Mitt. Math. Ges. Hamburg **??** (????), 1–17

Über einige elementare analytische Berechnungen von $\zeta(2)$

Variationen über ein Thema von Leonhard Euler*

Oswald Riemenschneider

Das Beste in der Musik steht nicht in den Noten (Gustav Mahler)

Vorwort

Eulers geniale Bestimmung der Funktionswerte der (heute so genannten) Zeta–Funktion an den geraden ganzzahligen Stellen (um 1734/35, aber erst veröffentlicht im Jahre 1736)[1] erfuhr einige zeitgenössische Kritik wegen der Verwendung der Produktentwicklung der Sinus–Funktion, die er nur in Anlehnung an die Linearfaktorisierung komplexer Polynome rechtfertigen konnte. In der Tat dauerte es noch länger als ein Jahrhundert, bis Weierstraß das theoretische Rüstzeug zur Verfügung stand, um die Konvergenz des unendlichen Produktes zu beweisen.

Euler selbst war sich wohl der Fragwürdigkeit seines Vorgehens bewusst und versuchte zeitlebens, einfachere Beweise zu geben. Für den Wert von $\zeta(2)$, also die Lösung des sogenannten *Basler Problems*, gelang ihm dies schon sehr früh, und er dokumentierte seinen Beweisgang in einem Brief von 1737 an Johann I Bernoulli (bei Eneström [4] abgedruckt). Hierin verwendet er die Potenzreihenentwicklung des Arcussinus, die er über diejenige seiner Ableitung vermittels der Newtonschen Binomialreihe gewinnt, und die Kenntnis der Wallisschen Integrale. Euler publizierte diesen Beweis aber erst im Jahre 1743 unter dem Titel *Démonstration de la somme de cette Suite* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$ *etc.* in einer schwer zugänglichen Zeitschrift. Es ist das Verdienst von Paul Staeckel, diesen Artikel der Allgemeinheit durch Wiederabdruck und historische Kommentierung zugänglich gemacht zu haben [7][2]. Euler gibt dort noch einen zweiten Beweis, der die Potenzreihenentwicklung des Quadrats des Arcussinus heranzieht. Die letztere leitet er über einen Potenzreihen–Ansatz zur Lösung einer

---

*Leicht überarbeitete und erweiterte Fassung eines auf meiner Homepage befindlichen Textes vom 5. August 2015.

[1] Es gibt eine umfangreiche Literatur zur Geschichte der Eulerschen Entdeckungen zu diesem Thema, zu Eulers Korrespondenz mit Zeitgenossen und der tatsächlichen Veröffentlichung der Ergebnisse in Zeitschriften (siehe z. B. den hervorragenden Artikel [1] von Ayoub). Der Autor ist kein Mathematik–Historiker und beansprucht nicht, mit dieser Note hierzu einen Beitrag zu leisten.

[2] Ich bin Tushar Das für seinen Hinweis auf den Zugang zu dieser Arbeit über den Heidelberger Dokumenten–Server zu großem Dank verpflichtet.

geeigneten gewöhnlichen Differentialgleichung ab. Interessanterweise war diese Entwicklung schon früher in Japan bekannt als Werkzeug zur näherungsweisen Berechnung der Länge einer Sehne eines vorgegebenen (Kreis–) Bogens[3].

In der vorliegenden Note[4] soll vor allem hervorgehoben werden, dass man zum Verständnis der Eulerschen Methoden mit wenigen Grundkenntnissen über reelle Analysis, insbesondere über Potenzreihen, auskommt. Indem wir auch den ersten Beweis wie den zweiten führen, arbeiten wir ihre Gemeinsamkeiten heraus und vermeiden sogar die Verwendung der Newtonschen Binomialreihe, insbesondere die genaue Kenntnis der verallgemeinerten Binomial–Koeffizienten für den Exponenten $-1/2$.

Diese Arbeit ist entstanden aus der Lektüre von Paul Levries Artikel im Mathematical Intelligencer [6]. Seinen Beweisgang, den er Euler in einem „apokryphen" Brief zuschreibt, formulieren wir so um, dass er ebenfalls in die von uns dargestellte allgemeine Vorgehensweise eingeordnet werden kann. Außerdem demonstrieren wir, wie man mit dieser Idee noch einmal den zweiten Eulerschen Beweis erhält und mit einer kleinen Variante auch den ersten.

Eine Übersicht über weitere elementare Berechnungen von $\zeta(2)$ bietet Robin Chapman auf seiner Homepage [3].

