nicht (in  $\mathbb{Q}$ ) konvergieren.*

Man wähle z. B.  $a = 2$ .

*Beweis* von Satz 15. Aus der definierenden Gleichung  $x_{j+1} = \frac{1}{2} \left( x_j + \frac{a}{x_j} \right)$  und  $x_0 > 0$ ,  $a > 0$  folgt per Induktion  $x_j > 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(x_j)$  ist damit tatsächlich für alle  $j$  definiert und nach unten durch 0 beschränkt. Weiter ist

$$x_j - x_{j+1} = \frac{1}{2} \left( x_j - \frac{a}{x_j} \right) = \frac{1}{2x_j} (x_j^2 - a)$$

und

$$x_{j+1}^2 - a = \frac{1}{4} \left( x_j - \frac{a}{x_j} \right)^2 \geq 0,$$

also insbesondere die Teilfolge  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  monoton fallend. Da  $\mathbb{K}$  *archimedisch* angeordnet ist, schließt man, daß sie der Cauchy-Bedingung genügt (siehe Lemma 2 im folgenden Kapitel). Ist die Folge  $(x_j)$  in  $\mathbb{K}$  konvergent, so kann wegen

$$\frac{a}{x_j} = 2x_{j+1} - x_j, \quad a > 0$$

offensichtlich nicht  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$  gelten (und erst recht nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j < 0$  wegen  $x_j > 0$  für alle  $j$ ). Es ist also

$$\alpha := \lim x_j > 0.$$

Nach den Konvergenzregeln folgt dann

$$\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_j + \frac{a}{x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{a}{\alpha} \right),$$

also  $\alpha^2 = a$ . Damit haben wir unsere Behauptung bis auf die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. Die letztere läßt sich jedoch leicht einsehen: Es sei  $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$  und  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Dann folgt  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  aus  $0 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)$  wegen  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ .  $\square$

**Folgerung 8.17** *Ist der archimedisch angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  vollständig, so besitzt jede positive Zahl  $a$  eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel  $\sqrt{a}$ .*

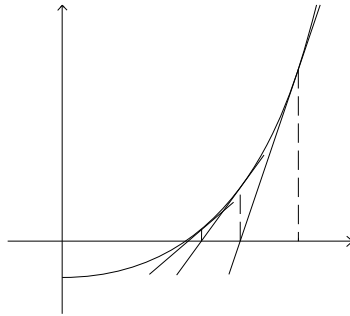
*Bemerkung.* Mit ganz ähnlichen Methoden kann man mittels der Folge

$$x_{j+1} := \frac{1}{p} \left( (p-1)x_j + \frac{a}{x_j^{p-1}} \right)$$

die Existenz der  $p$ -ten Wurzel ( $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ) der positiven Zahl  $a$  nachweisen. Wir deduzieren dieses Resultat im folgenden Kapitel noch einmal mit Hilfe des Prinzips der Intervallschachtelung und später sowohl mit dem *Supremumsprinzip* des reellen Zahlkörpers als auch mit dem *Zwischenwertsatz*. Hier zeigen wir nur, daß unter *Voraussetzung der Konvergenz* der obigen Folge sich der richtige Grenzwert einstellt. Hat man nämlich Konvergenz gegen  $\alpha > 0$ , so ist notwendig

$$\alpha = \frac{1}{p} \left( (p-1)\alpha + \frac{a}{\alpha^{p-1}} \right), \quad \text{d. h.} \quad \alpha^p = a.$$

*Bemerkung.* Die Folge  $(x_j)$  entspringt dem *NEWTON-Verfahren* für die Funktion  $x \mapsto x^p - a$ . (Siehe auch Kapitel 23).



Figur 8.1

*Bemerkung.* Das obige iterative Verfahren zur Berechnung von Wurzeln ist sehr effektiv, z. B. sogar fehlerkorrigierend (siehe weiter unten). Die Folge

$$\left( \frac{a}{x_j} \right)_{j \in \mathbb{N}^*}$$

ist (für  $p = 2$ ) ja auch monoton wachsend konvergent gegen  $\sqrt{a}$ , so daß also stets

$$\frac{a}{x_j} \leq \sqrt{a} \leq x_j, \quad j \geq 1.$$

So ist z. B. für  $a = 2$  und  $j = 4$ :

$$x_4 = 1,414213562\dots \quad \text{und ebenso für } \frac{2}{x_4}.$$

Damit ist auch  $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ . Man kann sogar noch genauere Aussagen machen. Ist

$$f_j = \frac{x_j - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \geq 0$$

der *relative Fehler* im  $j$ -ten Schritt, so ergibt sich aus dem Bildungsgesetz unmittelbar

$$f_{j+1} = \frac{1}{2} \frac{f_j^2}{1 + f_j} \leq \frac{1}{2} f_j^2.$$

Diese sogenannte „quadratische“ Konvergenz werden wir allgemein beim *NEWTON-Verfahren* (unter geeigneten Voraussetzungen an die zu untersuchende Funktion) und dem *BANACHschen Fixpunktsatz* wiederfinden.

*Bemerkung.* Mit „fehlerkorrigierend“ meint man das folgende: Begeht man bei der Berechnung von  $x_j$  einen Rechen- oder Rundungsfehler, so stört dies das Verfahren insofern nicht, als es mit diesem gerundeten Wert als neuem Startwert neu beginnen kann.

## 8.8 Folgenstetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen

Eine einfache Konsequenz aus den vorstehenden Ergebnissen ist der folgende Satz über die *Folgenstetigkeit von polynomialen und rationalen Funktionen* (die genaue Bedeutung der Begriffe „Folgenstetigkeit“ und „Stetigkeit“ und ihre Beziehung zueinander werden wir in Kapitel 11 erläutern).

**Satz 8.18** Es seien  $P$  und  $Q$  in  $\mathbb{K}[x]$  polynomiale Funktionen auf  $\mathbb{K}$ , und  $x_j, a \in \mathbb{K}$  (bzw.  $x_j, a \in \mathbb{K} \setminus W$ ,  $W$  eine endliche Menge, die die Nullstellen von  $Q$  umfaßt) seien derart gewählt, daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a.$$

Dann gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(x_j) = P(a) \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P(x_j)}{Q(x_j)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Neben den polynomialen Funktionen sind auch die auf  $\mathbb{R}_+$  definierten *Wurzelfunktionen*  $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , folgenstetig. An der Stelle  $a = 0$  ist dies sehr einfach zu begründen (den Allgemeinfall behandeln wir in Kapitel 11): Ist  $(x_j)$  eine Nullfolge positiver reeller Zahlen und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so wählt man  $\delta := \varepsilon^k$  und findet ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_j < \delta$  für alle  $j \geq N$ . Dann ist für diese  $j$  aber auch

$$|\sqrt[k]{x_j} - \sqrt[k]{0}| = \sqrt[k]{x_j} < \sqrt[k]{\delta} = \varepsilon.$$

*Bemerkung.* Es gilt somit für jede (insbesondere gegen Null) konvergente Folge *nicht negativer reeller Zahlen*  $(x_j)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_j} = \sqrt[k]{\lim_{j \rightarrow \infty} x_j} (= 0).$$

Beachtet man hierbei, daß man die Wurzeln reeller Zahlen durch einen Grenzprozeß erhalten kann, so handelt es sich bei dieser Formel um das *Vertauschen zweier Grenzprozesse*. Wir werden uns noch des öfteren mit der Frage konfrontiert sehen, unter welchen Umständen ein Vertauschen von zwei Limites gestattet ist, denn generell muß man hierbei sehr vorsichtig sein.

*Beispiele.* In der vorstehenden Form läßt sich die Folgenstetigkeit der Wurzeln an der Stelle 0 auch zur Berechnung von Grenzwerten verwenden. Wir behaupten zum Beispiel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n}\right)} \right) = \frac{a+b}{2}.$$

Hierbei sind im zweiten Fall  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen, und die betrachtete Folge ist nur für hinreichend große  $n$  definiert. Das erste Resultat läßt sich mit einem kleinen Trick ermitteln. Wegen

$$\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1}$$

und der Stetigkeit der Wurzeln ist der erste Limes tatsächlich gleich  $1/2$ . Bei der zweiten Folge führt derselbe Trick nach einigen Umformungen der Folgenglieder zu

$$\frac{a+b - \frac{ab}{n}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n}\right)}},$$

woraus man wieder den Grenzwert ablesen kann.

## 8.9 Archimedisch angeordnete Körper und $g$ -adische Entwicklungen

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die *archimedisch angeordneten* Körper  $\mathbb{K}$  einer intensiveren Untersuchung unterwerfen, die insbesondere ihre Stellung zum noch zu konstruierenden reellen Zahlkörper deutlich machen wird. Hierbei steht der (zumindest für  $g = 10$ ) aus der Schule bekannte Begriff der  *$g$ -adischen Brüche* im Vordergrund.

Wir formulieren die relevanten Aussagen ohne weitere Umschweife als Satz. Man beachte hierbei, daß  $\mathbb{K}$  als angeordneter Körper den rationalen Zahlkörper als angeordneten Unterkörper enthält.



**Satz 8.19** Für einen angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- i)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch.
- ii) Für jedes  $a \in \mathbb{K}$  mit  $|a| < 1$  gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} a^j = 0$ .
- iii) Für jede natürliche Zahl  $g \geq 2$  besitzt jedes positive Element  $a \in \mathbb{K}$  eine Darstellung ( $g$ -adische Bruch-Entwicklung)

$$a = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k g^{-k}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, g-1\} \subset \mathbb{N}.$$

- iv) Jedes Element  $a \in \mathbb{K}$  ist Limes einer in  $\mathbb{K}$  konvergenten Folge von rationalen Zahlen.
- v) In jedem Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{K}$  mit  $a < b$  gibt es Elemente von  $\mathbb{Q}$ .

**Zusatz** In iv) kann die Folge rationaler Zahlen sogar monoton aufsteigend gewählt werden.

*Beweis.* Die Implikation i)  $\implies$  ii) haben wir schon weiter oben als Folgerung 7.10 notiert.

ii)  $\implies$  iii) Wegen  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{-j} = 0$  ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^j = \infty$ . Also gibt es zu vorgegebenem  $a > 0$  eine eindeutig bestimmte ganze Zahl  $\ell$  mit  $g^{-\ell} \leq a < g^{-\ell+1}$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $a_\ell \in \{1, \dots, g-1\}$ , so daß auch  $a_\ell g^{-\ell} \leq a < (a_\ell + 1)g^{-\ell} \leq g^{-\ell+1}$  und also

$$0 \leq a - a_\ell g^{-\ell} < g^{-\ell}.$$

Ist  $a^{(1)} := a - a_\ell g^{-\ell} = 0$ , so sind wir schon fertig. Im anderen Fall gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $k > \ell$  mit  $g^{-k} \leq a^{(1)} < g^{-k+1}$  und ein Element  $a_k \in \{1, \dots, g-1\}$ , so daß  $a_k g^{-k} \leq a^{(1)} < (a_k + 1)g^{-k} \leq g^{-k+1}$  und damit

$$0 \leq a^{(2)} := a^{(1)} - a_k g^{-k} = a - (a_\ell g^{-\ell} + a_k g^{-k}) < g^{-k}.$$

Induktiv fortfahrend gewinnt man die gewünschte  $g$ -adische Bruchentwicklung, die nach Konstruktion und der Voraussetzung ii) gegen  $a$  konvergiert.

iii)  $\implies$  iv) Man braucht für positive  $a$  nur die Partialsummen einer  $g$ -adischen Entwicklung zu wählen. Für negative  $a$  betrachtet man die Entwicklung für  $-a$ .

iv)  $\implies$  v) Der Mittelpunkt  $m := (a + b)/2$  des Intervalls  $[a, b]$  erfüllt  $a < m < b$ . Da  $m$  beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert werden kann, gibt es Elemente  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $a < q < b$ .

v)  $\implies$  i) Es sei  $K \in \mathbb{K}$  eine beliebige (positive) Schranke. Dann gibt es eine positive rationale Zahl  $q = n/m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}^*$  mit  $K < q < K + 1$ . Es folgt  $K < q \leq n$ .

Es bleibt noch der Zusatz zu iv) zu begründen. Für positive Elemente  $a$  ist die Behauptung aufgrund des Beweises klar. Ist  $a$  negativ, so gibt es, weil  $\mathbb{K}$  schon als archimedisch erkannt ist, eine natürliche Zahl  $n$  mit  $-a < n$ . Also ist  $a + n$  positiv und damit aufsteigender Limes von rationalen Zahlen. Dies ist dann auch für  $a$  richtig.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen wird gerade aus *allen* solchen Reihen (und ihren Negativen) bestehen. Von daher ist klar (was im nächsten Kapitel genauer ausgeführt wird), daß jeder archimedisch angeordnete Körper in den Körper  $\mathbb{R}$  ordnungstreu als Unterkörper eingebettet werden kann und daß der Körper  $\mathbb{R}$  (bis auf ordnungserhaltende Körper-Isomorphie) eindeutig bestimmt ist.

2. Die Aussagen iv) und v) umschreibt man auch mit den Worten, daß der Körper der rationalen Zahlen *dicht* in jedem archimedisch angeordneten Körper liegt. Dies steht in Übereinstimmung mit der Definition einer *dichten* Teilmenge eines metrischen Raumes, die in Kapitel 7 gegeben wurde.

Wir fügen noch eine *Abzählbarkeitsaussage* als Konsequenz aus dem vorigen Satz an.

**Satz 8.20** Ist  $\mathbb{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper, so ist für jedes offene Intervall  $I = (a, b) \subset \mathbb{K}$  mit  $a < b$  der Durchschnitt  $I \cap \mathbb{Q}$  abzählbar (und damit  $I$  selbst immer unendlich).

*Beweis.* Als Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  ist der (wegen des vorstehenden Satzes nicht leere) Durchschnitt  $I \cap \mathbb{Q}$  höchstens abzählbar.  $I \cap \mathbb{Q}$  enthält aber auch abzählbar unendlich viele Elemente  $a_0 < a_1 < \dots$ . Hat man nämlich die (endliche) aufsteigende Folge  $a_0, \dots, a_k$  in  $I \cap \mathbb{Q}$  schon konstruiert, so ist  $a_k < b$  und damit  $(a_k, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ .  $\square$

Eine  $g$ -adische Bruchentwicklung iii) ist insbesondere für jede rationale Zahl möglich. Es ist wohlbekannt, daß genau die schließlich periodischen Entwicklungen die rationalen Zahlen darstellen. Hierbei heißt ein solcher Bruch

$$a = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k g^{-k}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, g-1\} \subset \mathbb{N},$$

schließlich periodisch, wenn es ganze Zahlen  $m \geq \ell$  und  $n \geq 1$  gibt mit

$$a_{k+n} = a_k \text{ für alle } k \geq m.$$

Ein minimales  $n$  mit dieser Eigenschaft nennt man die *Periode* der Entwicklung.

**Satz 8.21** Ist  $\mathbb{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper, so ist ein positives Element  $a \in \mathbb{K}$  genau dann eine rationale Zahl, wenn für ein  $g$  eine der  $g$ -adischen Entwicklungen schließlich periodisch ist. Dies ist dann sogar richtig für alle  $g$  und jede der (im wesentlichen eindeutig bestimmten)  $g$ -adischen Entwicklungen.

Zur Bequemlichkeit des Lesers fügen wir den leichten *Beweis* an.

1. Es sei zunächst  $a$  ein Element mit einer schließlich periodischen Entwicklung. Dann haben wir mit den rationalen Zahlen

$$b = \sum_{k=\ell}^{m-1} a_k g^{-k}, \quad c = \sum_{k=m}^{m+n-1} a_k g^{-k}$$

die durch Klammern in der ursprünglichen Reihe entstehende Entwicklung  $a = b + c + cg^{-n} + cg^{-2n} + \dots$ ; also ist aufgrund der Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$a = b + c \sum_{j=0}^{\infty} (g^{-n})^j = b + c \frac{1}{1 - g^{-n}} \in \mathbb{Q}.$$

2. Es sei umgekehrt  $a = p/q$  eine positive rationale Zahl in  $\mathbb{K}$  und  $g \geq 2$  eine fest vorgegebene natürliche Zahl. Ohne Einschränkung sei  $a < 1$ , also  $p < q$ . Wir führen nun sukzessive den folgenden Prozeß mit Hilfe der euklidischen Division nach  $q$  mit Rest aus:

$$\begin{aligned} p &= 0 \cdot q + r_1, & 0 \leq r_1 < q, \\ gr_1 &= a_1 \cdot q + r_2, & 0 \leq r_2 < q, \\ \dots & \dots \dots & \dots \dots \\ gr_k &= a_k \cdot q + r_{k+1}, & 0 \leq r_{k+1} < q \end{aligned}$$

etc.. Nach Konstruktion ist klar, daß die nichtnegativen Zahlen  $a_k$  kleiner als  $g$  sind und  $0, a_1 a_2 a_3 \dots$  eine  $g$ -adische Entwicklung von  $a$  darstellt. Nun können die Reste  $r_k$  aber nur die endlich vielen Werte 0 bis  $g-1$  annehmen. Infolgedessen gibt es natürliche Zahlen  $m, n \geq 1$  mit  $r_m = r_{m+n}$ , und hieraus folgt sofort die schließlich periodische Entwicklung.

3. Es ist unmittelbar klar, daß es stets eine  $g$ -adische Entwicklung gibt, die nicht schließlich periodisch ist mit der Periode 1 und  $a_k = g-1$  für große  $k$ . Denn es ist ja

$$(g-1) \sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} = (g-1) \frac{1}{1-g^{-1}} = g.$$

Eine solche Entwicklung ist sogar, wie man leicht sieht, eindeutig bestimmt. Die Mehrdeutigkeit der  $g$ -adischen Entwicklung ist also völlig überschaubar. Insbesondere ändert sie überhaupt nichts an ihrer schließlichen Periodizität.  $\square$

## Anhang: Der allgemeine Vervollständigungssatz

Es sei  $\mathbb{K}_0$  ein angeordneter Körper und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{K}_0$  eine Metrik auf der Menge  $X$ . I. a. braucht  $X$  nicht vollständig zu sein in dem Sinne, daß jede Cauchy-Folge in  $X$  gegen einen Punkt  $a \in X$  konvergiert. Wir wollen i. f. auf einheitliche Weise eine „Vervollständigung“  $\tilde{X}$  von  $X$  zusammen mit einer Vervollständigung  $\tilde{\mathbb{K}}_0$  von  $\mathbb{K}_0$  und eine Fortsetzung  $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}_0$  der Metrik konstruieren.

Es bezeichne zu diesem Zwecke in diesem Anhang  $\mathcal{C}_X$  die Menge der CAUCHY-Folgen (manchmal auch *Fundamentalfolgen* genannt) in  $X$  bzgl.  $d$ ; eine Folge  $\xi = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Elementen in  $X$  ist also ein Element von  $\mathcal{C}_X$  genau dann, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $d(x_j, x_k) < \varepsilon$  für alle  $j, k \geq N$ . (Man beachte, daß wir weiter oben auch  $\mathcal{CF}_X$  anstelle von  $\mathcal{C}_X$  geschrieben haben).

*Bemerkung.* Ist  $X = \mathbb{K}$  ein bewerteter Körper mit dem angeordneten Körper  $\mathbb{K}_0$  als Bewertungskörper, z. B. also  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$  mit dem Betrag als Bewertung, so definiert die Bewertung  $|\cdot|$  eine Metrik auf  $\mathbb{K}$ :

$$d(x, y) := |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{K},$$

für die  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  genau aus den Cauchy-Folgen in  $\mathbb{K}$  besteht. Entsprechend hat man unter der vorigen Voraussetzung für einen normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  die durch die Norm erklärte Metrik

$$d(v, w) := \|v - w\|, \quad v, w \in V.$$

In all diesen Fällen ist die Vervollständigung bzgl. dieser speziellen Metrik gemeint.

Ist der metrische Raum  $X$  *vollständig*, so kann man ihn als Menge im wesentlichen mit dem Raum  $\mathcal{C}_X$  seiner Cauchy-Folgen „identifizieren“. Man hat in diesem Falle ja die kanonische Abbildung, die jeder Cauchy-Folge ihren Grenzwert zuordnet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_X \longrightarrow X \\ \xi = (x_j) \longmapsto \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \end{array} \right.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da jedes Element  $x \in X$  Grenzwert der *konstanten* Folge  $x_j := x$  ist. Selbstverständlich ist sie i. A. nicht injektiv. Man macht sich sofort klar, daß zwei Folgen  $\xi'$  und  $\xi''$  genau dann dasselbe Bild haben, also denselben Grenzwert besitzen, wenn die Folge  $d(x'_j, x''_j)$  in  $\mathbb{K}_0$  gegen Null konvergiert. Somit ist tatsächlich  $X$  bijektiv zu dem Raum der Restklassen von  $\mathcal{C}_X$  modulo der hierdurch vermittels der Metrik  $d$  definierten Äquivalenzrelation.

Ist der Raum nicht vollständig, so gibt es Cauchy-Folgen, die nicht konvergent sind. In einer wie auch immer gearteten „Vervollständigung“ sollten sie aber konvergieren. Es ist daher völlig natürlich, diese Folgen selbst (in geeigneter Weise) zu dem Raum  $X$  hinzuzunehmen. Dies kann nun genau wie im vorigen Abschnitt geschehen, da der dort betrachtete Restklassenraum für beliebige metrische Räume konstruiert werden kann.

**Lemma 8.22** *Ist  $(X, d)$  ein  $\mathbb{K}_0$ -metrischer Raum, so wird auf  $\mathcal{C}_X$  durch*

$$\xi \sim_d \eta \iff d(x_j, y_j) \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbb{K}_0, \quad \xi = (x_j), \eta = (y_j),$$

*eine Äquivalenzrelation erklärt.*

*Beweis.* Die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation ergeben sich sofort aus  $d(x_j, x_j) = 0$ ,  $d(y_j, x_j) = d(x_j, y_j)$ ,  $0 \leq d(x_j, z_j) \leq d(x_j, y_j) + d(y_j, z_j)$ .  $\square$

*Definition.* Die *Vervollständigung*  $\tilde{X}$  des  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Raumes  $(X, d)$  wird (als Menge) definiert durch

$$\tilde{X} := \mathcal{C}_X / \sim_d.$$

**Lemma 8.23** *Es gibt eine kanonische Injektion  $X \hookrightarrow \tilde{X}$ , bzgl. der wir  $X$  als Teilmenge von  $\tilde{X}$  auffassen können:  $X \subset \tilde{X}$ .  $X$  ist genau dann vollständig, wenn diese Abbildung bijektiv ist.*

*Beweis.* Wir ordnen wie oben  $x \in X$  die konstante Folge  $(x_j = x) \in \mathcal{C}_X$  zu und schreiben  $\tilde{x}$  für die Restklasse in  $\tilde{X}$ . Es ist  $\tilde{x} = \tilde{y}$  genau dann, wenn  $d(x, y) = 0$ , also  $x = y$ . Die letzte Behauptung wurde oben schon gezeigt.  $\square$

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent zum selben Limes. Damit unsere obigen Vorstellungen Bestand haben, sollte jede Teilfolge einer Cauchy-Folge denselben Punkt wie die Ursprungsfolge in  $\tilde{X}$  ergeben. Dies ist tatsächlich der Fall:

**Lemma 8.24** *Eine Cauchy-Folge  $(x_j)$  ist zu jeder ihrer Teilfolgen  $(x_{n_j})$  äquivalent.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist bei vorgegebenem positivem  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$  der Abstand  $d(x_j, x_k) < \varepsilon$  für alle  $j, k \geq N = N(\varepsilon)$ . Für die Teilfolge, die automatisch die Cauchy-Eigenschaft erbt, ist  $n_j \geq j$  für alle  $j$  und damit  $d(x_j, x_{n_j}) < \varepsilon$  für alle  $j \geq N$ .  $\square$

Man gewinnt aus diesem Ergebnis noch einmal die uns für Folgen in angeordneten Körpern schon bekannte Tatsache:

**Folgerung 8.25** *Besitzt eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent, und beide Grenzwerte stimmen überein.*

*Beweis.* Ist  $a$  der Grenzwert der Teilfolge, so ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Abschätzung  $d(x_j, a) \leq d(x_j, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, a)$ .  $\square$

Als nächstes müssen wir uns darum bemühen, den Nachweis zu erbringen, daß sich alle relevanten Strukturen auf die Vervollständigungen ausdehnen lassen. Als erstes betrachten wir einen (angeordneten oder bewerteten) Körper  $\mathbb{K}$  und konstruieren auf  $\tilde{\mathbb{K}}$  eine mit  $\mathbb{K}$  kompatible *Körperstruktur*.

Offensichtlich ist die Summe

$$\xi + \eta = (x_j + y_j), \quad \xi = (x_j), \eta = (y_j)$$

von Cauchy-Folgen wieder ein Element in  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ . Wir haben früher bewiesen, daß Cauchy-Folgen beschränkt sind. Aus der Ungleichung

$$(\times) \quad |x_j y_j - x_k y_k| \leq |x_j| |y_j - y_k| + |x_j - x_k| |y_k|$$

folgt dann auch  $\xi \cdot \eta := (x_j y_j) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ . - Es folgt

**Satz 8.26**  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  ist ein kommutativer Ring bzgl. der Addition und Multiplikation von Cauchy-Folgen.  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  ist sogar ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum vermöge  $c\xi = c(x_j) = (cx_j)$ , also eine  $\mathbb{K}$ -Algebra.

Wir müssen uns weiter davon überzeugen, daß unsere Äquivalenzrelation mit dieser algebraischen Struktur verträglich ist und der Restklassenring tatsächlich die Axiome eines Körpers erfüllt. Dazu formulieren wir die obige Äquivalenzrelation im Falle eines bewerteten Körpers  $\mathbb{K}$  um:

$$\begin{aligned} (x_j) \sim_d (y_j) &\iff |x_j - y_j| \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbb{K}_0 \\ &\iff x_j - y_j \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Es sei  $\mathcal{N}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  die Menge der Nullfolgen. Da die Summe von Nullfolgen und das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten (insbesondere Cauchy-) Folge wieder Nullfolgen sind, wie man erneut mit  $(\times)$  sieht, erhalten wir sofort die Aussagen des folgenden Satzes.

**Satz 8.27**  $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$  ist ein Ideal in  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ ; insbesondere trägt  $\tilde{\mathbb{K}} = \mathcal{C}_{\mathbb{K}}/\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$  die Struktur eines kommutativen Ringes mit 1. Die Einbettung  $\mathbb{K} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}$  ist ein Ringhomomorphismus.  $\tilde{\mathbb{K}}$  ist sogar ein Körper, und  $\mathbb{K}$  ist ein Unterkörper von  $\tilde{\mathbb{K}}$ . Es gilt  $\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{K}}$  genau dann, wenn  $\mathbb{K}$  vollständig ist.

*Beweis.* Nur die Aussage, daß  $\tilde{\mathbb{K}}$  einen Körper bildet, bedarf einer Begründung. Es sei  $\xi = (x_j) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ , und  $\tilde{\xi}$  sei nicht das Nullelement in  $\tilde{\mathbb{K}}$ , d. h. der Repräsentant  $(x_j)$  ist *keine* Nullfolge. Da wir wegen Lemma 24 zu Teilfolgen übergehen dürfen, können wir annehmen, daß es ein  $\varepsilon_0 > 0$  gibt mit  $|x_j| \geq \varepsilon_0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $\left(y_j = \frac{1}{x_j}\right)$  ist dann ebenfalls eine Cauchy-Folge wegen

$$|y_j - y_k| = \left| \frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_k} \right| = \frac{|x_j - x_k|}{|x_j||x_k|} \leq K|x_j - x_k|, \quad K = \varepsilon_0^{-2},$$

und wegen  $x_j y_j = 1$  ist  $\tilde{\xi} \cdot \tilde{\eta} = 1$  in  $\tilde{\mathbb{K}}$  mit  $\eta = (y_j)$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ein kommutativer Ring  $R$  mit 1 ist genau dann ein Körper, wenn  $R$  nur die trivialen Ideale  $0 \cdot R$  und  $R = 1 \cdot R$  besitzt. Daraus folgt sofort, daß der Quotient  $R/\mathfrak{a}$  nach einem Ideal  $\mathfrak{a}$  genau dann ein Körper ist, wenn dieses echt in  $R$  enthalten und *maximal* ist, d. h. ist  $\mathfrak{b}$  ein weiteres Ideal von  $R$  mit  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ , so ist  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$  oder  $\mathfrak{b} = R$ . Die obige Aussage ist also gleichwertig zu dem Satz, daß das Ideal  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  maximal ist.

Ist nun der Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$  zusätzlich angeordnet, so müssen wir auf seiner Vervollständigung  $\tilde{\mathbb{K}}$  eine Anordnung finden, die die gegebene Anordnung fortsetzt. Dies ist tatsächlich auf genau eine Weise möglich. Zur Vorbereitung nehmen wir an, daß  $\mathbb{K}_0$  schon vollständig ist, also  $\tilde{\mathbb{K}}_0 = \mathbb{K}_0$  gilt. Dann repräsentiert eine Cauchy-Folge  $(x_j)$  eine *positive* Zahl  $x \in \mathbb{K}_0$ , d. h. konvergiert gegen eine solche, wenn es ein  $\varepsilon_0 > 0$  gibt, so daß fast alle Folgenglieder größer oder gleich  $\varepsilon_0$  bleiben. Daß dies auch im Allgemeinfall eine vernünftige Bedingung ist, wird eine Konsequenz aus dem folgenden Lemma sein. Wir bezeichnen die Bedingung der Kürze halber für einen kurzen Moment mit (+).

**Lemma 8.28** *Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$  ein angeordneter Körper. Dann sind für Elemente  $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathbb{K}}$  die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) *Es gibt einen Repräsentanten  $(x_j) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$  von  $\tilde{\xi}$ , der (+) erfüllt ;*
- ii) *alle Repräsentanten von  $\tilde{\xi}$  erfüllen (+) .*

*Beweis.* Es sei (+) für den Repräsentanten  $(x_j)$  mit  $\varepsilon_0$  erfüllt, und  $(y_j)$  sei ein weiterer Repräsentant. Dann ist für hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$  der Betrag von  $x_j - y_j$  kleiner als  $\varepsilon_0/2$  für alle  $j \geq N$  und damit auch  $y_j \geq \varepsilon_0/2$  für fast alle  $j$ .  $\square$

Wir geben nun die folgende

*Definition.* Es sei  $\tilde{P} \subset \tilde{\mathbb{K}}$  die Menge aller Elemente, die einen Repräsentanten mit (+) besitzen.

Es ist zu zeigen, daß  $\tilde{P}$  ein *Positivitätsbereich* ist und die damit definierte Anordnung diejenige von  $\mathbb{K}$  fortsetzt. Mit anderen Worten:

**Satz 8.29**  *$\tilde{P}$  induziert eine Anordnung auf  $\tilde{\mathbb{K}}$ , die diejenige von  $\mathbb{K}$  fortsetzt.  $\tilde{\mathbb{K}}$  ist genau dann archimedisch angeordnet, wenn dies für  $\mathbb{K}$  der Fall ist.*

*Beweis.* Die Null in  $\tilde{P}$  wird von der trivialen Folge  $x_j = 0$  repräsentiert und liegt deshalb weder in  $\tilde{P}$  noch in  $-\tilde{P}$ . Ebenso klar ist  $\tilde{P} \cap (-\tilde{P}) = \emptyset$ . Also ist die Vereinigung  $\tilde{P} \cup \{0\} \cup (-\tilde{P})$  disjunkt. Es ist noch zu zeigen, daß jedes Element von  $\tilde{\mathbb{K}}$  in einer dieser drei Mengen liegt. Sei dieses nicht das Nullelement; dann wird es repräsentiert durch eine Cauchy-Folge  $(x_j)$ , die keine Nullfolge ist. Wie im Beweis zu Satz 27 sieht man, daß es eine Teilfolge, also nach Lemma 24 einen anderen Repräsentanten  $x'_j$  des Elementes gibt, so daß für diesen oder sein Negatives die Bedingung (+) erfüllt ist.

Der Nachweis für die Inklusionen  $\tilde{P} + \tilde{P} \subset \tilde{P}$  und  $\tilde{P} \cdot \tilde{P} \subset \tilde{P}$  ist reine Routine; somit ist  $\tilde{P}$  ein Positivitätsbereich auf  $\tilde{\mathbb{K}}$ . Die Fortsetzungseigenschaft bedeutet einfach, daß  $\tilde{P} \cap \mathbb{K} = P$ . Da man Elemente in  $\mathbb{K} \subset \tilde{\mathbb{K}}$  durch konstante Folgen repräsentieren kann, ist die Aussage evident.  $\square$

Wir wollen noch zeigen, daß die gewählte Fortsetzung der Anordnung die einzig mögliche ist. Hierzu benutzen wir, daß der Körper  $\mathbb{K}$  *dicht* in  $\tilde{\mathbb{K}}$  liegt. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem nachstehenden präziseren und allgemeineren Ergebnis.

**Satz 8.30** Zu jedem positiven  $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{\mathbb{K}}$  gibt es ein  $\varepsilon \in \mathbb{K}$  mit  $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ . Wird das Element  $\xi \in \tilde{\mathbb{K}}$  durch die Cauchy-Folge  $(x_j)$  repräsentiert, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi,$$

wobei die Elemente  $x_k \in \mathbb{K}$  in der üblichen Weise als Elemente in  $\tilde{\mathbb{K}}$  aufzufassen sind.

*Beweis.* Nach Voraussetzung wird  $\tilde{\varepsilon}$  repräsentiert durch eine Cauchy-Folge  $(\varepsilon_j)$  mit  $\varepsilon_j \geq 2\varepsilon$  für ein geeignetes positives Element  $\varepsilon \in \mathbb{K}$ . Nach Definition ist  $\tilde{\varepsilon} - \varepsilon > 0$ .

Zum Beweis der Konvergenzaussage können wir uns daher auf die Betrachtung von positiven  $\varepsilon \in \mathbb{K}$  beschränken. Zu einer solchen Zahl gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_j - x_k| < \varepsilon/2$  für alle  $j, k \geq N$ . Dies impliziert für diese  $j$  und  $k$ :

$$x_j - x_k + \varepsilon > \varepsilon/2.$$

Per definitionem bedeutet das bei festgehaltenem  $k \geq N$ , daß

$$\xi - x_k + \varepsilon > 0, \text{ also } \xi - x_k > -\varepsilon.$$

Durch Vertauschen der Rollen von  $j$  und  $k$  ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Diese *Dichtheitseigenschaft* von  $\mathbb{K}$  in  $\tilde{\mathbb{K}}$  hat mannigfache Konsequenzen. Wir beginnen mit der einfachen

**Folgerung 8.31** Der Körper  $\tilde{\mathbb{K}}$  ist genau dann archimedisch angeordnet bzw. besitzt genau dann nichttriviale Nullfolgen, wenn die entsprechende Eigenschaft auf  $\mathbb{K}$  zutrifft.

*Beweis.* In Bezug auf das Archimedische Axiom ist eine Richtung trivial: Ist  $\mathbb{K}$  nichtarchimedisch, also die Folge der natürlichen Zahlen in  $\mathbb{K}$  beschränkt, so gilt dies erst recht in  $\tilde{\mathbb{K}}$ . Ist umgekehrt  $\mathbb{K}_0$  archimedisch angeordnet und sind  $0 < \xi, \tilde{\eta}$  vorgegeben, so wähle ein  $\varepsilon \in \mathbb{K}$  mit  $0 < \varepsilon < \xi\tilde{\eta}^{-1}$  und eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n\varepsilon > 1$ . Dann ist  $n\xi > \tilde{\eta}$ . Besitzt  $\mathbb{K}$  eine nichttriviale Nullfolge  $(\varepsilon_j)$ , so gibt es zu vorgegebenem  $\tilde{\varepsilon} > 0$  in  $\tilde{\mathbb{K}}$  ein kleineres positives  $\varepsilon \in \mathbb{K}$  und damit ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|\varepsilon_j| < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$  für alle  $j \geq N$ . Ist umgekehrt  $(\tilde{\varepsilon}_j)$  eine nichttriviale Nullfolge in  $\tilde{\mathbb{K}}$ , so gibt es nach der zweiten Aussage im vorstehenden Satz Elemente  $\varepsilon_j \in \mathbb{K}$  mit  $|\tilde{\varepsilon}_j|/2 \leq \varepsilon_j \leq 3|\tilde{\varepsilon}_j|/2$ ; diese bilden eine nichttriviale Nullfolge in  $\mathbb{K}$ .  $\square$

Überraschenderweise stellen wir nun fest, daß angeordnete Körper, die nur triviale konvergente Folgen besitzen, vollständig sind (was wir im Fall der nonstandard reellen Zahlen noch einmal im Anhang zu Kapitel 9 begründen werden). Man mag solche Körper von daher generell als ungeeignet für die Analysis ansehen, was aber zu kurzichtig wäre. Stattdessen sollte man in diesen Fällen den Begriff der Cauchy-Vollständigkeit aufgeben zugunsten eines Vollständigkeitsbegriffes, der auf Filtern statt auf Folgen basiert (siehe den Anhang zu Kapitel 7).

**Folgerung 8.32** Angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  ohne nichttriviale Nullfolgen sind vollständig: es gilt stets  $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ .

*Beweis.* Jede Cauchy-Folge  $(a_j)$  in  $\mathbb{K}$  gibt Anlaß zu einem Element in  $\tilde{\mathbb{K}}$ , das Grenzwert der Folge  $a_j$  ist. Da mit  $\mathbb{K}$  auch  $\tilde{\mathbb{K}}$  keine nichttrivialen Nullfolgen besitzt, ist die Ursprungsfolge schließlich konstant, also konvergent.  $\square$

*Definition.* Es sei ein angeordneter Körper  $\mathbb{K}$  gegeben. Ein angeordneter Oberkörper  $\mathbb{L}$  von  $\mathbb{K}$  heißt ein *vollständiger Abschluß* von  $\mathbb{K}$ , wenn  $\mathbb{L}$  vollständig ist und  $\mathbb{K}$  dicht in  $\mathbb{L}$  liegt.

Besitzt der Körper  $\mathbb{K}$  keine nichttrivialen Nullfolgen, so ist  $\mathbb{L} = \mathbb{K}$  eine solche vollständige Hülle. Wir machen uns daher in diesem Fall keine weitere Gedanken, ob noch andere vollständige Hüllen existieren. (Verlangen wir statt der Dichtheit von  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{L}$ , daß jedes Element in  $\mathbb{L}$  Grenzwert einer Folge in  $\mathbb{K}$  ist, was ja auch für die Vervollständigung  $\tilde{\mathbb{K}}$  richtig ist, so sieht man leicht ein, daß im vorliegenden Fall nur  $\mathbb{L} = \mathbb{K}$  in Frage kommt. Allerdings ist ebenso leicht zu verifizieren, daß mit  $\mathbb{K}$  auch  $\mathbb{L}$  keine nichttrivialen Nullfolgen besitzen kann, so daß Dichtheit a priori eine schwächere Bedingung als „Folgendichtheit“ bedeutet).

In dem uns zentral interessierenden Fall gibt es jedoch eine befriedigende Antwort.

**Satz 8.33** *Besitzt der Körper  $\mathbb{K}$  die Eigenschaft (\*), so ist jede Hülle  $\mathbb{L}$   $\mathbb{K}$ -isomorph zu  $\widetilde{\mathbb{K}}$ .*

*Beweis.* Da  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{L}$  dicht liegt, liegen Elemente von  $\mathbb{K}$  in dem Intervall  $(0, \tilde{\varepsilon})$  für positives  $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{L}$ . Wie im Beweis zu Folgerung 31 sieht man sofort, daß mit  $\mathbb{K}$  auch  $\mathbb{L}$  nichttriviale Nullfolgen besitzt und jedes Element in  $\mathbb{L}$  Grenzwert einer Folge in  $\mathbb{K}$  ist. Dies ist dann eine Cauchy-Folge, die somit ein Element in  $\widetilde{\mathbb{K}}$  definiert, und die Zuordnung ist unabhängig von der Auswahl der Folge. Die resultierende Abbildung  $\mathbb{L} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}}$  ist selbstverständlich ein Körper-Homomorphismus, der auf  $\mathbb{K}$  die Identität darstellt, also nicht trivial und somit injektiv ist. Außerdem respektiert er automatisch die Anordnung. Somit bleibt nur noch die Surjektivität zu beweisen. Nun wird aber jedes Element in  $\widetilde{\mathbb{K}}$  durch eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  repräsentiert, die (wegen der Dichtheit von  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{L}$ ) auch eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{L}$  bildet und damit dort konvergiert. Der Grenzwert wird unter dem oben konstruierten Homomorphismus auf das vorgegebene Element in  $\widetilde{\mathbb{K}}$  abgebildet.  $\square$

*Bemerkung.* Wir haben somit gezeigt, daß es bis auf Isomorphie höchstens eine vollständige Hülle geben kann. Zum Nachweis, daß es auch tatsächlich eine solche gibt, müssen wir noch die Vollständigkeit von  $\widetilde{\mathbb{K}}$  zeigen. Dies wird am Ende dieses Kapitels in dem allgemeineren Rahmen der Vervollständigung von  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Räumen ausgeführt.

Zuvor wollen wir jedoch erst noch *bewertete* Körper und normierte Vektorräume über solchen Körpern genauer betrachten. Für einen bewerteten Körper  $\mathbb{K}$  mit Wertekörper  $\mathbb{K}_0$  sollte es möglich sein, der Vervollständigung  $\widetilde{\mathbb{K}}$  die Struktur eines bewerteten Körpers mit Werten in  $\widetilde{\mathbb{K}_0}$  aufzuprägen. Entsprechendes sollte uns für  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V$  mit einer Norm mit Werten in  $\mathbb{K}_0$  gelingen. - Wir erinnern zunächst an die Definition.

