

# Elemente der Gruppentheorie

(mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles)

Oswald Riemenschneider



Studienprobe 1981  
Fachbereich Mathematik - Universität Hamburg

3. korrigierte und erweiterte Auflage, Stand 23. August 2013

## Vorbemerkung zur Neuauflage

Im kommenden Jahr wird Rubiks Würfel 40 Jahre alt, und er hat nichts von seiner Faszination eingebüßt. Im Jahre 1981 war der „Hype“ natürlich gewaltiger, und von daher erschien es attraktiv, Schüler der Hamburger Gymnasien aus den beiden letzten Jahrgängen mit einer Veranstaltung an die Universität zu locken, die ein wenig mehr von dem „mathematischen Flair“ solcher Puzzles vermitteln sollte. Viele Teilnehmer werden vermutlich enttäuscht gewesen sein, da sie eher ein paar weitere Tricks erwartet hatten, mit denen sie den Würfel noch schneller hätten „wiederherstellen“ können. Andere wurden sicherlich durch die „Trockenheit“ des Stoffes und seiner Präsentation von einem Studium der Mathematik abgeschreckt. Einige jedoch haben mir gegenüber betont, daß sie in ihrem Willen zur Aufnahme eines solchen Studium bestärkt wurden.

Die damaligen, mit der Schreibmaschine produzierten Noten werden hier im  $\text{\LaTeX}$ -Format, im Wortlaut fast unverändert, wiedergegeben. Es wurden nur einige offensichtliche Unklarheiten und Druckfehler ohne besondere Mitteilung berichtigt und die eine oder andere Aufgabe hinzugefügt; wirklich neue Bemerkungen findet man in den Fußnoten, oder sie sind mit einem Stern \* gekennzeichnet. Etwas mehr Mathematik kommt in dem gänzlich neuen 6. Abschnitt vor und in dem zugehörigen Anhang über *Gruppenaktionen auf Mengen*, der aus meinem Text *Differentialgeometrie II* mit einigen Änderungen übernommen wurde. Die Zeichnungen wurden nicht mehr per Hand gemalt und eingeklebt, sondern mit modernen Mitteln mehrfarbig eingebunden, ebenso einige Photographien.

Wie bei allen meinen älteren Texten halte ich an der „alten“ deutschen Rechtschreibung fest.

Hamburg, den 23.08.2013

## Vorbemerkung

Der vorliegende Text ist als Begleitlektüre gedacht zu zwei 2-stündigen Vorlesungen, die Schülern der Oberstufe ein realistisches Bild der Studienbedingungen eines Mathematik-Studenten vermitteln sollen. Die Gruppentheorie wurde gewählt, da man es hier mit einem sehr einfachen Axiomensystem zu tun hat, das sich überdies an schönen geometrischen Anwendungen veranschaulichen läßt. Der Text enthält nur eine knappe Zusammenfassung; eine stärkere Motivierung, geometrische Modelle, die Beschreibung der „Tonne“ und von „Rubik’s Cube“ werden in der Vorlesung präsentiert. Teilnehmer an der Veranstaltung sollten die erste Vorlesungsdoppelstunde anhand des Textes nacharbeiten und die zugehörigen eingestreuten Übungsaufgaben bearbeiten (nach Möglichkeit schriftlich). Eine Vorbereitung auf die zweite Doppelstunde mittels des Textes ist wünschenswert. Nach den beiden Vorlesungen wird eine Übung in kleineren Gruppen abgehalten, in der sämtliche Übungsaufgaben besprochen werden sollen.

Weder die Vorlesung noch dieser Text erheben den Anspruch, als Einführung in die Gruppentheorie gelten zu können. Es ist auch nicht unser Ziel, den neuesten Stand der „Cubologie“ darzustellen.

Die Sprechweise der Vorlesung ist, wie in der Mathematik üblich, mengentheoretisch. Wir stellen im ersten Abschnitt die verwendeten Begriffe und Symbole zusammen.

## 1 Mengen und Abbildungen

Nach Cantors Definition verstehen wir unter einer *Menge* eine Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $x$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen. Ist das Objekt  $x$  ein Element von  $M$ , so schreiben wir  $x \in M$ ; im anderen Fall  $x \notin M$ .

*Beispiele.*  $\mathbb{N}$  bezeichnet die Menge der *natürlichen Zahlen*  $0, 1, 2, 3, \dots$  :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$\mathbb{N}^*$  die Menge der von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$\mathbb{P}$  die Menge der *Primzahlen*

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ ist durch genau zwei Zahlen in } \mathbb{N}^* \text{ teilbar}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Es gilt z. B.  $0 \notin \mathbb{N}^*$ ,  $8 \in \mathbb{N}$ ,  $8 \notin \mathbb{P}$ .

Man sagt, die Menge  $M$  sei in der Menge  $N$  enthalten, in Zeichen  $M \subset N$ , wenn für alle  $m \in M$  auch  $m \in N$  gilt. Z. B. ist  $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}^*$  und  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ . Zwei Mengen  $M, N$  heißen *gleich*, in Zeichen  $M = N$ , wenn  $M \subset N$  und  $N \subset M$ .

Sind  $M$  und  $N$  Mengen, so ist das *kartesische Produkt*  $M \times N$  von  $M$  und  $N$  erklärt als Menge aller *geordneten Paare*  $(m, n)$ ,  $m \in M, n \in N$ . Entsprechend definiert man  $M \times N \times P$  etc. I. A. ist  $M \times N \neq N \times M$ .

Eine *Abbildung*  $f$  von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  ist eine Vorschrift, die in eindeutiger Weise jedem Element  $x \in M$  ein Element  $y \in N$  zuordnet. Wir schreiben dann

$$x \xrightarrow{f} y$$

oder  $y = f(x)$ , und fassen die Abbildungsvorschrift zu dem Symbol

$$f : M \longrightarrow N$$

zusammen. Zwei Abbildungen  $f, g : M \longrightarrow N$  heißen *gleich*, in Zeichen  $f = g$ , wenn  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in M$ .

Sind Abbildungen  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow P$  gegeben, so kann man eine neue Abbildung

$$g \circ f : M \rightarrow P$$

(„ $f$  verknüpft mit  $g$ “ - man beachte die Reihenfolge! - oder „erst  $f$  dann  $g$ “ oder „ $g$  nach  $f$ “) definieren durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in M.$$

*Aufgabe.* Ist noch eine weitere Abbildung  $h : P \rightarrow Q$  gegeben, so gilt das *Assoziativgesetz*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

*Beispiel.* Für jede Menge  $M$  ist durch  $\text{id}_M(x) := x$ ,  $x \in M$ , eine Abbildung

$$\text{id}_M : M \rightarrow M$$

erklärt;  $\text{id}_M$  heißt die *identische Abbildung* oder *Identität* von  $M$ . Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir auch einfach  $\text{id}$  statt  $\text{id}_M$ .

*Definition.* Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann heißt

- a)  $f$  *injektiv*, falls für alle  $x_1, x_2 \in M$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt:  $f(x_1) \neq f(x_2)$  (oder anders ausgedrückt: wenn aus  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt);
- b)  $f$  *surjektiv*, falls es zu jedem  $y \in N$  ein  $x \in M$  gibt mit  $f(x) = y$ ;
- c)  $f$  *bijektiv*, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist; d. h. für alle  $y \in N$  gibt es *genau ein*  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ .

Ist  $f$  bijektiv, so kann man jedem  $y \in N$  in eindeutiger Weise ein  $x \in M$  zuordnen, nämlich das einzige Element  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ . Die so gewonnene Abbildung von  $N$  nach  $M$  wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet und heißt die *inverse Abbildung* zu oder *Umkehrabbildung* von  $f$ . Nach Konstruktion gilt  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  für alle  $y \in N$  und  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  für alle  $x \in M$ ; also ist

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_N.$$

*Aufgabe.* Ist  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung, zu der es eine Abbildung  $g : N \rightarrow M$  gibt mit  $g \circ f = \text{id}_M$ ,  $f \circ g = \text{id}_N$ , so ist  $f$  bijektiv, und  $g$  ist die Umkehrabbildung von  $f$ .

Bezeichnen wir nun mit  $\text{Aut } M$  die Menge der bijektiven Abbildungen von  $M$  auf sich selbst („Automorphismen von  $M$ “), so ist mit  $f, g \in \text{Aut } M$  auch  $g \circ f \in \text{Aut } M$ , und es gelten für alle  $f, g, h \in \text{Aut } M$  die folgenden Aussagen:

- i)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ;
- ii)  $f \circ \text{id} = \text{id} \circ f$ ;
- iii)  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ .

*Aufgabe.* Man beweise die soeben benutzte Aussage  $g \circ f \in \text{Aut } M$ , wenn  $g, f \in \text{Aut } M$ .

## 2 Gruppen

*Definition.* Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer „Verknüpfung“ (d. h. einer Abbildung  $v : G \times G \rightarrow G$ ), so daß die folgenden Regeln gelten (damit diese nicht allzu unübersichtlich ausfallen, schreiben wir  $a *_v b$  oder noch kürzer  $a * b$  für das Bild des geordneten Paares  $(a, b) \in G \times G$  unter der gegebenen Verknüpfung  $v$ , also  $a *_v b = a * b := v(a, b)$ ):



- 1) (Assoziativgesetz) Für je drei beliebige Elemente  $a, b, c \in G$  gilt  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
- 2) (Neutrales Element) es existiert ein Element  $e \in G$  mit  $a * e = a$  für alle  $a \in G$ ;
- 3) (Inverses Element) zu jedem  $a \in G$  gibt es ein Element  $a' \in G$  mit  $a * a' = e$ .

*Beispiele.* 1. Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  bilden bzgl. der *Addition*  $+$ , also der Verknüpfung  $(a, b) \mapsto a + b$ , eine Gruppe, die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  dagegen nicht.  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  besitzt bzgl. der *Multiplikation* ein neutrales Element, bildet aber keine Gruppe.

2. Ist  $M$  eine beliebige, nicht leere Menge, so bildet die Menge  $\text{Aut } M$  der Bijektionen  $f : M \rightarrow M$  eine Gruppe unter der Verknüpfung  $\circ$ . Das neutrale Element ist die Identität  $\text{id}$ , das zu  $f$  inverse Element die *Umkehrabbildung*  $f^{-1}$ .

**Satz 2.1 (und Definition)** *Ist  $(G, *)$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ , so ist auch  $e * a = a$  für alle  $a \in G$ . Es gibt zudem nur ein einziges neutrales Element. Das zu  $a$  existierende inverse Element  $a'$  ist ebenfalls eindeutig (durch  $a$ ) bestimmt; wir bezeichnen es stets mit  $a^{-1}$ . Das inverse Element hat zusätzlich die Eigenschaft  $a^{-1} * a = e$ .*

*Beweis.* 1. Es sei  $a * a' = e$ . „Multipliziert“ man diese Gleichung von links mit  $a'$ , so erhält man  $(a' * a) * a' = a' * (a * a') = a' * e = a'$ . Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit einem Inversen  $a''$  von  $a'$ , so findet man unter weiterer Verwendung des Assoziativgesetzes die Gleichung  $a' * a = e$ . Jedes „Rechtsinverse“ zu  $a$  ist also auch ein „Linksinverse“ und verdient daher den Namen „Inverses“. Insbesondere ist  $a$  invers zu  $a'$ , wenn  $a'$  invers zu  $a$  ist.

2. Es folgt aus 1. für jedes  $a \in G$  mit Inversem  $a'$ :

$$e * a = (a * a') * a = a * (a' * a) = a * e = a.$$

Jedes „rechtsneutrale“ Element ist also auch „linksneutral“.

3. Setzt man in die letzte Gleichung speziell für  $a$  ein beliebiges rechtsneutrales Element  $e'$  ein, so folgt unmittelbar

$$e = e * e' = e'.$$

4. Aus einer Gleichung  $a * b_1 = a * b_2$  folgt sofort durch Multiplikation mit einer Inversen  $a'$  von  $a$  von links, daß  $b_1 = b_2$ . Das gilt insbesondere, wenn  $b_1, b_2$  Rechtsinverse zu  $a$  sind.