Introductio: Die Wallisschen Integrale und $\zeta(2)$

Für seine berühmte Produkt–Entwicklung von π verwendete Wallis bekanntlich die nach ihm benannten Integrale

$$\mathcal{I}_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi = \int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Es ist selbstverständlich

$$\mathcal{I}_0 = \pi/2 , \quad \mathcal{I}_1 = 1 .$$

Die restlichen Werte bekommt man induktiv mit Hilfe der *Rekursionsformel*

$$(n + 2)\, \mathcal{I}_{n+2} = (n + 1)\, \mathcal{I}_n ,$$

die man vermittels *partieller Integration* gewinnt. So ist z.B. in der zweiten Darstellung als (vermeintlich) uneigentliche Integrale

$$\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n+2} = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x ,$$

[3]Staeckel schreibt das Ergebnis dem berühmten japanischen Mathematiker Seki (1642 - 1708) zu; neuere Artikel verweisen aber auf dessen Schüler Katahiro Takebe (1664 - 1739).

[4]Ich danke Robin Chapman und Paul Levrie für einige hilfreiche Kommentare zu einer früheren Fassung.

und mit

$$u'(x) := x^n \,, \quad v\,(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

und partieller Integration wird wegen

$$u\,(x) = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \,, \quad v'(x) = - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

das rechts stehende Integral zu

$$- \int_0^1 u\,(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n + 1}\,\mathcal{I}_{n+2} \,.$$

Der Einfachheit halber definieren wir die Folge(n) (a_n) für den Rest dieser Note durch

$$(*) \qquad a_0 = a_1 = 1 \,, \quad (n + 2)\,a_{n+2} = (n + 1)\,a_n \,.$$

Es ist dann selbstverständlich

$$\mathcal{I}_{2k} = \frac{\pi}{2}\,a_{2k} \,, \quad \mathcal{I}_{2k+1} = a_{2k+1} \,.$$

Aus $(*)$ folgt durch Multiplikation mit a_{n+1}, dass die Folge

$$n\,a_n\,a_{n-1} \quad \text{konstant gleich} \quad 1\,a_1\,a_0 = 1$$

ist:

$$a_n\,a_{n-1} = \frac{1}{n} \,, \quad n \geq 1 \,.$$

Somit folgt rein formal und auf den ersten Blick ohne jeden Nutzen

$$\zeta\,(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\,a_{n-1}}{n} \,,$$

oder, wenn man n nur die *geraden* und danach die *ungeraden* natürlichen Zahlen durchlaufen lässt,

$$\frac{1}{4}\,\zeta\,(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}\,a_{2k-1}}{k} \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}\,\zeta\,(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}\,a_{2k}}{2k+1} \,.$$

Eulers Genie ist es nun nicht entgangen, dass man jeweils auf der rechten Seite einen der beiden Faktoren unter dem Summenzeichen durch das entsprechende Wallissche Integral ersetzen kann, so dass nach Vertauschung von Summation und Integration das Integral über (die Potenzreihen–Entwicklung) eine(r) elementar–transzendende(n) Funktion entsteht, das elementar ausgewertet werden kann. Levries Vorgehen kann man so interpretieren, dass er in der zweiten Summe für *beide* Koeffizienten die Integrale einsetzt und nach weiterer Einfügung eines jeweils dritten Integrals, das den Faktor $1/(2k + 1)$ berücksichtigt, mit Hilfe der *geometrischen Reihe* zu einem einzigen Integral geführt wird, das mit ein wenig mehr Aufwand ebenfalls leicht bestimmt werden kann.

Oswald Riemenschneider

Thema: Eulers Brief vom 27. August 1737 an Johann I. Bernoulli

Im folgenden reproduzieren wir zur Einstimmung der Leser[5] die Teile von Eulers Brief, die sich auf die Berechnung von $\zeta(2)$ beziehen. Der Text in *Italics* ist seine originale Formulierung.

Praeterea vero alia methodo longe diversa eandem inveni summam hujus seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

quae methodus est sequens.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} \right)^2 .$$

At $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ *exprimit arcum cujus sinus est* x *, atque posito post integrationem* $x = 1$ *, denotabit* $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ *quartam peripheriae partem, posito radio* $= 1$ *, vel Tua designandi modo erit* $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{c}{2}$.