*Definition.* Eine *Norm* auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{K}_0$  mit den Eigenschaften:

- i)  $\|v\| \geq 0$  und  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ .
- ii)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ .
- iii)  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ .

Der Beweis der folgenden beiden Sätze kann weitgehend parallel vonstatten gehen.

**Satz 8.34** *Ist  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper, so besitzt sein Oberkörper  $\widetilde{\mathbb{K}}$  eine Bewertung mit Werten in  $\widetilde{\mathbb{K}_0}$ , die die Bewertung von  $\mathbb{K}$  fortsetzt. Wird das Element  $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{K}}$  durch die Cauchy-Folge  $(x_j)$  in  $\mathbb{K}$  repräsentiert, so gilt bzgl. dieser fortgesetzten Bewertung*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \tilde{x}.$$

**Satz 8.35** *Es sei  $\widetilde{V}$  die Vervollständigung des normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  mit Norm  $\|v\| \in \mathbb{K}_0$ . Dann läßt sich auf  $\widetilde{V}$  die Struktur eines  $\widetilde{\mathbb{K}}$ -Vektorraumes mit Norm in  $\widetilde{\mathbb{K}_0}$  erklären, so daß gilt:*

- a)  $V$  ist ein Untervektorraum von  $\widetilde{V}$ , aufgefaßt als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.
- b) Die Norm auf  $\widetilde{V}$  ist eine Fortsetzung der Norm auf  $V$ .

Wird das Element  $\tilde{v} \in \widetilde{V}$  durch die Cauchy-Folge  $(v_j)$  in  $V$  repräsentiert, so gilt bzgl. der fortgesetzten Norm:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = \tilde{v}.$$

*Beweis.* Wir geben nur die wichtigsten Schritte an. Da mit  $(v_j) \in \mathcal{C}_V$  auch  $c(v_j) = (cv_j)$ ,  $c \in \mathbb{K}$ , eine Cauchy-Folge ist und entsprechendes für Nullfolgen und konvergente Folgen gilt, erhält man sofort eine  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur auf  $\widetilde{V}$ , und  $V \subset \widetilde{V}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum. Die  $\mathbb{K}$ -Algebrastruktur auf  $\widetilde{\mathbb{K}}$  und die  $\widetilde{\mathbb{K}}$ -Vektorraumstruktur auf  $\widetilde{V}$  erhält man aus der Gleichung  $(\times)$  bzw. ihrer Verallgemeinerung auf Vektorräume:



$$(\times \times) \quad \|c_j v_j - c_k v_k\| \leq |c_j| \|v_j - v_k\| + |c_j - c_k| \|v_k\|.$$

Aus  $\|v_2\| = \|(v_2 - v_1) + v_1\| \leq \|v_2 - v_1\| + \|v_1\|$  und entsprechender Vertauschung von  $v_1$  und  $v_2$  erhält man (wie auch bei Bewertungen)

$$|\|v_1\| - \|v_2\|| \leq \|v_1 - v_2\|.$$

Ist daher  $\tilde{v} := (v_j)$  eine Cauchy-Folge in  $V$ , so ist  $(\|v_j\|)$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}_0$ ; also existiert

$$\|\tilde{v}\| := \lim \|v_j\| \in \widetilde{\mathbb{K}_0},$$

und es gilt  $\|\tilde{v}\| = \|\tilde{w}\|$ , wenn  $(v_j - w_j)$  eine Nullfolge ist. Somit haben wir eine Fortsetzung der Norm auf  $V$  als Funktion von  $\widetilde{V}$  nach  $\widetilde{\mathbb{K}_0}$  erklärt. Man überzeugt sich sofort davon, daß die Axiome i) und iii) erfüllt sind und ii) zumindest für  $c \in \mathbb{K}$  richtig ist. Ist schließlich  $\tilde{c} = \lim c_j \in \widetilde{\mathbb{K}}$ ,  $c_j \in \mathbb{K}$ ,  $\tilde{v} \in \widetilde{V}$ , so gilt

$$\|c_j \tilde{v} - c_k \tilde{v}\| = \|(c_j - c_k) \tilde{v}\| = |c_j - c_k| \|\tilde{v}\|;$$

also konvergiert die Folge  $(c_j \tilde{v})$  gegen ein Element in  $\widetilde{V}$ , das wir mit  $\tilde{c} \tilde{v}$  bezeichnen. Es ist tatsächlich von der Folge  $(c_j)$  unabhängig, und ist gleich dem schon definierten Element  $c \tilde{v}$ , wenn  $c \in \mathbb{K}$ . Man rechnet leicht nach, daß hierdurch  $\widetilde{V}$  ein  $\widetilde{\mathbb{K}}$ -Vektorraum wird, und es gilt mit  $\tilde{c} = \lim_{j \rightarrow \infty} c_j$ :

$$\|\tilde{c} \tilde{v}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|c_j \tilde{v}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} |c_j| \|\tilde{v}\| = |\tilde{c}| \|\tilde{v}\|.$$

Ist  $\tilde{\varepsilon} \in \widetilde{\mathbb{K}_0}$  positiv und  $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$  ein Element in  $\mathbb{K}_0$ , so gilt nach Voraussetzung  $\|v_j - v_k\| < \varepsilon$  für alle  $j, k \geq N$  und folglich

$$\|\tilde{v} - v_k\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v_k\| \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle } k \geq N. \quad \square$$

*Bemerkung.* Der letzte Satz wird meist in der Situation angewandt, daß der Grundkörper  $\mathbb{K}$  gleich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , also selbst schon vollständig ist. In diesem Fall ist die Vervollständigung  $\widetilde{V}$  automatisch ein vollständiger  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Man kann ebenso wie für angeordnete Körper die Eindeutigkeit dieses Prozesses nachweisen.

Indem wir daran erinnern, daß ein vollständig normierter reeller oder komplexer Vektorraum auch ein BANACH-Raum genannt wird (und endlich-dimensionale normierte reelle und komplexe Vektorräume stets Banach-Räume sind), können wir formulieren:

**Satz 8.36** *Jeder reelle oder komplexe (unendlich-dimensionale) normierte Vektorraum läßt sich dicht in einen (bis auf geeignete Isomorphie eindeutig bestimmten) Banach-Raum einbetten.*

Wir sind dem Leser noch immer den Beweis schuldig, daß die Vervollständigung von angeordneten und bewerteten Körpern oder normierten Vektorräumen tatsächlich vollständig ist. Dies soll nun im allgemeineren Rahmen von  $\mathbb{K}_0$ -metrischen Räumen nachgeholt werden. Wir bemerken dazu zuerst, daß in den vorstehenden Fällen die von der Bewertung oder der Norm induzierte Metrik  $\tilde{d}(\tilde{v}, \tilde{w}) := \|\tilde{v} - \tilde{w}\|$  die stetige Fortsetzung der entsprechenden Metrik auf  $V$  ist:

$$\tilde{d}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - w_j\|, \quad v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j, \quad w = \lim_{j \rightarrow \infty} w_j, \quad v_j, w_j \in V.$$

Wir zeigen jetzt, daß sich jede  $\mathbb{K}_0$ -Metrik  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{K}_0$  zu einer Abbildung  $\tilde{d}: \widetilde{X} \times \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}_0}$  fortsetzen läßt.

**Satz 8.37** *Es gibt eine kanonische Abbildung  $\tilde{d}: \widetilde{X} \times \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}_0}$ , die das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{array}{ccc}
X \times X & \xrightarrow{d} & \mathbb{K}_0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{X} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{d}} & \widetilde{\mathbb{K}_0}
\end{array}$$

*Beweis.* Wir ordnen zwei Folgen  $\xi = (x_j)$  und  $\eta = (y_j)$  in  $\mathcal{F}_X$  die Folge  $d(\xi, \eta) := (d(x_j, y_j)) \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}_0}$  zu. Als erstes zeigen wir:

1. Sind  $\xi, \eta \in \mathcal{C}_X$ , so ist  $d(\xi, \eta) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}_0}$ . Denn mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$d(x_j, y_j) \leq d(x_j, y_k) + d(y_j, y_k) \leq d(x_k, y_k) + d(x_j, x_k) + d(y_j, y_k)$$

und, durch Vertauschung der Indizes  $j$  und  $k$ :

$$|d(x_j, y_j) - d(x_k, y_k)| \leq d(x_j, x_k) + d(y_j, y_k) < 2 \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $j, k \geq N = N(\varepsilon)$ .

2. Ist  $\xi \sim_d \xi'$ , so ist  $d(\xi', \eta) \sim d(\xi, \eta)$  in  $\mathcal{C}_{\mathbb{K}_0}$ . Denn die Abschätzungen  $d(x'_j, y_j) \leq d(x_j, x'_j) + d(x_j, y_j)$  und  $d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x'_j) + d(x'_j, y_j)$  implizieren

$$|d(x'_j, y_j) - d(x_j, y_j)| \leq d(x_j, x'_j) < \varepsilon$$

für alle  $j \geq N = N(\varepsilon)$ .

Es ist somit die Abbildung  $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}_0}$

$$\tilde{d}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \widetilde{d(\xi, \eta)} \in \widetilde{\mathbb{K}_0} = \mathcal{C}_{\mathbb{K}_0} / \mathcal{N}_{\mathbb{K}_0}$$

wohldefiniert, und sie setzt offensichtlich die Metrik  $d$  fort.  $\square$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Fortsetzung  $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}_0}$  eine Metrik auf  $\tilde{X}$  ist. Wie nicht anders zu erwarten, gilt wesentlich mehr.

**Satz 8.38**  $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \widetilde{\mathbb{K}_0}$  ist eine Metrik auf  $\tilde{X}$ , die die Metrik auf  $X$  fortsetzt. Der metrische Raum  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  ist vollständig, und  $X$  liegt (folgen-) dicht in  $\tilde{X}$ , d. h. zu jedem  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  gibt es eine Folge  $x_j \in X$  mit  $\tilde{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ . Genauer gilt: Ist  $\tilde{x}$  die Restklasse einer Cauchy-Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $x_j \in X$ , so gilt

$$\tilde{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j.$$

Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft von Folgen in  $\tilde{X}$  braucht man nur bzgl. positiver Elemente in  $\mathbb{K}_0$  zu testen.  $\tilde{X}$  ist bis auf kanonische Isomorphie der einzige metrische Raum mit diesen Eigenschaften.

*Bemerkung.* Die Vervollständigung  $\mathbb{R} := \widetilde{\mathbb{Q}}$  von  $\mathbb{Q}$  bzgl. der natürlichen Anordnung ist also ein vollständig archimedisch angeordneter Körper, in dem  $\mathbb{Q}$  dicht liegt. Es gilt in  $\mathbb{R}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a$$

genau dann, wenn es für jede rationale Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt mit  $|x_j - a| < \varepsilon$  für alle  $j \geq N$ . Da  $1/n$  eine Nullfolge in  $\mathbb{Q}$  ist, reicht sogar die Existenz von Zahlen  $N_n$  mit

$$|x_j - a| < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } j \geq N_n.$$

*Beweis* (Satz 38). Es sei  $\tilde{\varepsilon} \in \widetilde{\mathbb{K}}_0$  positiv und  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0$  so gewählt, daß  $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ . Da  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$  ist, gibt es ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$d(x_j, x_k) \leq \varepsilon, \quad j, k \geq N.$$

Es sei nun  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$  die Restklasse der Folge  $(x_j)$ , und  $\tilde{x}_k$  bezeichne das Bild von  $x_k$  in  $\widetilde{X} \supset X$ . Dann wird der Abstand von  $\tilde{x}$  und  $\tilde{x}_k$  gegeben durch die Restklasse der Folge

$$(d(x_j, x_k))_{j \in \mathbb{N}}, \quad k \text{ fest}$$

in  $\widetilde{\mathbb{K}}_0$ . Nun besteht aber für alle  $j, k \geq N = N(\varepsilon)$  die Ungleichung  $\varepsilon - d(x_j, x_k) \geq \varepsilon/2$ , und damit hat man  $\varepsilon - \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_k) > 0$ , d. h.  $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_k) < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ . Somit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = \tilde{x}.$$

Es sei nun  $(\tilde{x}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\widetilde{X}$ . Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

1. In  $\widetilde{\mathbb{K}}_0$  gibt es eine Folge  $(\varepsilon_j)$  mit  $\varepsilon_j > 0$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ . In diesem Fall gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  mit

$$\varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \tilde{d}(\tilde{x}_j, \tilde{x}_k) < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle  $j, k \geq N$ , und zu festem  $j$  für  $\tilde{x}_j \in \widetilde{X}$  ein  $x_j \in X$  mit  $\tilde{d}(\tilde{x}_j, x_j) < \varepsilon_j$ . Es folgt für alle  $j, k \geq N$ :

$$d(x_j, x_k) = \tilde{d}(x_j, x_k) \leq \tilde{d}(x_j, \tilde{x}_j) + \tilde{d}(\tilde{x}_j, \tilde{x}_k) + \tilde{d}(x_k, \tilde{x}_k) < \varepsilon_j + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon_k < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

d. h. die Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $X$  und definiert deshalb ein Element  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ . Nach dem ersten Teil des Satzes gibt es zu jedem  $\tilde{\varepsilon} > 0$  in  $\widetilde{\mathbb{K}}_0$  ein  $\tilde{N} = \tilde{N}(\tilde{\varepsilon})$ , so daß

$$\varepsilon_j < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad \tilde{d}(x_j, \tilde{x}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad j \geq \tilde{N}.$$

Daraus folgt für  $j \geq \tilde{N}$ :

$$\tilde{d}(\tilde{x}_j, \tilde{x}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}_j, x_j) + \tilde{d}(x_j, \tilde{x}) < \varepsilon_j + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < \tilde{\varepsilon},$$

d. h. die Folge  $(\tilde{x}_j)$  konvergiert gegen  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ .

2. Im anderen Fall ist  $\tilde{d}(\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1})$ , da dies eine nichtnegative Nullfolge in  $\widetilde{\mathbb{K}}_0$  ist, gleich Null für fast alle  $j$ . Dann ist die Folge  $(\tilde{x}_j)$  konstant bis auf endlich viele Indizes und damit trivialerweise konvergent.

Die Eindeutigkeitsaussage beweist man wie im Fall angeordneter Körper; die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.  $\square$

Wir wollen zum Abschluß dieses Anhangs einen „unvollständigen“ normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ganz konkret mit den vorher entwickelten Mitteln „vervollständigen“. Es wird sich dabei um den *unendlich dimensionalen euklidischen Raum* handeln, der auch als HILBERTScher *Folgenraum*  $\ell^2$  bekannt ist und in seiner komplexen Form  $\ell^2_{\mathbb{C}}$  z. B. eine wichtige Rolle in der Quantentheorie spielt. Wir erinnern uns dazu (siehe Kapitel 5) an den Raum der *endlichen* oder besser *abbrechenden Folgen*

$$\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subset \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) =: \mathcal{F}_{\mathbb{R}},$$

also der reellen Folgen  $\xi := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Glieder  $x_n$  fast alle Null sind. Betrachten wir die unendliche Kette  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$  von Vektorräumen  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit den Koordinaten  $(x_0, \dots, x_n)$ , wobei  $\mathbb{R}^n \subset$

$\mathbb{R}^{n+1}$  durch die Gleichung  $x_n = 0$  beschrieben werde, so ist der Raum  $\text{Abb}^{\text{fin}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  nichts anderes als die abzählbare Vereinigung

$$\mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^{n+1}$$

mit der offensichtlichen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum-Struktur. Da aber das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch Einschränkung das Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  induziert, existiert auch auf  $\mathbb{R}^\infty$  ein *verallgemeinertes euklidisches Skalarprodukt*

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_{1n} x_{2n}, \quad \xi_j = (x_{jn})_{n \in \mathbb{N}},$$

das zu einer *Norm* auf  $\mathbb{R}^\infty$  Anlaß gibt:

$$\|\xi\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Man beachte hierbei, daß alle auftretenden unendlichen Summen tatsächlich endlich sind. Selbstverständlich bleibt auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erhalten:

$$|\langle \xi_1, \xi_2 \rangle| \leq \|\xi_1\|_2 \|\xi_2\|_2.$$

Mit dieser Norm ist  $\mathbb{R}^\infty$  aber nicht vollständig. Um dies einzusehen, definieren wir die spezielle Folge  $a^{[k]}$ , wobei  $a = (a_n := 1/(n+1))$  ist und für eine Folge  $\xi = (x_n) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  das Element  $\xi^{[k]} \in \mathbb{R}^\infty$  durch  $\xi_n^{[k]} := x_n$ ,  $n \leq k$ ,  $\xi_n^{[k]} := 0$ ,  $n > k$ , definiert werde. Da die Reihe  $\sum a_n^2$  konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$ , so daß für alle  $k > j \geq N$  gilt:

$$\|a^{[k]} - a^{[j]}\|_2^2 = \sum_{m=j+1}^k \frac{1}{(m+1)^2} < \varepsilon^2.$$

Somit ist die Folge  $(a^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Sie kann aber nicht in  $\mathbb{R}^\infty$  konvergieren, da offensichtlich die Folge  $(\xi^{[k]})$  für ein festes  $\xi \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  genau dann in  $\mathbb{R}^\infty$  konvergiert, und zwar gegen  $\xi$ , wenn  $\xi$  selbst schon eine endliche Folge war (siehe hierzu auch weiter unten).

Dieses Beispiel deutet darauf hin, daß die Vervollständigung von  $\mathbb{R}^\infty$  bzgl. der euklidischen Norm als  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum im Raum  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  aller Folgen realisiert werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall und soll als nächstes gezeigt werden. Wenn wir uns daran erinnern, daß die Vervollständigung als Raum aller Cauchy-Folgen modulo dem Ideal der Nullfolgen definiert wird, so müssen wir zwangsläufig zunächst Cauchy-Folgen  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\xi_k = (x_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ , in  $\mathbb{R}^\infty$  studieren. Nun gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N$ , so daß für alle  $j, k \geq N$  und alle  $m \leq \ell$  gilt:

$$(\times) \quad |x_{jm} - x_{km}|^2 \leq \sum_{n=0}^{\ell} |x_{jn} - x_{kn}|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_{jn} - x_{kn}|^2 < \varepsilon^2.$$

Damit sind alle Folgen  $(x_{jm})_{j \in \mathbb{N}}$  bei festem  $m$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$ , so daß der Grenzwert  $x_m := \lim_j x_{jm}$  existiert. Wir können damit jeder Cauchy-Folge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^\infty$  auf eindeutige Weise die Folge  $\xi := (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  zuordnen, und diese Zuordnung ist linear. Das gleiche Argument zeigt, daß für eine Nullfolge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auch die Folgen  $(x_{jm})_{j \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen sind und damit die zugeordnete Folge die triviale ist:  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \xi = (0, 0, \dots)$ . Mit anderen Worten: Der gesamte Untervektorraum  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^\infty}$  der Nullfolgen wird auf die Null in  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  abgebildet. Es existiert somit eine natürliche  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\widetilde{\mathbb{R}^\infty} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}^\infty} / \mathcal{N}_{\mathbb{R}^\infty} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}.$$

Wir beweisen als nächstes, daß diese Abbildung *injektiv* ist, die Vervollständigung von  $\mathbb{R}^\infty$  also tatsächlich als  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum des Raumes aller reellen Folgen realisiert werden kann, und müssen zum Abschluß diesen Unterraum genauer bestimmen. Die Injektivität der obigen Abbildung ist gleichbedeutend mit dem Inhalt des folgenden Lemmas.

**Lemma 8.39** Ist  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^\infty$  und  $x_n = \lim_j x_{jn} = 0$  für alle  $n$ , so ist  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}^\infty$ .

*Beweis.* Aus den Ungleichungen  $(\times)$  gewinnt man bei festgehaltenem  $\ell$  durch den Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$  für alle  $\ell$  die Ungleichungen

$$(\times \times) \quad \sum_{n=0}^{\ell} |x_n - x_{kn}|^2 \leq \varepsilon^2, \quad k \geq N,$$

und damit in unserer speziellen Situation  $\sum_{n=0}^{\ell} |x_{kn} - 0|^2 \leq \varepsilon^2$  für alle  $\ell$  und alle  $k \geq N$ . Dies ist

gerade die Behauptung.  $\square$

Die Ungleichungen  $(\times \times)$  erlauben uns auch, den Unterraum  $\widetilde{\mathbb{R}^\infty} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  exakt zu beschreiben. Ist nämlich die Folge  $\xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Bild von  $\widetilde{\mathbb{R}^\infty}$  in  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  enthalten, so gibt es für eine geeignete Cauchy-Folge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Zahl  $K$ , so daß insbesondere

$$\sum_{n=0}^{\ell} |x_n - x_{Kn}|^2 < 1 \quad \text{für alle } \ell.$$

Nun ist  $\xi = \xi_K + (x - \xi_K)$ , und aus der Ungleichung  $x_n^2 = (x_{Kn} + (x_n - x_{Kn}))^2 \leq 2(x_{Kn}^2 + (x_n - x_{Kn})^2)$  folgt dann sofort für alle hinreichend großen  $\ell$ , daß

$$\sum_{n=0}^{\ell} x_n^2 \leq 2(\|\xi_K\|_2^2 + 1).$$

Also muß auch

$$\|\xi\|_2^2 := \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

existieren, oder, wie man auch sagt, die Folge  $\xi = (x_n)$  *quadrat-summierbar* sein. Hat umgekehrt die Folge  $\xi$  diese Eigenschaft, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$ , so daß

$$\sum_{n=j}^k x_n^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für alle } j, k \geq N.$$

Dies bedeutet gerade, daß die Folge der „endlichen Abschnitte“  $\xi^{[k]}$  von  $\xi$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^\infty$  bildet. Das dieser Folge zugeordnete Element in der Vervollständigung, aufgefaßt als Teilmenge von  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , ist selbstverständlich wieder  $\xi$ . Also stimmen als  $\mathbb{R}$ -Vektorräume die Vervollständigung  $\widetilde{\mathbb{R}^\infty}$  und der HILBERTsche Folgenraum

$$\ell^2 := \left\{ \xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

überein. (Daß der letztere tatsächlich ein Untervektorraum des Folgenraums ist, braucht nicht extra gezeigt zu werden, da dies aus unserem Beweis mit folgt:  $\widetilde{\mathbb{R}^\infty}$  ist ein Vektorraum und damit sein Bild ein Untervektorraum des Folgenraums). Wir haben schließlich noch die Fortsetzung der Norm zu bestimmen. Nach unserer allgemeinen Theorie ist aber die Norm eines Elementes in dem vervollständigten Raum gerade der Grenzwert der Normen einer approximierenden Folge aus dem Grundraum. Mit den Bezeichnungen von oben ist also

$$\|\xi\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi^{[k]}\|_2$$

und damit

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2, \quad \text{also} \quad \|\xi\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

Wir fassen zusammen:

**Satz 8.40** Auf dem Hilbertschen Folgenraum  $\ell^2$  wird durch

$$\|\xi\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$$

eine Norm definiert. Bzgl. dieser Norm ist  $\ell^2$  vollständig und (kanonisch) isomorph zu der Vervollständigung des Raumes  $\mathbb{R}^\infty$  (mit der verallgemeinerten euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$ ).

*Bemerkungen.* 1. Ganz entsprechend konstruiert man die Kompletierungen  $\ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , von  $\mathbb{R}^\infty$  bzgl. der  $p$ -Normen als Unterräume von  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ . Im Falle  $p = \infty$  stellt man sofort fest, daß  $\ell^\infty$  genau aus den beschränkten Folgen besteht:

$$\ell^\infty := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{die Folge } (x_n) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Die Norm auf  $\ell^\infty$  ist gegeben durch

$$\|\xi\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Dies ist nichts anderes als das *Supremum* der Folge  $(|x_n|)$ :  $\|\xi\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$  (siehe Kapitel 11).

Offensichtlich hat man für alle  $1 \leq p < q < \infty$  Inklusionen

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{KF}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \subset \ell^\infty.$$

Hierbei kommt  $\ell^p \subset \ell^q$  von der JENSENSchen Ungleichung (siehe Kapitel 14); die Inklusion ist echt.

*Warnung.* Prägt man  $\ell^p$  die durch die Inklusion  $\ell^p \subset \ell^\infty$  gegebene *Maximumnorm* auf, so ist  $\ell^p$  nicht vollständig!

2. Besitzt ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ein *Skalarprodukt*, so daß er bzgl. der hierdurch definierten Norm vollständig ist, so nennt man ihn auch einen *HILBERT-Raum*. Hilbert-Räume sind also spezielle Banach-Räume. Tatsächlich geht diese Bezeichnung zurück auf den Raum  $\ell^2$ , da dieser mit einem kanonischen Skalarprodukt versehen werden kann: Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist für zwei Folgen  $\xi_1 = (x_{1n})$  und  $\xi_2 = (x_{2n})$  in  $\ell^2$  jede endliche Summe

$$\left( \sum_{n=0}^N |x_{1n} x_{2n}| \right)^2 \leq \left( \sum_{n=0}^N |x_{1n}^2| \right) \left( \sum_{n=0}^N |x_{2n}^2| \right) \leq \|\xi_1\|_2^2 \|\xi_2\|_2^2.$$

Somit ist die Reihe

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_{1n} x_{2n}$$

absolut und damit auch selbst konvergent (siehe Kapitel 10); sie definiert offensichtlich eine positiv-definite Bilinearform auf  $\ell^2$ , die die richtige Norm induziert.

3. Als Hilbert-Raum ist  $\ell^2$  durch seine Eigenschaft der *Separabilität* (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt. Dies führt zu einer kanonischen Isomorphie  $\ell^2 \cong L^2$  zum Hilbert-Raum  $L^2$  der im Lebesgueschen Sinne *quadrat-integrierbaren Funktionen*. Diese Tatsache hat zur Folge, daß die beiden historisch beschrittenen Wege in die Quantenmechanik, nämlich im Matrizen- bzw. im Wellenkalkül, völlig identisch sind.

Man kann im Übrigen auch entsprechend über dem Körper der komplexen Zahlen arbeiten und konstruiert so den komplexen Vektorraum

$$\ell_{\mathbb{C}}^2 := \left\{ \zeta = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}} : \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty \right\},$$

der mit dem HERMITESchen *Skalarprodukt*

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_{1n}} z_{2n}$$

versehen ist.

## 9 Axiomatische Beschreibungen der reellen Zahlen und einfache Folgerungen

### 9.1 Äquivalente axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers

Die im Anhang zum letzten Kapitel durch Vervollständigung des rationalen Zahlkörpers konstruierten reellen Zahlen besitzen eine Cauchy-vollständige archimedische Anordnung. In den meisten Lehrbüchern werden die reellen Zahlen *axiomatisch* eingeführt als ein (archimedisch) angeordneter Körper, der einem weiteren *Vollständigkeitsaxiom* genügt. Wir zeigen sogleich, daß einige der gebräuchlichen Axiome äquivalent sind. Insbesondere sind damit die im folgenden Satz aufgeführten Eigenschaften im Körper  $\mathbb{R}$  gültige Sätze. Am Ende des Kapitels beschäftigen wir uns mit der Frage nach der *Eindeutigkeit* des reellen Zahlkörpers.

*Definition.* Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper. Dann bedeutet, wie wir im vorigen Kapitel schon eingeführt haben, die *Cauchy-Vollständigkeit* oder kurz *Vollständigkeit* von  $\mathbb{K}$ , daß jede Cauchy-Folge einen (automatisch eindeutig bestimmten) Grenzwert in  $\mathbb{K}$  besitzt. Das *Prinzip der monotonen Konvergenz* besagt, daß jede monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$  einen Grenzwert hat. Bei den *Intervallschachtelungsprinzipien* betrachtet man nicht leere abgeschlossene Intervalle  $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{K}$  mit  $I_j \supset I_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Das *starke* bzw. *schwache* Intervallschachtelungsprinzip fordert, daß deren Durchschnitt nicht leer ist, im zweiten Falle unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Folge  $L_j := b_j - a_j$  der *Längen* der Intervalle  $I_j$  gegen Null geht, so daß dann der Durchschnitt aller Intervalle gemäß Lemma 8.7 genau aus einem Element besteht. Als *Satz von Bolzano und Weierstraß* bezeichnen wir die Aussage, daß man aus jeder beschränkten Folge in  $\mathbb{K}$  eine Teilfolge auswählen kann, die konvergiert.

**Satz 9.1** *Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- i)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch und (Cauchy-) vollständig.
- ii) In  $\mathbb{K}$  gilt das Prinzip der monotonen Konvergenz.
- iii)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch, und es gilt das starke Intervallschachtelungsprinzip.
- iv)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch, und es gilt das schwache Intervallschachtelungsprinzip.
- v) In  $\mathbb{K}$  gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Die *Beweise* bieten keine besonderen Schwierigkeiten und könnten somit dem Leser überlassen werden. Der Vollständigkeit halber sollen sie ausgeführt werden.

i)  $\implies$  ii) Es genügt, das folgende allgemeine Lemma zu beweisen:

**Lemma 9.2** *Jede monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge in einem archimedisch angeordneten Körper ist eine Cauchy-Folge.*

*Beweis* (des Lemmas). Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man durch Übergang zu einer Teilfolge eine streng monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit  $x_{j+1} - x_j \geq \varepsilon_0$  mit einem festen  $\varepsilon_0 > 0$ . Somit wäre  $x_j \geq x_0 + j\varepsilon_0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ ; wegen der Archimedizität von  $\mathbb{K}$  würde die rechte Seite aber jede vorgegebene Schranke für hinreichend große  $j$  übertreffen. Widerspruch!  $\square$

*Bemerkung.* Die Aussage des Lemmas haben wir im vorigen Kapitel indirekt bei der Konstruktion von Wurzeln (Satz 8.15) verwendet. Dort hatten wir es mit einer nach *unten* beschränkten monoton *absteigenden* Folge  $(x_n)$  zu tun. Durch Übergang zu der Folge  $(-x_n)$  ist dieser Fall aber mit abgedeckt.

ii)  $\implies$  iii) Wäre  $\mathbb{K}$  nicht archimedisch, so wäre die Folge  $(j)_{j \in \mathbb{N}}$  beschränkt, also konvergent und damit eine Cauchy-Folge. Dann müßte aber z. B.  $(j+1) - j = 1$  für große  $j$  kleiner als vorgegebenes  $\varepsilon > 0$ , also z. B. kleiner als  $\varepsilon = 1$  sein. Widerspruch! Das starke Intervallschachtelungsprinzip folgt unmittelbar aus dem Prinzip der monotonen Konvergenz durch Betrachtung der Folge der linken (oder



rechten) Endpunkte der Intervalle  $I_j$ .

iii)  $\implies$  iv) Trivial.

iv)  $\implies$  v) Es sei  $m = (a + b)/2$  der Mittelpunkt des Intervalls  $I_0 = I = [a, b]$ . Dann muß mindestens eines der beiden Intervalle  $[a, m]$  bzw.  $[m, b]$  unendlich viele der Folgenglieder  $x_n$  enthalten. Bezeichnen wir dieses mit  $I_1$ , so gibt es insbesondere ein  $x_{n_1} \in I_1$  mit  $n_1 > n_0 := 0$  und unendlich viele  $n > n_1$ , so daß  $x_n \in I_1$ . So fortfahrend erhält man per vollständiger Induktion eine Intervallschachtelung  $I_j = [a_j, b_j]$  mit  $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$  und  $L_{j+1} := L_j/2$  und eine Teilfolge  $(y_j := x_{n_j})$  der ursprünglichen Folge mit  $y_j \in I_j$ . Da  $\mathbb{K}$  archimedisch ist, ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = 0$  und damit nach Voraussetzung der Durchschnitt der Intervalle  $I_j$  nicht leer. Wegen Lemma 8.7 besteht der Durchschnitt aus genau einem Element  $\xi$ , für das zudem  $\lim a_j = \lim b_j = \xi$  gilt. Wegen  $a_j \leq y_j \leq b_j$  für alle  $j$  ist dann auch  $\lim y_j = \xi$ .

*Bemerkung.* Das soeben verwendete Beweisprinzip nennen wir die *Methode der Intervallhalbierung*.

v)  $\implies$  i) Daß aus dem Satz von Bolzano–Weierstraß die Archimedizität von  $\mathbb{K}$  folgt, ergibt sich genauso wie im Schluß ii)  $\implies$  iii); man muß nur zu einer Teilfolge von  $(j)_{j \in \mathbb{N}}$  übergehen. Der Rest ist eine Implikation aus der folgenden, leicht zu beweisenden allgemeinen Aussage: *Besitzt eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent zum gleichen Limes* (siehe für den allgemeineren Fall von normierten Vektorräumen Satz 8.10).  $\square$

*Bemerkung.* Obwohl der Beweis von Satz 1 damit vollständig ist, ist es durchaus instruktiv, einige nicht direkt gezeigte Implikationen zu verifizieren. So folgen zum Beispiel die Schritte ii)  $\implies$  i) und ii)  $\implies$  v) leicht mit schon bewiesenen allgemeinen Resultaten und dem folgenden

**Lemma 9.3** *Aus jeder Folge in einem angeordneten Körper kann man eine monotone Teilfolge auswählen.*

*Beweis.* Wir nennen ein Element  $x_n$  eine *Spitze* der Folge  $(x_j)$ , wenn  $x_j \leq x_n$  für alle  $j \geq n$ . Besitzt nun die Folge *unendlich* viele Spitzen, so bilden diese in ihrer natürlichen Nummerierung eine monoton fallende Teilfolge. Besitzt die Folge jedoch nur endlich viele (insbesondere überhaupt keine) Spitzen, so konstruiert man leicht durch vollständige Induktion eine (streng) monoton aufsteigende Teilfolge.  $\square$

## 9.2 Existenz von Wurzeln

Aufgrund der Überlegungen in dem vorigen Kapitel (siehe Folgerung 8.17 und die anschließenden Anmerkungen) können wir gewiß sein, daß *Quadratwurzeln* und allgemeiner beliebige  $k$ -te Wurzeln in vollständig angeordneten Körpern existieren.

**Satz 9.4** *Erfüllt  $\mathbb{K}$  eine der äquivalenten Aussagen des vorigen Satzes, so gibt es zu jeder nicht negativen Zahl  $a \in \mathbb{K}$  und jeder natürlichen Zahl  $k \geq 2$  eine eindeutig bestimmte Zahl  $b \in \mathbb{K}$ ,  $b \geq 0$ , mit  $b^k = a$ .*

*Definition.* Man nennt  $b$  die  $k$ -te Wurzel aus  $a$  und schreibt  $b := \sqrt[k]{a}$ . Für  $k = 1$  setzt man selbstverständlich  $\sqrt[1]{a} = a$ .

*Bemerkung.* Unter den obigen Voraussetzungen folgt für nicht negative  $a_1 < a_2$  auch  $a_1^k < a_2^k$  und umgekehrt. Damit sind die Funktionen

$$x \mapsto x^k \quad \text{und} \quad x \mapsto \sqrt[k]{x}, \quad x \in \mathbb{K}_+,$$

notwendig *streng monoton wachsend*.

Da wir in Kapitel 8 keinen *vollständigen* Beweis für Satz 4 erbracht haben, tragen wir dieses Versäumnis jetzt nach. Wir verwenden dabei das Intervallschachtelungsprinzip. Andere Beweise werden wir, wie schon angekündigt, später kennenlernen.

Wir begründen zuerst die (einfache) Eindeutigkeitsaussage. Sind nämlich  $b_1, b_2$  zwei positive reelle Zahlen mit  $b_1^k = b_2^k$ , so folgt die Gleichheit  $b_1 = b_2$  aus der Identität

$$(*) \quad (b_1 - b_2)(b_1^{k-1} + b_1^{k-2}b_2 + \dots + b_2^{k-1}) = b_1^k - b_2^k = 0.$$

Zum Nachweis der Existenz können wir  $a > 1$  annehmen, denn für  $a = 1$  ist ohnehin nichts zu beweisen, und für  $0 < a < 1$  ist  $1/a > 1$  und der Kehrwert  $1/\sqrt[k]{1/a}$  offensichtlich die gesuchte Wurzel aus  $a$ . Man sieht sofort, dass die gesuchte  $k$ -te Wurzel  $b$  von  $a$  unter dieser Voraussetzung zwischen 1 und  $a$  liegen muß. Wir wählen daher als erstes unserer Intervalle das Intervall  $I_0 := [a_0, b_0]$  mit  $a_0 = 1, b_0 = a$ . Es ist insbesondere  $a_0^k < a, b_0^k > a$ . Im nächsten Schritt betrachten wir den Mittelpunkt  $c_0 := (a_0 + b_0)/2$  des Intervalls  $I_0$ . Es ist dann  $c_0^k > a$  oder  $c_0^k \leq a$ . Im ersten Fall setzen wir  $I_1 := [a_1, b_1]$  mit  $a_1 := a_0, b_1 := c_0$ , im zweiten mit  $a_1 := c_0, b_1 := b_0$ . So fortfahrend gewinnt man induktiv eine absteigende Folge  $I_j = [a_j, b_j]$  von abgeschlossenen Intervallen mit  $a_j^k \leq a \leq b_j^k$  für alle  $j$  und der nach Null strebenden Längenfolge  $2^{-j}(a-1)$ . Somit fängt diese Intervallschachtelung genau ein Element  $b$  ein, von dem wir zu zeigen haben, daß es die gesuchte  $k$ -te Wurzel von  $a$  ist. Nach Konstruktion gehören aber sowohl  $a$  als auch  $b^k$  dem Durchschnitt der Intervalle  $J_j := [a_j^k, b_j^k]$  an, so daß  $b^k = a$  sicher dann gilt, wenn die Folge der Intervalllängen  $b_j^k - a_j^k$  gegen Null geht; dies ist aber eine unmittelbare Konsequenz aus der Formel (\*), angewandt auf  $a_j$  und  $b_j$  anstelle von  $b_1$  und  $b_2$ , wenn man beachtet, daß

$$b_j^{k-1} + b_j^{k-2}a_j + \dots + a_j^{k-1} \leq k b_0^{k-1} = k a^{k-1}. \quad \square$$

*Bemerkung.* Aus der Eindeutigkeitsaussage im vorigen Satz ergibt sich unmittelbar, daß  $\sqrt[k]{a^\ell} = (\sqrt[k]{a})^\ell$  und daß diese Zahl nur von dem Verhältnis  $r := \ell/k \in \mathbb{Q}$  abhängt. Auf diese Weise ist für alle positiven rationalen Zahlen  $r$  eine streng monoton wachsende *Potenzfunktion*  $x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}_+^*$ , erklärt. Für  $r = 0$  setzt man noch  $x^0 := 1$ , und für negative  $r$  und  $x > 0$  auch  $x^r := 1/x^{-r}$ . Damit gelten dann die Potenzregeln  $x^r x^s = x^{r+s}, (x^r)^s = x^{rs}$  auch durchweg für rationale Exponenten  $r$  und  $s$ .

### 9.3 Die allgemeine Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel

Als Anwendung für die Existenz der Wurzeln im Körper der reellen Zahlen wollen wir die außerordentlich nützliche *allgemeine* Ungleichung zwischen dem *geometrischen* und dem *arithmetischen Mittel* herleiten. Es seien also  $a_1, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen. Man setzt dann (in Verallgemeinerung unserer früheren Definition im Falle  $n = 2$ )

$$A(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad G(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

und nennt  $A(a_1, \dots, a_n)$  das *arithmetische* und  $G(a_1, \dots, a_n)$  das *geometrische Mittel* der Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ . Ferner wird das *harmonische Mittel*  $H(a_1, \dots, a_n)$  erklärt durch

$$H(a_1, \dots, a_n) := (A(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}))^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

**Satz 9.5** Für positive reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  gelten stets die Ungleichungen

$$H(a_1, \dots, a_n) \leq G(a_1, \dots, a_n) \leq A(a_1, \dots, a_n).$$

Gleichheit an einer Stelle besteht dann und nur dann, wenn  $a_1 = \dots = a_n$ .

*Beweis.* Die linke Ungleichung folgt aus der rechten wegen  $G(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = (G(a_1, \dots, a_n))^{-1}$ . Wir setzen  $g := G(a_1, \dots, a_n)$ , so daß also  $g^n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  und damit  $(a_1/g) \cdot \dots \cdot (a_n/g) = 1$ .

Es genügt daher zu zeigen: Sind  $a_1, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen mit  $\prod_{j=1}^n a_j = 1$ , so ist  $a_1 + \dots + a_n \geq n$ , und Gleichheit gilt nur, wenn  $a_1 = \dots = a_n = 1$ .

Wir merken als erstes an, daß beide Aussagen für  $n = 1$  offensichtlich sind. Wir können uns bei den Induktionsbeweisen daher den Induktionsanfang schenken. Ferner bemerken wir, daß sowohl aus

$$\prod_{j=1}^n a_j = 1 \quad \text{als auch aus} \quad \sum_{j=1}^n a_j = n$$

folgt, daß nicht alle  $a_j < 1$  sein können und auch nicht alle größer als 1. Beim Induktionsschritt von  $n \geq 1$  nach  $n + 1$  können und werden wir deshalb annehmen, daß  $a_n \leq 1 \leq a_{n+1}$ . Hieraus folgt durch Multiplikation der Ungleichung  $1 \leq a_{n+1}$  mit  $1 - a_n \geq 0$  die Ungleichung  $1 - a_n \leq a_{n+1}(1 - a_n)$  und nach leichter Umformung die folgende Abschätzung, die im weiteren mehrfach Verwendung finden wird:

$$(+) \quad a_n + a_{n+1} \geq 1 + a_n a_{n+1} .$$

Haben wir nun  $n + 1$  positive Zahlen  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$  vorliegen, deren Produkt gleich 1 ist, so wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die  $n$  Elemente  $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n a_{n+1}$  an. Zusammen mit (+) folgt dann sofort die Behauptung:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j \geq \sum_{j=1}^{n-1} a_j + a_n a_{n+1} + 1 \geq n + 1 .$$

Liegt hier Gleichheit der linken und rechten Seite vor, so muß in der Ungleichung (+) Gleichheit herrschen, was aufgrund der Herleitung derselben genau dann der Fall ist, wenn  $a_n = 1$  oder  $a_{n+1} = 1$ . Wir können das Element, das gleich 1 ist, dann in dem Produkt fortlassen, und seine Vernachlässigung in der Summe verringert diese um 1. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann alle anderen  $a_j$  ebenfalls gleich 1.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Der vorige Beweis ist nicht gerade elegant. Man bekommt einen weit schöneren Beweis, indem man im Falle  $n = 2$  eine etwas schärfere Aussage beweist<sup>15</sup>.