Damit sind alle Aussagen bewiesen. □

*Bemerkung.* Aufgrund des Assoziativgesetzes braucht man tatsächlich überhaupt keine Klammern zu setzen. Wir schreiben im folgenden meist  $a \cdot b$  oder auch nur  $ab$  für  $a * b$  (und sprechen dann von einer *multiplikativ geschriebenen* Gruppe).

*Bemerkungen.* 1. Es sollte dem Leser nicht schwerfallen, das Analogon des vorigen Satzes zu beweisen unter der Bedingung, daß in  $G$  ein *linksneutrales* Element und zu jedem  $a \in G$  ein *Linksinverse* existiert. Geht man konzeptionell vor, so braucht man überhaupt nichts zu beweisen. Hat man nämlich eine Menge  $G$  zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung  $*$ , so wird durch  $(a, b) \mapsto a \bar{*} b := b * a$  eine weitere assoziative Verknüpfung auf  $G$  erklärt (die nur dann mit der ursprünglichen übereinstimmt, wenn diese *kommutativ* ist, d. h.  $a * b = b * a$  für alle  $a, b$  gilt). Man schreibt manchmal auch  $G^{\text{op}}$  für  $(G, \bar{*})$ . Hat nun  $G$  ein Linksneutrales und Linksinverse, so besitzt  $G^{\text{op}}$  ein Rechtsneutrales und Rechtsinverse und umgekehrt. Also ist  $G^{\text{op}}$  eine Gruppe und damit auch  $(G, *)$  selbst.

2. Für  $\text{Aut } M$  bedeutet der eben skizzierte Übergang von einer Gruppe  $G$  zu  $G^{\text{op}}$ , daß man die Reihenfolge der Verknüpfung zweier Bijektionen vertauscht. Das legt aber noch nicht die Reihenfolge für  $\text{Aut } M$  fest! Man sollte also immer angeben, ob wir in  $\text{Aut } M$  die Verknüpfung  $(f, g) \mapsto f \circ g$  oder  $(f, g) \mapsto g \circ f$  zugrunde legen.

Wir haben oben schon gezeigt, daß für das inverse Element  $a^{-1}$  zu  $a$  in einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe die folgende Relation besteht:

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Ferner hat man die

**Folgerung 2.2** In jeder Gruppe  $G$  gilt  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

*Beweis.*  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)b^{-1})a^{-1} = (a(bb^{-1}))a^{-1} = aa^{-1} = e.$   $\square$

**Folgerung 2.3** Eine Gruppe  $G$  ist genau dann kommutativ, wenn alle Kommutatoren  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$  gleich dem neutralen Element sind.

*Beweis.* Es ist  $ab = ba$  genau dann, wenn  $aba^{-1}b^{-1} = (ab)(a^{-1}b^{-1}) = (ab)(ba)^{-1} = e.$   $\square$

**Satz 2.4** In jeder Gruppe  $G$  sind die Gleichungen  $ax = b$  und  $xa = b$  eindeutig lösbar. Ist umgekehrt  $\cdot$  eine assoziative Verknüpfung auf der Menge  $G$ , so daß alle diese Gleichungen lösbar sind, so ist  $(G, \cdot)$  eine Gruppe.

*Beweis.* 1. Durch Multiplikation von links bzw. von rechts mit  $a^{-1}$  überzeugt man sich sofort davon, daß  $a^{-1}b$  bzw.  $ba^{-1}$  die jeweils einzigen Lösungen dieser Gleichungen sind.

2. Wähle irgendein festes  $c \in G$  und löse die Gleichung  $cx = c$ . Dies liefert ein Element  $e \in G$  mit  $ce = c$ . Ist nun  $a \in G$  beliebig, so löse man die Gleichung  $xc = a$ ; es gibt somit ein Element  $d \in G$ , so daß  $dc = a$ . Dann ist aber  $ae = dce = dc = a$  und somit  $e$  ein rechtsneutrales Element in  $G$ . Die Existenz von Rechtsinversen folgt dann unmittelbar aus der Lösbarkeit der Gleichungen  $ax = e$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ist  $G$  eine endliche Menge mit einer assoziativen Verknüpfung  $\cdot$ , so ist  $(G, \cdot)$  schon dann eine Gruppe, wenn die Gleichungen  $ax = b$  und  $xa = b$  höchstens eine Lösung besitzen. Denn die Voraussetzungen besagen ja, daß die Abbildungen  $G \ni x \mapsto ax \in G$  und  $G \ni x \mapsto xa \in G$  injektiv sind. Injektive Abbildungen einer endlichen Menge in sich sind aber automatisch surjektiv. Somit sind alle Gleichungen  $ax = b$  und  $xa = b$  (eindeutig) lösbar.

Besteht die Gruppe nur aus endlich vielen Elementen  $a_1, \dots, a_n$ , so nennt man die Elementanzahl  $n$  auch die *Ordnung* der Gruppe. Die Gruppenstruktur ist dann allein durch Angabe der endlich vielen Produkte  $a_i * a_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , festgelegt. Diese Produkte kann man in Form einer Tabelle („Gruppentafel“) aufführen.

Sei z. B. die 6-elementige Menge  $\Gamma = \{e, s, t, u, v, w\}$  gegeben und  $(a, b) \mapsto a * b$  definiert durch ( $a$  aus der linken Spalte und  $b$  aus der obersten Zeile):

*	e	s	t	u	v	w
e	e	s	t	u	v	w
s	s	t	e	v	w	u
t	t	e	s	w	u	v
u	u	w	v	e	t	s
v	v	u	w	s	e	t
w	w	v	u	t	s	e

Die erste Zeile bzw. erste Spalte (nach den Doppelstrichen) zeigen, daß  $e$  wie ein rechts- bzw. linksneutrales Element operiert. Jedes Element besitzt genau ein Inverses, da in jeder Zeile und in jeder Spalte  $e$  genau einmal vorkommt. Alternativ kann man auch nachprüfen, daß alle Gleichungen  $ax = b$  und

$xa = b$  genau eine Lösung besitzen, indem man feststellt, daß in jeder Zeile und jeder Spalte die Symbole  $e, s, t, u, v, w$  genau einmal vorkommen. Es bleibt noch nachzuprüfen, ob das Assoziativitätsgesetz erfüllt ist. Dazu muß man nun aber alle  $6^3$  Fälle nachrechnen. Wir beschränken uns auf zwei Fälle:

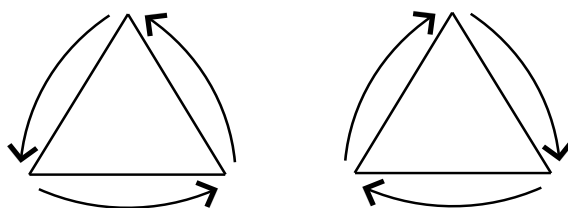
$$\begin{aligned}(s * u) * w &= v * w = t \quad , \\ s * (u * w) &= s * s = t \quad .\end{aligned}$$

Man kann so in endlich vielen Schritten nachweisen, daß durch  $*$  auf  $\Gamma$  tatsächlich eine Gruppenstruktur erklärt wird. Diese ist offensichtlich nicht kommutativ, da

$$u * v = t \neq s = v * u .$$

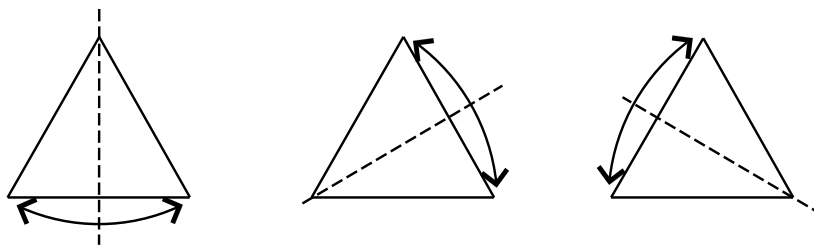
*Aufgabe.* Bestimme alle Gruppenstrukturen auf einer 3-elementigen Menge  $\{a, b, c\}$ .

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir die oben abstrakt definierte Gruppe  $\Gamma$  *geometrisch* deuten. Wir betrachten dazu ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt 0. Offensichtlich gibt es 5 Drehungen des Raumes um eine Achse durch den Mittelpunkt, welche das Dreieck mit sich selbst zur Deckung bringen: zwei Drehungen um 120 bzw. 240 Grad um eine Achse senkrecht zur Fläche des Dreiecks:



Figur 2.1

und drei Drehungen um Achsen in der Ebene des Dreiecks.



Figur 2.2

Nimmt man noch die Drehung  $e$  um den Winkel 0 hinzu, so hat man eine 6-elementige Menge  $\{e, s, t, u, v, w\}$  von Drehungen. Führt man zwei solche Drehungen hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine Drehung. Da Drehungen als Abbildungen aufgefaßt werden können, ist das Assoziativitätsgesetz automatisch erfüllt,  $e$  ist das neutrale Element, und jede Drehung besitzt offensichtlich ein Inverses:

$$t \circ s = s \circ t = e, \quad u \circ u = v \circ v = w \circ w = e .$$

Führt man also das Produkt  $a * b = b \circ a$  ein, so bildet  $\{e, s, t, u, v, w\}$  eine Gruppe; man nennt sie die *Symmetriegruppe* des gleichseitigen Dreiecks. Es lassen sich leicht alle Produkte sofort ausrechnen:

Z. B. ist  $u*v = v*u = e$  etc., und durch Vergleich mit der Gruppentafel von  $\Gamma$  sieht man unmittelbar, daß diese Symmetriegruppe die gleiche ist wie die abstrakt definierte Gruppe  $\Gamma$ .

An der Gruppentafel von  $\Gamma$  kann man ablesen, daß die Teilmenge  $\{e, s, t\}$  die Eigenschaft besitzt, daß alle Produkte, die aus dieser Teilmenge gebildet werden können, wieder in  $\{e, s, t\}$  liegen. Sie bildet sogar wieder für sich eine Gruppe bzgl. der Operation  $*$ .

*Aufgabe.* Sei  $(G, *)$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine nichtleere Teilmenge, so daß für alle  $a, b \in H$  gilt:  $a*b^{-1} \in H$ . Dann bildet  $H$  bzgl.  $*$  eine Gruppe.  $H$  heißt auch eine *Untergruppe* von  $G$ . Wie ist die Untergruppe  $\{e, s, t\}$  von  $\Gamma$  geometrisch zu deuten?

### 3 Permutations- und Symmetriegruppen

*Beispiel.* Das wichtigste Beispiel einer *endlichen* Gruppe ist die Gruppe der bijektiven Abbildungen einer endlichen Menge  $M$  mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung, die man auch mit  $\mathfrak{S}_n$  bezeichnet, wenn  $n$  die Anzahl der Elemente (also die „Kardinalität“) von  $M$  ist. Sie heißt auch die *symmetrische Gruppe* in  $n$  Elementen (oder „vom Grad  $n$ “); die Abbildungen  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  heißen *Permutationen*. Diese Gruppen treten in vielen Bereichen in der Mathematik auf, insbesondere im Zusammenhang mit der Theorie der *Determinanten*.

*Aufgabe.* Jede *endliche* Gruppe läßt sich als Untergruppe einer geeignet gewählten symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_N$  realisieren.

Bei gegebenem Grad  $n$  können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $M$  aus den Zahlen  $1, \dots, n$  besteht. Ein Element  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  kann dann beschrieben werden durch ein Symbol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_i & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\pi(i) = j_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Zahlen  $j_1, \dots, j_n$  durchlaufen wegen der Bijektivität von  $\pi$  die Menge  $\{1, \dots, n\}$  genau einmal, aber in evtl. geänderter Reihenfolge. Man nennt daher  $\pi$  eine *Permutation* der Zahlen von 1 bis  $n$ . Die Hintereinanderschaltung zweier Permutationen schreiben wir trotz ihres Abbildungscharakters von *links nach rechts*; es bedeutet also z. B.