Quamobrem posito $x = 1$ *erit*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{c^2}{8} .$$

In anderen Worten: Euler führt die Funktion arcsin als „Antiderivativ" von $\sqrt{1 - x^2}^{\,-1}$ ein mit $\arcsin 1 = c/2$, i.e. $c = \pi$, und deshalb ist vermittels der Substitutionsregel mit $\phi := \arcsin x$:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\pi/2} \phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{\pi^2}{8} .$$

Euler fährt wie folgt fort:

Est vero, ut constat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 \text{ etc.},$$

quo valore substituto fiat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - xx}} + \frac{1}{2 \cdot 3} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - xx}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1 - xx}} + \text{etc.}$$

[5]Leserinnen sind hiermit selbstverständlich mit gemeint.

qui singuli termini sunt integrabilis, si vero post integrationem peractam ponatur $x = 1$ *, habebitur ista series*

$$1 + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 9} + \text{etc.},$$

cujus adeo summa erit $\frac{c^2}{8}$ *; unde hujus*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.},$$

summa erit $\frac{c^2}{6}$ *, prout altera methodo inveni, neque dubito quin etiam simili analysi reliquiae summae elici queant, etiamsi ego nondum eo pertingere potuerim.*

Also: Euler entwickelt die arcsin–Function in eine Potenzreihe, integriert die Reihe, die man durch Multiplikation dieser Reihe mit $(1 - x^2)^{-1/2}$ erhält, Term für Term von 0 bis 1 und schließt durch die Kenntnis der Koeffizienten der Potenzreihe und der Wallischen Integrale

$$\mathcal{I}_m := \int_0^1 \frac{x^m \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} \ ,$$

dass das Integral

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gleich der Summe der reziproken Quadrate der ungeraden natürlichen Zahlen ist, also gleich

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{3}{4} \, \zeta(2) \ .$$

Bemerkungen. 1. Euler hat sich ernsthaft darum bemüht, auch die Werte der Zeta–Funktion an den geraden ganzzahligen Stellen $2k$, die er mit seinem „funktionentheoretischen” Ansatz ja schon kannte, mit ähnlich elementaren „reellen” Methoden zu bestimmen. Zur Warnung der Leser, die das selbst einmal versuchen wollen, zitieren wir hier eine Passage aus [5]:

„*Ces deux méthodes toutes faciles qu'elles sont, mériteroient une plus grande attention, si elles se pouvoient employer également pour trouver les sommes des plus hautes puissances paires, qui sont toutes comprises dans mon autre méthode générale tirée de la considération des racines d'une équation infinie. Mais malgré toute la peine que je me suis donnée pour trouver seulement la somme des biquarrés [...] je n'ai pas encore pu réussir dans cette recherche, quoique la somme par l'autre méthode me soit connue [...]. Par faciliter la peine, que d'autres peut–être se donneront, dans cette affaire, j'y joindrai les* *sommes de toutes les puissances paires, que j'ai trouvées par l'autre méthode [...].*"

2. Die vielleicht eleganteste, aber keineswegs elementare Bestimmung der Werte $\zeta\,(2k)$ mit „rein reellen" Methoden findet man in der Arbeit [2] von Bruce Berndt.

1 Variation 1: Eulers Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich

Es sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, x^n$$

in einer Umgebung des Ursprungs 0 konvergent, wobei die Folge der Koeffizienten α_n zunächst noch nicht festgelegt sei. Wir bezeichnen die durch diese Reihe bestimmte Funktion mit f. Der Zusammenhang mit den Wallisschen Integralen wird schlagartig erhellt durch das folgende Lemma.

Lemma 1.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent* :

i) f *erfüllt in einer Umgebung von* 0 *die lineare Differentialgleichung*

$$(**) \qquad (1 - x^2)\, f'(x) = x\, f\,(x) + c\,,$$

wobei notwendig $c = \alpha_1$.

ii) *Es ist*

$$(n + 2)\, \alpha_{n+2} = (n + 1)\, \alpha_n$$

für alle $n \geq 0$.

Insbesondere ist die gegebene Potenzreihe in dem Intervall I *der reellen Zahlen* x *mit* $|\,x\,| < 1$ *konvergent und die Differentialgleichung in* i) *auf ganz* I *erfüllt.*

Beweis. Durch (formale) Differentiation der gegebenen Potenzreihe und anschließende einfache (algebraische) Operationen folgt, dass der Ausdruck

$$(1 - x^2)\, f'(x) - x\, f\,(x)$$

durch die Potenzreihe

$$\alpha_1 + (2\alpha_2 - \alpha_0)\, x + (3\alpha_3 - 2\alpha_1)\, x^2 + (4\alpha_4 - 3\alpha_2)\, x^3 + \cdots$$

dargestellt wird. Daraus folgt unmittelbar durch Koeffizientenvergleich der beiden Seiten die Äquivalenz von i) und ii).