**Lemma 9.6** *Es seien  $a, b, x$  positive reelle Zahlen mit  $a \leq b$ . Dann sind die Aussagen*

$$a \leq x \leq b \quad \text{und} \quad a + b \geq x + \frac{ab}{x}$$

*äquivalent. Gleichheit auf der rechten Seite gilt nur, wenn  $x = a$  oder  $x = b$ .*

*Beweis.* Dies ist eine einfache Folgerung aus der Identität

$$\left(1 - \frac{a}{x}\right)(b - x) = (a + b) - \left(x + \frac{ab}{x}\right) . \quad \square$$

Setzt man hierin nun  $x = \sqrt{ab}$ , so ist die linke Seite und damit die in Rede stehende Ungleichung

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \frac{ab}{\sqrt{ab}} = 2\sqrt{ab}$$

erfüllt.

Im Allgemeinfall seien nun  $a_1, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen. Für  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  ist nichts zu beweisen. Im anderen Fall setze man  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n =: g^n$  und verlange ohne Einschränkung der Allgemeinheit, daß  $a_1 \leq a_i \leq a_2$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist

$$a_1 < g < a_2$$

und wegen des vorstehenden Lemmas

$$a_1 + a_2 > g + \frac{a_1 a_2}{g} .$$

Also folgt

<sup>15</sup>Siehe: O. A. S. Karamzadeh, *One-Line Proof of the AM-GM Inequality*, The Mathematical Intelligencer, Summer 2011, p. 3.

$$(*) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > g + \frac{a_1 a_2}{g} + a_3 + \cdots + a_n .$$

Beachtet man noch

$$\frac{a_1 a_2}{g} a_3 \cdots a_n = g^{n-1} ,$$

so ist die rechte Seite von (\*) nach Induktionsvoraussetzung größer oder gleich

$$g + (n - 1)g = ng ,$$

was zu beweisen war. Und die zu beweisende Ungleichung ist sogar automatisch strikt.

2. Wegen der Monotonie der Wurzeln ist die allgemeine Ungleichung äquivalent zu der Aussage

$$a_1 \cdots a_n = G(a_1, \dots, a_n)^n \leq (A(a_1, \dots, a_n))^n$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $a_1 = \cdots = a_n$ .

In dieser Form ist die Ungleichung erfüllt in *jedem* angeordneten Körper<sup>16</sup>. Sie folgt tatsächlich aus der Bernoulli-Ungleichung. Um dies einzusehen, setzen wir für positive  $a_1, \dots, a_n$ :

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} .$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt dann für  $n \geq 2$

$$\left( \frac{A_n}{A_{n-1}} \right)^n \geq 1 + n \left( \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 \right) = \frac{A_{n-1} + n A_n - n A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{n A_n - (n-1) A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}$$

und somit

$$A_n^n \geq a_n \cdot A_{n-1}^{n-1} .$$

Iteriert man diese Ungleichung, so kommt, wie gewünscht,

$$A_n^n \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_1 .$$

3. Man kann die Bernoullische Ungleichung aber auch aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel herleiten. Man beachte dazu, daß die Bernoulli-Ungleichung eine triviale Identität für  $n = 0, 1$  ist. Sie ist trivialerweise auch richtig im Falle  $n \geq 2$ ,  $0 < x \leq 1 - 1/n$ , denn dann ist  $x^n > 0 \geq 1 + n(x - 1)$ . Es bleibt also noch der Fall  $n \geq 2$ ,  $a_1 := 1 + n(x - 1) > 0$ . Man setzt dann  $a_2 = \cdots = a_n := 1$ , so daß  $n x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ . Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel liefert schließlich

$$x^n = \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 = 1 + n(x - 1) .$$

## 9.4 Einige nützliche Grenzwerte

Bevor wir unsere theoretischen Überlegungen fortführen, wollen wir einige Grenzwerte berechnen, die z. B. als Werkzeug bei der Einführung der Potenzfunktionen mit *reellen* Exponenten in Kapitel 12 benötigt werden.

**Lemma 9.7** a) Es gilt  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \neq 0}} n^{-r} = 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}_+^*$  fest, insbesondere  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \neq 0}} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  fest ;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a > 0$  fest ;

<sup>16</sup>Lech Maligranda, *The AM - GM inequality is equivalent to the Bernoulli inequality*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 34, Spring 2012, pp. 1-2.

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

*Beweis.* a) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein  $N$  mit  $1/N < \varepsilon^{1/r}$ . Für alle  $n \geq N$  ist dann

$$|1/n^r - 0| \leq 1/N^r < \varepsilon.$$

b) Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $a \geq 1$  voraussetzen. Dann ist  $a_n := \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ , und mit der Bernoullischen Ungleichung gewinnt man die Abschätzung

$$a = (1 + a_n)^n \geq n a_n, \quad \text{also} \quad 0 \leq a_n \leq a/n,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

c) Es ist  $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ . Mit der binomischen Formel erhält man

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2, \quad n \geq 2,$$

also  $a_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$  und  $a_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 2$ . Aus Teil a) ergibt sich  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel liefert einen gänzlich verschiedenen Beweis für den Grenzwert c) in Lemma 6. Wir zeigen sogleich eine wesentliche Verschärfung in der folgenden Form: Für jede rationale Zahl  $a < 1$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a (\sqrt[n]{n} - 1) = 0.$$

Wegen  $\lim_{p \rightarrow \infty} p/(p+1) = 1$  können wir  $n^a$  durch eine geeignete Potenz  $n^{p/(p+1)}$  nach oben abschätzen (und das gilt dann auch für jede beliebige reelle Zahl, die kleiner als 1 ist) und daher  $a = p/(p+1)$  annehmen. Wir setzen ferner  $q = p+2$ , so daß

$$\ell := 1 - a - \frac{1}{q} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} > 0.$$

Für  $n \geq q$  schreiben wir die Zahl  $n$  dann als  $q$ -faches Produkt von  $\sqrt[q]{n}$  und  $n - q$  Einsen. Mit der erwähnten Ungleichung folgt dann

$$\sqrt[q]{n} \leq \frac{q \sqrt[q]{n} + (n - q)}{n} \leq \frac{q \sqrt[q]{n}}{n} + 1$$

und damit

$$n^{\frac{p}{p+1}} (\sqrt[n]{n} - 1) \leq q n^{-\ell}.$$

Wegen  $\ell > 0$  folgt die Behauptung aus Teil a) in Lemma 6.

Das Phänomen in dem vorigen Beispiel kann man dahingehend umschreiben, daß die Folge  $\sqrt[n]{n} - 1$  „schneller“ gegen Null geht als die Folge  $n^a$ ,  $0 < a < 1$ , gegen  $\infty$  strebt. Ebenso konvergiert die Folge  $a^n$  für  $|a| < 1$  schneller gegen Null als eine feste Potenz von  $n$  gegen Unendlich geht; m. a. W.: Es besteht bei  $|a| < 1$  die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r a^n = 0 \quad \text{für alle} \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Hierbei ist für  $r \leq 0$  natürlich nichts zu zeigen. Wir können daher  $r$  als positiv annehmen und dann sogar durch eine (größere) positive ganze Zahl  $p$  ersetzen. Wir schreiben  $|a^{-1}|$  in der Form  $1 + h$ ; es besteht wegen der binomischen Formel und  $h > 0$  für  $n \geq p+1$  dann die Ungleichung

$$(1 + h)^n \geq \binom{n}{p+1} h^{p+1},$$

und damit ist

$$0 \leq n^p |a|^n \leq \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \frac{n^p}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p)} = \frac{\frac{(p+1)!}{h^{p+1}}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{p}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite vor dem Faktor  $1/n$  konvergiert gegen  $\frac{(p+1)!}{h^{p+1}}$  und ist deshalb beschränkt. Infolgedessen konvergiert die Folge  $n^p a^n$  gegen 0.

## 9.5 Berechnung des Kreisinhalts

Als weitere Anwendung betrachten wir die Berechnung des Kreisinhalts durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige  $n$ -Ecke nach ARCHIMEDES. Zur Vereinfachung der Argumentation benutzen wir hier die Kenntnis der *trigonometrischen Funktionen*, insbesondere die Verdoppelungsformeln für den Sinus und den Cosinus (siehe Kapitel 14). Genauer wollen wir den folgenden Satz beweisen.

**Satz 9.8** *Es sei  $f_n$  bzw.  $F_n$  die Fläche des dem Einheitskreis  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks. Dann gilt*

$$f_{2n} = G(f_n, F_n), \quad F_{2n} = H(f_{2n}, F_n),$$

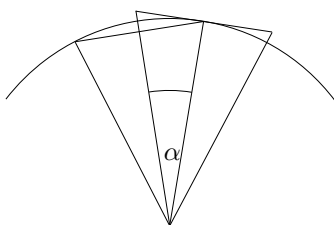
wobei  $G$  das geometrische und  $H$  das harmonische Mittel zweier reeller Zahlen bezeichnet.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\pi$  den halben Umfang des Einheitskreises und messen Winkel im *Bogenmaß*, also im Verhältnis zum vollen Winkel  $2\pi$ . Mit  $\alpha = \alpha_n = 2\pi/2n$  gewinnt man aus der folgenden Zeichnung die Beziehungen

$$f_n = n \sin \alpha \cos \alpha, \quad F_n = n \tan \alpha,$$

und damit auch

$$f_{2n} = 2n \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad F_{2n} = 2n \tan \frac{\alpha}{2}.$$



Figur 9.1

Damit muß man z. B. nur noch zeigen, daß für alle Winkel  $\alpha$  die folgenden Formeln bestehen:

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha \tan \alpha, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \tan \alpha}.$$

Wegen  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  ist die erste Formel unmittelbar einzusehen, und die zweite folgt ebenso leicht: Die rechte Seite ist nach der Verdoppelungsformel des Sinus nach leichter Umformung (bis auf den Faktor  $\sin \alpha$ ) gleich

$$\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha + 1}.$$

Setzt man hierin die Verdoppelungsformel für den Cosinus,

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1,$$

ein, so ergibt sich die Gleichheit der rechten Seite der zweiten Formel mit

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

*Bemerkung.* Mit diesem Satz kann man leicht zeigen, daß die Intervalle  $[a_j, b_j]$  mit  $a_j := f_{3,2^j}$  und  $b_j := F_{3,2^j}$  eine Intervallschachtelung mit gegen Null konvergierender Längenfolge bilden. Die hierdurch bestimmte reelle Zahl, die wir als Flächeninhalt des Einheitskreises zu interpretieren haben, ist, wie wir später nachweisen werden, gerade der oben mit  $\pi$  bezeichnete halbe Umfang der Einheitskreislinie.

## 9.6 Die Wallissche Zahlenfolge

Des weiteren wollen wir noch eine interessante Zahlenfolge betrachten, die von WALLIS eingeführt wurde.

$$p_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Man berechnet

$$\left( \frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+1}} / \frac{p_n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{4n^2 + 4n}{4n^2 + 4n + 1} < 1,$$

$$\left( \frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+2}} / \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} \right)^2 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2} > 1.$$

Insbesondere ist

$$\sqrt{2} = \frac{p_1}{\sqrt{2}} \leq \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} < \frac{p_n}{\sqrt{n}} \leq p_1 = 2$$

und damit

$$\sqrt{2} \leq p \leq 2$$

$$\text{für } p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\sqrt{n+1}}.$$

Man berechnet  $p$  mit der WALLISSchen *Produktfolge*

$$w_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = p_n^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Man kann nämlich mit Integralrechnung beweisen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist  $p = \sqrt{\pi}$ . (Siehe hierzu Kapitel 16 und auch Kapitel 12).

## 9.7 Asymptotisches Verhalten der Binomialkoeffizienten

Aus der letzten Beziehung folgen nützliche *asymptotische* Darstellungen von Binomialkoeffizienten.

*Definition.* Zwei Folgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $a_n b_n \neq 0$ , heißen *asymptotisch gleich*, in Zeichen  $a_n \cong b_n$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

*Beispiele.* 1.  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cong \frac{1}{2\sqrt{n}}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

2.  $\binom{2n}{n} \cong \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

## 9.8 Stetige Verzinsung und Eulersche Zahl

Neben der *Kreiszahl*  $\pi$  ist die wohl prominenteste *transzendente* reelle Zahl die *EULERSche Zahl*  $e$ . Sie tritt zum Beispiel beim Prozeß der *stetigen Verzinsung* auf. Hat man etwa ein Grundkapital  $K_0$ , das mit  $p$  Prozent verzinst wird, so besitzt man nach einem Jahr nach Auszahlung der Zinsen ein Kapital von

$$K_1 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Würde das Kapital aber jeden Monat verzinst, so hätte man am Ende des ersten Monats ein Kapital von  $K_{1/12}^{\text{mon}} = K_0 (1 + q/12)$ , wobei  $q := p/100$  gesetzt werde, und somit nach 12-facher Verzinsung am Ende des ersten Jahres ein Kapital von

$$K_1^{\text{mon}} = K_0 \left(1 + \frac{q}{12}\right)^{12}$$

und bei täglicher Verzinsung

$$K_1^{\text{täg}} = K_0 \left(1 + \frac{q}{365}\right)^{365}.$$

Bei *stetiger* Verzinsung, also Verzinsung „in jedem Augenblick“, hat man die Anzahl  $n$  der *Verzinsungszeitpunkte* über alle Grenzen wachsen zu lassen und fragt also, ob der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$$

existiert. Dies ist tatsächlich der Fall, wie wir in Kapitel 10 im Zusammenhang mit der Exponentialreihe sogar für beliebige komplexe Zahlen  $q$  beweisen werden. Der Spezialfall  $q = 1$  soll hier schon gesondert behandelt werden: Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existiert und wird zu Ehren von EULER mit  $e$  bezeichnet.

Wir zeigen die Konvergenzaussage in mehreren Schritten:

1. Die Folge  $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist streng monoton steigend.

Denn mit  $x := -1/(n+1)^2 > -1$  und der Bernoullischen Ungleichung ergibt sich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

woraus man mit leichten Umformungen die Behauptung

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

gewinnt.

2. Die Folge  $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  ist streng monoton fallend.

Dies folgt ganz entsprechend wie unter 1. mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, die zu der Abschätzung

$$\left(\frac{n}{n-1} \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

und nach weiteren Umformungen zu der Behauptung führt:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$



3. Nun ist offensichtlich  $a_n \leq a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$  und damit die Folge  $a_n$  nach oben beschränkt, etwa durch  $b_1 = 4$ . Infolgedessen ist die Folge  $(a_n)$  konvergent.

*Bemerkung.* Die Folge der  $b_n - a_n = a_n/n$  ist das Produkt einer beschränkten (sogar konvergenten) Folge mit einer Nullfolge und somit selbst eine Nullfolge. Also konvergiert auch die Folge  $(b_n)$  gegen  $e$ . Eine viel allgemeinere Aussage werden wir in Kapitel 10 herleiten.

## 9.9 Konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Wenden wir uns nun noch kurz dem Körper der komplexen Zahlen und den (normierten) Vektorräumen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  zu. Jedes  $z \in \mathbb{C}$  schreibt sich eindeutig in der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Man setzt  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  und nennt  $x$  den *Realteil*,  $y$  den *Imaginärteil* von  $z$ . Aus der Monotonie der reellen Wurzel folgt sofort

$$\max(|x|, |y|) \leq |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \max(|x|, |y|).$$

Hieraus ergibt sich der

**Satz 9.9** *Eine Folge  $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen ist genau dann eine Cauchy-Folge bzw. konvergent bzw. beschränkt, wenn dies die reellen Folgen  $(x_j = \operatorname{Re} z_j)$  und  $(y_j = \operatorname{Im} z_j)$  sind. Im konvergenten Fall ist*

$$\operatorname{Re} \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_j, \quad \operatorname{Im} \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_j,$$

also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_j + i \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_j.$$

**Folgerung 9.10**  $\mathbb{C}$  ist ein vollständig (reell) bewerteter Körper. In  $\mathbb{C}$  gilt der Satz von Bolzano und Weierstraß. Außerdem gilt ein „Kreisscheibenschachtelungsprinzip“: Ist  $B_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| \leq r_j\}$  eine Folge von abgeschlossenen Kreisscheiben mit  $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0$ , so besteht der Durchschnitt

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

aus genau einem Element.

*Beweis.* Nur die beiden letzten Aussagen bedürfen der Begründung. Ist  $(z_j)$  eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, so wähle man zunächst eine Teilfolge aus, so daß die Folge ihrer Realteile konvergiert, und dann aus dieser eine weitere Teilfolge, so daß auch die Folge der Imaginärteile konvergiert. Ist weiter eine Kreisschachtelung vorgegeben, so ist die Folge  $(z_j)$  der Mittelpunkte in  $B_0$  enthalten und deshalb beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir deshalb annehmen, daß  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z$  existiert. Wegen  $z_j \in B_n$  für alle  $j \geq n$  folgt sofort  $z \in B_n$  für alle  $n$  (dies ist eine Konsequenz aus der *Folgenabgeschlossenheit* der Kreisscheiben  $B_n$ ; siehe Lemma 7.15 und Satz 7.25). Wie im Reellen erkennt man sofort, daß der Durchschnitt der  $B_n$  wegen  $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0$  nicht mehr als ein Element enthalten kann.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Man beachte, daß sich aufgrund früherer Überlegungen (siehe die Implikation v)  $\implies$  i) in Satz 1) in *bewerteten* Körpern immer die Vollständigkeit aus dem Satz von Bolzano–Weierstraß schließen läßt.

2. Es könnte scheinen, daß sich aufgrund von Satz 8 der Begriff der Konvergenz von *komplexen* Zahlenfolgen vollständig dem der *reellen* Folgen unterordnet. Dieser Eindruck ist insofern falsch, als man

den Nachweis der Konvergenz einer komplexen Folge, insbesondere von komplexen Reihen im Allgemeinen besser *direkt* im Komplexen führt. Man mache sich z. B. klar, daß der Realteil der komplexen Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

ein wesentlich unübersichtlicheres Bildungsgesetz als die ursprüngliche Reihe besitzt.

3. Als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen nichts anderes als  $\mathbb{R}^2$ . Es ist daher nicht schwer, die obigen Überlegungen auf andere Vektorräume zu übertragen. Ist z. B.  $\mathbb{K}$  ein beliebiger bewerteter Körper, so wird auf dem Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  durch

$$\|x\|_{\infty} := \max_{j=1, \dots, n} |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

eine Norm erklärt. Wie oben sieht man, daß eine Folge  $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk}) \in \mathbb{K}^n$  genau dann konvergiert bzw. eine Cauchy-Folge bzw. beschränkt ist, wenn dies für alle *Komponentenfolgen*  $(x_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , richtig ist. Insbesondere ist  $\mathbb{K}^n$  in dieser *Maximumnorm* genau dann ein vollständig normierter Vektorraum, wenn  $\mathbb{K}$  vollständig bewertet ist.

4.  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  sind also bzgl. der Maximumnorm vollständig normiert. Nun gilt aber für die *euklidische Norm*

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

offensichtlich

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty}.$$

Hieraus folgt dann sofort auch für diese Norm das Analogon zu dem obigen Satz. Insbesondere sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  auch bzgl. der euklidischen Norm vollständig. Wir werden im Anhang zu Kapitel 17 sehen, daß dies sogar für *jede beliebige* Norm auf diesen endlich-dimensionalen Vektorräumen richtig bleibt.

## 9.10 Die Fibonacci - Folge

Bevor wir uns am Ende dieses Kapitels mit der Frage der Eindeutigkeit des reellen Zahlkörpers beschäftigen, soll hier ein längerer Einschub über die Folge der *FIBONACCI-Zahlen* und ihre Varianten erfolgen. Ohne auf die merkwürdige Begründung durch Vermehrungsgesetze von Kaninchenpaaren einzugehen, ist festzuhalten, daß sie eine der meistuntersuchten in der Geschichte der Mathematik ist; sie wird induktiv gegeben durch

$$1, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$$

also durch

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Im folgenden wollen wir uns der Beziehung dieser Folge zum *goldenen Schnitt* zuwenden. Bekanntlich (siehe das Ende von Kapitel 6) ist das *goldene Verhältnis*  $h$  die eindeutig bestimmte Zahl  $0 < h < 1$  mit

$$\frac{1}{h} = \frac{h}{1-h}, \quad \text{also } h^2 = 1-h \quad \text{oder} \quad \frac{1}{h} - h = 1.$$

Der *goldene Schnitt*  $g$  ist nach Definition der Kehrwert  $h^{-1}$ . Die quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

hat die Lösungen

$$h = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{und} \quad -(h+1) = -h^{-1} = -g,$$

d. h. es ist

$$x^2 + x - 1 = (x - h)(x + g) \quad \text{mit} \quad g = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} > 1.$$

Man kann einige Gesetzmäßigkeiten der Fibonacci-Folge spielerisch erkunden. Man bemerkt z. B.

$$1 \cdot 2 - 1^2 = 1, \quad 1 \cdot 3 - 2^2 = -1, \quad 2 \cdot 5 - 3^2 = 1, \dots$$

und vermutet sofort

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n.$$

Es ist aber auch

$$1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1, \quad 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1, \quad 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1, \dots$$

und damit vermutlich

$$a_n a_{n+3} - a_{n+1} a_{n+2} = (-1)^n.$$

Wir beweisen gleich viel allgemeiner das folgende

**Lemma 9.11** Für alle  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$  gilt

$$a_n a_{n+k+2} - a_{n+1} a_{n+k+1} = (-1)^n a_k.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  ist die Aussage korrekt wegen

$$a_0 a_{k+2} - a_1 a_{k+1} = a_{k+2} - a_{k+1} = a_k.$$

Sei sie nun für ein  $n$  und alle  $k$  bewiesen. Dann folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} a_{n+k+3} - a_{n+2} a_{n+k+2} &= a_{n+1} (a_{n+k+1} + a_{n+k+2}) - a_{n+2} a_{n+k+2} \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2}) a_{n+k+2} + a_{n+1} a_{n+k+1} \\ &= -(a_n a_{n+k+2} - a_{n+1} a_{n+k+1}) = (-1)^{n+1} a_k, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Hieraus kann man leicht Konvergenzaussagen für die Folge

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

der sukzessiven Quotienten ableiten. Aus der Beziehung

$$q_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{q_n}$$

folgt sofort  $q_n \geq 1$  und  $q_n \leq 2$ ; die Folge der Quotienten ist also beschränkt und ihr Grenzwert, wenn existent, muß zwischen 1 und 2 liegen. Nehmen wir die Existenz von  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$  an, so ist notwendig

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{q_n} \right) = 1 + \frac{1}{\alpha},$$

also  $\alpha = g$ . Hieraus folgt dann auch, daß die Folgen  $\left( \frac{a_{n+k}}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren, und zwar wegen

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

gegen  $g^k$ .

Es bleibt also zu begründen, warum die Folge  $(q_n)$  konvergent ist. Man sieht sofort, daß sie nicht monoton ist (was wegen der Beschränktheit ja ausreichend wäre). Immerhin ergibt sich aus dem obigen Lemma mit  $k = 1$ :

$$q_{n+2} - q_n = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n a_{n+3} - a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+2}} = \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+2}},$$

und die rechte Seite ist positiv für gerades  $n$  und negativ für ungerades  $n$ . Mit anderen Worten: die Folge

$$q_0, q_2, q_4, \dots \quad \text{ist monoton aufsteigend,}$$

und die Folge

$$q_1, q_3, q_5, \dots \quad \text{ist monoton absteigend.}$$

Damit existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n+1}.$$

Nun ist, wieder wegen des obigen Lemmas mit  $k = 0$ ,

$$q_{n+1} - q_n = \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+1}}.$$

Da offensichtlich  $a_n \geq n$ , geht die rechte Seite mit Sicherheit gegen Null, woraus sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n+1} = \alpha$$

folgt. Man kann hieraus sofort, mit alleiniger Benutzung der Definition der Konvergenz, schließen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$  existiert (und folglich gleich  $\alpha$  ist).

Wir geben noch eine weitere Begründung für die Konvergenz der Folge  $(q_n)$ . Entsprechend früherer Überlegungen ist für  $k \geq 1, n \geq 1$ :

$$|q_{n+k} - q_n| = \left| \frac{a_n a_{n+k+1} - a_{n+1} a_{n+k}}{a_{n+k} a_n} \right| = \frac{a_{k-1}}{a_{n+k} a_n} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n}.$$

Da die rechte Seite nicht von  $k$  abhängt, ist die Folge  $(q_n)$  also eine Cauchy-Folge und damit konvergent. – Wir sind nunmehr also „doppelt“ sicher und notieren:

**Satz 9.12** Die Folgen  $\left( \frac{a_{n+k}}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  sind konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = g^k = \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^k.$$

Man kann die Konvergenz und den Limes der Folge  $(q_n)$  auch durch eine explizite Formel bestimmen, die man mittels der *erzeugenden Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

findet (zu Potenzreihen siehe Kapitel 10 und 11). Wegen  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q_n \leq 2$  sieht man mit dem Majoranten-Kriterium (Satz 10.2) sofort, daß diese Reihe für alle  $x$  mit  $|x| < \frac{1}{2}$  (absolut) konvergiert; sie stellt (zumindest) dort also eine Funktion  $f(x)$  dar, die wir leicht bestimmen können. Es ist

nämlich nach bekannten Manipulationen mit (Potenz-) Reihen für  $|x| < \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 1)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 x - (a_0 + a_1 x) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a_{n+1} - a_{n+2}) x^{n+2} = -1,\end{aligned}$$

also

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(h-x)(x+g)} = C \left\{ \frac{1}{h-x} + \frac{1}{x+g} \right\}$$

mit dem Faktor  $C = \left(g + \frac{1}{g}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Aus der geometrischen Reihe gewinnt man hiermit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}g} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{g}\right)} + \frac{1}{\sqrt{5}h} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{h}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{g^{n+1}} + \frac{1}{h^{n+1}} \right) x^n.$$

Mit dem Identitätssatz für konvergente Potenzreihen (siehe Kapitel 11) schließt man hieraus die seltsame Formel

$$a_n = \frac{g^{n+1} + (-1)^n h^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}},$$

die ebenfalls zu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{g^{n+2} + (-1)^{n+1} h^{n+2}}{g^{n+1} + (-1)^n h^{n+1}} = g \frac{1 - (-1)^n \left(\frac{h}{g}\right)^{n+2}}{1 + (-1)^n \left(\frac{h}{g}\right)^{n+1}} \rightarrow g$$

führt.

Man kann nun aber noch einen gänzlich anderen Standpunkt einnehmen und unterstellen, daß die *Startwerte*  $a_0 = a_1 = 1$  in der Fibonacci-Folge nicht so wichtig sein sollten. Wir geben uns also einen beliebigen Punkt  $x_0 = (A_0, A_1) \in \mathbb{R}^2$  oder sogar in  $\mathbb{C}^2$  vor und fragen, was mit diesem Punkt unter der *Fibonacci-Operation*

$$x_n = (A_n, A_{n+1}) \mapsto x_{n+1} := (A_{n+1}, A_n + A_{n+1})$$

im Laufe der (diskreten) Zeit  $n \in \mathbb{N}$  geschieht. Man sieht sofort, daß alle *Zustände*  $x_n$  durch den *Anfangswert*  $x_0$  und die *klassische* Fibonacci-Folge  $(a_n)$  beschrieben werden durch

$$A_{n+1} = a_n A_1 + a_{n-1} A_0, \quad n \geq 1.$$

Denn dies ist richtig für  $n = 1$ , und es ergibt sich, die Gültigkeit für alle  $j \leq n$  unterstellt,

$$\begin{aligned}A_{n+2} &= A_n + A_{n+1} = (a_{n-1} A_1 + a_{n-2} A_0) + (a_n A_1 + a_{n-1} A_0) \\ &= (a_{n-1} + a_n) A_1 + (a_{n-2} + a_{n-1}) A_0 = a_{n+1} A_1 + a_n A_0.\end{aligned}$$

Ist nun  $A_n = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n = A_{n+1}$  und allgemein  $A_{n+k} = a_{k-1} A_{n+1}$  für alle  $k \geq 1$ , also  $A_{n+k} = 0$  für alle  $k \geq 0$  genau dann, wenn  $A_n = A_{n+1} = 0$ . Dies bedeutet aber

$$\begin{cases} a_{n-1} A'_1 + a_{n-2} A'_0 = 0 \\ a_n A'_1 + a_{n-1} A'_0 = 0, \end{cases}$$

und wegen  $a_0 a_{n-2} - a_{n-1}^2 \neq 0$  ist dies äquivalent zu  $(A_0, A_1) = (0, 0)$ . Mit anderen Worten:

Die Folge  $x_n = (A_n, A_{n+1})$  ist entweder die *triviale* Folge  $x_n = (0, 0)$ , oder ab hinreichend großem  $n$  ist *jede* Zahl  $A_n \neq 0$ .

Somit können wir, wie im klassischen Fall  $(A_0, A_1) = (1, 1)$ , für  $(A_0, A_1) \neq (0, 0)$  nach dem Verhalten der Folge

$$\left( \frac{A_{n+1}}{A_n} \right)$$

für großes  $n$  fragen. Nun ist

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{a_{n+1}A_1 + a_nA_0}{a_nA_1 + a_{n-1}A_0} = \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n} A_1 + A_0}{A_1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} A_0},$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen

$$\frac{gA_1 + A_0}{A_1 + g^{-1}A_0} = g,$$

sofern  $A_1 + g^{-1}A_0 \neq 0$ , d. h. nicht  $A_1 = -g^{-1}A_0 = -hA_0$ . Im letzteren Fall ist  $A_2 = A_1 + A_0 = (1 - h)A_0 = h^2A_0$ ,  $A_3 = A_2 + A_1 = (h^2 - h)A_0 = -h(1 - h)A_0 = -h^3A_0$ , etc., also

$$A_n = (-h)^n A_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = -h.$$

Das letzte Ergebnis (und die explizite Formel für die Glieder der Folge  $(a_n)$ ) lassen sich übrigens leicht mit etwas *Linearer Algebra* verstehen. Die Punktfolge  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , deren Verhalten wir in Abhängigkeit von dem Anfangswert  $x_0 = (A_0, A_1)$  verstehen wollen, entsteht offensichtlich durch sukzessives Anwenden der (linearen) Abbildung

$$x_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 + A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} =: \alpha(x_0),$$

d. h. die gegebene Folge besteht aus den *iterierten Bildern*

$$x_n = \alpha^n(x_0).$$

Man nennt so etwas (sogar bei Vorgabe eines *Diffeomorphismus*  $\alpha : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) ein *diskretes dynamisches System*.

Man kann nun versuchen, geeignete (lineare) Koordinaten so einzuführen, daß die Abbildung  $\alpha$  eine „einfachere“, überschaubare Gestalt bekommt. Neue Koordinaten  $x' = {}^t(A'_0, A'_1)$  erhält man aus  $x = {}^t(A_0, A_1)$  durch eine invertierbare Matrix  $C$ :

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten wird das Bild von  $(A'_0, A'_1)$  unter  $\alpha$  beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \end{pmatrix} \mapsto C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \end{pmatrix},$$

also durch die Matrix  $C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$ . Am schönsten wäre natürlich *Diagonalgestalt* für die neue Matrix:

$$C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

In der linearen Algebra zeigt man, daß dies sicher erreichbar ist, wenn das *charakteristische Polynom*

$$\det \begin{pmatrix} 0 - t & 1 \\ 1 & 1 - t \end{pmatrix} = t(t - 1) - 1$$

zwei verschiedene reelle (bzw. komplexe) Nullstellen besitzt, (die dann als  $\lambda_1, \lambda_2$  gewählt werden können). Dies wissen wir aber schon:

$$t^2 - t - 1 = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

mit  $\lambda_1 = \frac{1}{h} = g$  und  $\lambda_2 = -h$ . Wir überlassen dem Leser die Berechnung der konkreten Gestalt der Matrix  $C$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 1 & -h \end{pmatrix} \quad \text{mit der Inversen} \quad C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} h & g \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert nun die schon früher abgeleitete Formel für die  $a_n$ . Der Punkt  $(a_0, a_1) = {}^t(1, 1)$  hat die neuen Koordinaten  ${}^t(1 + g, 1 - h) = {}^t(g^2, h^2)$ , und diese gehen unter  $n$ -facher Anwendung von  $\alpha$  über in

$$\Lambda^n \begin{pmatrix} g^2 \\ h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^n & 0 \\ 0 & (-h)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 \\ h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{n+2} \\ (-h)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Hieraus berechnet sich  $a_n$  als erste Koordinate von

$$C^{-1} \begin{pmatrix} g^{n+2} \\ (-h)^{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} h & g \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{n+2} \\ (-h)^{n+2} \end{pmatrix};$$

es ist also, wie schon früher abgeleitet,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (hg^{n+2} + (-1)^n gh^{n+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (g^{n+1} + (-1)^n h^{n+1}).$$

In den neuen Koordinaten wird  $\alpha$  beschrieben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix},$$

und das dynamische System beschreibt sich in denkbar einfacher Weise durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \end{pmatrix} \mapsto x_1 = \begin{pmatrix} g A'_0 \\ -h A'_1 \end{pmatrix} \mapsto x_2 = \begin{pmatrix} g^2 A'_0 \\ h^2 A'_1 \end{pmatrix} \mapsto \dots$$

## 9.11 Die Eindeutigkeit des reellen Zahlkörpers

Wir kommen nun noch einmal zu der Problematik der „Existenz und Eindeutigkeit“ der reellen Zahlen zurück. Nachdem wir die Frage nach der *Existenz* eines vollständig archimedisch angeordneten Körpers schon im Anhang des letzten Kapitels positiv beantwortet haben, wollen wir hier die *Eindeutigkeitsfrage* klären. Wir erinnern daran, daß wir eine Abbildung  $\alpha: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$  von angeordneten oder bewerteten Körpern *folgenstetig* nennen, wenn aus  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$ ,  $a_j, a \in \mathbb{K}_1$ , stets  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(a_j) = f(a)$  folgt. Lesern, die sich dem Umgang mit diesem Begriff noch nicht gewachsen fühlen, wird empfohlen, diese Überlegungen vorerst zu überspringen. Hinter dem Beweis verbirgt sich jedoch ein sehr allgemeines Prinzip, das wir später herausarbeiten werden, um es z. B. zur Konstruktion der Potenzfunktionen und der Exponentialfunktion einzusetzen. Auch im Beweis des allgemeinen *Vervollständigungssatzes* wurde es im Prinzip schon verwendet.

Wir beweisen zunächst den vorbereitenden

**Satz 9.13** Sind  $\mathbb{K}_1$  und  $\mathbb{K}_2$  zwei archimedisch angeordnete Körper, so gibt es höchstens einen ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus  $\alpha : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ . Wenn er existiert, so ist er notwendig injektiv und folgenstetig.

*Beweis.* Nehmen wir zunächst an, daß ein solcher Homomorphismus  $\alpha$  existiert. Sind  $a_1, a_2 \in \mathbb{K}_1$  verschiedene Elemente, so ist ohne Einschränkung  $a_1 > a_2$  und damit  $\alpha(a_1) > \alpha(a_2)$ . Es sei weiter  $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1$  der zu  $\mathbb{Q}$  isomorphe Unterkörper, der aufgrund von Satz 8.19 dicht in  $\mathbb{K}_1$  liegt. Nach Voraussetzung ist die Einschränkung  $\alpha_0 : \mathbb{K}_0 \rightarrow \mathbb{K}_2$  von  $\alpha$  dann ebenfalls ein injektiver Körperhomomorphismus; ein solcher ist aber automatisch eindeutig bestimmt und ordnungserhaltend, und  $\alpha_0(\mathbb{K}_0)$  liegt dicht in  $\mathbb{K}_2$ . Es sei nun  $\varepsilon$  ein positives Element in  $\mathbb{K}_2$ . Wähle ein positives  $\delta \in \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1$  mit  $\rho := \alpha_0(\delta) < \varepsilon$ ; dann folgt für alle  $a, b \in \mathbb{K}_1$  mit  $|b - a| < \delta$ , d. h.

$$-\delta < b - a < \delta,$$

wegen der Ordnungserhaltung von  $\alpha$ :

$$-\varepsilon < -\alpha_0(\delta) = \alpha(-\delta) < \alpha(b) - \alpha(a) < \alpha(\delta) = \alpha_0(\delta) < \varepsilon,$$

also  $|\alpha(b) - \alpha(a)| < \varepsilon$ , womit insbesondere die Folgenstetigkeit von  $\alpha$  an jeder Stelle  $a \in \mathbb{K}_1$  gezeigt ist.

Hieraus folgt nun aber die Eindeutigkeit von  $\alpha$ : Ist nämlich  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Elementen  $r_j \in \mathbb{K}_0$  mit  $\lim r_j = a$ , so ist notwendig

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_0(r_j) = \alpha\left(\lim_{j \rightarrow \infty} r_j\right) = \alpha(a),$$

und wegen der oben mitbewiesenen Folgenstetigkeit von  $\alpha_0$  ist der links stehende Grenzwert unabhängig von der Auswahl der Folge  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim r_j = a$ , da für eine zweite solche Folge  $(r'_j)_{j \in \mathbb{N}}$  die Differenzenfolge  $r'_j - r_j$  in  $\mathbb{K}_0$  liegt und gegen Null konvergiert.  $\square$

Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar das nächste Satz, mit dem die Eindeutigkeitsfrage sofort erledigt werden kann.

**Satz 9.14** Es seien  $\mathbb{K}_1$  und  $\mathbb{K}_2$  zwei archimedisch angeordnete Körper, von denen der zweite die äquivalenten Bedingungen aus Satz 1 erfülle. Dann gibt es genau einen (notwendig injektiven) ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus  $\alpha : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ .

*Beweis.* Wir behalten die Bezeichnungen im Beweis des vorigen Satzes bei und brauchen nur zu zeigen, daß der eindeutig bestimmte ordnungserhaltende Körperhomomorphismus  $\alpha_0 : \mathbb{K}_0 \rightarrow \mathbb{K}_2$  zu einem solchen nach  $\mathbb{K}_1$  fortgesetzt werden kann. Nach dem oben Bewiesenen ist dazu notwendig, daß der Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_0(r_j)$$

für in  $\mathbb{K}_1$  konvergente Folgen  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $r_j \in \mathbb{K}_0$ , existiert. Diese ist notwendig eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}_0$ . Die zentrale Abschätzung im vorigen Beweis zeigt dann, daß auch die Folge  $(\alpha_0(r_j))$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}_2$  ist. Nach Voraussetzung an  $\mathbb{K}_2$  ist diese aber konvergent. Wir setzen dann

$$\alpha(a) := \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_0(r_j)$$

und wissen schon, daß diese Definition nur von dem Punkt  $a$  abhängt. Insbesondere stimmt die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $\mathbb{K}_0$  mit  $\alpha_0$  überein. Daß  $\alpha$  ein ordnungserhaltender Körperhomomorphismus ist, folgt aus den Grenzwertsätzen.  $\square$

**Folgerung 9.15** Erfüllen beide Körper  $\mathbb{K}_1$  und  $\mathbb{K}_2$  die äquivalenten Bedingungen aus Satz 1, so gibt es genau einen Körperisomorphismus  $\alpha : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ .  $\alpha$  ist automatisch ordnungserhaltend (und damit folgenstetig).



*Beweis.* Neben dem (eindeutig bestimmten ordnungserhaltenden) Körperhomomorphismus  $\alpha : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$  gibt es auch einen ebensolchen in der umgekehrten Richtung, den wir mit  $\beta$  bezeichnen. Es sei  $\iota : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_1$  die Zusammensetzung und  $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1$  der zu  $\mathbb{Q}$  isomorphe Unterkörper. Dann ist die Einschränkung des Körperhomomorphismus  $\iota$  auf  $\mathbb{K}_0$  notwendig die Identität, und aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, daß  $\iota$  die Identität auf  $\mathbb{K}_1$  und damit  $\alpha$  ein Isomorphismus sein muß. Es bleibt zu begründen, daß jeder solche Körperisomorphismus ordnungserhaltend sein muß. Wir haben aber schon bewiesen, daß jedes positive Element in  $\mathbb{K}_1$  ein Quadrat ist; dann ist aber auch sein Bild ein Quadrat und damit positiv.  $\square$

## 9.12 Weitere Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers

Aufgrund der vorstehenden Ergebnisse können wir den reellen Zahlkörper noch auf andere Weise charakterisieren, sofern wir die *Existenz* der reellen Zahlen, also eines archimedisch angeordneten, Cauchy-vollständigen Körpers voraussetzen !

**Satz 9.16** *Ein angeordneter Körper  $\mathbb{K}$  genügt genau dann den Bedingungen i) bis v) in Satz 1, ist also zum Körper der reellen Zahlen kanonisch isomorph, wenn er eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt :*

- vi)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch, und jeder archimedisch angeordnete Körper läßt sich ordnungstreu in  $\mathbb{K}$  einbetten (Maximalitätsaxiom).
- vii) In  $\mathbb{K}$  gilt der Satz von der  $g$ -adischen Entwicklung.