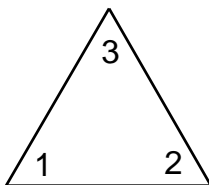
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Satz 3.1** Die Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  besitzt  $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  Elemente.

*Beweis.* Eine Permutation  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  kann der Zahl  $n$  als Bild eine der Zahlen  $1, \dots, n$  zuordnen. Ist das Bild von  $n$  festgelegt, verbleiben für die Zahl  $n - 1$  als Bilder noch genau  $n - 1$  Möglichkeiten. So fortfahrend, erhält man nach  $n$  Schritten das gewünschte Ergebnis.  $\square$

*Bemerkung.* Eine „saubere“ Durchführung des vorstehenden Beweises müßte das Prinzip der *vollständigen Induktion* verwenden.

*Beispiel.* Offensichtlich kann die (räumliche) Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks mit der Gruppe  $\mathfrak{S}_3$  identifiziert werden. Man braucht dazu nur die Ecken mit den Zahlen 1, 2 und 3 zu belegen.



Figur 3.1

Es ist dann z. B.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

und damit

$$s u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = v,$$

wie es sein muß.

Spezielle Permutationen sind solche, die  $m$  verschiedene Zahlen  $a_1, \dots, a_m$  zyklisch vertauschen (und die anderen festhalten). Eine solche Permutation bildet  $a_1$  auf  $a_2$ ,  $a_2$  auf  $a_3, \dots, a_{m-1}$  auf  $a_m$  und schließlich  $a_m$  wieder auf  $a_1$  ab. Wir schreiben für einen solchen Zyklus der Länge  $m$

$$(a_1 a_2 \dots a_m).$$

**Satz 3.2** Jede Permutation läßt sich als Produkt elementfremder Zyklen schreiben.

Wir wollen den technischen, aber nicht allzu schwierigen *Beweis* fortlassen. Das Verfahren zur Auffindung einer solchen Produktzerlegung von  $\pi$  ist jedoch denkbar einfach. Man startet mit beliebigem  $j$  und betrachtet die Folge  $j, \pi(j), \pi^2(j) \dots$  etc., bis man nach  $\ell_j \geq 1$  Schritten wieder bei  $j$  anlangt. Man erhält so einen Zyklus

$$(j, \pi(j), \pi^2(j) \dots \pi^{\ell_j-1}(j))$$

der Länge  $\ell_j$  (für  $\ell_j = 1$  ist  $\pi(j) = j$ ). Ist nun  $\ell_j = n$ , so sind wir schon fertig. Im anderen Fall gibt es eine Zahl  $k$ , die nicht in diesem Zyklus vorkommt. Für diese Zahl verfährt man genauso, und nach endlich vielen Schritten haben wir unser Ziel erreicht.

*Aufgabe.* Man erweitere die vorstehende Skizze zu einem korrekten Beweis.

*Beispiel.* 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)(257)(368).$$

Zyklen der Länge 2 heißen aus ersichtlichen Gründen *Transpositionen*. Aus dem vorigen Satz folgt nun sofort

**Satz 3.3** Jede Permutation kann (evtl. auf verschiedene Weisen) als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. Zur Darstellung genügen schon die  $(n - 1)$  Transpositionen

$$(12), (13), \dots, (1n).$$

*Beweis.* Wegen Satz 2 genügt es, den Satz für Zyklen zu beweisen. Offenbar ist aber

$$(a_1 a_2 \dots a_m) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \dots (a_1 a_m).$$

Zum Nachweis der zweiten Behauptung genügt die Bemerkung, daß

$$(ab) = (1a)(1b)(1a) \quad \text{für } a \neq b, a \neq 1, b \neq 1. \quad \square$$

*Bemerkung.* Die Aussage von Satz 3 faßt man kurz dahingehend zusammen, daß die Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  von den Transpositionen  $(12), (13), \dots, (1n)$  erzeugt wird.

*Definition.* Eine Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_i & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

heißt *gerade* bzw. *ungerade*, je nachdem die Anzahl der „Inversionen“, d. h. die Anzahl von Paaren  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha < \beta$  und  $j_\alpha > j_\beta$  gerade oder ungerade ist.

**Satz 3.4** Eine gerade Permutation läßt sich nur als Produkt einer geraden Anzahl, eine ungerade Permutation nur als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen schreiben.

Da ein eleganter *Beweis* nur mit Mitteln zu führen ist, die den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würden, verzichten wir auf die Durchführung.  $\square$

Ist  $\pi = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_m b_m)$ , so ist

$$\pi^{-1} = (a_m b_m) \cdots (a_2 b_2)(a_1 b_1).$$

$\pi$  ist also genau dann gerade, wenn  $\pi^{-1}$  es ist. Ferner ist wegen des vorstehenden Satzes das Produkt von geraden Permutationen wieder gerade. Es folgt also

**Satz 3.5 (und Definition)** Die Menge der geraden Permutationen in  $\mathfrak{S}_n$  bildet eine Untergruppe. Man nennt sie die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  in  $n$  Elementen.

Welches ist die Elementanzahl von  $\mathfrak{A}_n$ ? Für  $n = 1$  ist die Antwort trivial. Sei also  $n \geq 2$  und  $\pi_0$  die Transposition  $(12)$ . Durchläuft dann  $\pi$  die Gruppe der geraden Permutationen, so durchläuft das Produkt  $\pi \circ \pi_0$  genau einmal die Menge der ungeraden Permutationen. Es gibt somit genauso viele gerade wie ungerade Permutationen.

**Lemma 3.6** Die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  besitzt für  $n \geq 2$  genau

$$\frac{1}{2} n!$$

Elemente.

Entsprechend zu Satz 3 gilt die folgende Aussage, die wir anschließend noch bei der Untersuchung der Tonne verwenden werden.

**Satz 3.7** Die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_n$ ,  $n \geq 3$ , wird von den  $(n - 2)$  Dreierzyklen

$$(123), (124), \dots, (12n)$$

erzeugt.

*Beweis.* Nach Satz 4 ist jedes  $\pi \in \mathfrak{A}_n$  das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen  $(1i)$ , also ein Produkt von Permutationen der Form  $(1i)(1k)$ . Für  $k = i$  ist  $(1i)(1k) = (1i)^2 = e$ ; wir können daher  $k \neq i$  voraussetzen. Dann ist aber

$$(1i)(1k) = (1ik),$$

und dies ist einer der im Satz angegebenen Dreierzyklen im Fall  $i = 2$ . Für  $k = 2$  ist  $(1i2) = (12i)(12i)$ . Schließlich braucht man für  $i > 2$ ,  $k > 2$  nur noch die Relation

$$(1ik) = (12k)(12i)(12k)^{-1} = (12k)(12i)(12k)(12k)$$

anzuwenden.  $\square$

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch einige Bemerkungen zu den Symmetriegruppen der regulären oder Platonischen Körper (also Tetraeder, Würfel = Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) machen, also zur Gruppe der Drehungen um eine Achse durch den Mittelpunkt eines solchen Körpers, die ihn mit sich zur Deckung bringen („Symmetrien“). Eine solche Symmetrie ist vollständig festgelegt durch Angabe der Permutation der Ecken; also ist z. B. die Symmetriegruppe des Tetraeders  $\text{Sym } T$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_4$ , die des Würfels  $H$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_8$ . Eine solche Symmetrie ist vollständig festgelegt durch Angabe der Permutation der Ecken; also ist z. B. die Symmetriegruppe des Tetraeders  $\text{Sym } T$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_4$ , die des Würfels  $H$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_8$ .

Figur 3.2<sup>1</sup>

Wir wollen kurz  $\text{Sym} T$  untersuchen; dazu bezeichnen wir die Ecken mit 1, 2, 3 und 4. Ist  $\pi \in \text{Sym} T$  und  $\pi(4) \in \{1, 2, 3\}$ , also z. B.  $\pi(4) = 3$ , so gilt mit  $\sigma = (234)$ :

$$(\pi\sigma)(4) = 4.$$

Dann kann aber  $\pi\sigma$  nur gleich eine der Drehungen  $(123)^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sein. Also ist  $\pi$  stets Produkt von Dreierzyklen, d. h.

$$\text{Sym} T \subset \mathfrak{A}_4.$$

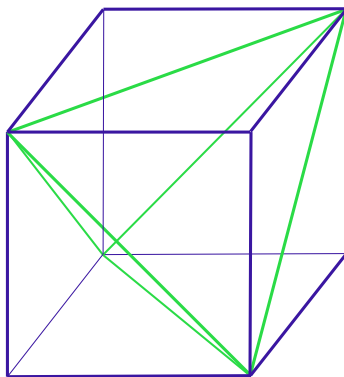
Mit den vorigen Überlegungen folgt aber auch sofort, daß die Ordnung von  $\text{Sym} T$  gleich  $4 \cdot 3 = 12$  ist, und dies stimmt mit der Ordnung von  $\mathfrak{A}_4$  überein. Also ist notwendig

$$\text{Sym} T = \mathfrak{A}_4.$$

Oder alternativ: Die Erzeuger  $(123)$ ,  $(124)$  von  $\mathfrak{A}_4$  liegen in  $\text{Sym} T$ .

*Aufgabe.* Beschreibe die Symmetriegruppe  $\text{Sym} H$  des Würfels als Untergruppe von  $\mathfrak{S}_6$  und beweise, daß  $\text{Sym} H$  mit  $\mathfrak{S}_4$  identifiziert werden kann.

Da  $\mathfrak{A}_4$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_4$  ist, kann man zu der Vermutung gelangen, daß auch aus geometrischen Gründen die Symmetriegruppe des Tetraeders als Untergruppe des Würfels realisiert werden kann. In der Tat sieht man dies dadurch ein, daß man in den Würfel ein Tetraeder geeignet einzeichnet.

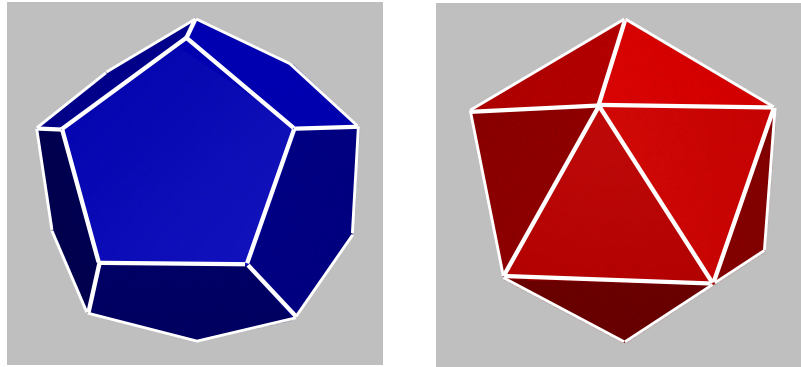


Figur 3.3

<sup>1</sup>Ekkehard Neumann: O.T. (Platonische Körper). Foto: Zumthie, de.wikipedia, [http:// commons.wikimedia.org/wiki/ File: Platonische\\_Koerper\\_im\\_Bagno.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platonische_Koerper_im_Bagno.jpg)

Da Würfel und Oktaeder bzw. Dodekaeder und Ikosaeder „dual“ zueinander sind, sind ihre Symmetriegruppen jeweils identisch. Für das Ikosaeder  $I$  erhält man die Gruppe

$$\text{Sym } I = \mathfrak{A}_5 .$$



Figur 3.4

Die überraschende Einsicht, daß  $\text{Sym } I$  als eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_5$  realisiert werden kann, ist geometrisch darin begründet, daß man in das Dodekaeder 5 Würfel legen kann, deren Kanten Diagonalen der Dodekaeder-Flächen sind und die unter Symmetrien des Dodekaeders untereinander permutiert werden. Die Konstruktion des Dodekaeders aus einem dieser Würfel mit Zirkel und Lineal ist der Höhepunkt von Euklids *Elementen*.