Da die vorgegebene Reihe unter der Bedingung ii) nach dem Quotientenkriterium auf ganz I konvergiert und damit auch die Reihe ihrer Ableitung, ist die letzte Behauptung automatisch wegen des Identitätssatzes richtig. $\square$

Das vorige Lemma würde uns nicht viel nützen, könnten wir nicht die Lösungen der Differentialgleichung $(**)$ durch elementar–transzendente Funktionen und ihre Umkehrfunktionen ausdrücken. Für die erfahrenen Leser sind wir im folgenden sicherlich viel zu ausführlich, so dass wir diesen empfehlen, nur die Ergebnisse zu überfliegen.
Beginnen wir zunächst mit dem *homogenen* Fall $c = 0$. Wegen der Linearität der Differentialgleichung können wir uns auf den Fall beschränken, dass $f(0) = a_0 = 1$.

Lemma 1.2 *Die homogene lineare Differentialgleichung*

$$(1 - x^2)\, f_0'(x) = x\, f_0(x)$$

besitzt die eindeutig bestimme Lösung

$$f_0(x) := q(x) := \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bei der Anfangsbedingung $f(0) = 1$.
Insbesondere hat man in dem Intervall I *die Potenzreihen–Entwicklung*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\, x^{2k} ,$$

wobei $a_0 = 1$ *und* $(2k + 2)\, a_{2k+2} = (2k + 1)\, a_{2k}$.

Durch formale Integration folgt daraus unmittelbar

Folgerung 1.3

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k + 1}\, x^{2k+1} .$$

Beweis (Lemma 2). Wegen der Anfangsbedingung muss jede Lösung f_0 der gegebenen Differentialgleichung positiv in der Nähe des Ursprungs sein. Somit existiert notwendig der Logarithmus $\ln f_0(x)$ nahe 0, und es ist

$$2\,(\ln f_0(x))' = 2\,\frac{f_0'(x)}{f_0(x)} = \frac{2x}{1 - x^2} = -\,(\ln(1 - x^2))' .$$

Durch Integration und anschließendes „Exponieren” ergibt sich notwendig

$$f_0^2(x) = \frac{C}{1 - x^2} ,$$

also $f_0 = q$, wenn $f_0(0) = 1$.

Umgekehrt ist die gegebene Funktion q differenzierbar und positiv auf dem Intervall I mit $q(0) = 1$, und sie erfüllt die Gleichung $(1 - x^2)\, q^2(x) = 1$. Nach Differentiation dieser Identität und Division mit $q(x)$ sieht man unmittelbar, dass q die Differentialgleichung erfüllt. □

Die *inhomogene* Gleichung löst man am besten durch den Ansatz der „variablen Koeffizienten”:

$$f(x) = c(x)\, q(x) .$$

f erfüllt bekanntlich genau dann die inhomogene Gleichung, wenn

$$(1 - x^2)\, c'(x)\, q(x) = c ,$$

also

$$c'(x) = c\, q(x)$$

ist. Infolgedessen ist

$$c(x) = c \arcsin x + C .$$

Die eindeutig bestimmte Lösung f der inhomogenen Gleichung mit $f(0) = 0$ ist somit

$$f(x) = \frac{c \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Folgerung 1.4 *Auf dem Intervall I hat man die Potenzreihen–Entwicklungen*

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\, x^{2k+1} , \quad \arcsin^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{k + 1}\, x^{2k+2} ,$$

wobei $a_1 = 1$ *und* $(2k + 3)\, a_{2k+3} = (2k + 2)\, a_{2k+1}$.

Bemerkung. Wir werden später noch sehen, wie die Koeffizienten a_{2k+1} in diesen Entwicklungen auf *ganz natürliche* Weise mit den Wallisschen Integralen $\mathcal{I}_{2k+1}$ identifiziert werden können.

2 Variation 2: Eulers Berechnungen in moderner Notation

Das zentrale Ingredienz der Eulerschen Berechnungen ist die oben bemerkte „Dualität” zwischen den Zahlen a_n:

$$a_n a_{n-1} = \frac{1}{n} ,$$

woraus sofort, wie schon in der Einleitung erwähnt,

$$\frac{1}{4}\,\zeta\,(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k} a_{2k-1}}{2k} \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}\,\zeta\,(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1} a_{2k-2}}{2k-1}$$

folgt. Man braucht jetzt jeweils nur noch einen der beiden Faktoren unter dem Summenzeichen durch ein Wallissches Integral zu ersetzen, Summation und Integration zu vertauschen (warum dies erlaubt ist, wird noch etwas genauer in einem Anhang über den Satz von Beppo Levi für uneigentliche Integrale erörtert), die entstehende Potenzreihe zu identifizieren und schließlich das Integral auszuwerten.