*Beweis.* vi) ist, wie wir oben gesehen haben, für jeden archimedischen, Cauchy-vollständigen Körper richtig. Erfüllt andererseits  $\mathbb{K}$  die Bedingung vi) und ist  $\tilde{\mathbb{K}}$  ein archimedischer, Cauchy-vollständiger Körper, so hat man ordnungserhaltende (injektive) Körperhomomorphismen

$$\tilde{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbb{K} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{K}}.$$

Die Zusammensetzung muß nach unseren früheren Ergebnissen die Identität sein. Also ist notwendig  $\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{K}}$ .

Unter vii) verstehen wir natürlich genauer die folgende Aussage:

*Für jede natürliche Zahl  $g \geq 2$  sind die  $g$ -adischen Reihen*

$$\sum_{\ell \leq k} a_\ell g^{-\ell}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad a_\ell \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

*konvergent in  $\mathbb{K}$ , und jedes nichtnegative Element in  $\mathbb{K}$  läßt sich durch eine solche Reihe darstellen.*

*Beweis.* Die Partialsummen

$$x_j := \sum_{\ell \leq k \leq j} a_\ell g^{-\ell}$$

solcher  $g$ -adischen Reihen bilden eine monoton aufsteigende Folge. Setzen wir ii) voraus, so ist unter Verwendung von iii)  $(g^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und damit

$$x_j \leq \sum_{\ell \leq k} (g-1)g^{-k} = g^\ell (g-1) \frac{1}{1-g^{-1}} = g^{\ell+1}.$$

Also ist die gegebene  $g$ -adische Reihe konvergent. Die Darstellung jedes positiven Elementes mittels solcher Reihen ergibt sich, wie wir in Satz 8.19 schon gezeigt haben, ganz allgemein für archimedisch angeordnete Körper.

Ist umgekehrt jede  $g$ -adische Reihe konvergent, so folgt insbesondere aus der Konvergenz der Reihe  $\sum_k g^{-k}$ , daß das Element  $1/g$  analytisch nilpotent, also die Folge  $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen in  $\mathbb{K}$

unbeschränkt ist; also ist  $\mathbb{K}$  archimedisch und läßt sich somit in einen maximalen archimedisch angeordneten Körper einbetten. Da dessen Elemente ebenfalls durch  $g$ -adische Reihen dargestellt werden, muß  $\mathbb{K}$  mit dem maximalen Körper übereinstimmen.  $\square$

*Bemerkung.* Die letzte Charakterisierung gibt uns natürlich die Möglichkeit an die Hand, den Körper der reellen Zahlen nun tatsächlich als den von den  $g$ -adischen Brüchen erzeugten angeordneten Körper zu konstruieren. Wir überlassen die (nicht ganz einfachen Einzelheiten) dem Leser, zumal wir schon ein auf der Cauchy-Vollständigkeit basierendes viel allgemeineres Resultat hergeleitet haben, das uns als Nebenprodukt die Existenz der reellen Zahlen lieferte.

### 9.13 Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Wir wollen noch die schon mehrfach erwähnte *Überabzählbarkeitsaussage* für die reellen Zahlen beweisen. Man kann dazu die Tatsache der *dyadischen*, d. h. „2“-adischen Entwicklung in Verbindung mit Satz 3.15 heranziehen. Einfacher geht dies aber mit dem Intervallschachtelungsprinzip.

**Satz 9.17** *Der angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  erfülle die Eigenschaft iii). Dann ist jedes Intervall  $I$  mit mindestens zwei Elementen (und damit auch  $I \setminus \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{K}$ ) überabzählbar.*

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß jedes abgeschlossene Intervall  $I = [a, b]$ ,  $a < b$ , überabzählbar ist (denn jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar). Angenommen, es wäre  $I = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . (Da  $I \cap \mathbb{Q}$  abzählbar unendlich ist, kann  $I$  nicht endlich sein). Durch Dritteln erhält man eine Intervallschachtelung  $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$  mit  $x_j \notin I_j$  für alle  $j$ . Sei  $\xi$  das gemeinsame Element von  $\bigcap_{j=0}^{\infty} I_j$ . Dann ist notwendig  $\xi = x_k$  für eine natürliche Zahl  $k$ , aber  $x_k \notin I_k$ . Widerspruch! Der zweite Teil folgt aus  $I = (I \setminus \mathbb{Q}) \cup (I \cap \mathbb{Q})$ .  $\square$

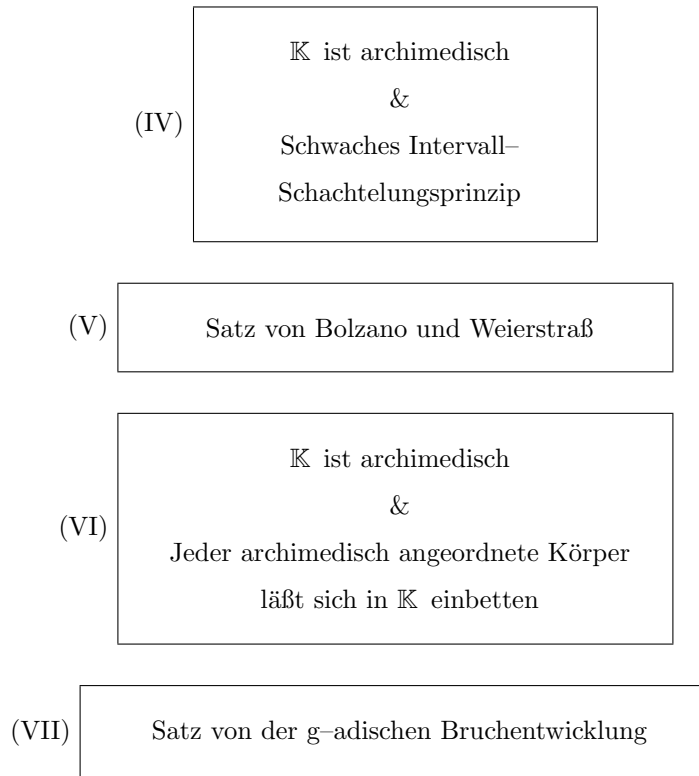
### 9.14 Zusammenfassung der verschiedenen Charakterisierungen

Zusammenfassend können wir folgendes festhalten: Der Körper der reellen Zahlen ist unter den angeordneten Körpern durch die folgenden äquivalenten Axiome charakterisiert. (Wenn wir im folgenden römische Ziffern zitieren, sind stets die entsprechenden Axiome gemeint. Auf die ebenfalls mit solchen Ziffern nummerierten PEANO-Axiome kommen wir an keiner Stelle des Textes mehr zurück). Insbesondere ist jede dort aufgeführte Aussage ein *Satz* im Körper  $\mathbb{R}$ , der zudem alle allgemein in angeordneten und speziell archimedisch angeordneten Körpern gültigen Sätze erfüllt.

(I)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch  
&  
Cauchy-vollständig

(II) Prinzip der monotonen Konvergenz

(III)  $\mathbb{K}$  ist archimedisch  
&  
Starkes Intervall-  
Schachtelungsprinzip



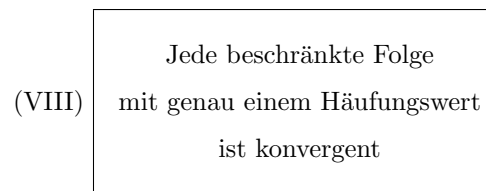
Wegen der Gültigkeit des Satzes von Bolzano–Weierstraß in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  ist gemäß Satz 7.23 und Satz 7.24 auch die folgende Aussage richtig (zu dem Begriff des *Häufungspunktes* einer Folge siehe ebenfalls Kapitel 7; bei Folgen in einem bewerteten Körper spricht man eher von *Häufungswerten* statt von Häufungspunkten).

**Satz 9.18** *Eine Folge in  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.*

*Bemerkung.* Die Bedingung der *Beschränktheit* kann man nicht unterdrücken, denn die Folge  $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$  besitzt genau einen Häufungswert, ist aber nicht konvergent.

Die Aussage von Satz 17 ist wiederum *charakteristisch* für die reellen Zahlen, d. h. sie gilt in einem *angeordneten* Körper  $\mathbb{K}$  nur dann, wenn  $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$ . Ist nämlich  $\mathbb{K}$  nicht archimedisch, so ist die in der Bemerkung angegebene Folge beschränkt und sie besitzt genau einen Häufungswert, ist aber nicht konvergent. Ist  $\mathbb{K}$  archimedisch, also  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ , aber  $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ , so wähle eine Folge  $q_j \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$  mit  $\lim q_j = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ . Offensichtlich hat die beschränkte Folge  $0, q_0, 0, q_1, 0, q_2, \dots$  genau einen Häufungswert in  $\mathbb{K}$ , nämlich  $0$ , ist aber nicht konvergent.  $\square$

Wir können also unseren 7 „Vollständigkeitsaxiomen“ noch ein weiteres 8. hinzufügen.



## Anhang: Unabhängigkeit der Axiomensysteme

Wir dokumentieren jetzt an Hand eines Beispiels, daß man zur Charakterisierung der reellen Zahlen vermittels des Vollständigkeitsaxioms und der beiden Intervallschachtelungsprinzipien nicht auf das Archimedische Axiom verzichten kann. Weitere Beispiele zeigen sogar, daß man es weder zu

(\*)  $\mathbb{K}$  besitzt nichttriviale Nullfolgen

noch zu

(\*\*)  $\mathbb{K}$  besitzt analytisch nilpotente Elemente, d. h. Elemente  $a \neq 0$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} a^j = 0$

abschwächen kann. Man beachte hierbei, daß (\*\*) tatsächlich in archimedisch angeordneten Körpern für alle Elemente  $a$  mit  $|a| < 1$  erfüllt ist (siehe Punkt ii) in Satz 8.16) und damit (\*) stets in solchen Körpern gilt.

Die ersten Beispiele sind die sogenannten  $\eta_1$ -Körper (siehe z. B. [26]); dies sind angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  mit der folgenden Eigenschaft: zu je zwei höchstens abzählbar unendlichen (evtl. auch leeren) Teilmengen  $A, B$  mit  $A < B$  (das bedeutet  $a < b$  für alle Elemente  $a \in A, b \in B$ ) gibt es ein Element  $x \in \mathbb{K}$  mit  $A < \{x\} < B$ . Strukturen mit dieser Trennungseigenschaft wurden zuerst von Hausdorff [25] eingeführt. Ein Beispiel eines solchen Körpers ist der Körper  ${}^*\mathbb{R}$  der sogenannten *nichtstandard* reellen Zahlen (siehe z. B. [20]). Wendet man die erwähnte Trennungseigenschaft auf  $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{K}, B = \emptyset$  an, so sieht man sofort, daß  $\mathbb{K}$  nichtarchimedisch angeordnet ist. Setzt man für eine beliebige Folge  $(x_k)$ :

$$A = \{0\}, \quad B = \{|x_j - x_k| > 0 : j, k \in \mathbb{N}\},$$

und wählt man  $\varepsilon$  mit  $A < \{\varepsilon\} < B$ , so ergibt sich unmittelbar: Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  ist trivial, insbesondere konvergent. Solche  $\eta_1$ -Körper sind also Beispiele von Cauchy-vollständigen Körpern, die keine nichttrivialen Nullfolgen besitzen. Damit genügen sie trivialerweise dem schwachen Intervallschachtelungsprinzip, aber auch dem starken: ist nämlich  $I_j = [a_j, b_j]$  eine Intervallfolge mit  $I_0 \supset I_1 \supset \dots$  und, ohne Einschränkung,  $a_j < b_j$  für alle  $j$ , so wendet man das Trennungsprinzip auf die Mengen

$$A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$$

an.

Nun zu einem Beispiel eines nichtarchimedisch angeordneten Körpers, der dem schwachen Axiom der Intervallschachtelung genügt und analytisch nilpotente Elemente enthält. Wir folgen hierbei stark der Präsentation von EFIMOW [21]. Es sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger angeordneter Körper. Man sieht unschwer, daß der Ring  $\mathbb{L}$  der *formalen Laurentreihen*

$$(+) \quad p = a_0 T^n + a_1 T^{n+1} + a_2 T^{n+2} + \dots, \quad a_j \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{Z}$$

einen Körper bildet, da jede formale Potenzreihe  $1 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$  eine Inverse besitzt. Ist  $p \neq 0$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , so daß in der Darstellung (+) der Koeffizient  $a_0$  von 0 verschieden ist. Wir nennen  $n = n(p)$  die *Ordnung* von  $p$  (für  $p = 0$  setzt man  $n(p) = -\infty$ ). Eine Laurentreihe  $p$  heiße *positiv*, wenn  $n(p) > -\infty$  und  $a_0 > 0$ . Die Menge  $P$  der positiven Elemente erfüllt augenscheinlich

$$P \cup (-P) \cup \{0\} = \mathbb{L}, \quad P \cap (-P) = \emptyset, \quad P + P \subset P \quad \text{und} \quad P \cdot P \subset P$$

und definiert also eine Anordnung auf  $\mathbb{L}$ . Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T^j = 0,$$

$\mathbb{L}$  besitzt also analytisch nilpotente Elemente. Ferner ist  $0 < T < a$  für jedes  $a \in \mathbb{K}, a > 0$  und folglich  $j < T^{-1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Also ist  $\mathbb{L}$  nichtarchimedisch angeordnet.

In  $\mathbb{L}$  ist bei beliebigem  $\mathbb{K}$  das schwache Intervallschachtelungsaxiom gültig. Dies sieht man wie folgt: Es sei  $I_j = [p_j, q_j]$  eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{L}$ . Da man zu einer unendlichen Teilfolge übergehen kann, darf man voraussetzen, daß  $p_j < p_{j+1} < q_{j+1} < q_j$  für alle  $j$  (denn im anderen Fall

ist  $\bigcap I_j$  trivialerweise nicht leer). Es sei  $n_j = n(p_j)$ . Diese Folge muß nach unten beschränkt sein; denn wäre  $\lim n_j = -\infty$  (ohne Einschränkung können wir wieder zu einer Teilfolge übergehen) und, wieder aus demselben Grunde,  $n_j > n_{j+1}$  für alle  $j$ , so müßten die Anfangskoeffizienten  $a_0^{(j)}$  von

$$p_j = a_0^{(j)} T^{n_j} + a_1^{(j)} T^{n_j+1} + \dots, \quad j \geq 1$$

positiv sein wegen  $p_{j+1} - p_j > 0$ . Dann wäre bei vorgegebenem  $k$  für hinreichend großes  $j$  aber  $n_j < n(q_k)$  und damit

$$p_j - q_k > 0,$$

was nicht sein kann. Mit dem gleichen Argument für  $-q_j < -q_{j+1} < -p_k$  erhält man auch die Beschränktheit der Folge  $n(q_j)$  nach unten. Es gibt folglich eine Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  derart, daß wir schreiben können

$$p_j = a_0^{(j)} T^m + a_1^{(j)} T^{m+1} + \dots$$

$$q_j = b_0^{(j)} T^m + b_1^{(j)} T^{m+1} + \dots,$$

wobei die Anfangskoeffizienten  $a_0^{(j)}$  und  $b_0^{(j)}$  aber Null sein dürfen. Nun folgt aus  $p_j < p_{j+1} < \dots < q_{j+1} < q_j$ :

$$(++) \quad a_0^{(j)} \leq a_0^{(j+1)} \leq \dots \leq b_0^{(j+1)} \leq b_0^{(j)}.$$

Gilt zusätzlich  $\lim (q_j - p_j) = 0$ , so muß für hinreichend großes  $j \geq j_0$  die Ungleichung  $q_j - p_j < T^{m+1}$  bestehen, woraus  $b_0^{(j)} = a_0^{(j)}$  für alle  $j \geq j_0$  folgt. Wir setzen

$$c_0 := a_0^{(j)} = b_0^{(j)}, \quad j \geq j_0.$$

Induktiv fortfahrend konstruiert man eine aufsteigende Folge

$$j_0 < j_1 < j_2 < \dots$$

mit

$$c_k := a_k^{(j)} = b_k^{(j)}, \quad j \geq j_k.$$

Die Reihe  $\sum_{k \geq 0} c_k T^{k+m}$  liegt in allen Intervallen  $I_j$ .

Ist  $\mathbb{K}$  speziell ein  $\eta_1$ -Körper, so genügt  $\mathbb{L}$  sogar dem starken Intervallschachtelungsprinzip. Die ersten Schritte für den Beweis dieser Aussage stimmen mit den obigen bis einschließlich der Ungleichungen (++) überein. Nun argumentiert man wie folgt weiter: entweder ist  $\lim (b_0^{(j)} - a_0^{(j)}) = 0$  und damit  $c_0 = a_0^{(j)} = b_0^{(j)}$  für  $j \geq j_0$  und man fährt mit der nächsten Koeffizientenfolge fort, oder es gibt ein  $c_0$  mit

$$a_0^{(j)} < c_0 < b_0^{(j)} \quad \text{für alle } j.$$

Dann ist aber schon  $p_j < c_0 T^m < q_j$  für alle  $j$ .

Ist dagegen  $\mathbb{K}$  selbst archimedisch angeordnet, so genügt der Körper  $\mathbb{L}$  nicht dem starken Intervallschachtelungsprinzip. Man braucht dazu nur die Folge der Intervalle

$$I_j = [jT, 1/j]$$

zu betrachten, deren Durchschnitt offensichtlich leer ist. (Für ein analoges Argument reicht schon die Voraussetzung, daß  $\mathbb{K}$  nichttriviale Nullfolgen besitzt).

Auch bei I) kann man das Archimedische Axiom nicht abschwächen. Es ist wohlbekannt (und wird im folgenden Kapitel bewiesen), daß sich jeder angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  ordnungserhaltend und *dicht* in einen Cauchy-vollständigen angeordneten Körper  $\tilde{\mathbb{K}}$  als Unterkörper einbetten läßt. Daraus folgt sofort: Besitzt  $\tilde{\mathbb{K}}$  analytisch nilpotente Elemente, so auch  $\tilde{\mathbb{K}}$ ;  $\mathbb{K}$  ist genau dann nichtarchimedisch angeordnet, wenn  $\tilde{\mathbb{K}}$  dies ist. Also existieren nichtarchimedisch angeordnete Cauchy-vollständige Körper

mit analytisch nilpotenten Elementen. Außerdem folgt mit diesem Argument, daß es tatsächlich einen Körper  $\mathbb{K}$  gibt, der alle Eigenschaften I) bis V) besitzt, nämlich die Cauchy-Vervollständigung des Körpers  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen*. Da man  $\mathbb{R}$ , wie wir oben gesehen haben, ordnungstreu in einen nichtarchimedischen Körper einbetten kann, kann man auch bei Axiom VI) nicht auf die Voraussetzung „archimedisch“ verzichten.



## 10 Konvergenzkriterien für Reihen in Banach - Räumen

Wir untersuchen in diesem Kapitel speziell unendliche Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad \text{insbesondere } a_j \in \mathbb{R},$$

in Bezug auf ihre Konvergenz. Wir wollen dabei vor allem allgemeine Kriterien entwickeln, mit denen man Konvergenz gegebenenfalls leicht erkennen kann. Wenn es uns möglich ist, formulieren wir die Aussagen auch für vollständig normierte Vektorräume  $V$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Wir haben z. B. schon gesehen, daß die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

*divergent* ist. Dagegen ist z. B.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergent mit Grenzwert 1. Es gilt nämlich

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

### 10.1 Reihen mit positiven reellen Gliedern, Majorantenkriterium

Für reelle Reihen mit nichtnegativen Gliedern  $a_j \geq 0$  ist die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen monoton steigend. Es folgt

**Lemma 10.1** Die reelle Reihe  $\sum a_j$ ,  $a_j \geq 0$ , ist genau dann konvergent, wenn es eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\sum_{j=0}^n a_j \leq K$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Ein außerordentlich wichtiges Vergleichskriterium ist

**Satz 10.2 (Majorantenkriterium)** Es seien  $a_j$  Elemente eines Banach-Raums (also z. B. reelle oder komplexe Zahlen), und  $c_j \geq 0$  seien reelle Zahlen, so daß

$$\|a_j\| \leq c_j \quad \text{für fast alle } j$$

gilt und  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$  konvergiert. Dann sind auch die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

konvergent.



*Bemerkungen.* 1. Man nennt  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$  in diesem Fall eine *Majorante* der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und schreibt für diesen Sachverhalt auch manchmal symbolisch

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \prec \sum_{j=0}^{\infty} c_j .$$

2. Durch Kontraposition gewinnt man aus dem Majorantenkriterium auch das sogenannte *Minorantenkriterium*: Sind  $a_j \leq b_j$  nicht negative reelle Zahlen und ist die Reihe  $\sum_j a_j$  divergent, so auch die Reihe  $\sum_j b_j$  (denn sonst wäre diese eine konvergente Majorante zu der Reihe  $\sum_j a_j$ ).

*Beweis* (Satz 2). Die Behauptung folgt sofort mit der Dreiecksungleichung und dem Cauchy-Kriterium:

$$\left\| \sum_{j=m}^n a_j \right\| \leq \sum_{j=m}^n \|a_j\| \leq \sum_{j=m}^n c_j < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq N(\varepsilon)$ . □

**Lemma 10.3** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , \quad s \in \mathbb{R} ,$$

ist genau dann konvergent, wenn  $s > 1$ .

*Bemerkung.* Die Potenzen  $n^s$  führen wir für beliebige reelle  $s$  erst in einem späteren Kapitel ein. Man setze hier zunächst  $s \in \mathbb{Q}$  und vertraue darauf, daß die verwendeten Monotonieaussagen auch für reelle  $s$  richtig bleiben.

*Beweis.* Ist  $s \leq 1$ , so ist

$$t_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^s} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} ,$$

so daß die Folge  $(t_n)$  der Partialsummen unbeschränkt ist.

Für  $s > 1$  betrachte man zu  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\nu$  mit  $n \leq 2^\nu - 1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} t_n \leq t_{2^\nu - 1} &= 1 + \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2^{(\nu-1)s}} + \cdots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^s} \right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + \cdots + 2^{\nu-1} \frac{1}{2^{(\nu-1)s}} < \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^k = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} . \end{aligned}$$

*Definition.* Die RIEMANNsche  $\zeta$ -Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist sogar für alle  $s \in \mathbb{C}$  definiert mit  $\operatorname{Re} s > 1$ . Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Verteilung von Primzahlen (Riemannsche Vermutung). Es gilt nämlich mit der Folge  $(p_k)$  der Primzahlen die *Produktdarstellung*

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} , \quad \operatorname{Re} s > 1 .$$

Wir beweisen später

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} .$$

Es gibt spannende Vermutungen über  $\zeta(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ungerade. Man beachte, daß erst im Jahre 1978 bewiesen wurde (APÉRY), daß  $\zeta(3)$  irrational ist.

## 10.2 Absolut konvergente Reihen

*Definition.* Eine unendliche Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad a_j \in V,$$

in dem normierten Vektorraum  $V$  heißt *absolut* konvergent, wenn die (reelle) Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|$  der Normen konvergent ist.

**Satz 10.4** *Absolut konvergente Reihen in Banach-Räumen (insbesondere also in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ) sind konvergent.*

*Beweis.* Die reelle Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|$  ist eine konvergente Majorante zu  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ . □

*Warnung.* Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, wie man an dem Beispiel der *alternierenden harmonischen* Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

in  $\mathbb{R}$  sieht. Diese ist wegen des anschließenden Kriteriums konvergent, nicht aber die Reihe der Absolutbeträge der Glieder.

## 10.3 Das Leibniz - Kriterium für alternierende Reihen

**Satz 10.5 (Leibniz)** *Es sei  $(a_j)$  eine monoton fallende (reelle) Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$$

*konvergent. Ist ihr Grenzwert  $s$ , so hat man die Fehlerabschätzung*

$$\left| s - \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j \right| \leq a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Es ist  $s_n - s_{n-2} = (-1)^n (a_n - a_{n-1})$  und damit

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \quad \text{und} \quad \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Ferner ist  $s_n - s_{n-1} = (-1)^n a_n$  und damit für geraden Index  $n = 2k$  die Differenz  $s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k} \geq 0$ , also  $s_{2k-1} \leq s_{2k}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = 0$ . Wegen des Intervallschachtelungsprinzips existiert genau eine Zahl  $s$  im Durchschnitt  $\bigcap_k [s_{2k-1}, s_{2k}]$ , so daß

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k-1},$$

woraus sich sofort auch  $s = \lim_n s_n$  ergibt. Schließlich liegt  $s$  stets zwischen  $s_n$  und  $s_{n+1}$ , so daß

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}. \quad \square$$

*Beispiele.* Es gilt, wie wir später noch beweisen werden,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots = \ln 2,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

*Bemerkungen.* 1. Daß die Folge  $(a_n)$  der Glieder der Reihe gegen Null konvergiert, ist, wie wir wissen, notwendig für die Konvergenz der alternierenden Reihe. Aber auch auf die Bedingung der Monotonie kann man im Leibniz-Kriterium nicht verzichten. Z. B. ist die alternierende Reihe mit  $a_{2k} = 1/2^k$ ,  $k \geq 0$ , und  $a_{2k-1} = 1/k$ ,  $k \geq 1$ , divergent.

2. Für eine alternierende Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = s$$

ist notwendig  $s = a_0 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{j+1}$ , so daß man durch Addition

$$s = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (a_j - a_{j+1})$$

erhält. Die neue Reihe ist evtl. wesentlich schneller konvergent als die ursprüngliche. Z. B. liefert dieses auch *Konvergenzverbesserung* genannte Verfahren bei der alternierenden harmonischen Reihe die Darstellung

$$2s = 1 + \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + - \dots \right).$$

Bricht man diese Reihe nach  $n$  Schritten ab, so ist der begangene Fehler kleiner als

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

während er bei der ursprünglichen Reihe nur kleiner als  $1/(n+1)$  ist.

## 10.4 Dezimalbruch - Entwicklung reeller Zahlen

Bevor wir uns weiteren Kriterien für (absolut) konvergente Reihen widmen, wollen wir uns noch einmal kurz der *Dezimalbruch-Entwicklung* der reellen Zahlen zuwenden. Wir wiederholen einen Teil der Aussagen, die wir schon allgemein für archimedisch angeordnete Körper eingesehen haben (siehe Kapitel 8).

Es sei  $g \geq 2$  eine fest gewählte natürliche Zahl (der Fall  $g = 10$  ist der uns geläufige der *Dezimal-Entwicklung*, der Fall  $g = 2$  der der *Dualdarstellung*). Mit den  $g$ -adischen „Ziffern“

$$z_\nu \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

schreiben wir dann

$$z_1 \dots z_k, z_{k+1} \dots z_n := g^k \cdot 0, z_1 z_2 \dots z_n$$

und

$$0, z_1 z_2 \dots z_n = \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}.$$

Sind  $z_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , unendlich viele Ziffern, so verstehen wir unter dem *unendlichen  $g$ -adischen Bruch*

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots$$

die unendliche Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{g^j}.$$

Wegen  $z_j < g$  hat diese die konvergente Majorante

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{g^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^j,$$

ist also selbst (in  $\mathbb{R}$ !) (absolut) konvergent.

Wir fassen noch einmal zusammen.

**Satz 10.6** Jede reelle Zahl  $r \in \mathbb{R}_+$  besitzt eine Darstellung

$$r = z_1 \dots z_k, z_{k+1} z_{k+2} \dots, \quad z_\nu \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

als (evtl. unendlicher)  $g$ -adischer Bruch, und umgekehrt stellt jeder (unendliche)  $g$ -adische Bruch eine reelle Zahl dar. Eine solche Darstellung ist eindeutig, wenn man verlangt, daß kein  $N$  existiert mit  $z_\nu = g-1$  für alle  $\nu \geq N$ .

**Satz 10.7** Eine  $g$ -adische Darstellung stellt genau dann eine rationale Zahl dar, wenn die Folge  $z_1, z_2, z_3, \dots$  schließlich periodisch wird.

Der Beweis findet sich in Kapitel 8.

## 10.5 Quotienten - und Wurzelkriterium

Wir kommen nun zu den klassischen (hinreichenden) Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen reeller und komplexer Zahlen, die uns mit einem Schlag zahlreiche konvergente Reihen zugänglich machen.

Das einfachste ist wohl das sogenannte *Quotientenkriterium*.

**Satz 10.8 (Quotientenkriterium)** Sind die (reellen oder komplexen) Zahlen  $a_n$  durchweg von Null verschieden, und gibt es eine positive reelle Zahl  $q < 1$ , so daß für (fast) alle sukzessiven Quotienten gilt :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q,$$

so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (absolut) konvergent. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ existiert und kleiner als } 1$$

ist. Sind jedoch fast alle dieser Quotienten dem Betrage nach größer oder gleich 1 oder ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

so ist die Reihe divergent.

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß die Voraussetzung für alle (und nicht nur für fast alle)  $n$  erfüllt ist. Mit vollständiger Induktion gewinnt man dann die Abschätzungen  $|a_n| \leq |a_0| q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist die geometrische Reihe eine (konvergente) Majorante für die zu untersuchende Reihe. Sind dagegen fast alle Quotienten dem Betrage nach größer oder gleich 1, so gilt  $|a_n| \geq |a_N|$  für alle  $n \geq N$ . Somit kann die Folge der  $a_n$  nicht gegen Null konvergieren.  $\square$

*Bemerkung.* Die divergente *harmonische Reihe* und die konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  lehren, daß das Quotientenkriterium keine Entscheidung bringt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

ist.

*Bemerkung.* Das Quotientenkriterium bleibt mutatis mutandis richtig in vollständig normierten Vektorräumen, wenn man die Beträge der Quotienten  $a_{n+1}/a_n$  ersetzt durch die Quotienten der Normen:

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}.$$

In Verbindung mit der Kenntnis des Grenzwertes der geometrischen Reihe liefert das Majorantenkriterium ähnlich gute *Abschätzungen* wie im Leibniz-Kriterium für den Fehler, den man begeht, wenn man eine absolut konvergente Reihe durch Partialsummen approximiert. Wir formulieren die einfach zu beweisende Aussage in Banach-Räumen.

**Satz 10.9** *Es existiere eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 < q < 1$  und eine natürliche Zahl  $n$ , so daß für alle  $k \geq 1$  gilt:*

$$\frac{\|a_{n+k+1}\|}{\|a_{n+k}\|} \leq q.$$

*Ist dann  $s$  der Grenzwert der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ , so besteht die Abschätzung*

$$\left\| s - \sum_{j=0}^n a_j \right\| \leq \frac{\|a_{n+1}\|}{1-q}.$$

*Beweis.* Die linke Seite wird der Norm nach abgeschätzt durch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n+k+1}\|$ , und diese besitzt die konvergente Majorante  $\|a_{n+1}\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ .  $\square$

Wir fügen noch eine eigenartige Verschärfung des Quotientenkriteriums für Reihen in Banach-Räumen an, das die besondere Rolle der *harmonischen* Reihe auf beeindruckende Weise hervorhebt.

**Satz 10.10 (Kriterium von Raabe)** *Sind für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  die Quotienten*

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq 1 - \frac{\beta}{n}$$

*mit einer Konstanten  $\beta > 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent. Sie ist dagegen divergent, wenn die  $a_n$  reell sind und für fast alle  $n$  die Abschätzung*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

*gilt.*

*Beweis.* Wir setzen zur Abkürzung  $\alpha_n := \|a_n\|$  und erhalten nach Voraussetzung für hinreichend große  $n$  die Ungleichungen

$$n\alpha_{n+1} \leq (n-\beta)\alpha_n = (n-1)\alpha_n + (1-\beta)\alpha_n < (n-1)\alpha_n.$$

Somit ist die Folge  $n\alpha_{n+1}$  monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also konvergent. Dies impliziert seinerseits die Konvergenz der *Teleskopreihe*

$$\sum_n b_n, \quad b_n := (n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1},$$

und wegen  $0 < (\beta-1)\alpha_n \leq b_n$  ergibt sich die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

Im zweiten Fall müssen fast alle  $a_n$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Seien ohne Einschränkung alle  $a_n$  positiv. Dann folgt  $n a_{n+1} \geq (n-1) a_n \geq 0$ ; die Folge  $n a_{n+1}$  ist also (schließlich) monoton aufsteigend und positiv, so daß  $n a_{n+1} \geq \alpha$  für fast alle  $n$  und eine geeignete *positive* Konstante  $\alpha$ . Somit besitzt die zu untersuchende Reihe die divergente *Minorante*  $\sum_n \alpha/n$ .  $\square$

*Beispiele.* 1. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

ist wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |z| = |z|$  konvergent für  $|z| < 1$  und divergent für  $|z| > 1$ .

2. Die Reihe

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! |z|^{n+1}}{(n+1)! |z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$  konvergent für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Sie heißt die *Exponentialreihe*; die durch sie gegebene *Exponentialfunktion*  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stellt eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik und Physik dar.

## 10.6 Binomial - Reihen

Die geometrische Reihe in der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  und die beiden in den obigen Beispielen betrachteten Reihen sind sogenannte *Potenzreihen*.

*Definition.* Es sei  $V$  ein Banach-Raum über dem Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Eine (formale) Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in V, \quad z_0 \in \mathbb{K},$$

heißt eine *Potenzreihe* mit den *Koeffizienten*  $a_n$  um den *Entwicklungspunkt*  $z_0$ .

Wir interessieren uns für die Frage, für welche  $z \in \mathbb{K}$  eine solche Reihe konvergiert, wobei wir selbstverständlich die *Folge der Partialsummen* auf Konvergenz untersuchen müssen und unter dem Symbol „ $a_n (z - z_0)^n$ “ das Element  $(z - z_0)^n a_n \in V$  verstehen. Augenscheinlich liegt für  $z = z_0$  Konvergenz vor. Dies kann tatsächlich auch der einzige Wert sein, für den die Potenzreihe konvergiert, wie das Beispiel  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$  zeigt. (Hier ist  $V = \mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Wir können und werden uns bei den Untersuchungen im Kapitel 11 auf den Fall  $z_0 = 0$  beschränken.

Wir geben hierzu noch als Beispiel die *Binomial-Reihen* an, die außerordentlich wichtig sind für die Darstellung und Berechnung der *Wurzelfunktionen*.

*Beispiel.* Die *Binomial-Reihen* sind definiert durch

$$B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n,$$

wobei für beliebiges  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  die (verallgemeinerten) *Binomial-Koeffizienten* erklärt werden durch

$$\binom{s}{n} := \frac{s(s-1) \cdots (s-n+1)}{n!}.$$

Für  $s := m \in \mathbb{N}$  brechen diese Reihen selbstverständlich mit dem Glied  $m+1$  ab und stellen wegen der binomischen Formel die Potenz  $(1+z)^m$  dar:

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für  $s \notin \mathbb{N}$  sind dies unendliche Reihen mit Konvergenzradius 1, wie man dem Quotientenkriterium entnimmt:

$$\left| \binom{s}{n+1} \binom{s}{n}^{-1} \right| |z| = \frac{|s-n|}{n+1} |z|$$

konvergiert bei festem  $s \notin \mathbb{N}$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $|z|$ . Wir kommen auf diese Reihen noch im Kapitel 12 zurück.

Wir wollen Satz 9 noch exemplarisch am Beispiel der Exponentialreihe demonstrieren. Wir setzen

$$R_{n+1}(z) := \exp z - \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{z}{n+2} + \frac{z^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right\}.$$

Für  $|z| \leq \frac{n}{2} + 1$  besitzt die Reihe in geschweiften Klammern offenbar die geometrische Reihe mit  $q = 1/2$  als Majorante. Wir erhalten damit

**Satz 10.11** Für alle komplexen Zahlen  $z$  mit  $|z| \leq \frac{n}{2} + 1$  gilt

$$\left| \exp z - \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \right| \leq \frac{2|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Insbesondere ist für  $|z| \leq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  auch

$$\left| \exp z - \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \right| \leq \frac{2}{(n+1)!}.$$

*Bemerkungen.* 1. Aus der ersten Abschätzung folgt mit  $n = 0$ , daß die Exponentialfunktion *folgenstetig* im Nullpunkt ist. Dies gilt auch für jeden Punkt  $a \in \mathbb{C}$ , wie wir weiter unten mit Hilfe der sogenannten *Funktionalgleichung* einsehen werden.

2. Satz 11 liefert eine bequeme Methode zur Berechnung von einzelnen Werten der Exponentialreihe, insbesondere dann, wenn man die *Näherungspolynome*  $\exp z - R_{n+1}(z)$  mit Hilfe des *HORNER-Schemas* auswertet (siehe Ende Kapitel 2). Für  $\exp 1$  (dies ist die früher schon eingeführte Eulersche Zahl  $e$ ; siehe Satz 13) findet man so die Näherungswerte

$$\left( \dots \left( \left( \frac{1}{N} + 1 \right) \frac{1}{N-1} + 1 \right) \frac{1}{N-2} + \dots \right) \frac{1}{2} + 1 + 1,$$

die  $e$  bis auf einen Fehler vom Absolutbetrag  $2/(N+1)!$  approximieren. Mit  $N = 15$  gewinnt man hieraus z. B.

$$e = 2,718\,281\,828\,459 \pm 10^{-12}.$$

Die zweite Abschätzung in Satz 11 ermöglicht des Weiteren einen schnellen Nachweis der *Irrationalität* von  $e$ . Daß die Kreiszahl  $\pi$  irrational ist, ist wesentlich mühsamer festzustellen (und daß beide *transzendent* sind, noch viel schwerer).

**Folgerung 10.12** Die Eulersche Zahl  $e$  ist irrational.

*Beweis.* Angenommen, es sei  $e = p/q$  rational. Wendet man dann die zweite Abschätzung an auf  $z = 1$  und  $n = \max(2, q)$ , so folgt

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = \frac{\alpha}{(n+1)!}$$

mit einer reellen Konstanten  $\alpha$  zwischen 0 und 2. Multiplikation mit  $n!$  führt dann zu  $\alpha/(n+1) \in \mathbb{N}^*$ , was nicht sein kann.  $\square$

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt noch eine völlig andere Darstellung, die ihren Zusammenhang mit Anwendungen auf Prozesse wie z. B. den der *stetigen Verzinsung* oder den des *radioaktiven Zerfalls* verdeutlicht (siehe auch Kapitel 9).

**Satz 10.13** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z.$$

Insbesondere ist die Eulersche Zahl

$$e = \exp 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

*Beweis.* Wir beweisen gleich eine schärfere Aussage, die wir später noch zur axiomatischen Charakterisierung der Exponentialfunktion verwenden wollen, nämlich: Ist  $(z_n)$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $\lim_n z_n = z$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp z.$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe können wir zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $K$  so groß wählen, daß sowohl

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|z| + 1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$$

als auch für  $n \geq K$  die Abschätzung  $|z_n| \leq |z| + 1$  gilt. Für diese  $n \geq K$  ist dann

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

wie man sofort mit der binomischen Formel für den linken Ausdruck sieht, dem Betrage nach kleiner oder gleich

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left| \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!} \right| + \sum_{k=K}^n \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k} + \sum_{k=K}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!},$$

wobei die letzte Summe schon kleiner als  $\varepsilon/3$  ist. Zur Abschätzung der ersten und der zweiten Summe beachte man

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!},$$

woraus insbesondere  $\lim_n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$  folgt. Damit ist auch die zweite Summe kleiner als

$$\sum_{k=K}^n \frac{(|z| + 1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da die Summanden der ersten Summe für  $n$  gegen  $\infty$  gegen Null konvergieren und die Anzahl  $K$  der Summanden nicht von  $n$  abhängt, findet man ein  $N \geq K$  derart, daß für alle  $n \geq N$  auch die erste Summe kleiner als  $\varepsilon/3$  ist. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

## 10.7 Das Wurzelkriterium

Einen wichtigen Schlüssel zur Frage nach der Konvergenz von Reihen und speziell von Potenzreihen liefert uns das sogenannte *Wurzelkriterium*. In seiner einfachsten Form ist es eine direkte Anwendung des Majorantenkriteriums in Verbindung mit der geometrischen Reihe. Der Beweis erübrigt sich deshalb an dieser Stelle.

**Satz 10.14 (Wurzelkriterium)** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit Gliedern  $a_n$  in einem Banach-Raum  $V$  ist sicher dann konvergent, wenn es eine positive reelle Zahl  $q < 1$  gibt mit

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q$$



für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sie ist sicher dann divergent, wenn für unendlich viele natürliche Zahlen  $n$  die Ungleichung

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \geq 1$$

besteht.

*Bemerkung.* Trotz des einfachen Beweises ist das Wurzelkriterium wesentlich schärfer als das Quotientenkriterium. Ist das Quotientenkriterium nämlich erfüllt, also (ohne Einschränkung)

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit festem  $0 < q < 1$ , so ist, wie wir früher gezeigt haben,

$$\|a_n\| \leq q^n \|a_0\|$$

und

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q \sqrt[n]{\|a_0\|}$$

und deshalb wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_0\|} = 1$  auch

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q_1$$

für jedes  $q_1$  mit  $q < q_1 < 1$  und alle hinreichend großen  $n$ . Somit ist das Quotientenkriterium eigentlich überflüssig. Wegen seiner leichten Handhabbarkeit ist es jedoch absolut unentbehrlich.