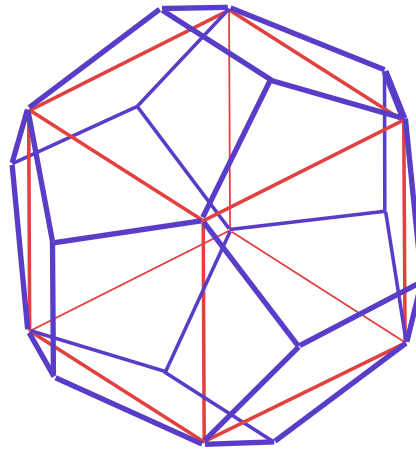


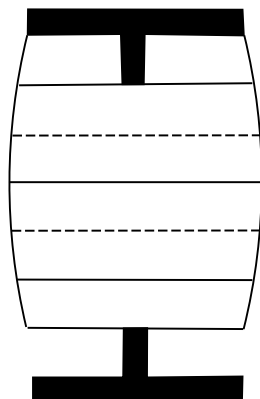
Figure 3.5

## 4 Die Teufelstonne

Da wir sehr schnell einsehen werden, daß der sogenannten „Teufelstonne“ nichts Teuflisches eigen ist, werden wir sie ganz profan *die Tonne* nennen. Wir vereinbaren, daß unter einem (möglichen) *Muster* der Tonne jede Anordnung der 23 Kugeln in der Tonne verstehen wollen, die durch willkürliche Bewegungen der oberen und *unteren* Scheibe bei „hängender“ bzw. „angehobener“ Hebevorrichtung („Lift“) aus dem Ausgangszustand entstehen kann. Nach Abschluß solcher Drehungen soll der Lift stets wieder im unteren



Zustand angelangt sein. Ein Muster liegt also nur dann vor, wenn die Tonne von Weitem gesehen die folgende Gestalt hat:



Figur 4.1

Zwei Muster heißen gleich, wenn sich an gleichen Plätzen gleichfarbige Kugeln befinden. Offenbar läßt sich ein Muster hierdurch eindeutig charakterisieren, daß man angibt, welche Farben den 23 Kästchen des folgenden Symbols (der „aufgeschnittenen“ Tonne) zugeordnet sind. Im Grundzustand liegen in den ausgezeichneten unteren drei Kästchen schwarze Kugeln, in den restlichen „Säulen“ von je 4 Kästchen liegen jeweils Kugeln der gleichen (von schwarz verschiedenen) Farbe, für jede Säule eine andere.<sup>2</sup>



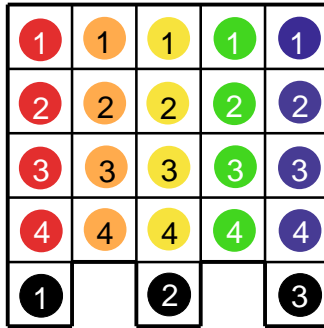
Figur 4.2

Wir denken uns die Kästchen irgendwie, aber fest numeriert, legen aber die Positionen 1, 2 und 3 wie in der Abbildung fest.

Eine gewisse Schwierigkeit bei der Behandlung der Tonne liegt darin begründet, daß das Ausgangsmuster wieder erscheinen kann, ohne daß alle 23 Kugeln wieder an ihren ursprünglichen Platz zurückgekehrt sind. Mathematisch bedeutet dies, daß bei unserer Definition des Musters gleichfarbige Kugeln identifiziert werden, die Kugeln also keine Menge im Cantorschen Sinne bilden.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, denken wir uns die Kugeln einer Farbe abgestuft in vier verschiedenen Tönen (bzw. drei verschiedenen Grautönen bei den „schwarzen“) gefärbt oder in anderer Weise unterscheidbar gekennzeichnet und haben es dann auch im mathematischen Sinne mit einer Menge von 23 (wohlunterschiedenen!) Farbtönen zu tun.

<sup>2</sup>Die „Reihenfolge“ der Farben ist jedoch nicht festgelegt. Wenn dies notwendig ist, ordnen wir sie von links nach rechts im Sinne des Regenbogens: rot, orange, gelb, grün, blau. Man kann auch nicht feststellen, ob die Tonne irgendwann „umgekippt“ wurde.



Figur 4.3

Wir untersuchen zunächst die Theorie dieser „Supertonne“ (die es tatsächlich auch zu kaufen gibt mit der Einschränkung, daß die schwarzen Kugeln weiterhin ununterscheidbar sind) und berechnen daraus die Anzahl der Muster der Tonne selbst.

Bei der Supertonne können wir uns auch die Kugeln mit den Zahlen 1 bis 23 durchnummeriert denken; da die Kugel  $j$  aber von der Position  $j$  zu unterscheiden ist, bezeichnen wir die Kugel mit  $\bar{j}$ . Also ist die Menge der Positionen gegeben durch

$$P = \{1, 2, 3, \dots, 22, 23\},$$

die der Kugeln in der Supertonne durch

$$K = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{22}, \bar{23}\}.$$

Ein *Muster* ist dann nichts anderes als eine bijektive Abbildung

$$m : K \longrightarrow P,$$

die angibt, daß sich die Kugel  $\bar{j}$  in der Position  $m(\bar{j})$  befindet. Die Gesamtheit aller bijektiven Abbildungen  $K \longrightarrow P$  kann man als die Menge  $M$  aller *denkbaren* Muster bezeichnen (sie würden auf jeden Fall alle entstehen, wenn man die Kugeln aus ihren Fächern herausnehmen und wieder beliebig einordnen könnte). Damit gibt es genau  $23!$  denkbare Muster. Als Folgerung erhalten wir hieraus:

**Satz 4.1** *Auf der Supertonne (und damit erst recht auf der Tonne) können höchstens  $23!$  Muster erzeugt werden.*

Wir müssen jetzt die erlaubten Spielzüge etwas genauer untersuchen. Hintereinanderausführung von Spielzügen wollen wir nach Ch. Bandelow ein *Manöver* nennen (wir schreiben wieder die Hintereinanderschaltung von links nach rechts). Ein solches Manöver bewirkt eine Veränderung der Muster, aber unabhängig vom zufällig vorhandenen Muster: ein Manöver bewirkt, daß eine Kugel in der Position  $j$  an eine andere wohlbestimmte Position gelangt, ohne zu berücksichtigen, welche Kugel sich in der Position  $j$  befunden hat. Wir haben also eine Abbildung

$$M := \{\text{Manöver}\} \longrightarrow \text{Aut } P,$$

und  $\text{Aut } P$  identifizieren wir mit der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_{23}$ .

Offenbar induziert die Hintereinanderausführung von Manövern die Hintereinanderschaltung der entsprechenden Permutationen. Jedes Manöver kann man auch rückgängig machen, und es gilt das Assoziativitätsgesetz für die Bilder der Manöver in  $\mathfrak{S}_{23}$ . Wir bezeichnen nun mit  $G_T$  die Menge der Permutationen aus  $\mathfrak{S}_{23}$ , die durch Manöver induziert werden. Nach dem bisher Gesagten folgt unmittelbar:

**Satz 4.2 (und Definition)**  $G_T$  ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_{23}$ . Sie heißt die Gruppe der Supertonne.

Sei nun  $m_0$  irgendein Muster. Wieviele Muster können sich daraus durch die erlaubten Manöver ergeben? Sei dazu  $m_0(\bar{j}) = i_{\bar{j}}$ , wobei

$$\{i_{\bar{j}} : j = 1, \dots, 23\} = P.$$

Ein Manöver  $\pi \in G_T$  bewirkt, daß sich die Kugel  $\bar{j}$  von der Stelle  $i_{\bar{j}}$  an die Stelle  $\pi(i_{\bar{j}})$  bewegt. Bezeichnen wir also mit  $m_0\pi$  das aus  $m_0$  entstehende Muster nach Anwendung des Manövers  $\pi$ , so ist dies nichts anderes als das durch Komposition gebildete Muster  $\pi \circ m_0$ :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{m_0} & P \\ & \searrow m_0\pi & \swarrow \pi \\ & & P \end{array}$$

Nun ist  $\pi \circ m_0 = \pi' \circ m_0$  wegen der Bijektivität von  $m_0$  genau dann, wenn  $\pi = \pi'$ . Wir haben somit die folgende wichtige Aussage bewiesen:

**Satz 4.3** Die durch  $\pi \mapsto m_0\pi$  definierte Abbildung

$$G_T \mapsto \{m \in M : \text{es gibt ein } \pi \in G_T, \text{ so daß } m = m_0\pi\} =: O(m_0)$$

ist bijektiv.

*Bemerkung.*  $O(m_0)$  heißt aus ersichtlichen Gründen die *Bahn* (der „orbit“) des Elementes  $m_0 \in M$  unter der Aktion der Gruppe  $G_T$ . Sie besteht aus allen Mustern, die aus  $m_0$  durch erlaubte Manöver erzeugt werden können. Für zwei Elemente  $m_1, m_2 \in M$  gilt entweder  $O(m_1) \cap O(m_2) = \emptyset$ , oder es ist  $O(m_1) = O(m_2)$ . Die denkbaren Muster zerfallen also in elementfremde Klassen von Bahnen, von denen genau eine die Menge der *möglichen* Muster ist. Die Anzahl der möglichen Muster ist daher die Ordnung der Gruppe  $G_T$ .

*Aufgabe.* Beweise die oben formulierte Aussage für die Bahnen  $O(m)$ .

Der folgende Satz liefert im Beweis auch ein Verfahren zur „Wiederherstellung“ der Tonne.

**Satz 4.4** Identifiziert man  $\text{Aut } P$  mit der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_{23}$ , so ist  $G_T$  die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_{23}$ .

**Folgerung 4.5** Auf der Supertonne gibt es

$$\frac{1}{2} (23!)$$

mögliche Muster.

Bevor wir den Satz beweisen, ziehen wir noch die Konsequenz für die Tonne selbst.

**Folgerung 4.6** Auf der Tonne gibt es

$$\frac{23!}{3!(4!)^5} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 541.111.756.185.000$$

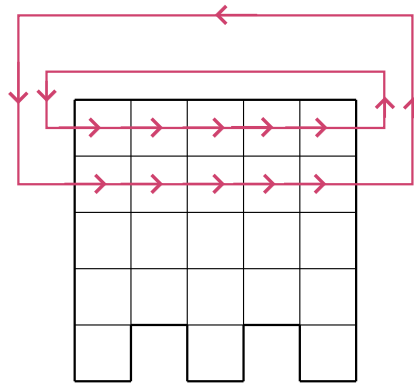
mögliche Muster.

*Beweis* Folgerung 4.6. Satz 4 besagt nichts anderes, als daß auf der Supertonne genau diejenigen Muster entstehen, die auch durch gerade Anzahlen von Transpositionen erzeugt werden können. Bei der Tonne kann man hinter eine solche Anzahl von Transpositionen aber noch eine weitere Transposition in Gedanken schalten, ohne das entstandene Muster zu verändern (nämlich die Transposition von zwei gleichfarbigen Kugeln). Also erhält man alle Muster auch dadurch, daß man alle Permutationen der  $\mathfrak{S}_{23}$  zuläßt. Von diesen  $23!$  Permutationen liefern aber stets einige das gleiche Muster: Man kann z. B. bei einer festen Permutation die 4 roten Kugeln unter sich vertauschen, ohne das Muster zu ändern. Somit hat man  $23!$  durch  $4!$  zu teilen, und entsprechend ist für die restlichen Farben zu verfahren.  $\square$

Nun zum *Beweis* von Satz 4. Welche Operationen, d.h. welche Permutationen werden durch die erlaubten Manöver erzeugt? Offensichtlich setzt sich jedes Manöver zusammen aus den folgenden Zügen:

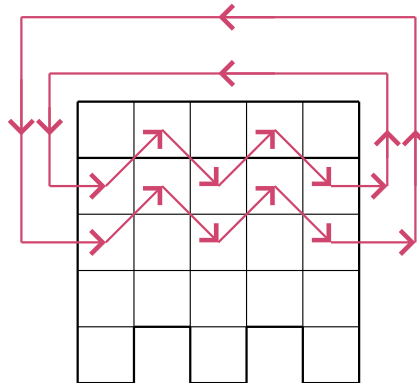
- $o$  Drehen der oberen Scheibe „um Eins“ nach rechts,
- $u$  Drehen der unteren Scheibe „um Eins“ nach rechts,
- $\tilde{o}$  Lift nach oben, dann  $o$ , dann Lift nach unten,
- $\tilde{u}$  Lift nach oben, dann  $u$ , dann Lift nach unten,

und den „Inversen“ von  $o$ ,  $u$ ,  $\tilde{o}$  und  $\tilde{u}$ , die wir als „gestrichene“ Größen notieren:  $o'$ ,  $\tilde{u}'$ , etc.<sup>3</sup> Das Manöver  $o$  bewirkt die folgende Permutation:



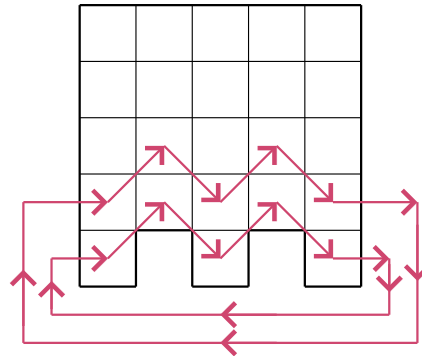
Figur 4.4

ist also das Produkt von 2 elementfremden 5er-Zyklen und damit eine gerade Permutation. Entsprechendes gilt auch für  $u$ . Die Wirkung von  $\tilde{o}$  und  $\tilde{u}$  kann man wie folgt veranschaulichen:



Figur 4.5

<sup>3</sup>Bilden wir erst  $o$  und dann  $o'$ , so haben wir ja durchaus etwas „getan“, aber bzgl. des Musters nichts „bewirkt“. Siehe auch Abschnitt 6.