Mit der zweiten Reihe ergibt sich Eulers ursprünglicher Beweis:

$$\frac{3}{4}\,\zeta\,(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-2}\mathcal{I}_{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-2}}{2k-1} \int_0^1 \frac{x^{2k-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Nun ist aber, wie im vorigen Abschnitt gezeigt,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-2}}{2k-1} x^{2k-1} = \arcsin x .$$

Somit ist

$$\frac{3}{4}\,\zeta\,(2) = \int_0^1 \frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi^2}{2\cdot 4} .$$

Nach unseren Vorbereitungen ist auch Eulers zweiter Beweis mittels der ersten Summe fast ein Kinderspiel:

$$\frac{1}{4}\,\zeta\,(2) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}\mathcal{I}_{2k}}{2k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2k} \int_0^1 \frac{x^{2k}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Ferner ist, wie schon abgeleitet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{k} x^{2k} = \arcsin^2 x .$$

Somit ist

$$\frac{1}{4}\,\zeta\,(2) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \phi^2\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi^2}{3\cdot 8} .$$

3 Variation 3: Levries Herleitung

In der Tat sind die beiden Reihen für arcsin und $\arcsin^2$ auf dem *abgeschlossenen* Intervall $\overline{I} = \{ x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1 \}$ *gleichmäßig konvergent*, wie man leicht unter Verwendung des Majoranten–Kriteriums und des tieferliegenden Raabe–Kriteriums[6] feststellt. Das nützt uns allerdings nicht viel bei Eulers Vorgehen wegen der Multiplikation mit der auf I *unbeschränkten* Funktion q, was uns dazu zwingt, in dem folgenden Anhang genauer über die Vertauschung von Integration und Summation nachzudenken, wenn wir genau seiner Anleitung folgen wollen.

Levrie ändert nun die Betrachtungsweise insofern, als er die Wallisschen Integrale gemäß ihrer ursprünglichen Definition als *eigentliche* Integrale auffasst und den folgenden Satz direkt ohne Bezugnahme auf die oben dargestellten bekannten Potenzreihen–Entwicklungen von $\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$ und $\arcsin^2 x$ herleitet. Der entscheidende Punkt ist die „trigonometrische" Darstellung von ϕ, aus der unmittelbar die von ϕ^2 zumindest auf dem halboffenen Intervall folgt. Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz auf dem kompakten Intervall zieht Levrie ebenfalls das Raabe–Kriterium heran.

Satz 3.1 *Man hat auf dem offenen Intervall* $J := \frac{\pi}{2} I = (-\pi/2, \pi/2)$ *die lokal gleichmäßige Reihen–Entwicklung*

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_{2k+1} \sin^{2k+1}\phi \cos\phi ,$$

und auf dem abgeschlossenen Intervall $\overline{J} = [-\pi/2, \pi/2]$ *die gleichmäßige Entwicklung*

$$\phi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{I}_{2k+1}}{k+1} \sin^{2k+2}\phi .$$

Bemerkung. Wegen der zweiten Aussage kann man bedenkenlos Summation und Integration vertauschen und bekommt (sogar ohne Substitutionsregel) - noch einmal - Eulers zweiten Beweis:

$$\frac{\pi^3}{3\cdot 8} = \int_0^{\pi/2} \phi^2 \, d\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{I}_{2k+1}}{k+1} \mathcal{I}_{2k+2} = 2\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4}\,\zeta(2) .$$

Levries Verdienst ist es, die direkte Ableitung der ersten Reihen-Entwicklung „im Stile von Euler" präsentiert und anschließend deren Stichhaltigkeit nachgewiesen zu haben.

[6]Siehe z. B. Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. 2. durchgesehene Auflage. B.G. Teubner: Stuttgart 1982. Hier: Kriterium 33.10, p. 207.

Wir folgen hier seiner Argumentation im Gewand der Wallisschen Integrale in ihrer *uneigentlichen* Form, wodurch die Rolle der geometrischen Reihe noch deutlicher wird. Aus der Ableitung

$$\Big(x^n \sqrt{1 - x^2}\Big)' = \frac{n\, x^{n-1} - (n+1)\, x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ergibt sich die Rekursionsformel

$$(+) \qquad x^n \sqrt{1 - x^2} = n\, G_{n-1}(x) - (n+1)\, G_{n+1}(x)\ ,$$

wenn man zur Abkürzung

$$G_n(x) := \int_0^x \frac{x^n\, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

setzt. Bei Auswertung an der Stelle 1 erhält man hieraus erneut $(*)$ für die Wallisschen Integrale:

$$(n+1)\, \mathcal{I}_{n+1} = n\, \mathcal{I}_{n-1}\ .$$

Nun ist $G_0(x) = \arcsin x$ und wegen $(+)$

$$\arcsin x = x \sqrt{1 - x^2} + 2\, G_2(x)\ .$$

Indem man nun in der „umgekehrten" Richtung die obigen Rekursionsformeln einsetzt und die entsprechenden Formeln für die Koeffizienten $\mathcal{I}_{2k-1}$ berücksichtigt, gewinnt man leicht per vollständiger Induktion die Beziehungen

$$\arcsin x = \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{I}_{2k-1}\, x^{2k-1}\Big) \sqrt{1 - x^2} + (2n\, \mathcal{I}_{2n-1})\, G_{2n}(x)\ .$$