Wir geben noch ein Beispiel dafür an, daß das Wurzelkriterium tatsächlich stärker ist, also eine Entscheidung über Konvergenz herbeiführen kann, wenn das Quotientenkriterium versagt. Betrachte dazu für reelle oder komplexe  $a$  mit  $0 < |a| < 1$  die folgende Reihe:

$$a + 1 + a^3 + a^2 + a^5 + a^4 + a^7 + a^6 + \dots,$$

also eine *Umordnung* der (konvergenten) geometrischen Reihe  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ : alle Glieder der geometrischen Reihe kommen vor, und zwar genau einmal. Die sukzessiven Quotienten in dieser Reihe sind abwechselnd  $1/a$  und  $a^3$ ; das Quotientenkriterium ist also wegen  $|1/a| > 1$ ,  $|a^3| < 1$  nutzlos. Andererseits ist bezüglich des Wurzelkriteriums der entscheidende Ausdruck

$$\sqrt[n]{|a|^{n+1}} = |a| \sqrt[n]{|a|}$$

für gerade  $n$  und

$$\sqrt[n]{|a|^{n-1}} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{|a|}}$$

für ungerade  $n$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |a| < 1.$$

Also ist die Reihe konvergent, und wir können ihren Wert  $s$  durch geschicktes Klammern sofort ausrechnen:

$$s = (a+1) + (a^3+a^2) + \dots = (a+1)(1+a^2+a^4+\dots) = \frac{1+a}{1-a^2} = \frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+\dots.$$

Dies ist kein Zufall: Wir werden am Ende des vorliegenden Kapitels allgemein zeigen, daß eine absolut konvergente Reihe stets beliebig umgeordnet werden kann, ohne daß die Konvergenz verloren geht oder der Grenzwert sich ändert.

In konvergenten Reihen, die nicht absolut konvergieren, darf man jedoch i. A. die Reihenglieder nicht beliebig umordnen. Es ist z. B. im Reellen

$$\begin{aligned} 0 \neq s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right). \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Reihendarstellung mit  $1/2$  und addiert sie zu der zweiten, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}s &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \cdots \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von Satz 8.13 schließt man leicht, daß die nicht geklammerte Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

konvergent ist und den von  $s$  verschiedenen Grenzwert  $3s/2$  besitzt. Die letzte Reihe ist aber wieder eine *Umordnung* der ursprünglichen.

*Bemerkung.* Dieses Verhalten ist typisch für solche konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihen (die man manchmal auch unter Mißbrauch der Logik als *nicht absolut konvergente* Reihen bezeichnet). Es gilt nämlich der folgende berühmte Satz von Riemann und Lejeune-Dirichlet (1837).

**Satz 10.15** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$  eine nicht absolut konvergente reelle Reihe und  $S \neq s$ . Dann gibt es Umordnungen der Reihe, d. h. Permutationen  $\pi \in \text{Perm } \mathbb{N}$ , s. d. die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$$

*gegen  $S$  konvergiert. Es gibt ferner Umordnungen, die bestimmt gegen  $\infty$  und solche, die bestimmt gegen  $-\infty$  divergieren, also insbesondere solche, die nicht konvergieren.*

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß alle Reihenglieder  $a_n$  von Null verschieden sind, und setzen  $a_n^+ := \max(a_n, 0)$  und  $a_n^- := \max(-a_n, 0)$ . Wäre nun eine der beiden Reihen  $\sum_n a_n^+$  bzw.  $\sum_n a_n^-$  konvergent, so wäre es auch die andere wegen  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ . Dann wäre wegen  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$  aber die zu untersuchende Reihe absolut konvergent im Gegensatz zur Voraussetzung. Somit sind die beiden Reihen  $\sum_n a_n^+$  und  $\sum_n a_n^-$  bestimmt divergent gegen  $\infty$ ; insbesondere sind  $(a_n^+)$  und  $(a_n^-)$  (unendliche) Folgen und bleiben dies auch, wenn man aus ihnen die Glieder entfernt, die gleich Null sind. Wir bezeichnen diese neuen Folgen mit  $(p_k^+)$  bzw.  $(p_k^-)$ . Sie sind die Teilfolgen der *positiven* Glieder der vorgelegten Reihe bzw. der Absolutbeträge der *negativen* Glieder und damit Nullfolgen. Gemäß unserer Voraussetzung  $a_n \neq 0$  für alle  $n$  tritt damit jedes Glied  $a_n$  in genau einer der Teilfolgen  $(p_k^+)$  bzw.  $(-p_k^-)$  auf (und zwar genau einmal).

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zur Tat schreiten und eine geeignete Umordnung der Reihe zu fest gewähltem  $S$  konstruieren. Wir wählen zuerst eine kleinste Zahl  $m_0$  mit

$$\sum_{k=0}^{m_0} p_k^+ > S$$

und dann eine kleinste Zahl  $m_1$  mit

$$\sum_{k=0}^{m_0} p_k^+ + \sum_{k=0}^{m_1} (-p_k^-) < S.$$

Induktiv fortfahrend gewinnt man so eine neue Reihe

$$p_0^+ + \cdots + p_{m_0}^+ + (-p_0^-) + \cdots + (-p_{m_1}^-) + p_{m_0+1}^+ + \cdots + p_{m_2}^+ + \cdots,$$

die eine Umordnung der Ausgangsreihe darstellt. Da die  $m_j$  aber stets *minimal* gewählt wurden, wird der Unterschied zwischen  $S$  und den Partialsummen dieser Reihe von  $m_0$  ab bis  $m_1 - 1$  kleiner als  $p_{m_0}^+$ , ab  $m_1$  bis  $m_2 - 1$  kleiner als  $p_{m_1}^-$ , etc. Hieraus folgt, daß die so gewählte Umordnung gegen  $S$  konvergiert.

Der zweite Teil ergibt sich aus einer geeigneten Variante des vorstehenden „Zickzack-Verfahrens“ des Über- und Unterschreitens von  $S$ , indem man induktiv nach  $n \in \mathbb{N}$  abwechselnd die Zahl  $n$  (minimal) überschreitet und danach (maximal) unterschreitet. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.  $\square$

*Bemerkung.* Es gibt eine noch wesentlich allgemeinere Fassung des Riemannsches Umordnungssatzes, die wir jedoch erst in Kapitel 11 formulieren. Der Beweis kann entsprechend wie oben geführt werden.

## 10.8 Der große und der kleine Umordnungssatz

Bei absolut konvergenten Reihen hingegen konvergieren alle Umordnungen gegen denselben Grenzwert. Dies ist eine Folgerung aus dem *großen Umordnungssatz*, den wir jetzt formulieren und beweisen wollen. Er besagt sogar, daß man in solchen Reihen auch sogenannte *totale* Umordnungen vornehmen, d. h. z. B. erst alle geraden Glieder und dann alle ungeraden Glieder „aufsummieren“ und dann deren Summe bilden kann. Im allgemeinen versteht man unter einer *totalen Umordnung* einer Reihe die Vorgabe einer disjunkten Zerlegung  $M_0 \cup M_1 \cup \dots$  von  $\mathbb{N}$  in höchstens abzählbar viele Mengen  $M_j$ , die selbst mit einer festen (aber nicht notwendig mit der von der natürlichen Ordnung auf  $\mathbb{N}$  induzierten) Anordnung versehen seien. Dann ist für jedes Element  $j \in \mathbb{N}$  der Ausdruck

$$\sum_{n \in M_j} a_n$$

entweder eine endliche Summe oder eine wohlbestimmte Reihe. Wir setzen  $s_j$  für den Wert der Summe bzw. der Reihe, wenn die letztere konvergiert, und fragen nach Bedingungen, unter denen alle  $s_j$  existieren und die aus den  $s_j$  gebildete Reihe gegen  $\sum_n a_n$  konvergiert, wann also, in suggestiver Notation, die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{j=0}^{\infty} s_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{n \in M_j} a_n \right)$$

besteht.

Man macht sich leicht (unter Verwendung von Lemma 3.11) klar, daß die Formulierung im folgenden Satz nur eine andere Fassung des eben Gesagten ist. Hierbei dürfen wir wieder *Reihen mit Gliedern in Banach-Räumen* betrachten.

**Satz 10.16 (Großer Umordnungssatz)** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sei absolut konvergent, und es sei  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine injektive Abbildung. Wir setzen  $a_{j,k} := a_n$ , wenn  $(j, k) = \pi(n)$ , und  $a_{j,k} := 0$  sonst. Dann gilt :

- i) alle Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  fest, sind absolut konvergent ;

ii) die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} s_j$  ist absolut konvergent, wobei  $s_j := \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}$ ;

iii) es besteht die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{j=0}^{\infty} s_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \right).$$

Ist  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion, also eine *Permutation* von  $\mathbb{N}$ , so kann man den vorstehenden Satz anwenden auf die injektive Abbildung  $\pi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \simeq \{0\} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Mit  $\pi^{-1}(n) = (0, k)$  ist  $n = \pi(k)$ , also  $a_{0,k} = a_{\pi(k)}$ , und  $a_{j,k} = 0$  sonst und folglich  $s_0 = \sum_k a_{\pi(k)}$ ,  $s_j = 0$ ,  $j \geq 1$ . Somit ergibt sich als Spezialfall der (*kleine*) *Umordnungssatz*.

**Folgerung 10.17 (Kleiner Umordnungssatz)** Ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent, so gilt für jede Bijektion  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

*Bemerkung.* Allerdings darf man, wovon man sich verhältnismäßig einfach überzeugen kann, eine *beliebige* konvergente Reihe umordnen, wenn nur die Permutation nicht allzu „wild“ ist. Eine solche „zahme“ Situation liegt z. B. dann vor, wenn man die ursprüngliche Reihe in gleichlange Stücke einteilt und nur innerhalb dieser Stücke permutiert. Allgemeiner ist das Umordnen bzgl. einer Permutation  $\pi$  dann erlaubt, wenn die Folge  $|\pi(j) - j|$  beschränkt ist. Aber auch diese Bedingung ist weder notwendig noch hinreichend. Z. B. sind auch Umordnungen vom folgenden Typ

$$a_0 + a_1 + \underbrace{a_3 + a_2}_{\text{Stück 1}} + \underbrace{a_7 + a_6 + a_5 + a_4}_{\text{Stück 2}} + \underbrace{a_{15} + \cdots + a_8}_{\text{Stück 3}} + \underbrace{a_{31} + \cdots + a_{16}}_{\text{Stück 4}} + \cdots$$

stets wieder konvergent. Denn wähle zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|s - s_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ ; bezeichnet dann  $t_n$  die  $n$ -te Partialsumme der umgeordneten Reihe, so gilt für  $0 \leq k < 2^{n-1}$  die Beziehung

$$t_{2^{n-1}+k} = s_{2^{n-1}} + s_{2^n} - s_{2^n-k},$$

also insbesondere für  $2^{n-1} > N$ :

$$|t_{2^{n-1}+k} - s| \leq |s_{2^{n-1}} - s| + |s_{2^n} - s| + |s_{2^n-k} - s| < 3\varepsilon.$$

Andererseits kann man durch Beispiele belegen, daß die umgeordnete Reihe

$$a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\text{Stück 1}} + \underbrace{a_4 + a_6 + a_5 + a_7}_{\text{Stück 2}} + \underbrace{a_8 + a_{10} + \cdots + a_{14}}_{\text{Stück 3}} + \underbrace{a_9 + a_{11} + \cdots + a_{15}}_{\text{Stück 4}} + \underbrace{a_{16} + \cdots}_{\text{Stück 5}}$$

(mit den gleichen Längen der Abschnitte, die umgeordnet werden, wie im vorigen Beispiel!) divergieren kann. Man wähle z. B.  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$ . Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe  $\sum_n a_n$  konvergent. Bildet man nun die Partialsummen für die umgeordnete Reihe stets bis zur Mitte der jeweils „unterklammerten“ Ausdrücke, so erhält man eine Teilfolge  $T_k$  der Folge der Partialsummen  $t_n$  der umgeordneten Reihe, nämlich

$$T_k = t_{n_k} \quad \text{mit} \quad n_k = 3 \cdot 2^{k-2} - 1 \quad \text{für} \quad k \geq 2,$$

für die

$$T_k + A_k = s_{2^k-1} \quad \text{mit} \quad A_k := a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+3} + \cdots + a_{2^k-1}$$

gilt. Die Folge der  $A_k$  wächst aber über alle Schranken wegen

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2^{k-1} + 1}} + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1} + 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^k - 1}} \geq \frac{2^{k-2}}{\sqrt{2^k}} = \frac{1}{4} \sqrt{2}^k \rightarrow \infty,$$

so daß auch die Folge  $T_k$  unbeschränkt ist.

*Beweis* (Satz 16). Nach Voraussetzung existiert

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

Somit besteht für jede *endliche* Teilmenge  $E \subset \mathbb{N}$  und jedes fest gewählte  $j \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\sum_{k \in E} \|a_{j,k}\| \leq \alpha,$$

woraus sich unmittelbar die *absolute* Konvergenz jeder Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}, \quad j \in \mathbb{N},$$

ergibt. Es sei nun  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ , und zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  werde die Zahl  $N$  so groß gewählt, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|a_n\| \leq \varepsilon.$$

Seien ferner  $J, K$  natürliche Zahlen, so daß  $a_0, \dots, a_N$  unter den  $a_{j,k}$ ,  $0 \leq j \leq J$ ,  $0 \leq k \leq K$ , vorkommen. Dann gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^J a_{j,k} - A \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|a_n\| \leq \varepsilon,$$

wobei der Strich an dem dritten Summenzeichen andeutet, daß wir evtl. nur über eine Teilmenge der Indexmenge  $n \geq N + 1$  zu summieren haben. Mit  $s_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}$  folgt durch Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$

hieraus aber  $\left\| \sum_{j=0}^J s_j - A \right\| \leq \varepsilon$  und damit, wenn man  $J$  gegen  $\infty$  gehen läßt,

$$\sum_{j=0}^{\infty} s_j = A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Es bleibt noch zu begründen, warum die Reihe der  $s_j$  sogar *absolut* konvergiert. Hierzu wende man die schon bewiesene Aussage auf die Reihe der Normen der Glieder an. Setzt man

$$S_j = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{j,k}\|,$$

so ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| = \alpha,$$

und wegen  $\|s_j\| \leq S_j$  ist die Folge der Partialsummen der Reihe  $\sum \|s_j\|$  nach oben durch  $\alpha$  beschränkt.  $\square$

## 10.9 Der Doppelreihensatz

Ein weiterer Spezialfall des großen Umordnungssatzes ist der *Doppelreihensatz*. Man achte darauf, daß bei seiner Formulierung auch der kleine Umordnungssatz mitverwendet wird.

**Satz 10.18 (Doppelreihensatz)** *Es seien die Elemente  $a_{j,k}$  in dem Banach-Raum  $V$  gegeben,  $j, k \in \mathbb{N}$ , und alle endlichen Summen  $\sum^* \|a_{j,k}\|$  seien durch eine feste Schranke  $K$  nach oben beschränkt.<sup>17</sup> Dann konvergieren die Zeilen- und Spaltensummen*

$$Z_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \quad \text{bzw.} \quad S_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}$$

absolut, und es gilt

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j = \sum_{k=0}^{\infty} S_k = \sum_{n=0}^{\infty} D_n,$$

wobei  $A$  der Grenzwert der Reihe  $\sum a_{j,k}$  in irgendeiner Anordnung  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$  ist und  $D_n$  die Diagonalsumme

$$D_n = \sum_{j+k=n} a_{j,k}$$

bezeichnet.

*Beweis.* Ist  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung und  $a_n := a_{j,k}$ , wenn  $\pi(n) = (j, k)$ , so ist aufgrund unserer Voraussetzung auch jede endliche Summe  $\sum_n^* \|a_n\|$  durch  $K$  nach oben beschränkt und folglich die Reihe  $\sum_n a_n$  absolut konvergent. Eine weitere Bijektion dieser Art entspricht einer Umordnung der Reihe  $\sum_n a_n$ , so daß der Grenzwert  $\sum_n a_n$  unabhängig von  $\pi$  ist. Der Rest ist dann eine direkte Anwendung des großen Umordnungssatzes, wobei im Falle der Gleichung  $A = \sum_{n=0}^{\infty} D_n$  die Bijektion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  in der bekannten Weise vorgenommen werden muß:  $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), \text{ etc.}$   $\square$

*Beispiel.* Es gilt  $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$  für die Werte  $\zeta(k)$  der Riemannschen Zeta-Funktion. Denn es ist

$$\sum_{k=2}^K \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^k} < \sum_{n=2}^N \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} < 1$$

und damit

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

Mit der nachfolgenden Bemerkung hätte man dieses Ergebnis sogar noch etwas schneller erhalten können.

*Bemerkung.* Die Voraussetzung des Doppelreihensatzes ist offensichtlich schon dann gegeben, wenn die folgenden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{j,k}\| \quad \text{für alle } j \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{j,k}\| \right)$$

existieren. Dann kann man also die Norm-Striche fortlassen und die Reihenfolge der Summation über  $k$  und  $j$  vertauschen.

*Beispiele.* 1. Es sei  $s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine absolut konvergente Reihe. Für  $k \in \mathbb{N}$  werde

$$b_k := \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^k a_k}{2^{k+1}}$$

<sup>17</sup>Diese Bedingung wird in der Literatur oft auch als *Summierbarkeit* der Doppelreihe  $\sum a_{j,k}$  bezeichnet.

gesetzt. Dann ist auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  gegen  $s$  konvergent. Man betrachte nämlich die Doppelreihe mit den Gliedern  $a_{n,k} := 0$  für  $n > k$  und  $a_{n,k} := 2^{n-k-1} a_n$ , falls  $n \leq k$ . Für diese Doppelreihe ergibt sich die Zeilensumme (als geometrische Reihe in  $q = 1/2$ ) zu  $Z_n = a_n$ ; absolut konvergiert sie gegen  $|a_n|$ . Da die Reihe der  $|a_n|$  nach Voraussetzung ebenfalls konvergiert, ist die Voraussetzung der „Summierbarkeit“ im Doppelreihensatz gegeben, und wir können Zeilen- und Spalten-Summation vertauschen. Die Spaltensummen sind aber  $S_k = b_k$ , so daß also

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k .$$

2. Wir betrachten für komplexe Zahlen  $z, w$  die Doppelreihe

$$\sum_{j,k} z^j w^k ,$$

die auch als „zweifache geometrische Reihe“ bezeichnet wird (entsprechend kann man auch die  $n$ -fache geometrische Reihe einführen). Nun ist jede endliche Teilmenge  $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  enthalten in einem „Quadrat“  $[0, N] \times [0, N]$ , und damit gilt für alle  $z, w$  mit  $|z| < 1, |w| < 1$ , daß

$$\sum_{(j,k) \in E} |z^j w^k| \leq \left( \sum_{j=0}^N |z^j| \right) \left( \sum_{k=0}^N |w^k| \right) \leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{1-|w|} .$$

Damit ist die zweifache geometrische Reihe *in jeder Anordnung* von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (absolut) konvergent gegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^j w^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-w} , \quad \text{wenn } |z| < 1, |w| < 1 .$$

## 10.10 Multiplikation von Reihen

*Doppelreihen* treten insbesondere bei der *Multiplikation* von Reihen auf. Sind zwei Reihen  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  reeller oder komplexer Zahlen gegeben, so hat man keine andere Wahl, als unter ihrem *Produkt* die Doppelreihe  $\sum c_{j,k}$  mit  $c_{j,k} = a_j b_k$  zu verstehen. Allerdings braucht diese neue Reihe in keiner Anordnung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  zu konvergieren, und wenn doch, so braucht sie nicht absolut zu konvergieren und der Grenzwert kann bei geeigneter Anordnung jeden beliebig vorgegebenen Wert annehmen. Alle diese Schwierigkeiten lösen sich jedoch in Nichts auf, wenn die beiden Ausgangsreihen *absolut* konvergent sind.

*Definition.* Es seien  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  zwei (komplexe) Reihen. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n , \quad c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

ihr *CAUCHY-Produkt*.

**Satz 10.19 (Cauchyscher Produktsatz)** *Es seien*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

absolut konvergente Reihen (mit Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$ ). Dann ist die Doppelreihe

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_j b_k$$

(in jeder Anordnung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ) absolut konvergent gegen  $ab$ . Insbesondere ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent gegen  $ab$ .

*Beweis.* Die Doppelreihe mit den Gliedern  $c_{j,k} = a_j b_k$  erfüllt wegen

$$\sum_{j,k}^* |c_{j,k}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$$

(der Stern am Summenzeichen steht wieder für eine endliche Summe) die Voraussetzung des Doppelreihensatzes.  $\square$

*Beispiele.* 1. Es gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$  für  $|x| < 1$ . Denn es ist

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} x^j x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Man beachte, daß auf einer Seite der Gleichung die Ableitung der Funktion  $(1-x)^{-1}$  steht und auf der anderen die „formale“ Ableitung der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Dies beruht auf einem allgemeinen Sachverhalt, den wir später erörtern werden.

2. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  ist *nicht absolut* konvergent. Man zeigt leicht, daß ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst divergent ist. Damit gilt der obige Multiplikationssatz nicht ohne einschränkende Bedingungen an die Konvergenz der ursprünglichen Reihen.

3. Die *Funktionalgleichung* für die Exponentialreihe läßt sich auch mit dem Cauchyschen Produktsatz herleiten:

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Denn wegen der absoluten Konvergenz von

$$\exp z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j, \quad \exp w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k$$

ist

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit

$$c_n = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{k!} z^j w^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \frac{1}{n!} (z+w)^n.$$

4. Ebenso leicht wie für den Fall der „klassischen“ Binomial-Koeffizienten beweist man die Relation

$$\binom{s+t}{n} = \sum_{j+k=n} \binom{s}{j} \binom{t}{k} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt für das Cauchy-Produkt zweier Binomial-Reihen sofort

$$B_s(z) B_t(z) = B_{s+t}(z), \quad |z| < 1, \quad s, t \in \mathbb{C}.$$



*Bemerkung.* Man kann übrigens auch mit Satz 13 leicht zeigen, daß die Exponentialfunktion der eben bewiesenen Funktionalgleichung genügt:

$$\exp z \cdot \exp w = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z + w + zw/n}{n}\right)^n = \exp(z + w).$$

*Bemerkung.* Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion allein genügt schon zu ihrer Charakterisierung, wenn man nur noch die *Differenzierbarkeit* an der Stelle 0 fordert und ihre *Ableitung* an dieser Stelle richtig vorschreibt (zusammen mit der Funktionalgleichung führt dies übrigens sofort zu der Erkenntnis, daß sie überall differenzierbar ist und ihre Ableitung an jeder Stelle mit ihrem dortigen Funktionswert übereinstimmt). Siehe hierzu Kapitel 12.

## 10.11 Bedingte und unbedingte Konvergenz von Reihen

Wir kommen nach diesem Abstecher zu der Exponentialfunktion noch einmal auf das Problem der *Umordnung* von Reihen in Banach-Räumen zurück.

*Definition.* Eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  in einem Banach-Raum heißt *unbedingt* konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert. Sonst heißt sie *bedingt* konvergent.

Wir haben oben gezeigt, daß *die absolute Konvergenz in Banach-Räumen die unbedingte Konvergenz impliziert*. Der Satz von RIEMANN und LEJEUNE - DIRICHLET besagt sogar, daß im Körper der reellen Zahlen auch die Umkehrung gilt. Offensichtlich hat man eine noch etwas stärkere Aussage, die wir sogar auf *endlich-dimensionale* normierte Vektorräume über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  übertragen können<sup>18</sup>.

**Satz 10.20** *Für eine Reihe  $\sum a_j$  in einem endlich-dimensionalen normierten  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, also insbesondere für reelle und komplexe Reihen, sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

1. *Die Reihe ist absolut konvergent.*
2. *Die Reihe ist unbedingt konvergent.*
3. *Jede Umordnung der Reihe ist konvergent.*

*Beweis.* Die Implikation 1.  $\implies$  2. wurde oben generell für alle Banach-Räume gezeigt, und 2.  $\implies$  3. folgt unmittelbar aus der Definition für unbedingte Konvergenz. Die Implikation 3.  $\implies$  1. ist für  $V = \mathbb{R}$  eine direkte Konsequenz aus dem Satz von Riemann und Lejeune-Dirichlet: Ist die Reihe nicht absolut konvergent, so besitzt sie divergente Umordnungen. Genauso können wir aber auch im Falle eines endlich-dimensionalen Vektorraumes  $V$  schließen: Wegen der Äquivalenz aller Normen auf  $V$  können wir uns im folgenden auf die Situation beschränken, daß  $V$  der *reelle* Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit der *Maximumnorm* ist. Ist dann 1. nicht erfüllt, so ist zumindest eine der Komponentenreihen ebenfalls nicht absolut konvergent. Somit existiert eine Umordnung der gegebenen Reihe, so daß diese Komponentenreihe bzgl. der Umordnung divergiert. Dann ist aber auch die ursprüngliche Reihe divergent in dieser Umordnung.  $\square$

<sup>18</sup>Dieser Satz gilt *nur* in endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen. D. h.: ist  $V$  ein Banach-Raum, in dem die Begriffe der absoluten und unbedingten Konvergenz übereinstimmen, so ist  $V$  notwendig von endlicher Dimension. Zu einem Beweis siehe: A. Dvoretzky, C. A. Rogers: Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA (3) **36**, (1950), 192-197.

### 10.12 Das Abelsche und das Dirichletsche Kriterium

Wir betrachten im folgenden noch kurz Reihen der Form  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$ . Setzt man  $A_n = \sum_{j=0}^n a_j$ , so beweist man leicht (durch vollständige Induktion nach  $n$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_j b_j &= A_0 b_0 + (A_1 - A_0) b_1 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_0 (b_0 - b_1) + A_1 (b_1 - b_2) + \cdots + A_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + A_n b_n \\ &= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

(ABELSche *partielle Summation*). Hierbei können die  $a_j$  sogar in einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  liegen und die  $b_j$  in dem Grundkörper  $\mathbb{K}$ . Im anschließenden Satz ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $V$  ein reeller Banach-Raum.

**Satz 10.21** Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$  ist unter den folgenden Bedingungen konvergent:

- a) [Abel] Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  ist konvergent, und die Folge  $(b_j)$  monoton und beschränkt;
- b) [Dirichlet] die Folge  $(A_n)$  ist beschränkt, und  $(b_j)$  ist eine monotone Nullfolge.

*Beweis.* In beiden Fällen konvergiert die Folge der  $b_j$  und auch die Produktfolge  $(A_n b_n)$  ist konvergent. Sei weiter die Folge  $(b_j)$  ohne Einschränkung monoton fallend. Dann ist die Teleskop-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$$

wegen  $b_k - b_{k+1} \geq 0$  sogar absolut konvergent. Da die Folge  $(A_k)$  in beiden Fällen beschränkt ist, so folgt aus dem Cauchy-Kriterium sofort die absolute Konvergenz der zweiten Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad \square$$

*Bemerkung.* Das Dirichletsche Kriterium ist offensichtlich eine Verallgemeinerung des Leibniz-Kriteriums.

*Beispiel.* Man betrachte die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+1}}{j+1}$$

für komplexe Zahlen  $z$ . Sie ist (nicht nur formal, wie wir später beweisen werden) eine *Stammfunktion* der geometrischen Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

auf der Kreisscheibe  $|z| < 1$ . In der Tat ist die betrachtete *Potenzreihe* konvergent für diese  $z$  und divergent für alle  $z$  mit  $|z| > 1$ . Dies folgt einfach aus dem Quotientenkriterium oder auch auf andere Weise, wie wir sogleich einsehen werden. Was aber passiert auf dem *Rand* des Einheitskreises  $|z| = 1$ ? Selbstverständlich ist die Reihe in  $z = 1$  divergent. Für alle anderen  $z$  vom Betrag 1 ist sie dagegen

konvergent. Dazu betrachte man die Reihe mit den Gliedern  $a_j := z^{j+1}$ . Für deren Partialsummen hat man, wenn  $z \neq 1$ , offenbar die Formel

$$A_n = z \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

und diese Folge ist beschränkt für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  mit  $|z| \leq 1$ . Zusammen mit der monoton fallenden Nullfolge  $b_j := 1/(j+1)$  ergibt sich dann die behauptete Konvergenz wegen des Dirichletschen Kriteriums.

Wenn man sich den Beweis der beiden Kriterien noch etwas genauer anschaut, so stellt man schnell fest, daß wir sogar den folgenden Satz bewiesen haben.

**Satz 10.22** *Es seien  $a_j$  Elemente eines (reellen oder komplexen) Banach-Raumes und die  $b_j$  seien (reelle oder komplexe) Zahlen - oder umgekehrt, und die Teleskopreihe  $\sum_j (b_j - b_{j+1})$  sei absolut konvergent :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j - b_{j+1}| < \infty.$$

Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$$

konvergent, sofern zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :

a) Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  ist konvergent ;

b) die Folge  $(A_n)$  ist beschränkt, und  $(b_j)$  ist eine Nullfolge.

*Bemerkung.* In dem obigen Beweis wurde die folgende Aussage benutzt und mitbewiesen: *Ist die Folge der  $a_j$  beschränkt und die Reihe  $\sum_j b_j$  absolut konvergent, so ist auch die Reihe  $\sum_j a_j b_j$  absolut*

*konvergent.* Diese Aussage ist falsch, wenn man die Voraussetzung der absoluten Konvergenz wegläßt, wie das folgende Beispiel reeller Folgen und Reihen zeigt, in dem die Folge  $(a_j)$  sogar gegen Null konvergiert:

$$a_j = b_j := \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}.$$

Unsere früheren Aussagen über Cauchy-Produkte von Reihen lassen sich noch verschärfen. Es gilt tatsächlich der folgende Satz.

**Satz 10.23** *Das Cauchy-Produkt zweier Reihen konvergiert schon dann gegen das Produkt der einzelnen Grenzwerte, wenn eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergent ist. Die Gleichung*

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

*gilt sogar immer dann, wenn nur alle drei beteiligten Reihen konvergent sind.*

*Beweis.* Wir beweisen nur die erste Aussage, die in der Literatur auch als *Satz von MERTENS* bekannt ist. Die zweite Aussage leiten wir später aus dem sogenannten ABELSchen Grenzwertsatz ab. Es seien

also  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  die Partialsummen der drei Reihen und  $a, b$  die Grenzwerte der ersten beiden, wobei die Konvergenz der ersten absolut sei. Insbesondere ist dann

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| =: K < \infty.$$

Man rechnet nun schnell nach, daß mit  $B_n := b - \beta_n$  gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \\ &= a_0 (b - B_n) + a_1 (b - B_{n-1}) + \cdots + a_n (b - B_0) \\ &= \alpha_n b - [a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0] \end{aligned}$$

Es bleibt daher nur noch zu begründen, warum der Ausdruck in der eckigen Klammer gegen Null geht. Da die  $B_n$  eine Nullfolge bilden, existiert ein  $N_0$ , so daß  $|B_n| < \varepsilon/2K$  für alle  $n \geq N_0$ . Da  $a_m \rightarrow 0$  und die Folge der  $B_k$  beschränkt ist, gibt es zu  $\varepsilon$  und  $N_0$  ein  $N_1$  mit

$$\|a_m B_k\| < \frac{\varepsilon}{2(N_0 + 1)}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq N_1$ . Damit ist der in Rede stehende Ausdruck für  $n \geq N := N_0 + N_1$  dem Betrage nach kleiner oder gleich

$$\begin{aligned} &\|a_0\| |B_n| + \cdots + \|a_{n-N_0-1}\| |B_{N_0+1}| + \|a_{n-N_0}\| |B_{N_0}| + \cdots + \|a_n\| |B_0| \\ &\leq (\|a_0\| + \cdots + \|a_{n-N_0-1}\|) \frac{\varepsilon}{2K} + (N_0 + 1) \frac{\varepsilon}{2(N_0 + 1)} \leq K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

### 10.13 Verdichtungskriterium

Ohne Vollständigkeit der Darstellung anstreben zu wollen, sollte zum Abschluß des Kapitels doch noch ein einfaches Kriterium für reelle Reihen mit monoton fallenden oder monoton wachsenden Reihengliedern erwähnt werden, das einem häufig genug Auskunft über Konvergenz oder Divergenz geben kann. Es wird auch als *Verdichtungs-Kriterium* bezeichnet.

**Satz 10.24 (Verdichtungs - Kriterium)** Für eine monotone Folge  $(a_j)$  sind entweder beide Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$$

konvergent oder beide divergent.

Den sehr einfachen Beweis mit Hilfe des Majoranten- bzw. Minoranten-Kriteriums und geeigneten Klammerungen der Reihe (mit Klammern der Länge 1, 2, 4 etc.) überlassen wir dem Leser.  $\square$

*Beispiel.* Die Untersuchung der Reihe  $\sum_n n^{-s}$ ,  $s > 0$ , führt mit diesem Kriterium zur Untersuchung der Konvergenz der Reihe mit den Gliedern

$$\frac{2^n}{(2^n)^s} = \frac{1}{(2^n)^{s-1}} = \frac{1}{(2^{s-1})^n}.$$

Dies ist aber gerade die geometrische Reihe mit  $q = 2^{1-s}$ , die genau dann konvergiert, wenn  $s > 1$ . Ebenso leicht sieht man mit demselben Kriterium ein, daß die Reihen

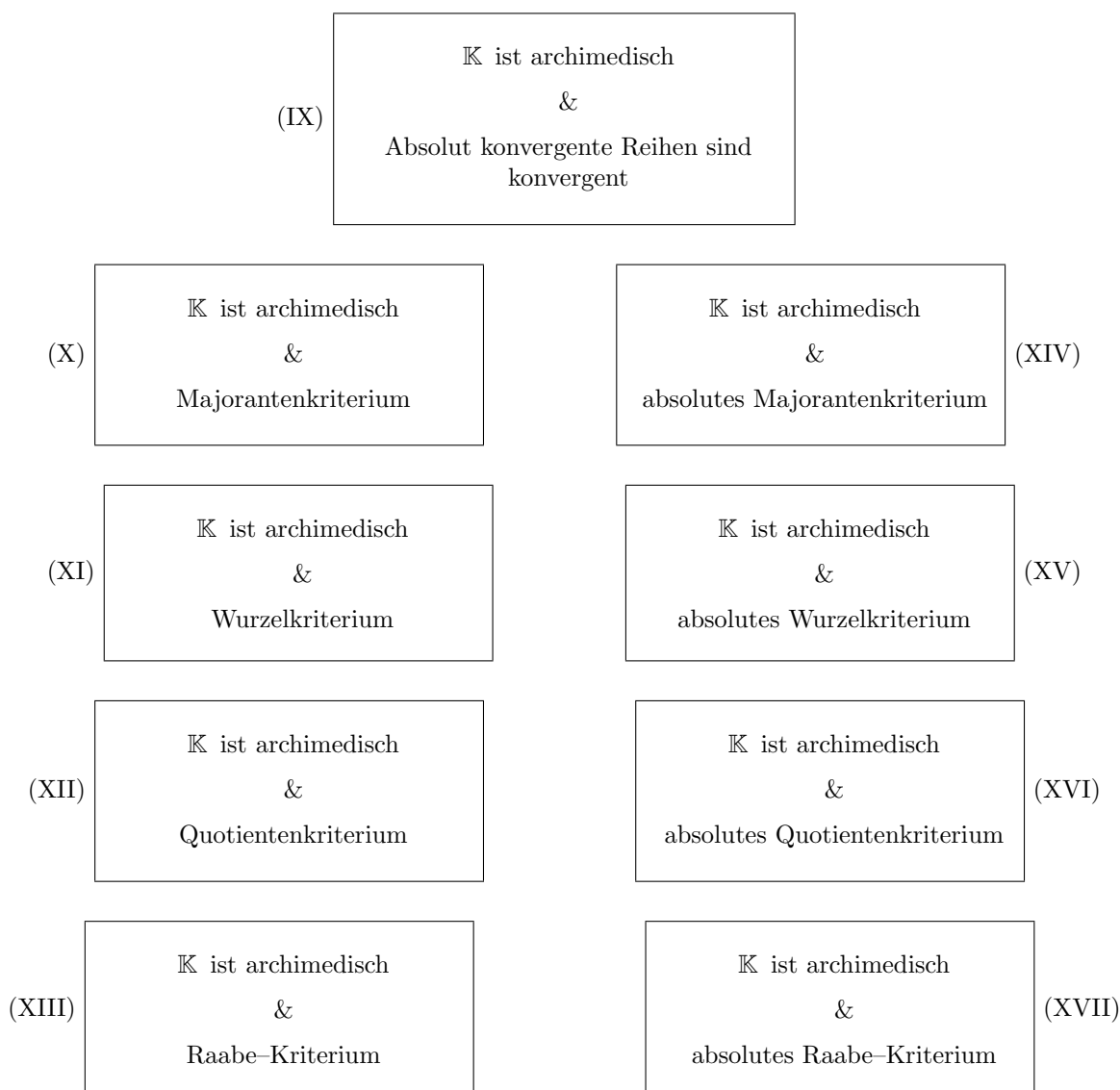
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^s}$$

genau für die Werte  $s > 1$  konvergieren.

## Anhang: Weitere Charakterisierungen der reellen Zahlen

Unter Verwendung des Axioms (VI) lassen sich leicht weitere zu den Vollständigkeitsaxiomen äquivalente Eigenschaften in archimedisch angeordneten Körpern angeben; hierzu gehören Aussagen über Reihen wie die Konklusion „absolut konvergent  $\implies$  konvergent“ und das *Majorantenkriterium*, der *große Umordnungssatz* etc. Allerdings muß man die Formulierungen evtl. etwas sorgfältiger treffen, da die eben angesprochene Folgerung a priori nicht zu gelten braucht. Hierbei bedeutet in den Axiomen (X) bis (XVII) die Bezeichnung *absolutes* Kriterium, daß eine Reihe *mit nicht negativen* Gliedern konvergiert, sofern das Kriterium erfüllt ist (wir nennen dies im Beweis auch kurz die *absolute Fassung*), und ohne den Zusatz *absolut*, daß eine beliebige Reihe konvergiert, wenn das entsprechende Kriterium für die Reihe der *Absolutbeträge* erfüllt ist. Wegen Axiom (IX) brauchen wir eine solche Unterscheidung im Körper der reellen Zahlen natürlich nicht vorzunehmen.

Wir behaupten zunächst die Äquivalenz unserer bisherigen 8 Vollständigkeits-Axiome zu den folgenden.



*Beweis.* (X) folgt aus dem Cauchy-Kriterium und impliziert seinerseits Axiom (IX). Daß man aus (IX)

auch wieder auf die Vollständigkeit schließen kann, werden wir weiter unten zeigen. Es ist weiterhin klar, daß die Axiome (X) bis (XIII) ihren jeweiligen „absoluten“ Partner implizieren. Allerdings darf man beim Wurzelkriterium tatsächlich keine Wurzeln ziehen, sondern wie folgt formulieren:

Es gibt ein  $q \in \mathbb{K}$  mit  $0 < q < 1$ , so daß  $|a_n| \leq q^n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Schlußketten (X)  $\implies$  (XI)  $\implies$  (XII) und (XIV)  $\implies$  (XV)  $\implies$  (XIV) sind ähnlich wie in den oben gegebenen Beweisen leicht nachzuprüfen. Denn unter der Gültigkeit des Wurzelkriteriums ist die geometrische Reihe mit  $q$  eine konvergente Majorante. Unter der Bedingung des Quotientenkriteriums (XII) bzw. (XVI) ergibt sich unmittelbar  $|a_n| \leq |a_N| q^{n-N}$  für alle  $n \geq N$ ,  $N$  hinreichend groß. Da  $\mathbb{K}$  als archimedisch angeordneter Körper ein Unterkörper von  $\mathbb{R}$  ist und die Folge der  $n$ -ten Wurzeln aus  $|a_N|$  in  $\mathbb{R}$  gegen 1 konvergiert, gibt es eine (sogar rationale) Zahl  $q_1 \in \mathbb{K}$  mit  $q < q_1 < 1$ , so daß  $|a_n| \leq q_1^n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zum Beweis des Raabe-Kriteriums (XIII) bzw. (XVII) haben wir nur das Prinzip der monotonen Konvergenz (und das daraus ableitbare Axiom (IX)) verwendet. Selbstverständlich impliziert das Raabe-Kriterium ebenfalls das Quotientenkriterium. Das absolute Quotientenkriterium zusammen mit der Archimedizität des betrachteten angeordneten Körpers liefert aber, daß jeder  $g$ -adische Bruch in  $\mathbb{K}$  konvergiert und folglich  $\mathbb{K}$  dem Maximalitätsaxiom (VI) genügt. Es bleibt noch zu beweisen, daß aus Axiom (IX) eines der uns schon bekannten Axiome folgt. Nach Voraussetzung ist  $\mathbb{K}$  Unterkörper von  $\mathbb{R}$ . Also genügt zu zeigen, daß für  $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$  die Aussage (IX) nicht richtig ist. Wir konstruieren dazu eine in  $\mathbb{K}$  nicht konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $a_k \in \mathbb{K}$ , für die aber  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  in  $\mathbb{K}$  konvergiert. Es sei also  $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$  und ohne Einschränkung das Element  $a \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$  nicht in  $\mathbb{K}$  enthalten. Wir schreiben  $a$  als Dualzahl:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2^k}, \quad c_k \in \{0, 1\}.$$

Da für alle  $j < \ell$  gilt:

$$\frac{0}{2^j} + \frac{0}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{0}{2^{\ell-1}} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{j+1}} - \cdots - \frac{1}{2^\ell}$$

und unendliche viele Einsen unter den  $c_k$  vorkommen müssen, kann man  $a$  auch schreiben in der Form

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k = \pm \frac{1}{2^k} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}.$$

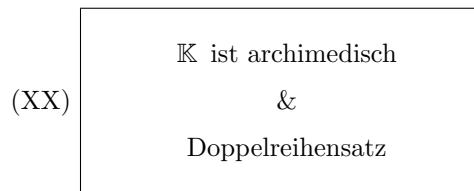
Die Reihe  $\sum |a_k|$  ist aber in  $\mathbb{Q}$  (und damit auch in  $\mathbb{K}$ ) konvergent gegen 1.  $\square$

Mit demselben Argument ergibt sich, daß der Doppelreihensatz und damit auch der große und der kleine Umordnungssatz verletzt sind, wenn  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$  nicht vollständig ist. Man wähle z. B. mit den oben gefundenen  $a_k$  die Glieder der Doppelreihe  $(a_{jk})$  wie folgt:  $a_{0k} = a_k$ ,  $a_{1k} = -a_k$ ,  $a_{jk} = 0$  sonst.