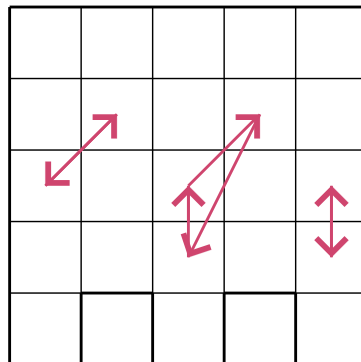
Figur 4.6

Da dies alles *gerade* Permutationen sind, folgt schon  $G_T \subset \mathfrak{A}_{23}$ . Wegen Satz 3.7 braucht man jetzt nur noch zu zeigen: Jede Permutation  $(12j)$ ,  $j = 3, \dots, 23$ , ist in  $G_T$  enthalten.

Dazu betrachten wir das Manöver

$$\alpha = \tilde{u}' u \tilde{o}' o u' \tilde{u} o' \tilde{o},$$

das folgende Permutation induziert<sup>4</sup>:



Figur 4.7

Folglich ist  $\alpha^2 = (123)$ .

Als nächstes zeigen wir, daß es zu jedem  $j \notin \{1, 2, 3\}$  eine Permutation  $\gamma_j \in G_T$  gibt mit

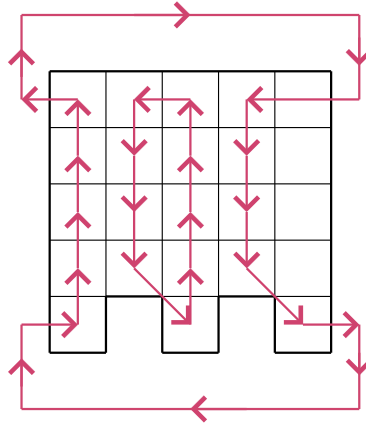
$$\gamma_j(1) = 1, \gamma_j(2) = 2, \gamma_j(j) = 3.$$

Dies ist offensichtlich richtig für alle  $j$ , die auf derselben „Höhe“ wie die Position 3 liegen (man braucht dann nur eine geeignete Potenz von  $o$  anzuwenden). Für die anderen Fälle betrachte man die Operation von

$$\beta := \tilde{o} \tilde{u}' o',$$

die folgende Permutation induziert:

<sup>4</sup>Der Autor hält die Tonne mit der rechten Hand mittels Daumen und Mittelfinger an dem unteren, nicht drehbaren Rand des durchsichtigen Tonnenkörpers, bedient den Lift nach oben mit dem kleinen und Ringfinger und dreht die beiden Scheiben mit der linken Hand. Für ausgesprochene Rechtshänder könnte dies zu Problemen beim konkreten Durchführen der angegebenen Manöver führen. Es ist also zu empfehlen, daß man dann die „spiegelbildlichen“ Operationen anwendet. Siehe auch Fußnote 5.



Figur 4.8

Wende dann zunächst  $u^2$  an. Nach einer geeigneten Potenz von  $\beta$  landet dann jedes andere  $j$  auf derselben Höhe wie Position 3. Nach einer geeigneten Potenz von  $o$  und anschließendem  $u^2$  hat man  $\gamma_j$  konstruiert.

Der Beweis des Satzes vollendet sich damit, daß man  $\alpha^2$  mit  $\gamma_j$  „konjugiert“; d. h. man bildet mit offensichtlicher Bedeutung von  $\gamma'_j$

$$\pi_j := \gamma_j \alpha^2 \gamma'_j.$$

Für diese Permutation  $\pi_j$  gilt:

$$\begin{aligned} \pi_j(1) &= \gamma'_j(\alpha^2(\gamma_j(1))) = \gamma'_j(\alpha^2(1)) = \gamma'_j(2) = 2, \\ \pi_j(2) &= \gamma'_j(\alpha^2(\gamma_j(2))) = \gamma'_j(\alpha^2(2)) = \gamma'_j(3) = j, \\ \pi_j(j) &= \gamma'_j(\alpha^2(\gamma_j(j))) = \gamma'_j(\alpha^2(3)) = \gamma'_j(1) = 1. \end{aligned}$$

Für die anderen  $k \neq 1, 2, j$  ist  $\gamma_j(k) \neq 1, 2, 3$  und damit  $\alpha^2(\gamma_j)(k) = \gamma_j(k)$ . Es folgt für diese  $k$

$$\pi_j(k) = \gamma'_j(\gamma_j(k)) = k$$

und damit

$$\pi_j = (12j). \quad \square$$

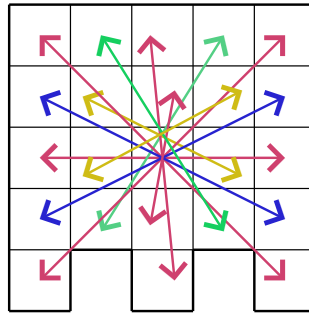
*Bemerkung.* Der soeben verwendete Prozeß des *Konjugierens*, d. h. des Übergangs von einem Gruppenelement  $g$ ,  $g \in G$ , zu einem Gruppenelement der Form  $h^{-1}gh$  mit einem anderen Element  $h \in G$ , spielt bei der konkreten Lösung unserer mathematischen Puzzles eine wichtige Rolle. Außerdem wird dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, daß die interessanten Manöver (wie z. B.  $\alpha$ ) in versteckter Form *Kommutatoren* enthalten: Bezeichnet man mit  $\lambda$  den Prozeß des „Liftens“ des Tonnenkörpers, so ist z. B.  $\tilde{o} = \lambda o \lambda'$ , und damit wirkt das Manöver

$$o' \tilde{o} = o' \lambda o \lambda'$$

wie ein Kommutator auf den Mustern. Ein wenig mehr über das Konjugieren und Kommutieren sagen wir am Ende des allgemeinen Abschnitts 6.

Zum Schluß sollte nicht unerwähnt bleiben, daß der vorstehende Algorithmus zur „Wiederherstellung“ der Tonne nicht sehr effektiv ist, da er insbesondere nicht die Ununterscheidbarkeit der Kugeln gleicher Farbe ausnutzt. Manchmal kann auch das „Umkippen“ der Tonne schneller zum Ziele führen, eines Manövers, das wir bisher nicht zugelassen hatten. Die Hinzunahme dieses Manövers liefert aber nichts Neues für die Tonne.

*Aufgabe.* Zeichne die Operation des „Umkippens“ in das Diagramm der aufgeschnittenen Tonne ein. Welche Konsequenz hat dieses Manöver für die Theorie der Supertonne?



Figur 4.9

## 5 Rubik's Würfel

Da es zum „Zauberwürfel“ sehr gute Literatur gibt (siehe das Literaturverzeichnis), werden wir uns in diesem Abschnitt relativ knapp fassen. Wir halten wie bei der Tonne die Sprechweisen „Manöver“, „Operation“, „Muster“ etc. bei und überlegen uns zunächst, was die „denkbaren Muster“ auf dem „Würfel“ sind (wir folgen auch hier dem Gebrauch des vorigen Paragraphen, obwohl der „Würfel“ mathematisch viel interessanter als die „Tonne“ ist). Alle denkbaren Muster entstehen auf die folgende Weise: Wir nehmen den Würfel (in Gedanken oder tatsächlich) völlig auseinander und erhalten so 8 Eckenkubies mit jeweils 3 verschieden gefärbten Flächen und 12 Kantenkubies mit jeweils 2 verschieden gefärbten Flächen. Diese 20 Kubies sind wohlunterscheidbar und bilden daher die Elemente einer Menge. Die 6 Flächenkubies mit nur einer gefärbten Fläche sind drehbar an einem starren Achsenkreuz befestigt und können ihre Lage zueinander nicht verändern; Drehungen der Außenscheiben verändern nicht das Aussehen der Flächenkubies. Wir halten daher das Achsenkreuz im Raume fest und brauchen uns dann um die Flächenkubies nicht mehr zu kümmern (anders ausgedrückt: Wir sehen zwei Muster als gleich an, wenn sie unter einer der 24 Symmetriebewegungen des „starrten Würfels“ ineinander überführt werden können).

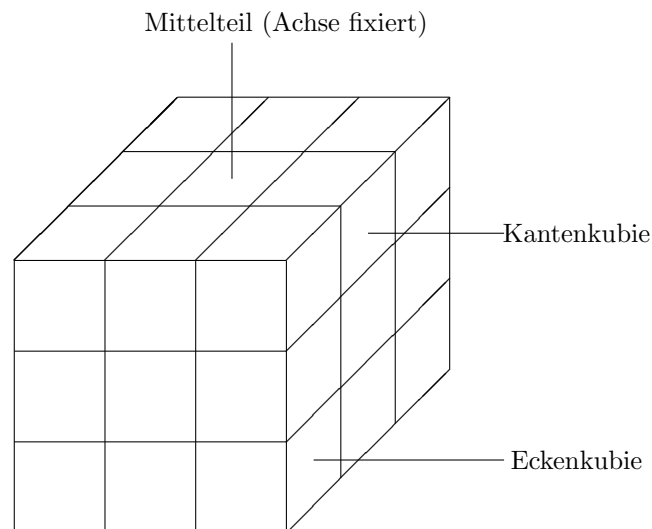
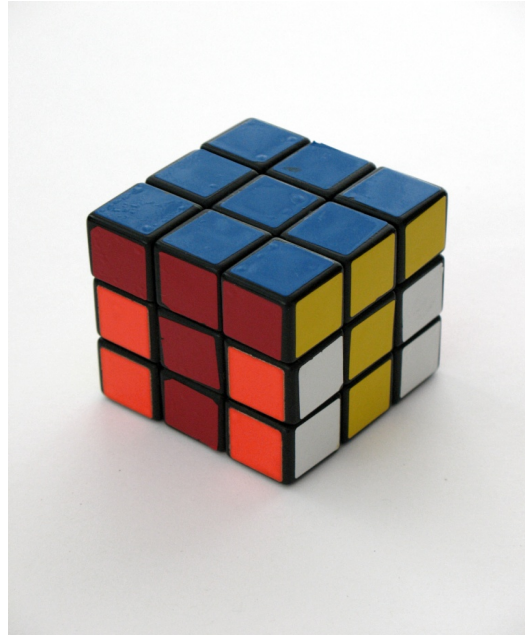


Figure 5.1



Figur 5.2

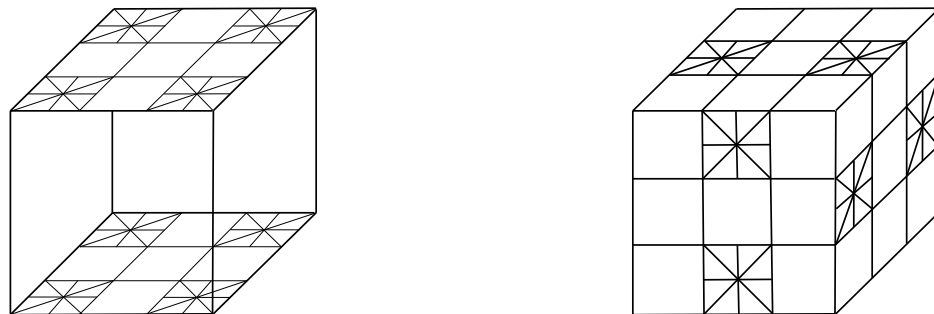
Wir bauen anschließend den Würfel „irgendwie“ wieder zusammen. Dazu nimmt man einen Eckenkubie und setzt ihn an einen der Eckenkubieplätze. Dafür gibt es zunächst 8 Möglichkeiten; die wahre Position ist aber dadurch noch nicht festgelegt, da der Eckenkubie an jedem möglichen Platz noch 3 verschiedene „Orientierungen“ bzgl. des Achsenkreuzes einnehmen kann. Also kann der erste Eckenkubie  $3 \cdot 8$  Positionen einnehmen; der zweite kann dann jeweils noch  $3 \cdot 7$  einnehmen etc. Für die Kantenkubies kann man entsprechend argumentieren: der erste kann  $2 \cdot 12$ , der zweite  $2 \cdot 11$  einnehmen etc.