Somit handelt es sich bei Levries Vorgehen um einen *direkteren Weg* zum ersten Teil von Folgerung 1.4. Er könnte darin bestehen nachzuweisen, dass die Folge

$$(n\, \mathcal{I}_{2n-1})\, G_{2n}(x)$$

lokal gleichmäßig auf I gegen Null konvergiert. Levrie geht anders vor. Er benutzt die lokal gleichmäßige Konvergenz der *geometrischen Reihe*, um zu schließen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_{2k+1}\, x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}\, \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}\, x^{2k+1} = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1} t^{2k+1}}{\sqrt{1 - t^2}}\Big)\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, \frac{x\, t}{1 - x^2 t^2}\, \mathrm{d}t$$

für alle $x \in I$. Indem man $t = \sqrt{1 - \tau^2}$ substituiert, berechnet man das letzte Integral sofort zu

$$\int_0^1 \frac{x \,\mathrm{d}\tau}{(1 - x^2) + x^2\tau^2} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}T}{(1 - x^2) + T^2} ,$$

und dieses ist bekanntlich gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

4 Variation 4: Eine weitere Herleitung

Man bekommt auch Eulers ersten Beweis mit Levries Trick. Selbstverständlich ergibt sich wie oben

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_{2k}\, x^{2k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 - x^2t^2)\sqrt{1 - t^2}} ,$$

und es ist nur noch das Integral auf der rechten Seite auszuwerten. Es ist von demselben Typ wie das Integral im vorigen Abschnitt, der nach bekannten Standardverfahren elementar behandelt werden kann. Tatsächlich ergibt es sich, wie es sein muss, zu

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Zur Bequemlichkeit der Leser möchte ich dies kurz erläutern. Zuerst kommt mit Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1 - x^2t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + xt} + \frac{1}{1 - xt}\right) ,$$

und damit ist das gesuchte Integral nach Zusammenfassung beider entstehender Integrale und einer einfachen Substitution gleich

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 + xt)\sqrt{1 - t^2}} .$$

Mit der Substitution

$$\frac{1}{u} := 1 + xt$$

wird dies sofort zu

$$\frac{1}{2} \int_{1/(1+x)}^{1/(1-x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2u^2 - (1 - u)^2}} = \frac{1}{2} \int_{1/(1+x)}^{1/(1-x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{-(1 - x^2)u^2 + 2u - 1}} .$$

Nun ist ganz allgemein, wie oben in einem Spezialfall schon verwendet, für *negatives* a:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2u + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \; .$$

In unserem Fall ist dies also, wie man auch durch einfaches Differenzieren verifizieren kann, zumindest für $x \neq 0$ gleich

$$\frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}} \arcsin \frac{1 - (1 - x^2)\,u}{x} \; .$$

Nach Einsetzen der Grenzen wird daraus schließlich

$$\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; ,$$

und dies ist natürlich auch für $x = 0$ der Wert des gesuchten Integrals.

Anhang 1: Varianten des Satzes von Beppo Levi

Bei den benötigten Vertauschungssätzen von Reihenbildung und Integration haben wir es in allen Fällen bei Betrachtung der *Partialsummen* mit monoton aufsteigenden Folgen integrierbarer Funktionen f_j zu tun, die zumindest punktweise gegen eine integrierbare Grenzfunktion f konvergieren. Wir müssen dann hinreichende Bedingungen angeben, unter denen die (aufsteigende) Folge der Integrale

$$\int f_j(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{gegen} \quad \int f\,(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Durch Übergang zu der absteigenden, punktweise gegen 0 konvergierende Folge der Differenzen $g_j := f - f_j$ ist also nur sicherzustellen, dass

$$\lim_{j \to \infty} \int g_j\,\mathrm{d}x = 0 \; .$$

Nach dem klassischen *Satz von Beppo Levi* ist dies mit Sicherheit dann der Fall, wenn wir mit Integralen im Lebesgueschen Sinne arbeiten können. In unserem Fall sind die Funktionen g_j *stetig* auf dem Intervall $[\,0,\,1\,)$ und nach dem Majorantenkriterium uneigentlich (absolut) Riemann–integrierbar. Damit sind die trivialen Fortsetzungen nach $\mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar, und wir können uns beruhigt auf den Satz von Beppo Levi berufen.