Wir können unseren Vollständigkeitsaxiomen also noch hinzufügen:



und



*Warnung.* In den Formulierungen der letzten drei Sätze soll als Ausgangsvoraussetzung nur die Konvergenz der Absolutbeträge der vorgelegten Reihe oder Doppelreihe etc. dienen. Dann impliziert z. B. (XIX) sofort (IX) und damit die Vollständigkeit. Interpretiert man in (XIX) aber die Ausgangsvoraussetzung als Konvergenz der Reihe und der Konvergenz der Reihe der Absolutbeträge, so ist der kleine Umordnungssatz nicht charakteristisch für die reellen Zahlen, da er in dieser Form offensichtlich in jedem Unterkörper von  $\mathbb{R}$  gilt.

## 11 Supremumsaxiom mit Anwendungen auf Potenzreihen

In diesem Kapitel wollen wir das *Supremumsaxiom* einführen und nachweisen, daß es die Rolle des Vollständigkeitsaxioms übernehmen kann und zugleich das Archimedische Axiom impliziert. Mit anderen Worten: Ein angeordneter Körper ist genau dann zu  $\mathbb{R}$  isomorph, wenn er dem Supremumsaxiom genügt. Dazu stellen wir als erstes die Definition des *Supremums* und des *Infimums* einer Teilmenge eines angeordneten Körpers bereit; damit eng verknüpft ist der Begriff des *limes superior* bzw. *limes inferior* einer Folge, den wir mit großem Gewinn bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Reihen und speziell von *Potenzreihen* einsetzen werden. Einige Beispiele von Potenzreihen werden das Kapitel abrunden.

### 11.1 Obere Schranken und kleinste obere Schranken

Wir beginnen mit der äußerst wichtigen

*Definition.* Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  eine (nichtleere) Teilmenge. Eine *obere Schranke*  $S \in \mathbb{K}$  von  $A$  heißt eine *kleinste* obere Schranke von  $A$ , falls sie nicht mehr verkleinert werden kann. Mit anderen Worten: Für alle  $a \in A$  gilt  $a \leq S$ , ist aber  $S' < S$ , so gibt es Elemente  $a \in A$ , so daß  $S' < a$ .

*Bemerkungen.* 1. Obere Schranken sind nicht eindeutig bestimmt, da man sie ad libitum vergrößern kann. Dagegen kann  $A \subset \mathbb{K}$  offensichtlich nur *höchstens eine* kleinste obere Schranke  $S$  besitzen. Wenn sie existiert, nennt man sie *die* kleinste obere Schranke oder das *Supremum* von  $A$  und schreibt für  $S$  auch

$$\sup A \quad \text{oder} \quad \sup_{x \in A} x .$$

Man sagt dann auch, die Menge  $A$  „besitze ihr Supremum“ oder Ähnliches.

2. Es ist offensichtlich  $\sup [a, b] = \sup [a, b] = b$  für  $a < b$ . Das Supremum einer Menge  $A$  braucht also - trotz des eben formulierten Sprachgebrauchs, der etwas anderes zu suggerieren scheint - nicht zu der Menge zu gehören. Ist dies jedoch der Fall, so ist das Supremum augenscheinlich ein größtes Element der Menge und wird von uns dann auch wie früher das *Maximum* genannt und mit  $\max A$  bezeichnet. Es gilt also  $\max A = \sup A$  genau dann, wenn  $\sup A \in A$ .

3. Entsprechend definiert man *größte untere Schranken*, die man auch das *Infimum*  $\inf A$  der Menge  $A$  nennt. Man sieht unmittelbar, daß mit  $-A := \{b \in \mathbb{K} : b = -a, a \in A\}$  die Beziehung

$$\inf A = -\sup(-A)$$

besteht.

4. Für den Fall, daß die Menge  $A$  nicht nach oben beschränkt, also insbesondere nicht leer ist, definiert man das Supremum „im uneigentlichen Sinne“ durch  $\sup A := \infty$ . Ist die Menge  $A$  leer, so ist jede Zahl obere Schranke, und es ist manchmal sinnvoll, dann  $\sup \emptyset := -\infty$  zu setzen. Existieren  $\sup A$  und  $\inf A$  im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne, so ist stets

$$\inf A \leq \sup A ,$$

außer wenn  $A$  die leere Menge ist.

5. Jede obere Schranke von  $A$  ist auch obere Schranke jeder Teilmenge  $B \subset A$ . Deshalb gilt in dieser Situation stets  $\sup B \leq \sup A$  (auch im uneigentlichen Sinne). Aus demselben Grunde erhält man z. B.

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B , \quad \text{wenn } A + B := \{c \in \mathbb{R} : c = a + b, a \in A, b \in B\} .$$

6. Wir werden weiter unten zeigen, daß die Existenz des Supremums für jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge eines angeordneten Körpers  $\mathbb{K}$  gleichwertig zu der Isomorphie  $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$  ist. Es ist



nicht schwer, z. B. in  $\mathbb{Q}$  beschränkte Mengen anzugeben, die kein Supremum besitzen. Man betrachte etwa

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ und } x^2 < 2\}.$$

$A$  ist nicht leer, da z. B.  $0, 1 \in A$ , und nach oben beschränkt durch  $K = 2$ .  $A$  kann aber (als Teilmenge von  $\mathbb{Q}$ !) kein Supremum besitzen, da dessen Quadrat, wovon man sich sofort überzeugt, gleich 2 sein müßte (siehe die Bemerkung nach dem Beweis zu Satz 1).

Diesem Manko unterliegen vollständig archimedisch angeordnete Körper nicht.

**Satz 11.1** *Erfüllt der archimedisch angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  das schwache Intervallschachtelungsprinzip (IV), so gilt in  $\mathbb{K}$  das Supremumsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{K}$  besitzt ihr Supremum. Eine obere Schranke  $S$  von  $A$  ist in diesem Fall genau dann das Supremum von  $A$ , wenn es entweder*

a) *zu jeder Zahl  $S' < S$  ein Element  $a \in A$  gibt mit  $S' \leq a$ ,*

oder

b) *wenn es eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $a_j \in A$ , gibt, so daß  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = S$ .*

*Bemerkung.* Ist  $A$  nichtleer und nach unten beschränkt, so ist  $-A$  ebenfalls nicht leer und nach oben beschränkt. Damit ist das Supremumsaxiom auch äquivalent zu dem *Infimumsaxiom*: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{K}$  besitzt ihr Infimum.

*Beweis* (Satz 1). Wir reproduzieren den üblichen Beweis mit Hilfe einer geeigneten Intervallschachtelung, die sich fast von selbst aufdrängt. Da die vorgegebene Menge  $A \subset \mathbb{K}$  nicht leer ist und eine obere Schranke besitzt, gibt es mindestens ein Element  $A_0 \in A$  und eine obere Schranke  $B_0 \in \mathbb{K}$  von  $A$ . Ist zufällig  $A_0 = B_0$ , so sind wir schon fertig; denn dann ist  $A_0 = B_0$  ein *größtes* Element von  $A$ , also insbesondere das Supremum. Wir können daher annehmen, daß das Intervall  $I_0 = [A_0, B_0]$  nicht nur aus einem Punkt besteht. Wir konstruieren nun induktiv eine Intervallschachtelung  $I_j = [A_j, B_j]$  mit der folgenden Eigenschaft:  $I_j$  enthält (mindestens) ein Element  $a_j$  von  $A$ ,  $B_j$  ist obere Schranke von  $A$ , und die Länge von  $I_j$  ist die Hälfte der Länge von  $I_{j-1}$ . Dies ist, außer der letzten Aussage, insbesondere für  $I_0$  erfüllt. Ist schon  $I_j$  konstruiert, so betrachtet man den Mittelpunkt  $m_j = (A_j + B_j)/2$  des Intervalls  $I_j$ . Ist  $m_j$  eine obere Schranke, so setzt man  $A_{j+1} = A_j$ ,  $B_{j+1} = m_j$  und  $a_{j+1} = a_j$ . Im anderen Fall setzt man  $A_{j+1} = m_j$ ,  $B_{j+1} = B_j$  und findet ein neues Element  $a_{j+1} \in I_{j+1}$ . Somit erfüllt dann  $I_{j+1} = [A_{j+1}, B_{j+1}]$  die geforderten Eigenschaften. Es sei  $S$  das einzige Element im Durchschnitt dieser Intervalle. Ist  $a \in A$  beliebig, so ist  $a \leq B_j$  für alle  $j$  und damit  $a \leq \lim_{j \rightarrow \infty} B_j = S$ . Somit ist  $S$  eine obere Schranke von  $A$ . Der Beweis liefert zusätzlich, daß es eine Folge  $(a_j)$  gibt, die den Bedingungen von b) genügt, denn es ist ja  $A_j \leq a_j \leq B_j$  und damit  $\lim_j a_j = S$ . Dann ist aber auch a) automatisch erfüllt, und eine obere Schranke  $S$  mit der Eigenschaft a) ist offensichtlich ein Supremum.  $\square$

*Bemerkung.* Man kann, wie früher schon erwähnt, die Existenz von Wurzeln in einem vollständig archimedisch angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  ( $\cong \mathbb{R}$ ) auch mit Hilfe des Supremumsaxioms herleiten. Man betrachte dazu für positives  $a \in \mathbb{K}$  und  $k \in \mathbb{N}^*$  die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0 \text{ und } x^k < a\},$$

deren Supremum  $S$  tatsächlich die Gleichung  $S^k = a$  erfüllt. Ist nämlich  $(A_j)$  eine Folge von Zahlen in  $A$  mit  $\lim_j A_j = S$ , so ist wegen der Folgenstetigkeit der Potenzfunktionen auch  $S^k = \lim_j A_j^k := a' \leq a$ . Andererseits ist  $S$  obere Schranke von  $A$  und damit auch  $S + s$  für jedes positive  $s$ . Für jede Nullfolge  $s_j \searrow 0$  ist aber

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (S + s_j)^k = S^k,$$

so daß  $S + s_j$  für geeignetes  $j$  in  $A$  enthalten wäre, wenn  $a'$  tatsächlich kleiner als  $a$  wäre.

## 11.2 Charakterisierung der reellen Zahlen durch das Supremumsaxiom

Als nächstes wollen wir zeigen, daß das Supremumsaxiom tatsächlich die reellen Zahlen charakterisiert. Wir fügen unseren bisherigen 20 Axiomen noch zwei weitere bei.

(XXI) Existenz von Suprema für  
nach oben beschränkte, nicht leere Mengen

(XXII) Jede nach oben beschränkte, nicht leere Menge  $A$   
besitzt eine obere Schranke  $S$  mit  
$$S = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j, a_j \in A.$$

In der Tat haben wir oben gezeigt, daß das schwache Intervallschachtelungsprinzip zusammen mit dem Archimedischen Axiom die Aussage (XXII) nach sich zieht, und aus (XXII) folgt offensichtlich (XXI). Wir brauchen also nur noch zu beweisen, daß aus (XXI) z. B. das Prinzip der monotonen Konvergenz (II) folgt. Es sei also  $(x_n)$  eine monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge, die folglich ein Supremum  $S$  besitzt. Für positives  $\varepsilon > 0$  ist dann  $S - \varepsilon$  keine obere Schranke, und somit gibt es ein  $N$ , so daß  $S - \varepsilon \leq x_N \leq S$ . Da die Folge  $(x_n)$  monoton wächst und durch  $S$  nach oben beschränkt ist, ist dann auch  $S - \varepsilon \leq x_n \leq S$  für alle  $n \geq N$ . Also ist  $\lim_n x_n = S$ .  $\square$

## 11.3 Limes superior und Limes inferior

Um das *Wurzelkriterium* in seiner schärfsten Form formulieren zu können, benötigen wir noch einen weiteren zentralen Begriff der Analysis, und zwar den des *Häufungswertes* oder *Häufungspunktes* einer Folge. Diesen haben wir schon im allgemeinen Rahmen von metrischen Räumen in Kapitel 7 eingeführt. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei er hier für Zahlenfolgen zusammen mit seinen wichtigsten Eigenschaften wiederholt.

*Definition.* Die Zahl  $h \in \mathbb{C}$  heißt *Häufungswert* (oder auch *Häufungspunkt*) der Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  *unendlich viele* Indizes  $j \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$|h - a_j| < \varepsilon.$$

Klar ist das folgende Lemma (es wurde in Kapitel 7 schon bewiesen).

**Lemma 11.2** 1.  $h$  ist genau dann ein Häufungswert der Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , wenn sie eine unendliche Teilfolge besitzt, die gegen  $h$  konvergiert.

2. Die Folge  $(a_j)$  ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

Wir können damit dem Satz von Bolzano–Weierstraß im Reellen und Komplexen noch eine andere Fassung geben.

**Satz 11.3** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  besitzt mindestens einen Häufungswert.

Wir betrachten nun eine (durch die Schranke  $K$ ) nach oben beschränkte reelle Folge  $(a_n)$  und setzen zusätzlich voraus, daß sie mindestens einen Häufungswert besitzt. Dies ist auf jeden Fall dann erfüllt,

wenn sie auch nach unten beschränkt, also überhaupt beschränkt ist. Die Menge  $H$  ihrer Häufungswerte ist somit nicht leer und (ebenfalls durch  $K$ ) nach oben beschränkt.

*Definition.* Die Zahl  $\sup H \in \mathbb{R}$  heißt unter den vorstehend notierten Voraussetzungen der *limes superior* der Folge  $(a_n)$ . Man schreibt

$$\limsup_n a_n := \sup H.$$

Entsprechend definiert man den *limes inferior*

$$\liminf_n a_n := \inf H.$$

Ist dagegen die Folge  $(a_n)$  nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt, so spricht man vom *limes superior* bzw. *limes inferior* nur im uneigentlichen Sinne, indem man dann

$$\limsup_n a_n := \infty \quad \text{bzw.} \quad \liminf_n a_n := -\infty$$

setzt. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß eine Teilfolge von  $(a_n)$  bestimmt gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  divergiert. Ist die Folge schließlich nach oben (unten) beschränkt und besitzt sie keinen Häufungswert, wie z. B.  $0, -1, -2, -3, \dots$ , ist sie also selbst bestimmt divergent gegen  $-\infty$  bzw.  $\infty$ , so setzt man

$$\limsup_n a_n := -\infty \quad \text{bzw.} \quad \liminf_n a_n := \infty.$$

*Bemerkungen.* 1. Manche Autoren benutzen auch das Symbol  $\overline{\lim}_n$  anstelle von  $\limsup_n$ .

2. Wir werden anschließend den Begriff des limes superior im besonderen anwenden, wenn die gegebene Folge nur nichtnegative Glieder besitzt. Dann kann der letzte Fall nicht eintreten; es ist somit entweder  $\limsup_n a_n \in \mathbb{R}_+$  oder die Folge ist unbeschränkt und damit  $\limsup_n a_n = \infty$ .

**Satz 11.4** Die Folge  $(a_n)$  reeller Zahlen sei nach oben beschränkt und besitze mindestens einen Häufungswert. Dann sind für eine Zahl  $S \in \mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften äquivalent :

1.  $S = \limsup a_n$ .
2.  $S$  ist der größte Häufungswert der Folge.
3. Die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n > S'\}$  ist unendlich für  $S' < S$  und endlich für  $S' > S$ .
4.  $S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{a_n : n \geq k\}$ .

*Beweis.* Wir beweisen die Implikationen  $2. \implies 1. \implies 3. \implies 4. \implies 2.$  Der Schritt  $2. \implies 1.$  ist offensichtlich.

$1. \implies 3.$  Nach Voraussetzung gibt es für  $S' < S$  einen Häufungswert  $h$  der Folge  $(a_j)$  mit  $S' < h \leq S$ , so daß in diesem Fall, wie gefordert,

$$\text{card} \{n \in \mathbb{N} : a_n > S'\} = \infty$$

ist. Wäre  $\text{card} \{n \in \mathbb{N} : a_n > S'\} = \infty$  für ein  $S' > S$ , so könnte man mit Hilfe des Satzes von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(b_j = a_{n_j})$  mit  $b_j \geq S'$  auswählen, was die Existenz eines Häufungswertes  $h \geq S' > S$  zur Folge hätte.

$3. \implies 4.$  Die Folge  $\alpha_k := \sup \{a_n : n \geq k\}$  ist monoton fallend wegen  $\{a_n : n \geq k\} \supset \{a_n : n \geq k+1\}$ . Nach Voraussetzung ist sie konvergent; es bezeichne  $\alpha$  ihren Grenzwert. Ist dann  $\alpha' > \alpha$ , so existiert insbesondere ein  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $\alpha_k \leq \alpha'$ . Nach Definition von  $\alpha_k$  hat dies  $a_n \leq \alpha'$  für alle  $n \geq k$  zur Folge, so daß nur für endlich viele Indizes  $n$  die Ungleichung  $a_n > \alpha'$  gelten kann. Ist aber  $\alpha' < \alpha$  und wäre die Ungleichung  $a_n > \alpha'$  nur für endlich viele  $n$  erfüllt, so gäbe es ein  $K$  mit

$a_n \leq \alpha'$  für alle  $n \geq K$ . Damit wäre aber auch  $\alpha_k \leq \alpha' < \alpha$  für alle  $k \geq K$  im Widerspruch zu  $\lim_k \alpha_k = \alpha$ . Somit sind die beiden Bedingungen aus Teil 3 für  $\alpha$  erfüllt, und folglich ist notwendig  $S = \alpha = \lim_k \alpha_k$ .

4.  $\implies$  2.  $S = \lim_k \alpha_k$  ist obere Schranke von  $H$ . Denn gibt es einen Häufungswert  $h$  der Folge mit  $S < h$ , so setzt man  $\varepsilon := (h - S)/2$  und findet unendlich viele Folgenglieder  $a_n$ , so daß die Abschätzungen  $|a_n - h| < \varepsilon$  und damit  $a_n \geq S + \varepsilon$  bestehen. Dann müssen aber auch unendlich viele  $\alpha_k \geq S + \varepsilon$  sein, was der Definition von  $S$  widerspricht. Es genügt endlich zu zeigen, daß  $S$  selbst Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$  ist. Nach Voraussetzung gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N$ , so daß für alle  $k \geq N$  gilt:  $0 \leq \alpha_k - S \leq \varepsilon/2$ . Wegen  $\alpha_k = \sup\{a_n : n \geq k\}$  gibt es zu jedem  $k$  ein  $n$ , so daß  $a_n \geq \alpha_k - \varepsilon/2$ . Damit gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  unendlich viele  $a_n$  mit  $-\varepsilon/2 \leq a_n - S \leq \varepsilon$ .  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Die Charakterisierung von  $\limsup$  durch 3. und 4. bleibt auch im uneigentlichen Fall bestehen, wenn man diese Bedingungen nur angemessen interpretiert. Bei 2. hat man die Menge der Häufungswerte zu ersetzen durch die Menge  $\overline{H} \subset \overline{\mathbb{R}}$  der *eigentlichen* und *uneigentlichen* Häufungswerte, wobei  $\infty$  als *uneigentlicher* Häufungswert zu gelten hat, wenn die Folge nicht nach oben beschränkt ist.

2. In topologischen Termen haben wir mit dem vorstehenden Satz insbesondere gezeigt, daß die Menge  $H$  der Häufungswerte einer beschränkten reellen Zahlenfolge *abgeschlossen* ist. Der hierzu notwendige Schritt 1.  $\implies$  2., der oben nur indirekt gezeigt wurde, läßt sich natürlich auch leicht direkt durchführen: Nach Definition ist  $S = \limsup_n a_n$  das Supremum der Menge  $H$  der Häufungswerte und somit jeder Häufungswert der Folge kleiner oder gleich  $S$ . Man braucht daher nur zu begründen, daß  $S$  selbst ein Häufungswert ist, also  $S$  in  $H$  enthalten ist. Nun ist  $S$  als Supremum von  $H$  zumindest Grenzwert einer Folge von Häufungswerten. Gibt man sich also ein  $\varepsilon > 0$  vor, so gibt es mindestens einen Häufungswert  $h$  der Folge mit  $S - h \leq \varepsilon/2$ , und weiter gibt es unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  mit  $|a_n - h| \leq \varepsilon/2$ . Für diese ist dann  $|a_n - S| \leq \varepsilon$  und folglich  $S$  ein Häufungswert.

3. Die Existenz eines größten Häufungswertes für eine beschränkte Folge impliziert erst recht den Satz von Bolzano und Weierstraß. Deshalb kann die Vollständigkeit der reellen Zahlen auch ausgedrückt werden in Form von Axiom (XXIII):

(XXIII) 

<p>Jede beschränkte Folge besitzt einen größten Häufungswert</p>
--

Ebenso leicht sieht man mit dem zweiten Teil von Lemma 2, daß man Axiom (XXIII) ersetzen kann durch

(XXIV) 

<p>Jede nicht konvergente beschränkte Folge besitzt mindestens zwei Häufungswerte</p>
---

## 11.4 Ein weiteres Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen

Mit den Begriffen des limes superior und limes inferior läßt sich das Konzept der Konvergenz reeller Folgen leicht in eine andere Gestalt bringen.

**Satz 11.5** *Eine reelle Folge  $(a_n)$  ist genau dann konvergent, wenn der limes superior und der limes inferior im eigentlichen Sinne existieren und übereinstimmen :*

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist der gemeinsame Wert gleich dem Grenzwert der Folge.

*Beweis.* Ist die Folge konvergent, so ist sie beschränkt und besitzt ihren Grenzwert  $s$  als einzigen Häufungswert, der somit zugleich der größte und kleinste Häufungswert ist. Umgekehrt impliziert die eigentliche Existenz der beiden Limes und ihre Übereinstimmung, daß die gegebene Folge beschränkt ist und genau einen Häufungswert  $s$  besitzt. Folglich ist sie gegen  $s$  konvergent.  $\square$

*Bemerkung.* Der vorstehende Satz ist sogar im *uneigentlichen* Sinne korrekt. Die Definition von  $\limsup$  und  $\liminf$  im uneigentlichen Sinne wurde gerade so getroffen, daß offensichtlich die Gleichung

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = \infty$$

äquivalent ist zu der bestimmten Divergenz der Folge  $(a_n)$  gegen  $\infty$ :

$$\lim_n a_n = \infty .$$

(Man beachte, daß die Formel  $\limsup_n a_n = \infty$  lediglich ausdrückt, daß es eine Teilfolge gibt, die bestimmt nach  $\infty$  divergiert). Entsprechend hat man

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = -\infty \iff \lim_n a_n = -\infty .$$

## 11.5 Verschärfung des Wurzelkriteriums

Das Wurzelkriterium läßt sich mit diesen neuen Begriffen in die folgende schärfere Form gießen.

**Satz 11.6 (Wurzelkriterium)** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in dem Banach-Raum  $V$  und*

$$q := \limsup \sqrt[n]{\|a_n\|} ,$$

wobei  $q = \infty$  zu setzen ist, wenn die reelle Folge  $(\sqrt[n]{\|a_n\|})$  (nach oben) unbeschränkt ist.

- a) Ist  $q < 1$ , so ist die Reihe (sogar absolut) konvergent.
- b) Ist  $q > 1$ , so ist die Reihe divergent.

Den (leichten) *Beweis* von Satz 6 ersparen wir uns an dieser Stelle, da er sich ganz bequem aus einem viel allgemeineren Resultat für Potenzreihen ergibt (Satz 9), dessen Beweis auch nicht wesentlich komplizierter ist.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Ist die Folge  $\sqrt[n]{\|a_n\|}$  in  $\mathbb{R}$  konvergent, so ist  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}$ .

2. Für die Beispiele  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , ist (unter Benutzung der *Stetigkeit der Wurzelfunktionen* - siehe Kapitel 12)

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{-s} = 1 .$$

Dies zeigt erneut, daß man bei  $q = 1$  keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz machen kann.

3. Daß man mit der Betrachtung des Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}$  nicht auskommt, sondern den limes superior zu Rate ziehen muß, liegt in der Natur der Sache. So ist die Potenzreihe

$$1 + z^2 + z^4 + \dots$$

als geometrische Reihe in  $z^2$  mit Sicherheit für alle  $z$  mit  $|z| < 1$  konvergent, und zwar gegen

$$\frac{1}{1 - z^2} ,$$

und für  $|z| > 1$  divergent. Ihr Konvergenzradius ist also 1, und dies ist tatsächlich der limes superior der Folge  $\sqrt[n]{a_n}$ , wobei  $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ . Dagegen existiert der Grenzwert  $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$  nicht!

*Bemerkung.* Eine entsprechende Formulierung mit dem limes superior für das *Quotientenkriterium* ist falsch, wie das Beispiel nach dem Wurzelkriterium in Form von Satz 10.14 zeigt. Man kann aber leicht einsehen, daß folgendes richtig ist.

**Satz 11.7 (Quotientenkriterium)** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in dem Banach-Raum  $V$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n$ . Ist dann*

$$q := \limsup \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1.$$

*so ist die Reihe (absolut) konvergent. Ist dagegen*

$$\liminf \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1.$$

*so ist sie divergent.*

## 11.6 Der Umordnungssatz von Riemann und Lejeune - Dirichlet

Die in Kapitel 10 angekündigte allgemeinste Fassung des Umordnungssatzes von Riemann und Lejeune-Dirichlet, die Satz 10.13 als Spezialfall umfaßt, lautet wie folgt.

**Satz 11.8** *Es sei  $\sum_n a_n$  eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Ferner seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vorgegeben mit  $\alpha \leq \beta$ . Dann gibt es eine Umordnung der Reihe, so daß für die Folge  $S_n$  der Partialsummen dieser Umordnung gilt:*

$$\liminf_n S_n = \alpha, \quad \limsup_n S_n = \beta.$$

Ohne *Beweis*. (Siehe aber die Bemerkung im Anschluß an den Beweis zu Satz 10.13). □

## 11.7 Der Konvergenzbereich von Potenzreihen

Wir wenden uns nun der detaillierten Untersuchung von *Potenzreihen* zu.

**Satz 11.9** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine (reelle oder) komplexe Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  und*

$$\rho := \limsup \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

- a) *Ist  $0 < \rho < \infty$ , so ist die Reihe absolut konvergent für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \frac{1}{\rho} =: R$  und divergent für  $|z| > R$ .*
- b) *Ist  $\rho = 0$ , so ist die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergent.*
- c) *Ist  $\rho = \infty$ , so ist die Reihe nur in 0 konvergent.*

*Beweis.* 1. Ist  $R = 1/\rho$ ,  $\rho < \infty$ , so ist für jedes  $r$  mit  $0 < r < R$  auch  $1/r > \rho$  und damit wegen Satz 4 für *fast alle*  $n$

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{also} \quad \|a_n\| r^n \leq 1.$$

Ist nun  $|z| < R$ , so wählt man eine Zahl  $r$  mit  $|z| < r < R$  und gewinnt mit dem zuvor Bewiesenen für die Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$  die konvergente Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{mit} \quad q := \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

2. Ist  $|z| > r > R$ , insbesondere also  $R < \infty$ , so besteht wegen  $1/r < \rho$  für *unendlich viele*  $n$  die Ungleichung

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} > \frac{1}{r}, \quad \text{also} \quad \|a_n\| r^n \geq 1.$$

Dann ist aber die Folge  $(a_n z^n)$  keine Nullfolge.  $\square$

*Definition.* In den Fällen a) und b) nennt man  $R = 1/\rho$ , wobei  $R = \infty$  zu setzen ist, falls  $\rho = 0$ , den *Konvergenzradius* der Reihe und

$$B(0, R) := \{z \in \mathbb{K} : |z| < R\}$$

im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  den *Konvergenzkreis* und im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  das *Konvergenzintervall* der Reihe. Die Identität

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{\|a_n\|}$$

wird auch als CAUCHY - HADAMARDSche *Formel* bezeichnet.

Es ist jetzt ein Leichtes, den *Beweis des Wurzelkriteriums* (Satz 6) nachzutragen. Ist  $q = \limsup_n \sqrt[n]{\|a_n\|}$ , so liegt die Zahl 1 genau dann im Inneren des Konvergenzkreises der Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$ , wenn  $1/q > 1$ , also  $q < 1$  ist. Entsprechend ist für  $q > 1$  die Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$  in  $z = 1$  divergent.

*Bemerkung.* Es sei für  $z_0 \neq 0$  die Folge  $\|a_n\| |z_0|^n$  beschränkt, also z. B.  $\|a_n\| |z_0|^n \leq K$ . Dies ist insbesondere der Fall, wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  konvergent ist, da dann  $\|z_0^n a_n\| = \|a_n\| |z_0|^n$  eine Nullfolge ist. Damit gilt

$$\|a_n\| |z|^n = \|a_n\| |z_0|^n \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq K q^n, \quad q := \frac{|z|}{|z_0|}.$$

Also ist die Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$  für beliebiges  $z$  mit  $|z| < |z_0|$  wegen des Majorantenkriteriums und der Konvergenz der geometrischen Reihe für  $|q| < 1$  absolut konvergent. Zusammen mit dem Beweis des Potenzreihensatzes impliziert dies eine weitere Charakterisierung des Konvergenzradius  $R$  einer Potenzreihe:

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R} : \text{die Folge } (\|a_n\| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \}.$$

Für das elementare Rechnen mit Potenzreihen ist das folgende Satz grundlegend; der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus den vorigen Überlegungen und kann daher ausgelassen werden. Weitere Aussagen über das „Manipulieren“ von Potenzreihen findet man im folgenden Kapitel.

**Satz 11.10** *Es seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  Potenzreihen mit Konvergenzradien  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Dann besitzen die Summe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

*und das (Cauchy-) Produkt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n := \sum_{j+k=n} a_j b_k,$$

*Konvergenzradien, die mindestens so groß wie das Minimum von  $R_1$  und  $R_2$  sind.*

Nun liefert aber das Quotientenkriterium, daß nicht nur die geometrische Reihe den Konvergenzradius 1 besitzt, sondern auch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} nz^n .$$

Daraus ergibt sich mit den vorstehenden Überlegungen sofort das folgende Ergebnis, das uns als Konsequenz die wichtige Erkenntnis liefern wird, daß Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreis *differenzierbare* Funktionen darstellen und dort auch *Stammfunktionen* besitzen.

**Folgerung 11.11** *Besitzt die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

den Konvergenzradius  $R$ , so auch die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}z^{n+1} .$$

*Beispiel und Bemerkung.* Setzt man in der doppelten geometrischen Reihe  $w = z$  für  $|z| < 1$ , so gewinnt man unter Benutzung des Cauchy-Produktes die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{j,k=0}^{\infty} z^{j+k} = \left( \frac{1}{1-z} \right)^2 .$$

(Siehe auch Beispiel 1 auf p. 175). Man beachte, daß hier links die Potenzreihe steht, die man aus der geometrischen Reihe gewinnt, wenn man „unter dem Summenzeichen differenziert“. Auf der rechten Seite steht aber tatsächlich die Ableitung der Funktion  $1/(1-z)$ . Dieses Phänomen ist allgemeingültig und beruht auf der eben bewiesenen Folgerung: Jede Potenzreihe stellt in dem Bereich  $|z| < R$  eine *differenzierbare* Funktion  $f$  dar, deren Ableitung  $f'$  durch die formal abgeleitete Reihe gegeben wird. Sie besitzt dort außerdem eine *Stammfunktion*, also eine Funktion  $F$  mit  $F' = f$ , die ebenfalls eine Potenzreihen-Entwicklung besitzt. (Siehe zum Beweis dieser Aussagen Kapitel 14).

*Beispiel.* Versieht man die „Stammfunktion“ der geometrischen Reihe noch mit alternierenden Vorzeichen, so bezeichnet man diese als die *Logarithmus-Reihe*:

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots .$$

Durch formales Differenzieren gewinnt man aus ihr die geometrische Reihe in  $-z$ , so daß die Beziehung

$$(L(z))' = \frac{1}{1+z} , \quad |z| < 1 ,$$

besteht.  $L(z)$  stellt den sogenannten *Hauptzweig* des *Logarithmus* von  $1+z$  in der Kreisscheibe  $|z| < 1$  dar (siehe auch Kapitel 12).

Wir wollen zum Abschluß dieses Kapitels noch einmal auf den Cauchyschen Produktsatz zu sprechen kommen. Er ergibt in *Banach-Räumen* a priori keinen Sinn, da man keine *Produkte* bilden kann. Hat man jedoch eine (assoziative, nicht aber notwendig kommutative)  $\mathbb{K}$ -*Algebra* vorliegen,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , deren unterliegender  $\mathbb{K}$ -*Vektorraum* bzgl. einer Norm  $\|\cdot\|$  *vollständig* ist, so geht der Beweis des Cauchyschen Produktsatzes wortwörtlich durch, sofern man für Produkte in der Algebra die (manchmal „multiplikative Dreiecksungleichung“ genannte) Abschätzung

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$



zur Verfügung hat. Solche Algebren heißen *Banach-Algebren*.

*Beispiel.* Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\text{End } V$  die (endlich-dimensionale)  $\mathbb{K}$ -Algebra der linearen Abbildungen von  $V$  in sich. Diese besitzt mit der sogenannten *Operator-Norm* tatsächlich eine Norm, die sie zu einer Banach-Algebra macht. (Siehe hierzu den Anhang zu Kapitel 17).

Auch in Banach-Algebren  $\mathcal{A}$  kann man Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathcal{A}$ , als Aufforderung verstehen, diejenigen Elemente  $A \in \mathcal{A}$  zu bestimmen, für die die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$  in  $\mathcal{A}$  konvergiert. Hierbei ist der Ausdruck  $A^0$  nur dann sinnvoll zu erklären, wenn die Banach-Algebra  $\mathcal{A}$  ein *Einselement* besitzt, das wir der Einfachheit halber mit 1 bezeichnen wollen. (Man beachte auch, daß wegen der möglichen Nichtkommutativität der vorliegenden Banach-Algebra die obige Potenzreihe von der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$  zu unterscheiden ist). Berechnet man den Konvergenzradius der obigen Reihe im Sinne von Satz 9 mit der Cauchy-Hadamardschen Formel, so stellt man durch Inspektion des dortigen Beweises sofort fest, daß auch folgendes richtig ist.

**Satz 11.12** *Die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} A^n a_n$$

konvergieren (und zwar absolut) für alle  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\|A\| < R$ , wobei

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

*Beispiel.* Wendet man den vorstehenden Satz auf die *Exponentialreihe* an, so ergibt sich, daß für jedes Element  $A$  in einer Banach-Algebra  $\mathcal{A}$  mit Einselement 1 die *Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

konvergiert. Die hierdurch definierte *Exponentialabbildung* von  $\mathcal{A}$  in sich bezeichnen wir wieder mit  $\exp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Wir können auch fragen, welche Elemente in  $\mathcal{A}$  *invertierbar* sind. Eine hinreichende Bedingung gibt der *Satz über die geometrische Reihe in Banach-Algebren*.

**Satz 11.13 (Geometrische Reihe)** *Es sei  $\mathcal{A}$  eine Banach-Algebra mit Einselement 1. Ist dann  $Q \in \mathcal{A}$  ein Element mit  $\|Q\| < 1$ , so ist die geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$$

in  $\mathcal{A}$  konvergent gegen  $(1 - Q)^{-1}$ .

*Beweis.* Ist  $q := \|Q\|$ , so besitzt die betrachtete geometrische Reihe die „klassische“ geometrische Reihe in  $q$  als Majorante und ist damit (absolut) konvergent. Bezeichnet  $G$  ihren Grenzwert, so ist

$$G(1 - Q) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n - \sum_{n=0}^{\infty} Q^{n+1} = 1.$$

Entsprechend ergibt sich  $(1 - Q)G = 1$ . □

## 12 Grenzwerte von Funktionswerten, Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit

Im Zusammenhang mit polynomialen Funktionen haben wir den Begriff der *Folgenstetigkeit* einer Funktion schon kurz erwähnt. Dieser soll nun genauer untersucht und an Beispielen erläutert werden. Insbesondere beweisen wir, daß Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen darstellen. Zu dieser Einsicht brauchen wir die Begriffe der *punktweisen* und *gleichmäßigen Konvergenz* von *Funktionsfolgen*.

### 12.1 Grenzwerte von Funktionswerten

Wir beginnen mit einer sehr allgemeinen

*Definition.* Es seien  $X_1, X_2$  zwei  $\mathbb{K}_0$ -metrische Räume mit Metriken  $d_1, d_2$  - wobei wir bei unseren allgemeinen Betrachtungen am Anfang des Kapitels voraussetzen, daß der Grundkörper  $\mathbb{K}_0$  nichttriviale Nullfolgen besitzt, also z. B. dem archimedischen Axiom genügt -  $D \subset X_1$  sei eine nicht leere Teilmenge, auf der eine Abbildung  $f : D \rightarrow X_2$  gegeben sei; ferner sei  $a \in X_1$  ein Punkt, der nicht notwendig in  $D$  enthalten sein muß, aber auch in  $D$  liegen darf, und  $A$  sei ein Element in  $X_2$ . Wir sagen, daß der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

existiert und gleich  $A$  ist, wenn für alle Folgen  $(x_j)$  mit  $x_j \in D$  und  $x_j \rightarrow a$  die Folge  $(f(x_j))$  gegen  $A$  konvergiert; in Zeichen also:

$$\lim_{x_j \rightarrow a} f(x_j) = A.$$

*Bemerkungen.* 1. Ist  $a \in D$ , so gibt es stets die konstante Folge  $(x_j = a)$ , so daß in diesem Fall der Grenzwert  $A$ , wenn er existiert, notwendig gleich  $f(a)$  sein muß. Ist  $a \notin D$ , so braucht es solche Folgen nicht zu geben. In diesem Fall wäre aber jedes Element  $A$  Grenzwert, was wir natürlich ausschließen wollen. Wir vereinbaren daher, daß unter dem Symbol

$$\lim_{x_j \rightarrow a} f(x_j) = A$$

stets zu verstehen ist, daß es Folgen  $(x_j)$  gibt mit  $x_j \in D$  und  $x_j \rightarrow a$ . Dies bedeutet (unter der oben gemachten Generalvoraussetzung an den Grundkörper  $\mathbb{K}$ ) nichts anderes, als daß  $a$  ein *Häufungspunkt* der Menge  $D$  ist (siehe Satz 7.30). Wollen wir im Fall  $a \in D$  die Möglichkeit einschließen, daß der Grenzwert  $A$  existiert, aber nicht gleich  $f(a)$  ist, so müssen wir uns auf Folgen  $(x_j)$  beschränken, deren Glieder in  $D \setminus \{a\}$  enthalten sind. Man benutzt dafür dann auch das Symbol

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = A.$$

2. Ist speziell  $D \subset \mathbb{K}_0$ , so führt man das Symbol

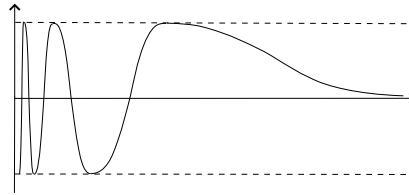
$$\lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

für die Situation ein, daß man die Abbildung  $f$  nur auf der Menge  $D^+ := \{x \in D : x > a\}$  betrachtet, also nur Folgen zuläßt, die „von rechts“ gegen  $a$  konvergieren. Man nennt diesen Grenzwert dann auch den *linksseitigen Grenzwert* der Abbildung  $f$  in  $a$ . Entsprechend werden rechtsseitige Grenzwerte eingeführt.

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  für  $x > 0$ . Es ist anschaulich klar, daß es zu jedem  $b \in [-1, 1]$  eine gegen Null konvergierende Folge  $(x_j)$  positiver reeller Zahlen gibt mit  $f(x_j) = b$  für alle  $j$ , also insbesondere mit  $\lim f(x_j) = b$ . Somit existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

nicht.

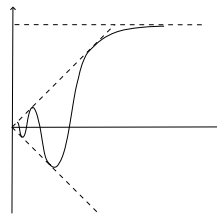


Figur 12.1

Dagegen gilt offensichtlich

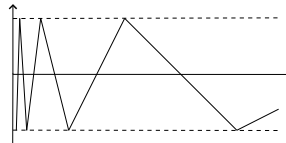
$$\lim_{x \searrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

da die Sinusfunktion auf ganz  $\mathbb{R}$  dem Betrage nach durch 1 beschränkt ist.



Figur 12.2

Wem der Sinus als Funktion nicht vertraut ist, kann sich auch ein anderes Beispiel überlegen mit einer Funktion  $g$ , die auf den Intervallen  $[2^j, 2^{j+1}]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , linear ist und abwechselnd mit  $j$  monoton von  $-1$  bis  $1$  wächst bzw. von  $1$  bis  $-1$  fällt. Eine Skizze dieser Funktion sieht in etwa wie folgt aus.



Figur 12.3

## 12.2 Eindeutigkeit und Existenz solcher Grenzwerte

Wir notieren jetzt ein erstes einfaches Resultat.

**Satz 12.1** *Unter den vorstehenden Voraussetzungen ist der Grenzwert*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

eindeutig bestimmt. Er existiert schon dann, wenn alle Grenzwerte

$$\lim_{x_j \rightarrow a} f(x_j)$$

existieren, die dann notwendig mit dem Grenzwert übereinstimmen. Ist der metrische Raum  $X_2$  vollständig, so genügt zur Existenz des Grenzwertes, daß für jede gegen  $a$  konvergente Folge  $(x_j)$  in  $D$  die Bildfolge  $(f(x_j))$  in  $X_2$  der Cauchy-Bedingung genügt.

*Beweis.* Hat man zwei Folgen  $x'_j \rightarrow a$  und  $x''_j \rightarrow a$  und gilt  $f(x'_j) \rightarrow A'$  und  $f(x''_j) \rightarrow A''$ , so gewinnt man durch Betrachtung der Folge  $(x'_0, x''_0, x'_1, x''_1, \dots)$  sofort die Einsicht, daß  $A' = A''$ . Der Rest ist eine unmittelbare Konsequenz hieraus.  $\square$

Ganz entscheidend für weitere Untersuchungen ist die Umformulierung dieses neuen Grenzwertbegriffes in Form des sogenannten  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums<sup>19</sup>.