**Satz 5.1** *Auf dem Würfel gibt es höchstens*

$$3^8 8! 2^{12} 12! = 519.024.039.293.878.272.000$$

*Muster.*

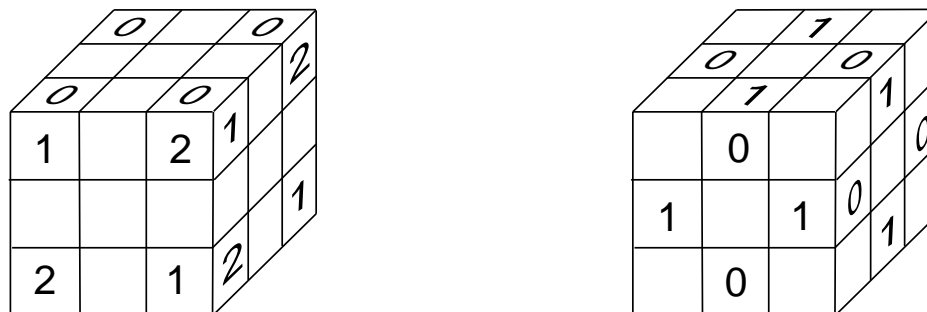
Um eine genaue Bezeichnung der Positionen zu haben, kann man wie folgt vorgehen (wir zitieren sinngemäß aus dem Artikel von Bandelow): Zur Charakterisierung der Lagen denken wir uns an jeder der 8 Ecken eine der drei Flächen und an jeder der 12 Kanten eine der beiden Flächen markiert wie in der folgenden Zeichnung:



Figur 5.3



Die Markierungen seien an einer fiktiven durchsichtigen Hülle um den Würfel angebracht, die bei Scheibendrehungen nicht mitgenommen wird. Im Ausgangszustand des Würfels können wir nun die drei farbigen Flächen eines jeden Eckenkubies im Urzeigersinn in zyklischer Reihenfolge mit den Zahlen 0, 1 und 2 so beschriften, daß die markierte Seite die Zahl 0 erhält. Die beiden farbigen Flächen eines jeden Kantenkubies werden so mit 0 und 1 beschriftet, daß die markierte Fläche die Zahl 0 erhält.



Figur 5.4

Numeriert man nun die Eckenkubies mit 1 bis 8, ihre möglichen Plätze ebenfalls mit 1 bis 8, die Kantenkubies und ihre Plätze entsprechend mit 1 bis 12 (wir nehmen jetzt nicht mehr die genaue Unterscheidung vor zwischen Kubienummer und Platznummer wie im vorigen Abschnitt), so ist ein (mögliches) Muster bestimmt durch einen Ausdruck

$$(\rho, \sigma, x, y),$$

wobei

$$\rho \in \mathfrak{S}_8, \sigma \in \mathfrak{S}_{12}, x = (x_1, \dots, x_8), x_i \in \{0, 1, 2\}, y = (y_1, \dots, y_{12}), y_j \in \{y_1, y_2\} :$$

Für festes  $i$  mit  $1 \leq i \leq 8$  ist der Eckenkubie mit Ziffer  $\rho(i)$  am Platz  $i$  und seine mit  $x_i$  bezeichnete Fläche stimmt mit der \*-Fläche der fiktiven Hülle überein; für festes  $j$  mit  $1 \leq j \leq 12$  ist der Kantenkubie mit Ziffer  $\sigma(j)$  am Platz  $j$  und seine mit  $y_j$  bezeichnete Fläche stimmt mit der \*-Fläche der fiktiven Hülle überein.

Nun ist klar, daß jedes Manöver sich aus Drehungen der Scheiben (jeweils im Uhrzeigersinn um 90 Grad bei senkrechter Sicht auf die Scheibe von außerhalb des Würfels) *oben* ( $o$ ), *unten* ( $u$ ), *rechts* ( $r$ ), *links* ( $\ell$ ), *vorn* ( $v$ ) und *hinten* ( $h$ ) und deren Inversen zusammensetzt. Alle diese Manöver erzeugen auf  $\rho$  und  $\sigma$  offensichtlich nur eine Hinterschaltung eines Viererzyklus, d. h. einer ungeraden Permutation. Folglich gilt (da wir im „Grundzustand“  $\rho = \text{id}$ ,  $\sigma = \text{id}$  annehmen können):

**Satz 5.2**  $\rho$  und  $\sigma$  sind entweder beide gerade oder beide ungerade Permutationen.

D. h. man kann durch erlaubte Manöver keine zwei Eckenkubies vertauschen ohne gleichzeitig Kantenkubies zu vertauschen und umgekehrt. Folglich ist höchstens die Hälfte der in Satz 1 genannten Zahl als Muster realisierbar. Doch auch diese Zahl ist noch zu groß. Man macht sich nämlich sofort klar, daß der folgende Satz richtig ist.

**Satz 5.3**  $\sum_{i=1}^8 x_i$  ist stets durch 3,  $\sum_{j=1}^{12} y_j$  stets durch 2 teilbar.

*Beweis.* Dies gilt nämlich im Grundzustand und bleibt richtig bei jeder der erzeugenden Scheibendrehungen. Z. B. steigt die Summe der  $x_i$  beim Drehen der rechten Scheibe im Uhrzeigersinn bei zwei Kubies um 2 oder fällt um 1, und bei den zwei anderen Kubies steigt die Anzahl um 1 oder fällt um 2. Man diskutiert alle Fälle durch und findet, daß sich die Summe der  $x_i$  nur um ein Vielfaches von 3 additiv

verändern kann, also weiterhin durch 3 teilbar bleibt. (Am besten rechnet man mit den ganzen Zahlen „modulo“ 3, d. h. man sieht zwei ganze Zahlen als gleich an, wenn ihre Differenz in  $\mathbb{Z}$  durch 3 teilbar ist. Diese ganzen Zahlen modulo 3 bilden eine Gruppe; es gilt  $-1 = 2$ ,  $-2 = 1$ , und die totale Änderung der Summe der  $x_i$  modulo 3 ist bei der oben besprochenen Drehung  $2 + 2 + 1 + 1 = 3 + 3 = 0$ ). Ganz entsprechend verfährt man mit der Summe der  $y_j$ .  $\square$

*Bemerkung.* Satz 3 besagt, daß durch die Orientierung von 7 Eckenkubies die Orientierung des 8. festgelegt ist. Entsprechendes gilt für die Kantenkubies, so daß die Anzahl der denkbaren Muster noch einmal durch  $2 \cdot 3$  zu dividieren ist. Dies ergibt dann tatsächlich die korrekte Anzahl:

**Satz 5.4** *Auf Rubiks Würfel gibt es genau*

$$N_3 := \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43.252.003.274.489.856.000$$

*Muster.*

*Bemerkung\**. Es ist amüsant und lehrreich, diese Anzahl von ca.  $4,3 \cdot 10^{19}$  mit anderen großen Zahlen zu vergleichen.

1. So ist die Anzahl der Reiskörner, die man erhält, wenn man auf das erste Feld eines Schachbretts 1 Korn legt, auf das zweite  $2 = 2^1$ , auf das dritte  $2^2 = 4$  etc., gleich

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{64} = 2^{65} - 1,$$

und diese Zahl ist ungefähr gleich

$$3,7 \cdot 10^{19}.$$

2. Die Anzahl der Moleküle in einem Kubikzentimeter Luft unter Normalbedingungen beträgt etwa

$$2,7 \cdot 10^{19}.$$

3. Die Erdoberfläche ist (bei angenommener exakter Kugelgestalt bei einem Radius von 6.370 km) von der Größe 510 Millionen Quadratkilometer, also ca.  $51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$ . Der „Normalwürfel“ hat eine Kantenlänge von 5,75 cm und damit eine Grundfläche von ca.  $33,0625 \text{ cm}^2$ . Damit wird die Erdoberfläche vollständig überdeckt von etwa

$$1,542.533 \cdot 10^{17}$$

Würfeln. Stellt man nun so viele Würfel her, daß man auf ihnen exakt alle verschiedenen Muster realisieren kann (wobei wir nicht unterscheiden wollen zwischen Würfelmustern, die durch Drehungen im Raum zur Deckung gebracht werden können) und verteilt diese gleichmäßig über die Erdoberfläche, so überdecken diese

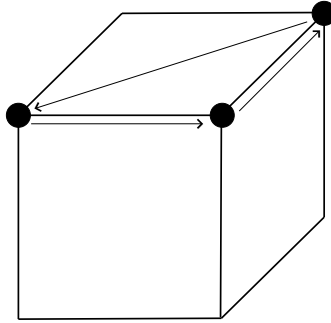
$$\frac{4,3}{24 \cdot 1,54} 10^{19-17} = 11,634 \text{ mal}$$

die Erdoberfläche, bilden also eine Schicht von ca. 67 cm.!

4. Das Erdalter von etwa 4,5 Milliarden Jahren entspricht einer Spanne von  $1,42 \cdot 10^{17}$  Sekunden. Ein Computer hätte also mehr als 10 Muster pro Sekunde seit Anbeginn der Existenz der Erde anzeigen müssen, um bis heute alle zu „erwischen“.

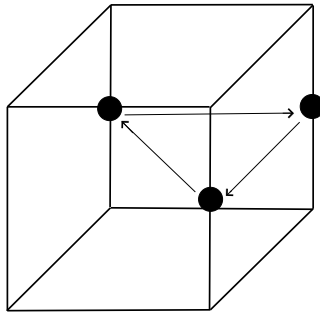
*Aufgabe.* Beweise Satz 4 unter der Annahme, daß es Manöver gibt, die folgende Positionsveränderungen bewirken:

1. Zyklische Vertauschung von drei Eckenkubies auf der oberen Scheibe, alle anderen Ecken- und Kantenkubies bleiben auf ihrem Platz (können aber ihre Orientierung verändern).



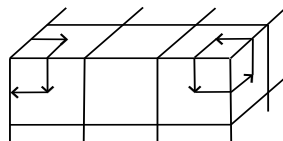
Figur 5.5

2. Zyklische Vertauschung von drei Kantenkubies wie in der folgenden Zeichnung, alle anderen Kubies bleiben an ihrem Platz, können aber ihre Orientierung verändern.



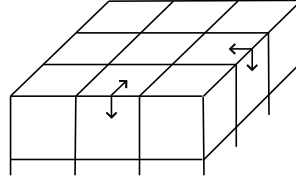
Figur 5.6

3. Rotation zweier „benachbarter“ Eckenkubies um 120 bzw. 240 Grad, wobei alle anderen Eckenkubies an ihrem Platz bleiben und ihre Orientierung nicht ändern.