Wie können wir aber argumentieren, wenn wir die Lebesguesche Theorie als nicht elementar genug ansehen? Tatsächlich gilt der folgende

Satz 4.1 *Es sei* $B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, und* (g_j) *sei eine punktweise monoton gegen* 0 *fallende Folge uneigentlich Riemann-integrierbarer Funktionen* g_j *auf einem*

Intervall $[\,a,\,B\,)$ *. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^{B-} g_j(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\ .$$

Der *Beweis* kann sehr einfach auf den Fall zurückgeführt werden, dass die Funktionen g_j eigentlich Riemann–integrierbar auf jedem *kompakten* Intervall $[\,a,\,b\,]$ sind.

Bemerkung. Da bei unseren Anwendungen die beteiligten Reihen das Produkt einer Potenzreihe mit einer stetigen Funktion sind, haben wir sogar *gleichmäßige* Konvergenz auf Kompakta, so dass uns diese Reduktion auf Kompakta schon genügt. Man kann stattdessen auch den Satz von Dini heranziehen[7], der besagt, dass eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die auf einem kompakten Intervall punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, automatisch gleichmäßig konvergent ist.

Fortsetzung Beweis Satz 1. Nach dem Cauchy–Kriterium für absolute uneigentliche Riemann–Integrale gibt es zu g_0 und beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $b < B$, so dass für alle $\beta,\ \beta'$ mit $b \le \beta \le \beta' < B$ gilt:

$$\int_\beta^{\beta'} g_j(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_\beta^{\beta'} g_0(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \varepsilon/2\ .$$

Damit ist auch

$$\int_b^{B-} g_j(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \varepsilon/2$$

für alle j, und wir brauchen die Behauptung tatsächlich nur noch für die *eigentlichen* Riemann–Integrale auf $[\,a,\,b\,]$ zu beweisen. □

Bemerkung. Einen Beweis von Satz 1 in voller Allgemeinheit findet man bei Heuser, loc.cit., Satz 108.4, p. 580. Allerdings benutzt dieser die Lebesguesche Charakterisierung von Riemann–integrablen Funktionen durch das verschwindende Lebesgue–Maß ihrer Unstetigkeitsstellen - also erneut ein nicht elementares Ergebnis. In unserer Situation brauchen wir dies aber nicht, da alle beteiligten Funktionen *stetig* auf dem Intervall $[\,a,\,b\,]$ sind.

Zweiter Beweis von Satz 1 im Fall konvergenter *Reihen* (statt Folgen) und *kompakter Konvergenz* (nach einer Mitteilung von Robin Chapman): Es sei

$$f \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} f_j\ , \quad f_j \;\ge\; 0\ .$$

[7] Siehe Heuser, loc.cit Satz 108.1, p. 578.

Man wähle eine nach B konvergente aufsteigende Folge $a = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < B$ und setze $\mathrm{I}_k := [\, b_k \,, b_{k+1} \,] \subset \mathrm{I}$,

$$J_{jk} := \int_{\mathrm{I}_k} f_j(x)\, \mathrm{d}x \; .$$

Dann ist nach Voraussetzung der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum f_f$

$$\sum_{k=0} \Big(\sum_{j=0} J_{jk} \Big) = \sum_{k=0} \int_{\mathrm{I}_k} f\,(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^{B-} f\,(x)\, \mathrm{d}x \; ,$$

und da die Doppelreihe der J_{jk} absolut konvergent ist, stimmt dieser Wert nach dem *Doppelreihensatz* von Cauchy[8] mit

$$\sum_{j=0} \Big(\sum_{k=0} J_{jk} \Big) = \sum_{j=0} \int_a^{B-} f_j(x)\, \mathrm{d}x$$

überein. $\square$

Anhang 2: Die Koeffizienten a_n

Euler schreibt in seinen Beweisen die Koeffizienten a_n bzw. die Wallisschen Integrale $\mathcal{I}_n$ in gewissem Sinne *vollständig* aus, und ich bin überzeugt davon, dass man nur dadurch auf die richtige Idee kommen kann. Dass wir ohne diese Formeln auskommen, liegt nur daran, dass wir dank Euler schon wissen, worauf es ankommt.

Wir leiten hier - zur Erbauung der Leser - die a_n als Koeffizienten der McLaurinschen Entwicklung der Lösungen der Differentialgleichung $(**)$ ab. Aus der linearen Differentialgleichung folgt natürlich sofort, dass jede Lösung *beliebig oft* differenzierbar ist und, nach allgemeinen Sätzen, sogar analytisch, so dass man Lösungen durch ihre Taylor–Entwicklungen um den Ursprung darstellen kann.