**Satz 12.2** *Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{K}_0^*$  ein  $\delta > 0$  in  $\mathbb{K}_0$  gibt, so daß aus  $x \in D$ ,  $d_1(x, a) < \delta$  folgt:

$$d_2(f(x), A) < \varepsilon.$$

*Beweis.* a)  $f$  erfülle das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium in  $a$ , und  $(x_j)$  sei eine Folge in  $D$  mit  $\lim x_j = a$ . Wähle zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gemäß des Kriteriums und ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d_1(x_j, a) < \delta$  für alle  $j \geq N$ . Für diese  $j$  ist dann auch  $d_2(f(x_j), A) < \varepsilon$ . Somit ist, wie gewünscht

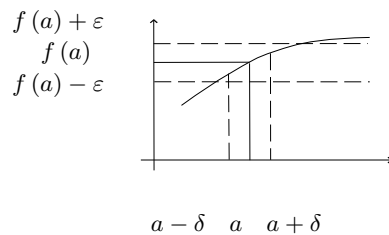
$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = A.$$

b) Wir nehmen umgekehrt an, daß  $\mathbb{K}_0$  dem Axiom (\*) genügt,  $f$  aber in  $a$  nicht dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium. Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x \in D \cap B(a, \delta)$  gibt mit

$$d_2(f(x), A) \geq \varepsilon_0.$$

Wir wählen nun eine monoton fallende Nullfolge  $\delta_j$  in  $\mathbb{K}_0$  und zu jedem  $j$  ein  $x_j \in D \cap B(a, \delta_j)$  mit (+). Dann konvergiert die Folge  $(x_j)$  gegen  $a$ , aber die Folge der Funktionswerte  $(f(x_j))$  kann wegen (+) nicht gegen  $A$  konvergieren.  $\square$

Die folgende Skizze soll den Inhalt des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums illustrieren.



Figur 12.4

<sup>19</sup>das in dieser Form nur unter der oben gemachten Generalvoraussetzung an den Grundkörper  $\mathbb{K}_0$  richtig ist. Siehe hierzu den Anhang zu diesem Kapitel.

### 12.3 Folgenstetige und stetige Abbildungen

*Definition.* Man nennt die Abbildung  $f : D \rightarrow X_2$  *folgenstetig* im Punkte  $a \in D$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existiert und gleich } f(a) \text{ ist.}$$

Sie heißt *stetig* in  $a$ , wenn das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium mit  $A = f(a)$  erfüllt ist. Sie heißt *stetig* (schlechthin), wenn sie an jeder Stelle  $a \in D$  stetig ist. Die letzte Bedingung kann man symbolträchtig umschreiben in Form der Vertauschung von zwei Limites:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j\right).$$

*Bemerkungen.* 1. Wir werden die beiden Begriffe *stetig* und *folgenstetig* im folgenden nicht weiter zu unterscheiden brauchen und benutzen daher meist den kürzeren Ausdruck (zumal er insbesondere stets die Folgenstetigkeit impliziert).

2. Der tiefere Grund für die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit im obigen Fall liegt in der einfach zu beweisenden Tatsache, daß  $\mathbb{K}_0$ -metrische Räume unter der Voraussetzung (\*) dem 1. *Abzählbarkeitsaxiom* genügen. (Siehe den Anhang zu Kapitel 7 zur Formulierung des 1. Abzählbarkeitsaxioms und den Anhang des nächsten Kapitels zum Beweis dieser Aussage). Man beachte, daß *jede* Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}_0$ ,  $D \subset \mathbb{K}_0$ , folgenstetig ist, wenn  $\mathbb{K}_0$  *keine* nichttrivialen Folgen besitzt.

3. Ist  $D \subset \mathbb{K}_0$  und  $a \in D$  sowohl Häufungspunkt von  $D^+$  als auch von  $D^-$ , so impliziert die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  auch die des entsprechenden linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes. Man macht sich sofort mit Hilfe des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums klar, daß auch die Umkehrung gilt: Aus der Existenz und Gleichheit von

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

folgt auch die Existenz von

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

und alle drei Grenzwerte stimmen überein.

4. *Isolierte* Punkte  $a \in D$  (zur Definition siehe das Ende von Kapitel 7) stellen keinerlei Bedingungen an eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , damit diese in  $a$  stetig ist. M. a. W.: *Jede* Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig in isolierten Punkten  $a \in D$ ; insbesondere kann man stetige Funktionen  $D \rightarrow \mathbb{K}$  an isolierten Stellen  $a$  beliebig abändern, ohne die Stetigkeit zu beeinträchtigen.

Die Existenz von Grenzwerten von Funktionswerten läßt sich nun auch allgemein mit dem Begriff der Stetigkeit in Verbindung bringen.

*Definition.* Es seien  $f : D \rightarrow X_2$  und  $a \in X_1$  wie oben gegeben. Man sagt,  $f$  lasse sich im Falle  $a \notin D$  *stetig nach  $a$  fortsetzen* bzw. im Falle  $a \in D$  *stetig in  $a$  abändern*, wenn es eine Funktion  $F : \bar{D} := D \cup \{a\} \rightarrow X_2$  gibt, die auf  $\bar{D} \setminus \{a\}$  mit  $f$  übereinstimmt und in  $a$  stetig ist.

Nur eine Umformulierung unserer bisherigen Überlegungen ist der folgende

**Satz 12.3** *Es gibt genau dann eine stetige Fortsetzung von  $f$  nach  $a$  bzw. eine stetige Abänderung von  $f$  in  $a$ , wenn der Grenzwert*

$$A := \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ bzw. } A := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$$

*existiert. Die Fortsetzung bzw. Abänderung  $F$  ist eindeutig bestimmt. Sie wird gegeben durch  $F(a) = A$  und  $F(x) = f(x)$ ,  $x \neq a$ .*

## 12.4 Algebraische Eigenschaften von Grenzwerten von Funktionswerten

Auch die uns schon vertrauten *algebraischen Operationen* lassen sich auf diese neue Art von Grenzwerten übertragen, sofern die betrachteten Funktionen Werte in einem normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  - und speziell in dem bewerteten Körper  $\mathbb{K}$  mit Wertekörper  $\mathbb{K}_0$  - annehmen. Dann ist für  $f, g : D \rightarrow V$  auch die Summe  $f + g : D \rightarrow V$  erklärt, und mit der Folgendefinition ergibt sich unmittelbar

**Satz 12.4** *Existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B ,$$

so existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = cA = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) , \quad c \in \mathbb{K} .$$

Sind insbesondere  $f$  und  $g$  stetig (bzw. stetig ergänzbar oder stetig fortsetzbar) in  $a$ , so auch  $f + g$  und  $cf$ .

*Beweis.* Wir geben einen zweiten Beweis mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle man  $\delta_1 > 0$  und  $\delta_2 > 0$ , so daß aus  $x \in D$  mit  $d_1(x, a) < \delta_1$  bzw.  $d_1(x, a) < \delta_2$  folgt:

$$\|f(x) - A\| < \frac{\varepsilon}{2} , \quad \|g(x) - B\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Die erste Behauptung ergibt sich dann mit  $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ .

Die zweite Behauptung ist für  $c = 0$  völlig trivial. Im Falle  $c \neq 0$  braucht man nur  $\delta(\varepsilon/|c|)$  zu betrachten.  $\square$

Ist zudem  $g : D \rightarrow \mathbb{K}$ , so ist unter den vorigen Voraussetzungen mit  $f : D \rightarrow V$  auch die Funktion  $gf : D \rightarrow V$  erklärt. Die üblichen Rechenregeln für Folgen ergeben dann den folgenden Satz, den man genauso einfach auch mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium beweisen kann.

**Satz 12.5** *Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x)f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \lim_{x \rightarrow a} f(x) ,$$

sofern die beiden rechts stehenden Grenzwerte existieren. Insbesondere ist  $gf$  in  $a$  stetig, wenn  $f$  und  $g$  in  $a$  stetig sind.

*Beispiel.* Konstante Funktionen  $x \mapsto c$  und die Identität  $x \mapsto x$  sind offensichtlich stetig in allen Punkten. Daraus folgt die Stetigkeit aller *polynomialen* Funktionen

$$\mathbb{K} \supset D \ni x \mapsto a_n + xa_{n-1} + x^2a_{n-2} + \cdots + x^na_0 \in V , \quad a_0, \dots, a_n \in V ,$$

wegen des vorstehenden Satzes.

Ist im vorigen Satz überdies  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , so kann man wie im Fall der Folgen erkennen, daß die Funktion  $g$  in einer Umgebung  $B(a, \delta_0)$  von  $a$  von Null verschieden ist; es ist daher sinnvoll, von dem Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

zu sprechen.

**Satz 12.6** *Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} ,$$

sofern die beiden rechts stehenden Grenzwerte existieren und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  von Null verschieden ist. Insbesondere ist  $1/g$  in der Nähe von  $a$  erklärt und in  $a$  stetig, wenn  $g$  in  $a$  stetig ist und  $g(a) \neq 0$  gilt.

*Beweis.* Es braucht nur die Vorbemerkung gezeigt zu werden. Es sei  $2\varepsilon_0 := |g(a)| > 0$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon_0$  ein  $\delta_0 > 0$ , so daß  $|g(x) - g(a)| < \varepsilon_0$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta_0$ . Für diese  $x$  ist dann auch  $|g(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$ .  $\square$

*Beispiele.* 1. Jede rationale Funktion  $P/Q$  mit Polynomen  $P, Q$ , deren Koeffizienten in dem Körper  $\mathbb{K}$  liegen, ist stetig an allen Stellen  $x \in \mathbb{K}$ , an denen  $Q$  nicht verschwindet.

2. Neben den polynomialen Funktionen sind auch die auf  $\mathbb{R}_+$  definierten *Wurzelfunktionen*  $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , stetig. Ist  $k$  ungerade, so lassen sich diese Funktionen auf sinnvolle Weise zu (stetigen) Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  vermöge  $x \mapsto -\sqrt[k]{|x|}$ ,  $-x \in \mathbb{R}_+$ , fortsetzen. Die Stetigkeit an der Stelle  $a = 0$  ist sehr einfach zu begründen (siehe auch Kapitel 8): Ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so wählt man  $\delta := \varepsilon^k$  und erhält für alle  $x \in \mathbb{R}_+$  bzw. in  $\mathbb{R}$  mit  $|x| < \delta$ , daß

$$|\sqrt[k]{|x|} - \sqrt[k]{0}| \leq |\sqrt[k]{|x|}| < \sqrt[k]{\delta} = \varepsilon.$$

Im Falle  $a \neq 0$  sei ohne Einschränkung  $a > 0$  und  $x$  positiv. Dann ist  $\sqrt[k]{x^{k-1}} + \sqrt[k]{a} \sqrt[k]{x^{k-2}} + \dots + \sqrt[k]{a^{k-1}} \geq \sqrt[k]{a^{k-1}} =: C_a > 0$  und folglich für diese  $x$ :

$$|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{a}| \leq C_a^{-1}|x - a|,$$

woraus sich unmittelbar die Stetigkeit der  $k$ -ten Wurzel an der Stelle  $a$  ergibt.

*Bemerkung.* Wir geben später noch einen zweiten Beweis, der sogar die *gleichmäßige Stetigkeit* der Wurzelfunktionen liefert.

## 12.5 Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

Die *Potenzfunktionen*  $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^r$  mit  $r = p/q \in \mathbb{Q}$  kann man sich aus zwei Funktionen *zusammengesetzt* denken: Man setze  $f(x) := x^p$  und  $g(x) := \sqrt[q]{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ , und erhält  $x^r = (g \circ f)(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ . Die Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion ergibt sich aus der Stetigkeit der einzelnen Funktionen.

**Satz 12.7** *Ist die Abbildung  $f : D \rightarrow X_2$  stetig in  $a \in D \subset X_1$  und  $g : D_1 \rightarrow X_3$  stetig in  $b := f(a)$ , und lassen sich die Abbildungen  $f$  und  $g$  hintereinanderschalten, d. h. gilt  $f(D) \subset D_1$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow X_3$  stetig in  $a$ .*

*Beweis.* Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta_1 > 0$  mit  $d_3(g(y), g(b)) < \varepsilon$  für alle  $y \in D_1$  mit  $d_2(y, b) < \delta_1$ . Zu  $\varepsilon_1 := \delta_1$  gibt es weiter ein  $\delta > 0$ , so daß  $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon_1$  für alle  $x \in D$  mit  $d_1(x, a) < \delta$ . Wegen  $g \circ f(a) = g(b)$  folgt dann sofort die Behauptung.  $\square$

Insbesondere erhalten wir damit die

**Folgerung 12.8** *Die Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten  $r \in \mathbb{Q}$ ,*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^r, \end{cases}$$

*sind stetig auf ganz  $\mathbb{R}_+$ .*

Wir wollen in einem kleinen Zwischenabschnitt die Stetigkeit der Exponentialfunktion nachprüfen. Bei dieser Gelegenheit werden wir sie auch durch die Funktionalgleichung und eine *Differenzierbarkeits-Bedingung* im Nullpunkt charakterisieren. Ferner wollen wir ihren Verlauf für die reelle Variable  $x$  studieren.

Wir erinnern zunächst daran, daß wir in der Bemerkung 1 nach Satz 10.11 schon die (Folgen-) Stetigkeit der Exponentialfunktion im Nullpunkt nachgewiesen haben: Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \exp z = 1 = \exp 0.$$

Daß die Exponentialfunktion stetig an jeder Stelle  $a \in \mathbb{C}$  ist, folgt leicht aus der Funktionalgleichung.

**Satz 12.9** Für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \exp z = \exp z_0 .$$

*Beweis.* Wegen der Funktionalgleichung ist

$$\exp z - \exp z_0 = \exp z_0 (\exp(z - z_0) - 1) ,$$

und da mit  $z$  gegen  $z_0$  die Differenz  $z - z_0$  gegen 0 geht, folgt die Behauptung aus der vorher konstatierten Folgenstetigkeit in 0.  $\square$

## 12.6 Verlauf der Exponentialfunktion

Zum Verlauf der *reellen* Exponentialfunktion  $\exp x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , beachten wir zunächst, daß wegen  $\exp z \exp(-z) = \exp 0 = 1$  die Exponentialfunktion auch im Komplexen keine Nullstelle besitzt und stets

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z} , \quad z \in \mathbb{C} ,$$

gilt. Aus der Potenzreihenentwicklung von  $\exp$  gewinnt man weiter sofort, daß  $\exp x > 1$  und sogar

$$(++) \quad \exp x > 1 + \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für alle } x > 0 \quad \text{und alle } n \in \mathbb{N} .$$

Somit ist  $\exp x > 0$  für  $x \in \mathbb{R}$ , was man auch aus der Funktionalgleichung hätte ersehen können:

$$\exp x = \exp\left(2 \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0 .$$

Ferner ist die Exponentialfunktion im Reellen *streng monoton wachsend*, denn für  $x_1 < x_2$  ergibt sich aus der Funktionalgleichung die Abschätzung

$$\exp x_1 < \exp(x_2 - x_1) \exp x_1 = \exp x_2 .$$

Für eine genauere Untersuchung des Verlaufs brauchen wir den Begriff des *uneigentlichen* Grenzwertes einer Funktion. Dies sind Ausdrücke der Form

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A , \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{etc.} ,$$

die sich entsprechend unseren Definitionen für die bestimmte Divergenz von Folgen von selbst erklären sollten (bei den Grenzwerten für  $x \rightarrow \infty$  muß natürlich der Definitionsbereich  $D$  der Funktion  $f$  in  $\mathbb{K}_0$  liegen und nach oben unbeschränkt sein; entsprechend muß die Funktion  $f$  nach  $\mathbb{K}_0$  abbilden, damit einer der Grenzwerte „gleich  $\infty$ “ sein kann). Wir erläutern die Begriffe an zwei Beispielen.

*Beispiel.* Es sei  $P(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n$  ein *normiertes* reelles Polynom vom Grad  $n$ . Für  $x \rightarrow \infty$  konvergiert der Quotient

$$Q(x) := \frac{a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1}}{x^n}$$

gegen Null. Daraus folgt sofort

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x^n} = 1 .$$

$Q(x)$  ist insbesondere (dem Betrage nach) kleiner als  $1/2$ , wenn  $x \geq R$  für geeignetes  $R \gg 0$ . Also hat man auch die folgende, oft sehr nützliche Abschätzung für  $x \geq R$ :

$$x^n/2 \leq P(x) = x^n Q(x) + x^n \leq 3x^n/2 .$$

Das zweite Beispiel formulieren wir als *Satz*. Er drückt aus, daß die Exponentialfunktion bei  $x \rightarrow \infty$  „schneller wächst als jedes Polynom“.



**Satz 12.10** Für jedes normierte Polynom  $P(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp x}{P(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) \exp x = 0.$$

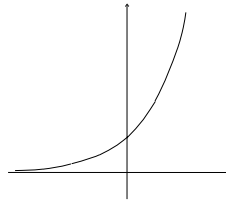
*Beweis.* Zieht man auch noch die Ungleichungen (++) zu Rate, so findet man zusammen mit der im vorigen Beispiel abgeleiteten Abschätzung für  $P$  die Ungleichung

$$\frac{\exp x}{P(x)} \geq \frac{2x}{n+1}, \quad x \geq R,$$

woraus sofort die erste Behauptung folgt. Die zweite läßt sich auf die erste zurückführen (man beachte, daß  $\tilde{P}(x) := (-1)^n P(-x)$  wiederum ein normiertes Polynom ist):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) \exp x = \lim_{x \rightarrow \infty} P(-x) \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\tilde{P}(x)}{\exp x} = 0. \quad \square$$

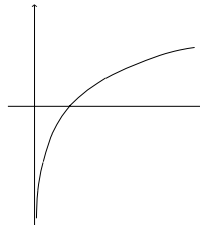
Die übliche Skizze für den Verlauf der Exponentialfunktion im Reellen sieht daher wie folgt aus:



Figur 12.5

## 12.7 Der Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Im besonderen ist aus diesem Verlauf zu vermuten, daß alle Werte in  $\mathbb{R}_+^*$  angenommen werden. Dies ist in der Tat der Fall, wie man zwar direkt zeigen kann, am besten aber aus dem sogenannten *Zwischenwertsatz* deduziert, den wir allerdings erst in Kapitel 13 beweisen werden. Wir unterstellen diese Tatsache hier einfach, und auch - was ebenfalls erst später gezeigt wird - daß die Umkehrabbildung  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  wieder stetig ist. Der Verlauf dieser neuen Funktion sieht etwa wie folgt aus:



Figur 12.6

Sie wird als der *natürliche Logarithmus* bezeichnet und mit  $\ln x$  bezeichnet. Als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist sie durch eine der beiden Bedingungen eindeutig bestimmt:

$$\ln(\exp x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \exp(\ln x) = x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Sie erfüllt eine eigene Funktionalgleichung:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Denn ist  $x_j = \exp y_j$ ,  $j = 1, 2$ , so erhält man

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(\exp y_1 \exp y_2) = \ln(\exp(y_1 + y_2)) = y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Diese Formel ist die Grundlage zur Verwendung der Logarithmen: Mit ihrer Hilfe wird die Multiplikation reeller Zahlen auf die Addition ihrer Logarithmen zurückgeführt. Sinnlich greifbarer Ausdruck dieser Tatsache ist das (mittlerweile durch Taschenrechner und Computer überholte und damit altmodische) Gerät des *Rechenschiebers*, vor nicht allzu langer Zeit noch das Markenzeichen des Ingenieurs. Wir werden später noch einiges über die Fortsetzung dieser Funktion ins Komplexe zu sagen haben.

## 12.8 Weitere Charakterisierungen der Exponentialfunktion

Wir kommen schließlich noch zur Charakterisierung der Exponentialfunktion durch die Funktionalgleichung und eine *Differenzierbarkeitsaussage*, die wir zunächst nur in eine allgemeine Grenzwertaussage verkleiden.

*Beispiel.* Für die Exponentialfunktion  $\exp$  ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1.$$

Denn nach Satz 10.11 haben wir für  $|z| \leq 1$  die Abschätzung

$$|\exp z - (1 + z)| \leq |z|^2.$$

Durch leichte Umformung und Division durch  $|z|$  gewinnt man hieraus

$$\left| \frac{\exp z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z|, \quad z \neq 0,$$

und damit die Behauptung. Da mit  $(z_n)$  auch  $(cz_n)$  für beliebiges  $c \in \mathbb{C}$  eine Nullfolge ist, kann man dieses Resultat für  $c \neq 0$  verallgemeinern zu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(cz) - 1}{z} = c.$$

Selbstverständlich ist die letzte Formel wegen  $\exp 0 = 1$  auch für  $c = 0$  gültig.

Mit der Exponentialfunktion erfüllen auch alle Funktionen  $f = f_c$ ,  $f_c(z) := \exp(cz)$ , die Funktionalgleichung  $f(z + w) = f(z)f(w)$ . Daß es unter den differenzierbaren Funktionen keine weiteren gibt, die diese Eigenschaft besitzen, besagt unter anderem der folgende Satz.

**Satz 12.11** Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  erfülle die Funktionalgleichung  $f(z + w) = f(z)f(w)$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ , und es gelte

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - 1}{z} = c.$$

Dann ist  $f(z) = \exp(cz)$ .

*Beweis.* Aus der Funktionalgleichung ergibt sich unmittelbar, daß  $f$  identisch Null ist, wenn  $f$  nur an einer einzigen Stelle verschwindet. Dies widerspricht aber der Grenzwertforderung. Insbesondere ist also  $f(0) \neq 0$  und damit wegen  $f(0) = f(2 \cdot 0) = (f(0))^2$  automatisch  $f(0) = 1$ . Zudem gewinnt man bei mehrfacher Anwendung der Funktionalgleichung für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  die Beziehung

$$f(z) = f\left(n \frac{z}{n}\right) = \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n.$$

Definieren wir nun die Folge  $(z_n)$  durch  $\frac{z_n}{n} + 1 := f\left(\frac{z}{n}\right)$ , so ist notwendig

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n.$$

Wir brauchen nur noch einzusehen, daß die Folge der  $z_n$  gegen  $cz$  konvergiert, denn dann ist die rechte Seite nach Satz 10.13, wie behauptet, gleich  $\exp(cz)$ . Für  $z = 0$  ist aber  $z_n = 0$  wegen  $f(0) = 1$ , und für  $z \neq 0$  besagt dies gerade unsere Grenzwertvoraussetzung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z/n) - 1}{z/n} = c. \quad \square$$

Um die obige Charakterisierung der Exponentialfunktion besser verstehen zu können, führen wir kurz die allgemeine Definition für die Ableitung einer Funktion

$$f : D \longrightarrow V$$

an einer Stelle  $a \in D$  ein, wobei  $D \subset \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper, und  $V$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Es handelt sich dabei um den Grenzwert des sogenannten *Differenzenquotienten*

$$\frac{(\Delta_a f)(x)}{\Delta_a x} := \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

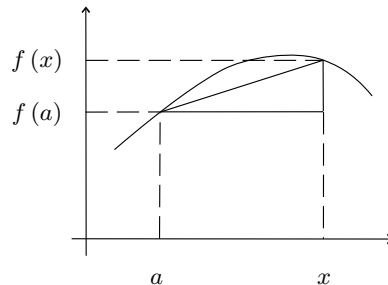
der nur für  $x \in D \setminus \{a\}$  erklärt ist. Die *Ableitung* der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$ , die notwendig ein Häufungspunkt von  $D \setminus \{a\}$  sein muß, ist der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{(\Delta_a f)(x)}{\Delta_a x} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

sofern dieser im eigentlichen Sinne existiert<sup>20</sup>. Man bezeichnet ihn mit

$$\frac{df}{dx}(a) \quad \text{oder} \quad f'(a).$$

Die allgemeine Theorie differenzierbarer Abbildungen und Funktionen entwickeln wir erst in Kapitel 14. Hier genügt uns allein die Definition. Eine anschauliche Vorstellung im Falle  $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$  vermittelt das folgende Bild. Hier ist der Differenzenquotient die Steigung der „Sekante“ durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$  und somit  $f'(a)$  die Grenzsteigung.



Figur 12.7

*Bemerkung.* Der obige Satz besagt dann, daß unter allen Funktionen, die der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion genügen, die Funktion  $f = f_c$  mit  $f_c(z) := \exp(cz)$  bestimmt ist durch die Forderung, daß sie an der Stelle 0 differenzierbar und ihre Ableitung dort gleich  $c$  ist:

$$f'(0) = c.$$

Auch die „Reproduktion der Exponentialfunktion unter Differentiation“ können wir nun schon herleiten.

<sup>20</sup>Da der Differenzenquotient an der Stelle  $x = a$  nicht definiert ist, läßt man unter dem Limeszeichen den Zusatz  $x \neq a$  meistens fort, da er sich von selbst versteht.

**Satz 12.12** Für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\exp z - \exp z_0}{z - z_0} = \exp z_0 .$$

*Beweis.* Wegen der Funktionalgleichung ist

$$\frac{\exp z - \exp z_0}{z - z_0} = \exp z_0 \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0} ,$$

und wie im vorigen Satz schließt man mit Hilfe unserer zweiten charakterisierenden Grenzwerteigenschaft auf die geforderte Beziehung.  $\square$

*Bemerkung.* Die obigen Aussagen bleiben offensichtlich richtig, wenn wir uns nur auf reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die reelle Exponentialreihe beschränken.

## 12.9 Die allgemeine Exponentialfunktion

Wir sind nun in der Lage, für beliebige *positive reelle* Zahlen  $a > 0$  und beliebige *komplexe* Zahlen  $z$  die Potenz  $a^z$  zu definieren. Selbstverständlich muß diese Definition mit der uns schon bekannten für  $a^r$  bei *rationalem*  $r \in \mathbb{Q}$  übereinstimmen und sich aus dieser sinnvoll begründen und entwickeln lassen. Wir werden dies anschließend für die folgende Setzung nachweisen:

$$a^z := \exp(z \ln a) .$$

Man beachte, daß  $e = \exp 1$  und damit  $\ln e = 1$ , so daß die vorstehende Definition insbesondere zu der bekannten Schreibweise

$$e^z = \exp z$$

führt, die wir von nun an fast ausschließlich verwenden werden. Für rationale  $z$  ist dies tatsächlich unsere alte Definition in verkleideter Gestalt. Ist nämlich  $z = n \in \mathbb{N}^*$ , so ist wegen der Funktionalgleichung  $\exp(n \ln a) = \exp(\ln a + \dots + \ln a) = (\exp(\ln a))^n = a^n$ , und auch für  $n = 0$  ergibt sich der richtige Wert  $\exp 0 = 1$ . Für negative  $-n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , folgt der Nachweis ebenfalls aus der Funktionalgleichung wegen

$$\exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} .$$

Nochmalige Anwendung desselben Prinzips führt auch bei rationalem  $r = p/q$  zum Ziel:

$$a^p = \exp(p \ln a) = \exp\left(q \frac{p}{q} \ln a\right) = (\exp(r \ln a))^q ,$$

also

$$\exp(r \ln a) = \sqrt[q]{a^p} = a^r .$$

Auch bei *reellem*  $x$  ist die Definition von  $a^x$  zwingend, wenn man verlangt, daß die Definition von  $a^r$  für *rationale*  $r$  „stetig“ nach  $\mathbb{R}$  fortgesetzt wird. Ist nämlich  $(r_j)$  eine Folge rationaler Zahlen, die gegen  $x$  konvergiert, so ist wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion notwendig

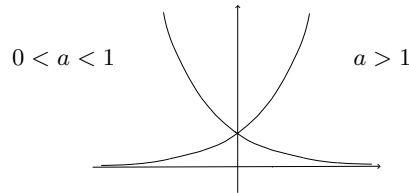
$$\exp(x \ln a) = \exp\left(\lim_{j \rightarrow \infty} (r_j \ln a)\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \exp(r_j \ln a) = \lim_{j \rightarrow \infty} a^{r_j} .$$

Daß die Fortsetzung auf *komplexe* Exponenten  $z$  die „richtige“ ist, werden wir weiter unten erläutern, letztendlich aber erst im Rahmen der *Funktionentheorie* vollständig verstehen können.

*Bemerkung.* Die Funktion  $z \mapsto a^z$  wird auch als *Exponentialfunktion zur Basis a* bezeichnet. Sie wird aufgrund ihrer Definition charakterisiert durch die folgenden beiden Eigenschaften:

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} a^{z_2} , \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a ,$$

und ist, wie wir schon benutzt haben, stetig und zudem auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend bzw. fallend, falls  $a > 1$  bzw.  $a < 1$ . (Für  $a = 1$  handelt es sich um die konstante Funktion mit Wert 1). Bei  $a \neq 1$  nimmt  $a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , alle Werte aus  $\mathbb{R}_+^*$  genau einmal an. Der Verlauf dieser Funktionen im Reellen sieht in etwa wie folgt aus:



Figur 12.8

Als weitere *Rechenregeln* notieren wir noch:

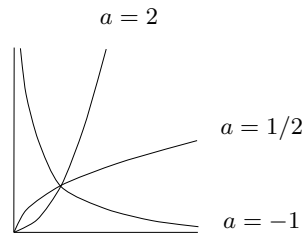
$$(a^x)^z = a^{xz}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \quad a^z b^z = (ab)^z, \quad a > 0, b > 0, z \in \mathbb{C}.$$

### 12.10 Die verallgemeinerten Potenzfunktionen

Indem wir schließlich die Rolle von  $a$  und  $z$  vertauschen, können wir zu jedem  $a \in \mathbb{C}$  auch die *verallgemeinerten Potenzfunktionen*

$$\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$$

eingeführen. Wegen der Stetigkeit der Funktionen  $\ln$  und  $\exp$  sind auch alle diese Potenzfunktionen stetig. Für reelle  $a > 0$  sind sie offensichtlich streng monoton wachsend, bei  $a < 0$  streng monoton fallend. Ihr Verlauf ist in etwa der folgende:



Figur 12.9

*Bemerkung.* Wir überlassen dem Leser den Nachweis der folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a < 0; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 0, \\ \infty & \text{für } a < 0; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \text{ für } a > 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0 \text{ für } a > 0.$$

*Bemerkung.* Ist  $a > 0$ , so kann die Funktion  $x \mapsto a^x$  stetig in den Nullpunkt durch 0 fortgesetzt werden. Wir definieren daher immer

$$0^a := 0 \quad \text{für } a > 0.$$

(Dagegen wird  $0^0$  stets gleich 1 gesetzt).

## 13 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

### 13.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Wir kehren nun noch einmal zu der Untersuchung von Potenzreihen zurück. Tatsächlich liefert der Beweis des Potenzreihensatzes weit mehr, als wir in Satz 11.9 formuliert haben. Als Konsequenz gewinnen wir die Gewißheit, daß Potenzreihen in ihrem Konvergenz-Intervall bzw. -Kreis stetige (und sogar beliebig oft differenzierbare) Funktionen darstellen.

Wir benötigen zu den folgenden Untersuchungen die Einführung und Klärung von Konvergenzkonzepten für Folgen von *Funktionen*, die für die gesamte Analysis von grundlegender Bedeutung sind. Am einfachsten zu verstehen ist die folgende Definition.

*Definition.* Es seien  $f_n, f$  Funktionen auf einer Menge  $X$  mit Werten in einem normierten Vektorraum  $V$ . Man sagt, die Folge  $(f_n)$  konvergiere *punktweise* gegen  $f$ , wenn für alle  $x \in X$  gilt:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Man schreibt in diesem Fall auch meist abkürzend

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

*Bemerkungen.* 1. Wir werden noch weitere, im Allgemeinen (*weit*) *stärkere* Konvergenzbedingungen für Funktionenfolgen zu betrachten haben. Auch dann schreibt man oft  $f = \lim_n f_n$ . Man muß sich daher in jedem Einzelfall vergewissern, um welchen „Konvergenztyp“ es sich handelt. Dies sollte uns schon jetzt insofern vertraut sein, als wir auch bei Grenzwerten in einem metrischen Raum  $X$  die alles entscheidende Metrik  $d_X$  nicht mit in das Limesymbol hineinnehmen, also nur  $\lim$  anstelle von

$$d_X - \lim$$

oder Ähnlichem schreiben.

2. Für die Formulierung des obigen Konzeptes benötigt man nur einen vernünftigen Konvergenzbegriff in dem *Bildraum*. Wir können daher auch den normierten Vektorraum  $V$  durch einen metrischen Raum  $(Y, d_Y)$  (oder sogar einen topologischen Raum) ersetzen. In diesem Fall lautet die exakte Definition für die punktweise Konvergenz einer Folge  $(f_n : X \rightarrow Y)$  wie folgt: Zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine natürliche Zahl  $N = N(x, \varepsilon)$ , so daß

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ .

3. Bei punktweiser Konvergenz handelt es sich also um einen Begriff, der sich auf die Elemente des *Funktionsraumes* (besser: Abbildungsraumes)  $\text{Abb}(X, Y)$  bezieht und wesentlich von der *Topologie* auf  $Y$  abhängt. Man kann sich an einfachen Beispielen klar machen, daß der Begriff der punktweisen Konvergenz i. A. nicht durch eine Metrik auf  $\text{Abb}(X, Y)$  induziert wird, auch wenn wir ihn aus einer Metrik auf  $Y$  ableiten. Solche Funktionenräume sind daher Prototypen von allgemeineren topologischen Räumen; sie haben wesentlich zur Entwicklung der Gebiete der *Funktionalanalysis* und der *allgemeinen Topologie* Anlaß gegeben.

Wir werden weiter unten an einem Beispiel zeigen, daß die in der Definition der punktweisen Konvergenz vorkommende Zahl  $N = N(x, \varepsilon)$  tatsächlich noch von dem Punkt  $x \in X$  in ganz sensibler Weise abhängen kann. Wenn wir jedoch verlangen, daß wir  $N$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  *gleichmäßig* für alle  $x \in X$ , d. h. unabhängig von dem individuellen Punkt  $x$  wählen können, kommen wir zu einem viel stärkeren Begriff.

*Definition.* Die Folge  $f_n$  konvergiert auf  $X$  *gleichmäßig* gegen die Funktion  $f$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt mit

$$\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in X$ . Man schreibt dann manchmal auch

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \quad \text{oder} \quad f = X - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder kürzer} \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n .$$

Völlig klar ist das

**Lemma 13.1** *Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.*

*Bemerkung.* Die Umkehrung dieses Lemmas ist (bei festem  $X$  und „variablem“  $Y$ ) dann und nur dann richtig, wenn die Menge  $X$  *endliche* Kardinalität besitzt. Ist nämlich  $X$  endlich, so kann man bei punktweiser Konvergenz zu vorgegebenem  $\varepsilon$  die Zahl  $N = N(\varepsilon)$  als das *Maximum* der Zahlen  $N(x, \varepsilon)$ ,  $x \in X$ , definieren und begründet damit die *gleichmäßige* Konvergenz der gegebenen Abbildungsfolge. Ist dagegen  $X$  *unendlich*, so ist ohne Einschränkung  $\mathbb{N}$  in  $X$  enthalten. Es sei nun bei festem  $n \in \mathbb{N}$  die Abbildung  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{j}{n+1}, \quad x = j \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{sonst} .$$

Diese Abbildungsfolge ist punktweise konvergent gegen die Nullfunktion  $f(x) = 0$ ,  $x \in X$ . Wäre die Folge der  $f_n$  gleichmäßig konvergent, so müßte sie auch punktweise konvergieren, der Limes bzgl. der Supremumsnorm also gleich dieser Funktion  $f$  sein. Dies ist aber nicht der Fall; in Negation zu der Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es nämlich ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß zu jedem  $N$  ein  $n \geq N$  existiert und ein Punkt  $x_n \in X$ , so daß  $|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$ , nämlich z. B.  $\varepsilon_0 := 1$ ,  $n := N$  und  $x_n := n + 1 \in \mathbb{N} \subset X$ .

Wir geben noch ein weiteres, für die Analysis interessanteres Beispiel.

*Beispiel.* Wir betrachten die Folge  $f_n(x) = x^n$  auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Dann ist nach früheren Beispielen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Folge  $(f_n)$  punktweise konvergent gegen die (unstetige) Funktion  $f$  mit  $f(1) = 1$  und  $f(x) = 0$ ,  $0 \leq x < 1$ . Man kann leicht direkt einsehen, daß die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent (gegen Null) auf jedem Intervall  $[0, a]$ ,  $a < 1$ , ist, jedoch auf dem vollen Intervall  $[0, 1]$  nicht gegen  $f$  gleichmäßig konvergiert.

Dies folgt auch indirekt aus dem folgenden Satz, den wir hier wegen seiner allgemeinen Bedeutung sofort einfügen. Er wird anschließend und im letzten Teil dieses Kapitels herangezogen, um das Studium der Theorie der Potenzreihen weiter voranzutreiben.

**Satz 13.2** *Sind  $X, Y$  metrische Räume, und ist  $f$  gleichmäßiger Limes von stetigen Abbildungen  $f_n : X \rightarrow Y$ , so ist auch  $f$  stetig.*

*Beweis.* Es seien  $a \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wähle  $N$  so groß, daß  $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$  für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in X$ , und  $\delta = \delta(a)$  so klein, daß  $d_Y(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3$  für alle  $x \in X$  mit  $d_X(x, a) < \delta$ . Dann ist für alle diese  $x$  wegen der Dreiecksungleichung auch

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(a)) + d_Y(f_N(a), f(a)) < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon . \quad \square$$

Insbesondere dieses Ergebnis sollte uns davon überzeugt haben, daß der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von zentraler Bedeutung ist. Z. B. für *Potenzreihen* können wir die folgende Verschärfung von Satz 11.9 herleiten.

**Satz 13.3 (Zusatz zu Satz 11.9)** Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  habe einen positiven Konvergenzradius  $0 < R \leq \infty$ . Dann ist die Folge der Partialsummen

$$s_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$$

gleichmäßig konvergent gegen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe

$$\overline{B}(0, r) := \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq r\}$$

um Null mit Radius  $r < R$ .

Wegen  $B(0, R) = \bigcup_{r < R} \overline{B}(0, r)$  ergibt sich sofort, daß die Folge der Partialsummen einer Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$  in jedem Kreis  $B(a, \delta)$  mit  $|a| < R$  und  $|a| + \delta = r < R$  gleichmäßig konvergiert, und daraus mit dem zuvor bewiesenen Satz die

**Folgerung 13.4** Die Funktion  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ist stetig auf dem Konvergenzkreis  $B(0, R)$ .

*Bemerkungen.* 1. Die Voraussetzungen des Satzes 14 brauchen nur *lokal* erfüllt zu sein: Die Grenzfunktion  $f$  der Folge  $(f_n)$  von stetigen Funktionen ist schon dann stetig, wenn die Folge *lokal gleichmäßig* konvergiert, d. h. wenn es zu jedem Punkt  $a \in X$  einen Kreis  $B := B(a, R)$  gibt, so daß die Folge der Einschränkungen  $f_n|_B$  auf  $B$  gleichmäßig gegen  $f|_B$  konvergiert. Dies machen wir uns gerade im Beweis zu der Folgerung 16 zu Nutze.

2. Den Beweis des Zusatzes deduzieren wir weiter unten aus einem spezielleren Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

3. Wir werden später sehen, daß - wie wir schon an einigen Beispielen erörtern konnten -  $f$  sogar (beliebig oft) differenzierbar ist und daß man die Ableitungen durch Differentiation unter dem Summenzeichen gewinnt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

## 13.2 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz

Bevor wir uns weiteren Anwendungen auf Potenzreihen zuwenden, müssen wir Kriterien bereitstellen, mit denen man diese Eigenschaft für Folgen von Funktionen mit Werten in metrischen Räumen oder Reihen mit Werten in normierten Vektorräumen feststellen und insbesondere Satz 15 begründen kann. - Wir beginnen mit einer einfachen, aber grundlegenden Bemerkung.

*Bemerkung.* Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei *punktweiser* Konvergenz hat man auf dem Raum der Abbildungen  $\text{Abb}(X, Y)$  in einen metrischen Raum  $Y$  zumindest eine sogenannte *Pseudometrik* (bzw. eine *Pseudonorm* im Falle eines normierten Vektorraums  $Y = V$ ):

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Sie werden manchmal auch aus naheliegenden Gründen als *Supremums(pseudo)metrik* bzw. *Supremums(pseudo)norm* bezeichnet und mit den Symbolen

$$d_{\infty}(f, g), \quad \|f\|_{\infty} \quad \text{oder} \quad \|f\|_X$$



belegt. Die Supremumpseudometrik ist eine Abbildung  $d = d_\infty : \text{Abb}(X, Y) \times \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ , die alle Axiome einer Metrik erfüllt bis auf die Bedingung, daß alle Abstände *endlich* sind. Genauer gilt also:

0.  $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  und  $d_\infty(f, g) = 0$  genau dann, wenn  $f = g$ ;
1.  $d_\infty(g, f) = d_\infty(f, g)$ ;
2.  $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$  im uneigentlichen Sinne.

Der Begriff der *Pseudonorm* soll neben den drei sinngemäß wie eben zu interpretierenden Aussagen beinhalten, daß die Gleichung

$$\|af\|_\infty = |a| \|f\|_\infty$$

besteht, wenn  $\|f\|_\infty$  endlich ist.