Figur 5.7

4. „Umklappen zweier „benachbarter“ Kantenkubies bei Beibehaltung der Plätze und Orientierung aller anderen Kubies.



Figur 5.8

*Bemerkung.* Man kann die vier obigen Manöver tatsächlich angeben, so daß Satz 4 mit den vorigen Überlegungen auch bewiesen ist (mit  $r, o, v, \ell, u, h$  etc. werden die Drehungen um 90 Grad der rechten, oberen, vorderen, linken, unteren, hinteren Scheibe im Uhrzeigersinn bei Draufsicht auf die Scheibe, mit den gestrichenen Größen die entsprechenden Drehungen gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet).<sup>5</sup>

1.:  $v' o' h' o v' o' h o$ .

2.:  $r^2 u o' h^2 o u'$ .

3.:  $v o u' \ell^2 o^2 u^2 r o r' u^2 o^2 \ell^2 u o' v' o'$ .

4.:  $v' u v \ell u \ell' o \ell u' \ell' v' o' v o'$ .

*Aufgabe\*.* Man beweise, daß die Anzahl der zulässigen Muster auf dem  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel den Wert

$$N_2 := \frac{1}{24} 8! 3^7 = 3.674.160$$

besitzt.

Hinweise: Man macht sich unmittelbar klar, daß der  $2^3$ -Würfel ein „Unterproblem“ von Rubiks Würfel darstellt, wenn man sich beim letzteren nur auf die Muster der Eckenkubies konzentriert und die Kantenkubies einfach ignoriert. Eine Besonderheit des  $2^3$ -Würfels besteht darin, daß er keine Flächenkubies besitzt und damit die Verteilung der Farben nicht a priori relativ zu einem Achsenkreuz festgelegt ist. Dennoch besteht hierin überhaupt kein Problem: Man startet mit einem Eckenkubie und hält diesen an einer Stelle im Raum fest; die Lagen der anderen sind hierdurch eindeutig festgelegt. Der Faktor  $1/24$  rührt dann wieder daher, daß der erste Kubie gemäß der Symmetriegruppe des Würfels 24 verschiedene Stellungen einnehmen kann. Die Aufgabe nach Satz 4 beinhaltet selbstverständlich einen (nicht unbedingt sehr schnellen) Algorithmus zur Lösung des  $3 \times 3 \times 3$ -Würfels. Zur Lösung des  $2^3$ -Würfels gibt es allerdings noch wesentlich schnellere „Manöver. Will man nämlich zwei Eckenkubies an einer Kante in der oberen Schicht so vertauschen, daß die beiden anderen in der Schicht an ihrem Platz bleiben und die untere Schicht völlig ungeändert bleibt, so erfordert dies mit dem obigen Algorithmus einen recht großen Aufwand, da man zuerst in der oberen Schicht eine 90-Grad Drehung vornehmen müßte, um die richtige Parität zu erhalten, bevor man einen Dreierzyklus dahinter schaltet (in Zykelschreibweise:  $(1432)(234) = (12)$ ). Ein schnelleres Manöver, das nur zwei Kubies an einer Kante in der oberen Schicht vertauscht (und die untere samt Orientierung festhält) ist

$$v r' v' r o^2 r o^2 r' o.$$

<sup>5</sup>Wie mir von Freunden und Kollegen mitgeteilt wurde, scheint die konkrete Ausführung der angegebenen Manöver Schwierigkeiten zu bereiten, wenn man den Würfel in der linken Hand hält. Als „verkappter“ Linkshänder dreht der Autor den Würfel meistens mit Links und hält ihn vorwiegend in der rechten Hand. Will man diesem Umstand Rechnung tragen, muß der Leser natürlich nur alle Operationen spiegeln.

Ebenso gibt es eine ähnliches Manöver, das zwei „diagonale“ Kubies in der oberen Schicht vertauscht:

$$ovr or' o'v'.$$

*Bemerkung.* Bei dem „Herzchen–Würfel“ muß auch noch die Orientierung der einzig sichtbaren Flächen der Flächenkubies kontrolliert werden. Dies liefert a priori  $6^4$ -mal mehr denkbare Muster als beim „normalen“ Würfel. Man kann sich aber leicht ähnlich wie beim Würfel klarmachen, daß nur die Hälfte davon möglicherweise realisierbar sind. Tatsächlich kommen alle vor, da es ein Manöver gibt, das exakt einen Flächenkubie um 160 Grad, bzw. ein anderes, das zwei solche um jeweils 90 Grad dreht.

*Bemerkung*<sup>6</sup>. Zum Abschluß wollen wir uns mit einer erstaunlich kleinen Zahl beschäftigen: Welches ist die kleinste Anzahl von Zügen, mit der man jedes vorgegebene Muster aus dem Grundmuster erzeugen bzw. den Würfel „lösen“ kann? Durch achtloses Spielen mit Rubiks Würfel stellt man sehr schnell fest, daß nur wenige Verdrehungen genügen, um ein ziemliches Chaos zu erzeugen. Dieses aufzulösen bedarf es dann im allgemeinen einer viel größeren Anzahl von Drehungen, da man beim Lösen einer Strategie folgt, die in gewissem Sinne die „Ordnung“ schrittweise vergrößert ohne zu wissen, wie die Unordnung erzeugt wurde. Bei den ersten veröffentlichten Lösungsalgorithmen lag die Anzahl der benötigten Züge bei ca. 60 (größenordnungsmäßig gilt dies auch für den oben angedeuteten Algorithmus), und diese Zahl wurde nur langsam um wenig nach unten verbessert. Bei den ersten Weltmeisterschaften erhielten die Teilnehmer verschiedene Würfel, die mit 40 Zügen verdreht worden waren.

Auf der anderen Seite kann man mit einfachen Mitteln zeigen, daß keine Strategie mit weniger als 18 Zügen auskommen kann. Wir wollen dies hier kurz zeigen, wobei wir gleich die Fragestellung präzisieren können. Wir benutzen unsere Schreibweise von Manövern als Grundlage und nennen diese auch *Wörter*, wie es in der Theorie der endlich erzeugten Gruppen üblich ist. Hierbei ist das Wort der Länge 0 das sogenannte „leere“ Wort, das schlicht andeutet, daß wir nichts tun. Haben wir ein Wort der Länge  $k$ , so erhalten wir ein Wort der Länge  $k + 1$ , indem wir einen Buchstaben  $x, x^2$  oder  $x^{-1}$  rechts an dieses Wort anhängen, wobei  $x$  aus dem Buchstabenvorrat

$$B := \{r, \ell, o, u, v, h\}$$

stammt. Endet das Wort der Länge  $k$  mit  $y, y^2$  oder  $y^{-1}$ , so können wir beim nächsten Schritt verlangen, daß  $x \neq y$ , denn es ist ja  $x^2x^2, xx^{-1}$  und  $x^{-1}x$  „gleichwertig“ mit dem leeren Wort und kann daher fortgelassen werden, da es das Muster nicht ändert, Wir kommen daher bei höchstens  $k$  „Drehungen“ auf

$$A_k := 1 + 3 \cdot 6 + (3 \cdot 6)(3 \cdot 5) + (3 \cdot 6)(3 \cdot 5)^2 + \dots + (3 \cdot 6)(3 \cdot 5)^{k-1}$$

Wörter der Länge  $\leq k$  und damit auf maximal so viele verschiedene Muster (verschiedene Wörter können immer noch gleiche Muster erzeugen). Ist die Anzahl  $A_k$  kleiner als die Anzahl der Muster, so können wir also mit  $k$  Drehungen auf keinen Fall alle Muster erzeugen. Somit ist eine notwendige Bedingung, daß  $A_k \geq N_3$ . Nun ist aber  $A_k$  der Anfang einer geometrischen Reihe und damit leicht in geschlossener Form darstellbar:

$$A_k = 1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot 15^2 + \dots + 18 \cdot 15^{k-1} = 1 + 18 \cdot (15^k - 1) / 14,$$

und diese Zahl wird größer als  $N_3$  von  $k = 18$  ab.

1992 gab Dirk T. Winter ein sehr schönes Muster an (alle Kubies am richtigen Platz, die Eckenkubies richtig orientiert, die Kantenkubies alle „geflippt“), das in 20 Zügen erzeugt werden kann, und 1995 zeigte Michael Reid, daß dies die minimal mögliche Anzahl ist. Die von uns gesuchte Anzahl ist also nicht nur  $\geq 18$ , sondern auf jeden Fall  $\geq 20$ . Mit einem gerüttelten Maß von theoretischer Mathematik und ungeheurem Computereinsatz gelang schließlich Tomas Rokizki, Morley Davidson, John Dethridge und Herbert Kociemba im Jahre 2010 der Nachweis, daß jedes andere Muster höchstens 20 Züge benötigt.

<sup>6</sup>Hinzugefügt bei der Neuauflage im August 2013

## 6 Das abstrakte Problem

Wir wollen die Theorie der Supertonne und des Zauberwürfels zum Schluß noch in eine allgemeine Problemstellung einordnen.

Zunächst haben wir ein „Spielgerät“ vorliegen, das aus endlich vielen wohlunterschiedenen Teilen besteht, die somit eine endliche Menge  $T$  bilden. Diese können durch eine endliche Anzahl von „Spielzügen“ untereinander vertauscht werden. Dabei ist das Gerät so konstruiert, daß die Teile sich nur an endlich vielen Orten befinden und an diesen auch nur endlich viele Orientierungen im Raum annehmen können, was man an einer geeigneten Markierung der einzelnen Teile erkennen kann. Bezeichnet man also mit  $P$  die Menge der Orte, so gibt es eine endliche Menge  $\tilde{P}$  und eine surjektive Abbildung

$$\pi : \tilde{P} \longrightarrow P,$$

wobei die Menge  $\pi^{-1}(p)$  die Orientierungen bezeichnet, die ein Teilchen an der Stelle  $p$  annehmen kann. Damit kann man die Gesamtheit aller möglichen (theoretischen) „Zusammensetzungen“ des Spielgeräts als die *endliche* Menge aller Abbildungen

$$m : T \longrightarrow \tilde{P}$$

beschreiben, für die induzierte Abbildung  $\bar{\pi}$  in dem folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow \bar{\pi} & \searrow m & \\ & & \tilde{P} \\ & \nearrow \pi & \\ & & P \end{array}$$

bijektiv wird. Dann muß die Abbildung  $m$  notwendigerweise *injektiv* sein. Wir bezeichnen die endliche Menge  $M$  aller dieser Abbildungen die Menge der „möglichen Muster“ auf dem Spielgerät.

*Beispiele.* 1. Im Falle der Supertonne besteht  $T$  aus den 23 Kugeln, und  $\tilde{P} = P$  bezeichnet die Menge der Plätze in der Tonne.

2. Im Falle von Rubiks Würfel ist  $T$  die disjunkte Vereinigung der Mengen der Eckenkubies und der Kantenkubies,  $P$  ist die disjunkte Vereinigung der Ecken und Kantenmittelpunkte eines im Raume fixierten regulären Hexaeders, und  $\pi^{-1}(p)$  ist 3- bzw. 2-elementig, je nachdem  $p$  eine Ecke oder einen Kantenmittelpunkt bezeichnet.

Des weiteren haben wir die endlich vielen „erlaubten“ Spielzüge  $s_1, \dots, s_k$ ; im Falle der Supertonne die durch die Symbole  $o, u, \tilde{o}, \tilde{u}$  bezeichneten Operationen, im Falle des Würfels die Operationen  $o, u, r, l, v, h$  und die jeweils „gestrichenen“ Symbole. Diese induzieren wohlbestimmte Bijektionen der Mengen  $\tilde{P}$  und auch auf  $P$ , die mit der Projektion  $\pi$  „verträglich“ sind. Damit wird jedes Muster  $m : S \hookrightarrow \tilde{P}$  durch Verknüpfung von links mit einer solchen Bijektion wieder zu einem Muster.