Durch einmalige Differentiation von $(**)$ erhält man

$$(1 - x^2)\, f''(x) - 2\,x\, f'(x) = f\,(x) + x\, f'(x) \; ,$$

also

$$(1 - x^2)\, f''(x) = f\,(x) + 3\,x\, f'(x) \; ,$$

und hieraus folgt sofort durch vollständige Induktion

$$(***) \qquad (1 - x^2)\, f^{(n+1)}(x) = n^2\, f^{(n-1)}(x) + (2n + 1)\, x\, f^{(n)}(x) \; , \quad n \geq 1 \; .$$

[8] Siehe Heuser, loc.cit., Satz 45.2, p. 258.

Im *homogenen* Fall ist $f'(0) = 0$, und wegen $(***)$ folgt sofort, dass alle Ableitungen *ungerader* Ordnung an der Stelle 0 verschwinden müssen. Setzt man dann $n = 2k + 1$ und $x = 0$, so gewinnt man weiter

$$f^{(2k+2)}(0) = (2k + 1)^2 f^{(2k)}(0) .$$

Also sind die geraden Ableitungen im Ursprung, wenn man noch $f(0) = 1$ voraussetzt,

$$f^{(2k)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)^2 .$$

Somit sind die a_{2k} „explizit" gegeben durch

$$a_{2k} = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)^2}{(2k)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!^2} ,$$

und diese Ausdrücke sind, wie man unmittelbar einsieht und wie es auch nach der Newtonschen Binomial–Reihe sein muss, gleich

$$(-1)^k \binom{-1/2}{k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} .$$

Bemerkung. Auch die Wallisschen Integrale

$$\mathcal{I}_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

lassen sich für *gerades* $n = 2k$ wunderbar einfach ohne Rekursionsformel mit Hilfe der gängigen Methoden der *Funktionentheorie* berechnen. Durch „Aufwickeln" des Integrationsintervalls $[\,0,\, 2\pi\,]$ auf den Rand des Einheitskreises ∂D, also durch die Transformation $x \mapsto z = e^{ix}$, gewinnt man sofort wegen $\mathrm{d}z = i\, e^{ix}\,\mathrm{d}x = i\, z\,\mathrm{d}x$:

$$\mathcal{I}_{2k} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,i} \int_{\partial D} \frac{1}{z} \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^{2k} \mathrm{d}z .$$

Da der Integrand eine rationale Funktion in z mit einzigem Pol in $z = 0$ ist, folgt mit dem *Residuensatz*

$$\mathcal{I}_{2k} = (-1)^k \frac{2\pi i}{2^{2k+2} i} \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{z} \right)^{2k} .$$

Das benötigte Residuum ist aber gerade der Faktor vor dem Term $1/z$, wenn man die Klammer ausmultipliziert. Es folgt

$$\mathcal{I}_{2k} = (-1)^{2k} \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(k!)^2} .$$

Im *inhomogenen* Fall können wir uns auf die Anfangsbedingungen $f(0) = 1$ und $f'(0) = c = a_1 = 1$ beschränken. Wie oben folgt dann aus $(***)$ sofort das Verschwinden aller Ableitungen *gerader* Ordnung an der Stelle 0, und weiter mit $n = 2k$ und $x = 0$, dass

$$f^{(2k+1)}(0) = (2k)^2 f^{(2k-1)}(0) .$$

Also ist in diesem Fall für alle k

$$f^{(2k+1)}(0) = 2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2 = 2^{2k}\, k!$$

und damit

$$a_{2k+1} = \frac{2^{2k}\, k!}{(2k+1)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} .$$

Literatur

[1] Ayoub, Raymond: *Euler and the Zeta Function*. The American Mathematical Monthly 81, No. 10, pp. 1067–1086 (1974).

[2] Berndt, Bruce: *Elementary Evaluation of* $\zeta(2n)$. Mathematics Magazine 48, No. 3, pp. 148-154 (1975).

[3] Chapman, Robin: *Evaluating* $\zeta(2)$. Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter, EX4 4QE, UK; rjc@maths.ex.ac.uk.

[4] Eneström, Gustaf: *Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. II. 1736–1738*. pp. 248–251.

[5] Euler, Leonhard: *Démonstration de la somme de cette Suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$ *etc.*. Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, 2:1. pp. 115–127 (1743).

[6] Levrie, Paul: *Lost and Found: An Unpublished* $\zeta(2)$*–Proof*. Mathematical Intelligencer 33, pp. 29–32 (2011).

[7] Stäckel, Paul: *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*. Bibl. Math. (3) 8, pp. 37–54 (1907–1908).
Im Internet zugänglich unter „Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte": http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/13424

Eingegangen am ?. August 2016

Prof. em. Dr. Oswald Riemenschneider
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
20146 Hamburg, Germany