Offensichtlich bedeutet die gleichmäßige Konvergenz einer Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f$ , daß die Folge  $(d(f_n, f))$  der Abstände für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  endlich ist und gegen Null konvergiert. Man nennt daher diesen Abstand auch die (*Pseudo-*) *Metrik der gleichmäßigen Konvergenz*. Ist speziell  $X$  ein *kompakter topologischer Raum* und  $\mathcal{C}^0(X, Y) \subset \text{Abb}(X, Y)$  die Teilmenge der *stetigen* Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , so induziert diese Pseudometrik in der Tat, wie wir in einem späteren Kapitel beweisen werden, eine *Metrik* auf  $\mathcal{C}^0(X, Y)$ .

Viele hinreichende Kriterien, insbesondere das häufig verwendete *Weierstraßsche Konvergenzkriterium*, beruhen auf der Tatsache, daß für gleichmäßige Konvergenz ein Cauchy-Kriterium gilt. Wir nennen selbstverständlich eine Folge  $(f_n)$  von Abbildungen  $f_n : X \rightarrow Y$  eine *CAUCHY-Folge* in Bezug auf gleichmäßige Konvergenz, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so daß

$$d(f_m, f_n) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N,$$

d. h..

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N \quad \text{und alle } x \in X.$$

Genauso selbstverständlich werden wir den Raum  $\text{Abb}(X, Y)$  *vollständig* nennen, wenn für ihn das Cauchy-Kriterium erfüllt ist, d. h. wenn jede Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm gleichmäßig konvergiert.

**Satz 13.5** *Für die Supremumpseudonorm auf  $\text{Abb}(X, Y)$  gilt genau dann das Cauchy-Kriterium, wenn der Bildraum  $(Y, d_Y)$  vollständig ist.*

*Beweis.* Eine Folge *konstanter* Funktionen ist offensichtlich genau dann gleichmäßig konvergent, wenn sie punktweise konvergent ist. Daher ist die Vollständigkeit von  $Y$  notwendig für die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums in  $\text{Abb}(X, Y)$ . Diese ist aber auch hinreichend: Ist nämlich  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $\text{Abb}(X, Y)$ , so ist die Folge der Funktionswerte  $(f_n(x))$  an jeder Stelle  $x \in X$  eine Cauchy-Folge in  $Y$  und damit konvergent gegen einen Wert  $f(x) \in Y$ . Es bleibt zu begründen, daß die Konvergenz der Folge  $(f_n)$  gegen  $f$  gleichmäßig ist. Dies folgt aber aus der *Stetigkeit* der Metrik  $d_Y$ , d. h. der Formel

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_Y(y_m, b) = d_Y(\lim_{m \rightarrow \infty} y_m, b).$$

(Siehe hierzu den ersten Teil des Beweises von Satz 8.37 im Anhang zu Kapitel 8). Man wende diese nämlich bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  an auf die Ungleichung

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon, \quad m, n \geq N, \quad x \in X,$$

bei festem  $x \in X$  und festem  $n \geq N$  für die Folge  $y_m := f_m(x)$  und den Grenzwert  $b := f(x)$ , woraus sich

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon, \quad n \geq N, \quad x \in X,$$

ergibt, also die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $(f_n)$  gegen die Grenzfunktion  $f$ . □

Dieser Satz hat unmittelbar die folgende Konsequenz.

**Satz 13.6 (Weierstraß)** Es seien  $f_n$  Funktionen auf  $X$  mit Werten in einem Banach-Raum  $V$ , und es gelte für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$c_n := \|f_n\|_X := \sup_{x \in X} \|f_n(x)\| < \infty.$$

Ist dann die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  (d. h. die Folge ihrer Partialsummen) gleichmäßig gegen  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

*Definition und Bemerkung.* Die Voraussetzungen des Satzes bezeichnet man auch als *normale Konvergenz* der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ , da sie nichts anderes als die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$  der Supremumsnormen der Reihenglieder ausdrückt. Aufgrund des *Majorantenkriteriums* ist diese Bedingung gleichbedeutend mit den folgenden:

$$\|f_n(x)\| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X, \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty.$$

*Beweis.* Wegen der Voraussetzungen ist für die Folge  $(F_n)$  der Partialsummen der Reihe das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz gegeben. Denn für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n > m \geq N$  und alle  $x \in X$  gilt:

$$\|F_n(x) - F_m(x)\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\|_X \leq \sum_{k=m+1}^n c_k < \varepsilon.$$

Der Rest folgt dann aus dem Cauchy-Kriterium.

Da die Stetigkeit der Norm etwas einfacher zu beweisen ist (dies ist nichts anderes als die „Dreiecksungleichung nach unten“, siehe Anhang zu Kapitel 13) als die Stetigkeit der Metrik, die wir oben verwendet haben, geben wir noch einen direkten Beweis des vorstehenden Satzes. An jeder Stelle  $x \in X$  ist  $\|f_n(x)\| \leq c_n$ ; damit ist die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

wegen des Majorantenkriteriums, das in jedem Banach-Raum gültig ist, an jeder Stelle  $x \in X$  absolut konvergent. Es sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben und  $N = N(\varepsilon)$  so groß, daß

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n \geq N$  und  $k \geq 1$ . Dann ist auch

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} c_j \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Es folgt für alle  $x \in X$  und alle  $n \geq N$ :

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{j=0}^n f_j(x) \right\| &= \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right\| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^m \|f_j(x)\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j < \varepsilon, \end{aligned}$$

also die gleichmäßige Konvergenz. Hierbei haben wir bei dem zweiten Gleichheitszeichen die Stetigkeit der Norm als Funktion auf einem normierten Vektorraum ausgenützt.  $\square$

### 13.3 Anwendungen des Weierstraßschen Konvergenzsatzes

Als erste Anwendung können wir endlich den noch fehlenden *Beweis* von Satz 15 nachtragen. Wir entnehmen dem Beweis zu Satz 11.9, daß

$$\| a_n z^n \| \leq c_n := \| a_n \| r^n$$

für alle  $z$  mit  $|z| \leq r$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ . Die Behauptung des Zusatzes zu Satz 11.9 folgt dann aus dem *Weierstraßschen Konvergenzkriterium* Satz 18. □

*Beispiel.* Wir stellen als zweite Anwendung einen ganzen *Typus* von Beispielen vor, der z. B. von WEIERSTRASS verwandt wurde, um Exemplare von *überall stetigen, aber nirgends differenzierbaren* Funktionen zu konstruieren. Es sei  $g := g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, stetige Funktion; wir setzen  $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ , also  $M = |g|_{\mathbb{R}}$ . Für

$$g_n(x) := \frac{1}{2^n} g(2^n x)$$

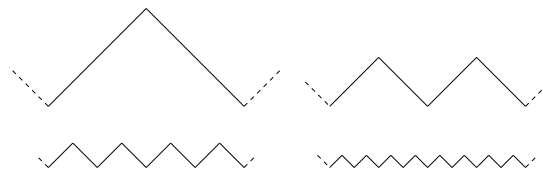
ist  $|g_n|_{\mathbb{R}} = (1/2^n)M$  und folglich wegen des Weierstraß-Kriteriums die Reihe

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

normal, also insbesondere gleichmäßig konvergent auf  $\mathbb{R}$ , so daß auch die Grenzfunktion  $G$  stetig ist. Besitzt nun aber die Grundfunktion  $g$  „hinreichend viele“ Stellen, an denen sie nicht differenzierbar ist, so kann man erreichen, daß die Vereinigung all dieser Stellen für alle Funktionen  $g_n$  sich überall in  $\mathbb{R}$  häuft und die Grenzfunktion  $G$  tatsächlich nicht differenzierbar ist. Ein konkretes Beispiel ist

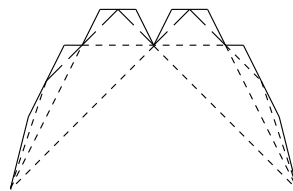
$$g(x) := \begin{cases} |x| & , \quad |x| \leq 1/2, \\ g(x') & , \quad x' \equiv x \pmod{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Mit anderen Worten:  $g(x)$  ist der *Abstand* von  $x \in \mathbb{R}$  zur *nächstgelegenen ganzen Zahl*. Die ersten vier Funktionen  $g_0, g_1, g_2, g_3$  sehen (im Intervall  $[0, 1]$ ) wie folgt aus:



Figur 13.1

Die Summenfunktion  $g_0 + g_1 + g_2 + g_3$  läßt schon erahnen, daß die Grenzfunktion hinreichend pathologisch sein wird - den Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit erbringen wir in Kapitel 14:



Figur 13.2

Wir können die vorstehenden Überlegungen nun außerordentlich gewinnbringend auf die Binomial-Reihen  $B_s(z)$  und die Logarithmus-Reihe  $L(z)$  anwenden. Wir erinnern daran, daß wir schon früher die Beziehung

$$B_s(z)B_t(z) = B_{s+t}(z)$$

für alle  $s, t \in \mathbb{C}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  nachgewiesen haben. Wir „frieren“ nun sinnvollerweise den Parameter  $z$  ein und betrachten die Binomial-Reihen als Funktion der komplexen Variablen  $s$ . Die eben zitierte Formel besagt dann, daß diese Funktionen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen genügen. Wir können sie somit wegen Satz 12 explizit angeben, wenn wir nur den Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{B_s(z) - 1}{s}$$

kennen. Nun ist aber

$$B_s(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$$

und damit für  $s \neq 0$

$$\frac{B_s(z) - 1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-(n-1))}{n!} z^n.$$

Könnten wir jetzt diese unendliche Summe mit der Grenzwertbildung  $\lim_{s \rightarrow 0}$  vertauschen, was richtig, aber absolut *nichttrivial* ist, so könnten wir den Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{B_s(z) - 1}{s}$$

mit

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-(n-1))}{n!} z^n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2) \cdots (-(n-1))}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \end{aligned}$$

also mit der Logarithmischen Reihe  $L(z)$  identifizieren. Es bleibt also noch die Tatsache zu begründen, daß die Vertauschung der beiden Grenzwerte erlaubt ist. Die Rechtfertigung dieses Schrittes beruht auf dem oben entwickelten Begriff der *normalen Konvergenz*: es reicht dazu nach den Sätzen 15 und 19, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-(n-1))}{n!} z^n$$

bei festem  $z$  in der Variablen  $s$  nahe bei 0 diese Eigenschaft besitzt. Dies folgt aber unmittelbar aus der Abschätzung

$$\left| \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-(n-1))}{n!} \right| |z|^n \leq |z|^n$$

für  $|s| \leq 1$ , die die geometrische Reihe in  $z$  unabhängig von  $s$  als konvergente Majorante ausweist.

Wir können jetzt die Konsequenzen sammeln, die sich aus den vorhergehenden Überlegungen ergeben. Aufgrund des Charakterisierungssatzes gewinnen wir unmittelbar den folgenden

**Satz 13.7** Für alle  $s \in \mathbb{C}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  ist

$$B_s(z) = e^{sL(z)}.$$

Setzt man speziell  $s = 1$  in diese Formel ein, so erhalten wir die Beziehung

$$e^{L(z)} = B_1(z) = 1 + z \quad \text{für } |z| < 1.$$

Da die Logarithmische Reihe für reelle Werte  $z$  auch nur reelle Werte annimmt, impliziert dies die Identität

$$L(x) = \ln(1 + x) \quad \text{für } |x| < 1.$$

Mit anderen Worten:

**Lemma 13.8** Die Funktion  $\ln(1 + x)$  besitzt für alle reellen  $x$  mit  $|x| < 1$  die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

*Bemerkungen.* 1. Dieses Resultat rechtfertigt schließlich und endlich die Bezeichnung „Logarithmische Reihe“. Wir werden weiter unten noch zeigen, daß die im Satz angegebene Identität auch noch an der Stelle  $x = 1$  besteht. Dies liefert dann, wie schon früher behauptet, die Berechnung von  $\ln 2$  zu

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

2. Die Reihe  $L(z)$  setzt den reellen Logarithmus so in die Einheitskreisscheibe im Komplexen fort, daß  $\exp(L(z)) = 1 + z$ ,  $|z| < 1$ . Somit könnte man versucht sein, die durch sie dargestellte Funktion ebenfalls als Logarithmus von  $1 + z$  zu bezeichnen. Wir werden allerdings später noch sehen, daß im Komplexen der Logarithmus zu einer Zahl  $z$  nicht eindeutig bestimmt ist. Im Gegenteil: Der Logarithmus ist sogar „unendlich vieldeutig“. Das vorige Ergebnis zeigt aber, daß wir für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  von allen möglichen „Logarithmen“ von  $1 + z$  einen Wert so auswählen können, daß die so definierte Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist und, eingeschränkt auf reelle Werte, die Funktion  $\ln(1 + x)$  ergibt. Man nennt  $L(z)$  auch den *Hauptzweig des Logarithmus* von  $1 + z$  und schreibt manchmal auch  $L(z) = \text{Log}(1 + z)$ .

Für allgemeines  $s \in \mathbb{C}$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  kann man die Formel des vorigen Satzes umschreiben in

$$B_s(x) = e^{s \ln(1+x)} = (1+x)^s.$$

Somit stellen die  $B_s(x)$  die *Potenzreihenentwicklungen* der Potenzfunktionen  $(1+x)^s$  im Intervall  $|x| < 1$  dar. Die „Fortsetzungen“  $B_s(z)$ ,  $|z| < 1$ , ins Komplexe werden wie im Falle des Logarithmus ebenfalls als die *Hauptzweige* der „Funktion“  $(1+z)^s$  bezeichnet, die für allgemeines  $s \in \mathbb{C}$  tatsächlich unendlich vieldeutig ist.

*Beispiel.* Für  $s = -1/2$  berechnen sich die Binomialkoeffizienten zu

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}.$$

Dies liefert die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = B_{-1/2}(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 \pm \dots, \quad |z| < 1,$$

und, noch wichtiger, wenn man  $z$  durch  $-z^2$  ersetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots, \quad |z| < 1.$$

Die linke Seite ist die Ableitung der *Arcussinus*-Funktion (siehe Kapitel 14), also der Umkehrfunktion des Sinus auf dem Intervall von  $-\pi/2$  bis  $\pi/2$ , für die man somit unmittelbar durch „formale Integration“ ihre Potenzreihenentwicklung gewinnt:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Auch diese Identität ist noch im Punkte  $x = 1$  gültig. Daraus ergibt sich wegen  $\sin \pi/2 = 1$ , also  $\arcsin 1 = \pi/2$ , die Beziehung (siehe auch Kapitel 9)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

Wir müssen noch genauer begründen, wie man zu den beiden obigen Aussagen über  $\ln 2$  und  $\pi/2$  gelangt. In beiden Fällen haben wir es mit einer *stetigen* Funktion  $f$  auf dem Intervall  $(-1, 1] \subset \mathbb{R}$  zu tun, nämlich mit  $\ln(x+1)$  bzw.  $\arcsin x$  (die letztere ist selbstverständlich auch in  $-1$  noch erklärt und stetig). Die Funktion  $f$  hat in dem *offenen* Intervall  $(-1, 1)$  die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei die rechts stehende Potenzreihe in beiden Fällen auch noch im Punkte 1 konvergent ist. Um zu schließen, daß tatsächlich

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ist, brauchen wir nur zu wissen, daß die Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

z. B. auf dem *abgeschlossenen* Intervall  $[0, 1]$  *gleichmäßig* konvergiert. Denn dann ist die Funktion  $g$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  ebenfalls stetig und stimmt für  $x \neq 1$  mit  $f$  überein, woraus sofort  $f(1) = g(1)$  folgt.

### 13.4 Abelscher Grenzwertsatz

In der Tat ist die geforderte gleichmäßige Konvergenz in dieser Situation immer gesichert. Dies ist der Inhalt von

**Satz 13.9 (Abelscher Grenzwertsatz)** *Besitzt die reelle Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*den Konvergenzradius  $R > 0$  und ist sie auch noch im rechten Endpunkt  $R$  konvergent, so ist sie gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, R]$ . Insbesondere ist die Grenzfunktion dort stetig, und es gilt somit*

$$\lim_{x \nearrow R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Der *Beweis* wird anschließend aus einem allgemeinen Kriterium für gleichmäßige Konvergenz abgeleitet. Wir zeigen hier nur direkt die in den obigen Beispielen verwendete Grenzwertaussage. Durch Übergang zu der Reihe  $\sum_n a_n \left(\frac{x}{R}\right)^n$  können wir uns sofort auf den Fall  $R = 1$  beschränken. Dann können wir das Cauchy-Produkt der gegebenen Reihe mit der geometrischen Reihe bilden und erhalten für  $|x| < 1$  die Identität

$$\frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \left( \sum_{j=0}^{\infty} x^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

mit  $S_n := \sum_{j=0}^n a_j$ , und deshalb ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

Nach Voraussetzung existiert  $S = \lim_n S_n$ . Setzen wir  $f(x) := \sum_n a_n x^n$  für  $|x| < 1$ , so ist also zu zeigen, daß

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = S.$$

Nach den Vorbemerkungen ist aber

$$S - f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (S - S_n) x^n.$$

Wählt man nun zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit

$$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $n \geq N$ , so besteht für alle  $x$  mit  $0 < x < 1$  die Abschätzung

$$|S - f(x)| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |S - S_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |S - S_n| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu dem vorgegebenen  $\varepsilon$  (und  $N$ ) existiert aber auch ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x$  mit  $1 - \delta < x < 1$  der linke Ausdruck auf der rechten Seite ebenfalls höchstens gleich  $\varepsilon/2$  ist.  $\square$

*Bemerkung.* In den beiden obigen speziellen Beispielen kommt man mit ein wenig Integrationstheorie und damit auch ohne den Abelschen Grenzwertsatz aus (siehe Kapitel 16).

### 13.5 Das Abelsche und das Dirichletsche Konvergenzkriterium

Wir wollen anschließend noch einige Kriterien für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen diskutieren, die sich aus der Abelschen Summationsformel ergeben und als Spezialfälle das ABELSche und das DIRICHLETSche Konvergenzkriterium enthalten. Einige Anwendungen werden das Kapitel abrunden.

Im folgenden seien  $f_j : X \rightarrow V$  Funktionen auf einer Menge  $X$  mit Werten in einem reellen oder komplexen Banach-Raum  $V$ , und  $g_j : X \rightarrow \mathbb{K}$  seien reell- oder komplexwertige Funktionen auf  $X$  oder umgekehrt. Wir erinnern daran, daß wir für eine beliebige Funktion  $f : X \rightarrow V$ , wobei auch  $V = \mathbb{K}$  sein kann, die *Supremumsnorm* definiert haben durch

$$\|f\|_X := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Der folgende Satz steht dann samt Beweis in völliger Analogie zu Satz 10.22. Wir setzen

$$F_n := \sum_{j=0}^n f_j$$

für die Partialsummen der Reihe  $\sum_j f_j$ ; die Abelsche Summationsformel (siehe Kapitel 10) schreibt sich dann in der Form

$$(+)\quad S_n := \sum_{j=0}^n f_j g_j = F_n g_n + \sum_{k=0}^{n-1} F_k (g_k - g_{k+1}).$$

Ist die Reihe der  $f_j$  und damit die Folge der  $F_n$  gleichmäßig konvergent auf  $X$  und ebenso die Folge der  $g_n$ , so ist auch die Produktfolge  $(F_n g_n)$  gleichmäßig konvergent. Dies ist in Verallgemeinerung des einfachen Beweises für Folgen von Elementen in  $V$  auf Funktionenfolgen auch dann der Fall, wenn die Folge der  $F_n$  *gleichmäßig beschränkt* ist, d. h. wenn es ein  $M > 0$  gibt mit

$$\|F_n\|_X \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und die Folge  $(g_j)$  gleichmäßig gegen Null konvergiert. Selbstverständlich liefert die gleichmäßige Konvergenz der Reihe  $\sum_j f_j$  auch die gleichmäßige Beschränktheit der Folge  $(F_n)$  der Partialsummen.

Schließlich folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $(g_j)$  z. B. aus der *normalen* Konvergenz der Teleskopreihe  $\sum_k (g_k - g_{k+1})$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k - g_{k+1}|_X < \infty.$$

Diese Überlegungen sind schon völlig ausreichend, um die Richtigkeit des folgenden Satzes zu begründen.

**Satz 13.10** *Es seien  $f_j$  und  $g_j$  Funktionen wie zuvor angegeben, und die Teleskopreihe  $\sum_j (g_j - g_{j+1})$  sei normal konvergent. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j g_j$$

*gleichmäßig auf  $X$  konvergent, sofern zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :*

- a) *Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$  ist gleichmäßig konvergent auf  $X$  ;*
- b) *die Folge  $(F_n)$  der Partialsummen der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$  ist gleichmäßig beschränkt auf  $X$  und die Folge  $(g_j)$  konvergiert gleichmäßig gegen Null auf  $X$ .*

*Beweis.* Nach den vorstehenden Bemerkungen ist nur noch der zweite Teil auf der rechten Seite der Formel (+) zu behandeln. Aufgrund der Voraussetzungen ist aber in beiden Fällen die Folge der  $F_k$  gleichmäßig beschränkt, sagen wir durch die Konstante  $M > 0$ , und damit die Reihe  $\sum_k F_k (g_k - g_{k+1})$  sogar normal konvergent auf  $X$  wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|F_k (g_k - g_{k+1})\|_X \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |g_k - g_{k+1}|_X < \infty. \quad \square$$

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  können wir auch über *Monotonie* der Folge  $(g_j)$  reden und damit die obige Voraussetzung der normalen Konvergenz der Teleskopreihe  $\sum_k (g_k - g_{k+1})$  abschwächen. Eine unmittelbare Folgerung aus dem Vorstehenden ist das *Konvergenzkriterium* von DIRICHLET.

**Satz 13.11 (Dirichlet)** *Es gelte :*

- a) *Die Folge  $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $X$  gleichmäßig gegen die Nullfunktion,*
- b) *für alle  $x \in X$  wächst (oder fällt) die Folge  $(g_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$  der Funktionswerte monoton (gegen Null),*
- c) *die Folge der Supremumsnormen  $\|F_n\|_X$  der Partialsummen  $F_n$  der Reihe  $\sum_j f_j$  ist beschränkt.*



Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j g_j$$

auf  $X$  gleichmäßig konvergent.

*Beweis.* Es kommt hierbei in der Formel (+) wiederum nur auf den Anteil  $\sum_{k=0}^n F_k (g_k - g_{k+1})$  an. Nun ist aber nach Voraussetzung die Teleskopreihe  $\sum_k (g_k - g_{k+1})$  absolut und gleichmäßig konvergent, woraus nach der Beschränktheitsvoraussetzung an die  $F_n$  sofort die gleichmäßige Konvergenz der in Frage stehenden Reihe folgt.  $\square$

Eine unmittelbare Konsequenz aus dem Dirichletschen Satz ist wieder das *LEIBNIZ-Kriterium* für gleichmäßige Konvergenz. Man beachte aber, dass es auf der Grundlage der Standardabschätzung des Fehlers bei alternierenden Reihen einen einfachen Einzeilenbeweis gestattet.

**Satz 13.12 (Leibniz - Kriterium)** Die Folge  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei punktweise monoton fallend gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion. Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$$

gleichmäßig konvergent auf  $X$ .

Etwas anspruchsvoller ist der Beweis des *Konvergenzkriteriums* von ABEL.

**Satz 13.13 (Abel)** Es gelte :

- Die Reihe  $F := \sum f_j$  ist auf  $X$  gleichmäßig konvergent,
- für alle  $x \in X$  wächst (oder fällt) die Folge  $(g_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$  der Funktionswerte monoton,
- die Folge der Supremumsnormen  $|g_j|_X$  ist beschränkt :

$$|g_j|_X \leq M \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j g_j$$

auf  $X$  gleichmäßig konvergent.

*Beweis.* Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß die Folge der  $g_j$  monoton fallend ist und verwenden das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. Hierzu müssen wir die Maximumnorm der Differenz  $S_n - S_m$  für  $n > m$  auf  $X$  abschätzen. Nun folgt aus (+) sofort

$$(++) \quad S_n - S_m = (F_n - F) g_n - (F_m - F) g_m + \sum_{k=m}^{n-1} (F_k - F) (g_k - g_{k+1}),$$

und hieraus ergibt sich alles Notwendige: Nach Voraussetzung ist als erstes

$$\|(F_n - F) g_n - (F_m - F) g_m\|_X \leq 2 \varepsilon M$$

für alle  $m, n \geq N = N(\varepsilon)$ . Zweitens ist für alle  $x \in X$  für  $n \geq m \geq N$ :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m}^{n-1} (F_k(x) - F(x))(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right\| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \|F_k(x) - F(x)\| (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &< \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) = \varepsilon (g_m(x) - g_n(x)) \end{aligned}$$

und damit die Supremumsnorm dieses Anteils ebenfalls kleiner oder gleich  $2\varepsilon M$ .  $\square$

*Bemerkung.* Aus dem Abelschen Kriterium folgt unmittelbar der Abelsche Grenzwertsatz. Man braucht nur  $f_n(x) := a_n R^n$  und  $g_n(x) := x^n$  zu setzen. Die (von  $x$  unabhängige) Reihe  $\sum a_n R^n$  ist dann auf ganz  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent, und die Folge  $(g_n(x))$  ist für alle  $x \in [0, 1]$  monoton fallend und gleichmäßig beschränkt. Also ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n R^n$$

für  $0 \leq x \leq 1$  gleichmäßig konvergent. Daraus folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für } 0 \leq x \leq R.$$

### 13.6 Der Identitätssatz für Potenzreihen

Wir wollen jetzt noch unsere Betrachtungen über Potenzreihen an dieser Stelle ein Stück weit ergänzen um einige Aussagen, die sich aus der Stetigkeit ergeben. Wir beginnen mit dem Beweis des sogenannten *Identitätssatzes*. Er besagt insbesondere, daß wie im Fall von *Polynomen* auch zwei *Potenzreihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  genau dann in einem Intervall bzw. Kreis  $|z| < R$ ,  $0 < R \leq \infty$ , dieselbe Funktion darstellen, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  übereinstimmen. Durch Bildung der Differenz der beiden Potenzreihen ist dies zu den Aussagen b) und a) im folgenden Satz äquivalent. Eher überraschend für den noch nicht Initiierten dürfte die Tatsache sein, daß sogar die Bedingung c) hierzu schon hinreicht.

**Satz 13.14** *Es sei  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine für  $|z| < R$ ,  $0 < R \leq \infty$ , konvergente Potenzreihe.*

*Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- a)  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b)  $F = 0$ ;
- c) es gibt eine Folge  $(z_j)$  mit  $z_j \neq 0$ ,  $\lim_j z_j = 0$  und  $F(z_j) = 0$ .

*Beweis.* Die Implikationen a)  $\implies$  b)  $\implies$  c) sind banal. Für c)  $\implies$  a) gehen wir per Widerspruchsbeweis vor. Wir nehmen also an, daß c) erfüllt sei, nicht aber a). Dann gibt es einen kleinsten Index  $N$ , für den  $a_N \neq 0$  ist, und die zu untersuchende Potenzreihe ist von der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n = z^N \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} z^n.$$

Damit hat die Reihe  $G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} z^n$  den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Potenzreihe. Insbesondere ist wegen  $F(z_j) = 0$ ,  $z_j \neq 0$ , auch  $G(z_j) = 0$  und deshalb, unter Einbeziehung der Stetigkeit der Potenzreihe für  $G$  in dem betrachteten Bereich, auch

$$a_N = G(0) = \lim_{z \rightarrow 0} G(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} G(z_j) = 0$$

im Widerspruch zu unserer Annahme.  $\square$

*Bemerkung.* Der Identitätssatz wird oft als *Methode des Koeffizientenvergleichs* herangezogen: Hat eine Funktion in einer Umgebung eines Punktes zwei (a priori verschiedene) Potenzreihenentwicklungen, so müssen deren Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  übereinstimmen. Beispiele hierzu werden wir noch kennenlernen.

### 13.7 Ineinandersetzen von Potenzreihen

Als weitere Anwendungen studieren wir das *Ineinandersetzen* von und *Dividieren* durch Potenzreihen. Es seien also  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  und  $g(w) = \sum_m b_m w^m$  Potenzreihen mit *positiven* Konvergenzradien  $R$  bzw.  $\rho$ . Damit wir überhaupt in der Lage sind,  $h(w) := f(g(w))$  bilden zu können, müssen wir insbesondere  $g(0) = b_0$  in  $f$  einsetzen dürfen; d. h. wir müssen von vornherein annehmen, daß  $|b_0| < R$  ist. Wegen der Stetigkeit von  $g$  im Ursprung gibt es dann aber sogar ein  $r$  mit  $0 < r \leq \rho$ , so daß  $|g(w)| < R$  für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| < r$ . Damit ist

$$h(w) = f(g(w)) \quad \text{für } |w| < r$$

erklärt und zumindest in diesem Kreis eine stetige Funktion.

**Satz 13.15** *Unter den eben genannten Voraussetzungen läßt sich die Funktion  $h(w)$  in der Kreisscheibe  $B(0, r)$ , bei evtl. Verkleinerung von  $r > 0$ , in eine konvergente Potenzreihe*

$$h(w) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m$$

entwickeln. Die Koeffizienten  $c_m$  ergeben sich durch formale Reihenbildung aus den Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$ : Mit Hilfe mehrfacher Anwendung des Cauchy-Produktes von  $g(w)$  mit sich selbst gewinnen wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $w \in B(0, r)$  eine Darstellung

$$g^n(w) = \sum_m b_{m,n} w^m \quad \text{mit} \quad b_{m,n} = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} b_{m_1} \cdot \dots \cdot b_{m_n}$$

und

$$c_m := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{m,n}.$$

*Bemerkung.* Aufgrund funktionentheoretischer Überlegungen kann man sogar einsehen, daß man den Radius  $r > 0$  *maximal* wählen kann mit  $f(B(0, r)) \subset B(0, R)$ . Eine Begründung, aber keinen vollständigen Beweis, werden wir hierfür in Kapitel 14 geben.

Bevor wir diesen nicht an der Oberfläche liegenden Satz herleiten, notieren wir zwei einfache Folgerungen, die sich hieraus fast unmittelbar ergeben. Wir betrachten zu der Potenzreihe  $f$  wie oben einen Punkt  $a$  mit  $|a| < R$  und setzen speziell  $z = g(w) := w + a$ , also  $w = z - a$ . In diesem Fall gewinnt man die Koeffizienten  $b_{m,n}$  sehr einfach vermittels der binomischen Formeln.

**Folgerung 13.16** Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  besitze den positiven Konvergenzradius  $R$ , und es sei  $|a| < R$ . Dann besteht für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - a| < r := R - |a|$  die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} (z-a)^k a^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) (z-a)^k.$$

Insbesondere sind die Reihen

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k}$$

konvergent.

*Beweis.* Um die Folgerung aus dem vorigen Satz vollständig erschließen zu können, benötigt man auch die im Zusammenhang damit stehende Bemerkung. Da wir jene in dieser Grundvorlesung aber nicht beweisen werden, fügen wir hier der Vollständigkeit halber den einfacheren Beweis der Folgerung ohne Rekurs auf den allgemeineren Satz ein. Es sei also  $z \in B(a, r)$  vorgegeben, d. h.  $|z - a| < r = R - |a|$  und damit  $|a| + |z - a| < R$ . Dann ist die Doppelreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |a_n| |a^{n-k}| |z-a|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|a| + |z-a|)^n$$

konvergent, und nach dem Doppelreihensatz folgt wegen  $\binom{n}{k} = 0, k > n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} (z-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n a^{n-k} (z-a)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n a^{n-k} (z-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.  $\square$

*Bemerkung und Beispiel.* Elementare Beispiele zeigen, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe in  $w$  größer sein kann als  $R - |a|$ . Ist z. B.  $f(z)$  die geometrische Reihe  $\sum_n z^n$  mit dem Entwicklungspunkt  $a = -1/2$ , so hat die entstehende Potenzreihe nicht den Konvergenzradius  $1/2$ , sondern den weit größeren Wert  $3/2$ . Dieses Phänomen kann man erst im Rahmen der klassischen Funktionentheorie richtig verstehen.

### 13.8 Division von Potenzreihen

Auch das *Dividieren* durch eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  (mit positivem Konvergenzradius  $R$ )

nahe 0 läßt sich mit dem obigen Satz behandeln. Selbstverständlich müssen wir hierzu voraussetzen, daß  $a_0 = f(0) \neq 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei sogar angenommen, daß  $a_0 = 1$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  gibt es eine positive Zahl  $r \leq R$ , so daß  $1 - f$  in dem offenen Kreis um 0 mit Radius  $r$  dem Betrage nach kleiner als 1 ist,  $f$  also insbesondere keine Nullstellen besitzt. Dann existiert

$$\frac{1}{f(z)} \quad \text{für } |z| < r$$

und ist dort eine stetige Funktion. - In der Tat kann auch diese Funktion wieder um den Nullpunkt in eine Potenzreihe entwickelt werden. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Folgerung 13.17** Es gibt eine in  $|z| < r$  konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n .$$

*Beweis.* Es sei  $r$  wie oben gewählt,  $w := h(z) := 1 - f(z)$  und  $g(w)$  die geometrische Reihe. Nach dem Hauptsatz läßt sich

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 - h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (h(z))^n$$

in der Kreisscheibe  $B(0, r)$  in eine Potenzreihe bzgl.  $z$  entwickeln.  $\square$

*Bemerkung.* Es ist denkbar einfach, die Koeffizienten  $b_n$  zumindest *rekursiv* zu bestimmen. Setzt man  $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ , so folgt aus  $f(z)g(z) = 1$  und Koeffizientenvergleich mit dem Cauchy-Produkt der linken Seite, daß

$$a_0 b_0 = 1$$

sein muß und für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  die Beziehungen

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j = 0$$

bestehen. Insbesondere ist

$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \quad a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \quad \text{etc.},$$

also z. B.

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad b_2 = \frac{a_1^2 - a_2 a_0}{a_0^3} .$$

*Beweis* von Satz 27. Wegen der Cauchy-Hadamardschen Formel besitzt die Reihe  $\sum_m |b_m| w^m$  ebenfalls den positiven Konvergenzradius  $\rho$ . Da wir  $|b_0| < R$  vorausgesetzt haben, ergibt sich wiederum aus Stetigkeitsgründen die Existenz einer positiven Zahl  $r < \rho$  mit

$$Z := \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| r^m < R .$$

Damit ist auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| Z^n$$

(absolut) konvergent. Da die  $Z$  definierende Reihe absolut konvergent ist, ergeben sich durch induktive Verwendung des Cauchy-Produktes Darstellungen

$$Z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{m,n} r^m \quad \text{wobei} \quad \omega_{m,n} := \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} |b_{m_1}| \cdot \dots \cdot |b_{m_n}| .$$

Nach Wahl aller Größen ist also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left( \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{m,n} r^m \right)$$

absolut konvergent, woraus die Summierbarkeit der Doppelreihe

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_n| \omega_{m,n} r^m$$

folgt. Wegen

$$|b_{m,n}| = \left| \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} b_{m_1} \cdot \dots \cdot b_{m_n} \right| \leq \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} |b_{m_1}| \cdot \dots \cdot |b_{m_n}| = \omega_{m,n}$$

kann man dann den Doppelreihensatz anwenden und erhält für  $w \in B(0, r)$  die Potenzreihenentwicklung

$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,n} w^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{m,n} \right) w^m. \quad \square$$

*Bemerkung.* Der obige Satz samt seinen Folgerungen kann sehr viel einfacher bewiesen werden, wenn man die Grundlagen der Funktionentheorie zur Verfügung hat (siehe Satz 14.10).

Wir beschließen diese Kapitel mit einem einfachen Beweis für die Identität zwischen dem Produkt zweier Reihen und ihrem Cauchy-Produkt, sofern nur alle drei Reihen konvergieren (siehe Kapitel 10). Es seien also

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

konvergent. Man bilde dann die Potenzreihen

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \text{und} \quad h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

die zumindest für  $x = 1$  konvergent und damit für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  absolut konvergent sind. Also ist nach dem Cauchyschen Produktsatz  $f(x)g(x) = h(x)$  für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  und folglich wegen der Stetigkeit aller drei beteiligten Funktionen an der Stelle 1 aufgrund des Abelschen Grenzwertsatzes auch  $f(1)g(1) = h(1)$ .  $\square$

## Anhang: Pseudometrische Räume und pseudonormierte Vektorräume

Wir wollen in diesem Anhang einige einfache konzeptionelle Aussagen über *pseudometrische Räume* und *pseudonormierte Vektorräume* zusammenstellen, die schon im Haupttext angeklungen sind und dort auch im Hinblick auf eine tiefere begriffliche Verankerung Verwendung hätten finden können. Wir legen aber Wert auf die Feststellung, daß wir damit keine weitere allgemeine Theorie entwickeln wollen, auch wenn uns „Pseudoräume“ vor allem auch in der Integrationstheorie noch einmal begegnen werden. Der etwas fortgeschrittenere Leser wird sehr schnell bemerken, daß er mit dem Konvergenzbegriff und dem Begriff der Vollständigkeit in Pseudoräumen ebenso leicht und souverän umgehen kann wie im Fall „echter“ Räume. Dennoch mag es nicht gänzlich unnütz sein, die Konzepte etwas genauer unter die Lupe zu nehmen.

Wir betrachten hier also kurz *pseudometrische Räume*, also eine (nicht leere) Menge  $X$  zusammen mit einer *Pseudometrik*  $d = d_X$  im Sinne des Hauptkapitels. Wie im Falle von metrischen Räumen kann man den Konvergenzbegriff von Folgen, die Cauchy-Bedingung und den Begriff der offenen Mengen einführen. Auch hier sind Grenzwerte eindeutig bestimmt, konstante Folgen konvergieren, konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen, und das System der offenen Mengen bildet eine hausdorffsche Topologie.

Aufgrund der Eigenschaften einer Pseudometrik ist es ein Leichtes, sich davon zu überzeugen, daß durch  $x_1 \sim x_2 := \Leftrightarrow d(x_1, x_2) < \infty$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  erklärt wird. Damit zerfällt  $X$  in *Äquivalenzklassen*  $X_\iota$ ,  $\iota \in I := X / \sim$ , die wir als *Beschränktheitsklassen* bezeichnen wollen. Mit  $x \in X_\iota$  ist  $B(x, 1) \subset X_\iota$ , jede Beschränktheitsklasse also offen, und die Einschränkung von  $d$  auf  $X_\iota$  ist eine (echte) Metrik. Ferner ist

$$X \setminus X_\iota = \bigcup_{\kappa \neq \iota} X_\kappa$$

offen und damit  $X_\iota$  auch abgeschlossen.  $X$  zerfällt also in die disjunkte Vereinigung von zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen  $X_\iota$ , die bzgl. Konvergenz etc. nichts miteinander zu tun haben: Eine Folge  $(x_n)$  ist genau dann in  $X$  beschränkt bzw. konvergent bzw. eine Cauchy-Folge, wenn fast alle  $x_n$  in einer Menge  $X_\iota$  enthalten sind und dort eine beschränkte bzw. eine konvergente bzw. eine Cauchy-Folge bilden. Insbesondere ist  $X$  ein vollständiger pseudometrischer Raum genau dann, wenn alle  $X_\iota$  vollständige metrische Räume sind.

Ein besonderer pseudometrischer Raum ist  $\text{Abb}(X, Y)$  mit einer beliebigen nicht leeren Menge  $X$  und einem metrischen Raum  $(Y, d_Y)$ , versehen mit der Pseudometrik  $d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ . Wir nennen eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bekanntlich *beschränkt*, wenn es ein  $b_0 \in Y$  und eine positive reelle Zahl  $R_0$  gibt, so daß  $f(X) \subset B(b_0, R_0)$ . Dann gibt es zu jedem  $b \in Y$  ein  $R = R_b$  mit der entsprechenden Eigenschaft. Dies impliziert dann unmittelbar: Ein Element  $f \in \text{Abb}(X, Y)$  ist genau dann beschränkt, wenn es zu der Beschränktheitskomponente einer und damit auch jeder *konstanten* Abbildung  $X \rightarrow Y$  gehört. Insbesondere bildet somit die *Menge der beschränkten Abbildungen* zusammen mit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < \infty$$

einen *metrischen* Raum, dem wir auch das Symbol

$$\text{Abb}^b(X, Y)$$

zuordnen. Ist  $Y$  ein vollständiger metrischer Raum, so ist der Raum der Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  ein vollständiger pseudometrischer Raum. Da Grenzwerte aber in der gleichen Beschränktheitskomponente wie die einzelnen Folgenglieder liegen, ist der gleichmäßige Limes einer Folge von beschränkten Abbildungen selbst wieder beschränkt (was wir natürlich auch direkt in einer einzigen Zeile nachweisen könnten). - Wir können also folgendermaßen zusammenfassen:

**Lemma 13.18** *Ist  $X$  eine beliebige nicht leere Menge,  $Y$  ein vollständiger metrischer Raum, so besitzt der Raum  $\text{Abb}^b(X, Y)$  der beschränkten Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  die vollständige Metrik*

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < \infty .$$

Ist speziell  $V$  ein Vektorraum mit einer Pseudonorm  $\|\cdot\|$ , so ist die Beschränktheitsklasse des Nullelementes gleich dem Untervektorraum

$$V^b = \{v \in V : \|v\| < \infty\}$$

der *beschränkten* Elemente in  $V$ . Die gegebene Pseudonorm induziert eine *Norm* auf  $V^b$ , und nach den Vorbemerkungen ist  $V^b$ , versehen mit dieser Norm, ein Banach–Raum, wenn  $V$  ein vollständiger pseudonormierter Vektorraum war.

Für einen *normierten* Vektorraum  $V$  mit Norm  $\|\cdot\|$  ist der Raum der Abbildungen  $X \rightarrow V$  ein Vektorraum mit der Supremumsnorm als Pseudonorm. Die beschränkten Elemente dieses Vektorraums sind genau die beschränkten Abbildungen im ursprünglichen Sinne.

**Folgerung 13.19** *Die beschränkten Abbildungen von  $X$  in einen Banach–Raum  $V$  bilden zusammen mit der Supremumsnorm ebenfalls einen Banach–Raum.*