Jedes „Manöver“ ist dann ein *Wort*

$$(*) \quad s_{i_1}^{\ell_1} \dots s_{i_m}^{\ell_m}$$

in dem *Alphabet*  $s_1, \dots, s_k$ . Diese Wörter bilden zusammen mit dem „leeren“ Wort  $\{\}$  mit der Verknüpfung des „Aneinanderhängens“ eine *Halbgruppe*  $H$ , also eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung  $H \times H \longrightarrow H$  und einem rechts- und linksneutralen Element (nämlich dem leeren Wort, das das Manöver „Nichtstun“ symbolisiert). Diese Halbgruppe operiert nun, wie oben dargelegt, auf den möglichen Mustern und faktorisiert damit über die Gruppe  $\tilde{G}$  aller möglichen Bijektionen von

$\tilde{P}$ . Das Bild  $G \subset \tilde{G}$  ist natürlich eine Unterhalbgruppe, dessen neutrales Element die Identität in  $\tilde{G}$  ist.  $G$  ist aber sogar eine Gruppe, da das Bild eines Wortes  $(*)$  als Inverses das Bild von

$$s_{i_m}^{\ell_m} \dots s_{i_1}^{\ell_1}$$

besitzt.

Diese Gruppe  $G$  operiert nun (von links) auf  $M$ , und es ist unsere jeweilige Aufgabe, die Bahnen dieser Operation auf  $M$  zu bestimmen. Insbesondere interessiert die Bahn eines „ausgezeichneten“ Musters  $m_0 \in M$  und die Frage, ob ein gegebenes Muster  $m$  in der Bahn von  $m_0$  liegt und wie man es dann (eventuell schnellstmöglich) nach  $m_0$  „manövrieren“ kann. Dabei hilft eine gewisse Kenntnis der abstrakten Theorie von Operationen von Gruppen auf endlichen Mengen, wie wir sie im folgenden Anhang kurz darstellen wollen. Das jeweilige Problem muß aber in jedem einzelnen Fall gesondert behandelt werden, wozu man „gute“ Züge oder Manöver finden muß. Hierbei nutzt man nun gerade aus, was im allgemeinen das Problem so schwierig und gleichzeitig so reizvoll macht: Die *Nichtkommutativität* der operierenden Gruppe  $G$ . Man untersucht also naheliegende nichttriviale Kommutatoren wie z. B.  $s\tilde{o}$  bei der Supertonne oder z. B.  $vr v' r'$  beim Würfel und findet durch geschicktes Zusammensetzen einige grundlegende Manöver, die durch Konjugation noch „verallgemeinert“ werden können. Hat man z. B. beim Würfel eine Operation gefunden, die zwei „benachbarte“ Eckenkubies verdreht, so kann man durch mehrfache Anwendung dieser Operation (den Würfel jeweils im Raum richtig orientiert) auch erreichen, daß zwei beliebige Kantenkubies verdreht werden. Im allgemeinen geht dies aber viel schneller, indem man die beiden betreffenden Kubies durch wenige Scheibendrehungen an einer einzigen Kante plaziert, dann die gefundene Operation anwendet und anschließend die vorbereitenden Scheibendrehungen wieder rückgängig macht.

## Anhang: Gruppenaktionen

Wir besprechen in diesem Anhang die *allgemeine* Theorie der *Gruppenaktionen* oder *Gruppenwirkungen*. Es sei  $X \neq \emptyset$  eine beliebige Menge und  $G$  eine Gruppe. Wir wollen die Aussage präzisieren, daß  $G$  als eine *Gruppe von Automorphismen* auf  $X$  wirkt.

*Definition.* Eine (*Links-*) *Operation* von  $G$  auf  $X$  (oder *Operation von links*) ist eine Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{array} \right.$$

mit  $e \cdot x = x$  und  $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$  für alle  $x \in X$  und alle  $g_1, g_2 \in G$ .

Entsprechend ist eine *Operation von rechts* eine Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} X \times G \longrightarrow X \\ (x, g) \longmapsto x \cdot g \end{array} \right.$$

mit  $x \cdot e = x$  und  $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$ .

*Beispiel.* Es bezeichne  $\text{Aut } X$  die Menge aller *bijektiven* Abbildungen  $\varphi : X \longrightarrow X$  mit der Aktion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aut } X \times X \longrightarrow X \\ (\varphi, x) \longmapsto \varphi(x). \end{array} \right.$$

Dann ist die Bedingung für eine Linksoperation erfüllt (mit  $e = \text{id}_X$ ), wenn man die Verknüpfung in  $\text{Aut } X$  durch

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$$

definiert. Wir werden i. f. *diese* Gruppenstruktur von  $\text{Aut } X$  (auch für Untergruppen) zu Grunde legen.

Im Prinzip kann man sich auf Linksoperationen beschränken. Dies folgt aus dem nachstehenden Lemma. Da aber oft Rechts- und Linksoperationen derselben Gruppe gleichzeitig nebeneinander auftreten, und zwar in natürlicher Weise, sollte man beide Begriffe zur Hand haben.

**Lemma 6.1** *Jede Links- (bzw. Rechts-) Operation von  $G$  auf  $X$  entspricht in eindeutiger Weise einer Rechts- (bzw. Links-) Operation von  $G^{\text{op}}$ .*

*Beweis.* Es bezeichne  $*$  die Gruppenverknüpfung auf  $G^{\text{op}}$ , also  $g_2 * g_1 = g_1 g_2$ ,  $g_1, g_2 \in |G| = |G^{\text{op}}|$ .<sup>7</sup> Dann ist das Einselement  $e \in G$  auch neutral in  $G^{\text{op}}$ , und ist eine Linksoperation  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  von  $G \times X$  gegeben, so definiere man  $X \times G^{\text{op}} \rightarrow X$  durch  $x * g = g \cdot x$ . Es gilt dann  $x * e = e \cdot x = x$  und, wie gewünscht,

$$x * (g_1 * g_2) = (g_1 * g_2) x = (g_2 g_1) x = g_2 (g_1 x) = (x * g_1) * g_2. \quad \square$$

*Bemerkung.* Will man also  $\text{Aut } X$  auf  $X$  von rechts operieren lassen, so muß man eigentlich genauer  $(\text{Aut } X)^{\text{op}}$  betrachten, d. h. die Menge  $\text{Aut } X$  mit der Verknüpfung  $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$  versehen.

*Bemerkung.* Die Abbildung  $x \mapsto x^{-1}$  ist ein Gruppen-Isomorphismus von  $G$  nach  $G^{\text{op}}$ . Will man aus einer  $G$ -Linksoperation eine  $G$ -Rechtsoperation machen, so muß man folglich

$$x * g := g^{-1} x$$

setzen. Es ist von daher nicht verwunderlich, daß beim Zusammentreffen von Operationen verschiedener Händigkeit und dem Bemühen, sie auf eine Seite zu ziehen, die Inversenbildung auf natürliche Weise ins Spiel kommt.

**Satz 6.2** *Es sei  $G \times X \rightarrow X$  eine Linksoperation. Dann wird für jedes  $g \in G$  durch*

$$\varphi_g(x) = g x$$

ein Element  $\varphi_g \in \text{Aut } X$  definiert, und die Abbildung

$$(*) \quad \varphi: \begin{cases} G \rightarrow \text{Aut } X \\ g \mapsto \varphi_g \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismus  $(*)$  eine Linksoperation  $G \times X \rightarrow X$  durch  $(g, x) \mapsto \varphi_g(x) =: g \cdot x$ .

*Beweis.* Es gilt für alle  $x \in X$ ,  $g_1, g_2 \in G$ :

$$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)),$$

also  $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ . Außerdem ist  $\varphi_e = \text{id}_X$ . Somit ist insbesondere

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_{g^{-1} g} = \varphi_e = \text{id}_X,$$

d. h.  $\varphi_g \in \text{Aut } X$  und  $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ . Der Rest ergibt sich von selbst. □

*Bemerkung.* Rechtsoperationen von  $G$  auf  $X$  entsprechen nach demselben Muster Gruppenhomomorphismen

$$G \rightarrow (\text{Aut } X)^{\text{op}} \quad \text{oder} \quad G^{\text{op}} \rightarrow \text{Aut } X.$$

Eine Gruppe  $G$  operiert auf sich selbst in vielfältiger Weise. Man hat z. B. die Multiplikation  $m: G \times G \rightarrow G$  und kann diese als Abbildungen

$$G \times |G| \rightarrow |G| \quad \text{bzw.} \quad |G| \times G \rightarrow |G|$$

auffassen, die man sofort als Links- bzw. Rechtsoperation von  $G$  auf  $|G|$  entlarvt. Im ersten Fall ist dann für  $g \in G$ ,  $x \in |G|$ :

$$\varphi_g(x) = g x = \gamma_g(x), \quad \text{also} \quad \varphi_g = \gamma_g$$

<sup>7</sup>Bei einer Gruppe  $G$  schreiben wir manchmal zur Verdeutlichung  $|G|$ , wenn wir  $G$  nur als Menge betrachten, also die zu ihr gehörende Verknüpfung vergessen.



die Linkstranslation mit  $g$ , und entsprechend ist im zweiten Fall die zugeordnete Abbildung die Rechts-translation  $\delta_{g^{-1}}$  mit  $g$ . Schreibt man die *Konjugation* in der Form  $|G| \times G \rightarrow |G|$ ,  $(x, g) \mapsto g^{-1} x g$ , so ist auch dies eine Operation (von rechts). Sie wird eine Operation von links, wenn man stattdessen  $(g, x) \mapsto g x g^{-1}$  betrachtet.

Ist nun wieder  $G \times X \rightarrow X$  eine beliebige Linksoperation, so hat man eine natürliche Äquivalenzrelation auf  $X$ :

$$x_1 G \sim x_2 \iff \exists g \in G \text{ mit } x_2 = g \cdot x_1 .$$

Die Äquivalenzklassen  $[x]$  sind dann die *Bahnen*

$$[x] := Gx = \{y = g \cdot x : g \in G\}$$

eines Elements  $x$  unter der Aktion von  $G$ . Man nennt  $[x] = Gx$  auch den *Orbit* von  $x$  unter der Aktion von  $G$ , und

$$G \backslash X := X /_G \sim = \{[x] : x \in X\}$$

den *Bahnenraum* oder *Orbitraum* von  $X$  nach  $G$ . Hat man eine Rechtsoperation, so bezeichnet man die Bahnen sinnvollerweise mit  $xG$  und den Bahnenraum mit  $X/G$ .

*Beispiel.* Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe, so liefert die natürliche *Links*-Wirkung  $H \times |G| \rightarrow |G|$  von  $H$  auf  $G$  durch Multiplikation die Bahnen  $Hx$ , die man in der Gruppentheorie als *Rechts*-Nebenklassen bezeichnet. Somit ist in diesem Spezialfall

$$H \backslash G = \{Hx : x \in G\} .$$

Entsprechend ist  $G/H$  die Menge der *Links*-Nebenklassen.

Für jede Bahn  $Gx$  ist die Abbildung  $G \rightarrow Gx$ ,  $g \mapsto gx$ , surjektiv nach Definition. Man bilde nun  $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ . Wir sehen schnell, daß  $G_x \subset G$  eine *Untergruppe* von  $G$  ist: Für  $g \in G_x$  folgt aus  $g \cdot x = x$  sofort  $g^{-1} \cdot x = g^{-1}(g \cdot x) = e \cdot x = x$ , also  $g^{-1} \in G_x$ . Entsprechend ist für  $g_1, g_2 \in G_x$  auch  $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$ , also  $g_1 g_2 \in G_x$ . Damit ist  $G_x$  tatsächlich eine Untergruppe von  $G$ .

*Definition.*  $G_x$  heißt die *Stabilisatorgruppe* oder *Isotropiegruppe* von  $G$  im Punkte  $x \in X$ .

**Satz 6.3** *Liegen  $x_1$  und  $x_2$  in derselben Bahn, so sind  $G_{x_1}$  und  $G_{x_2}$  in  $G$  konjugiert, insbesondere isomorph. Man hat für alle  $x \in X$  eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der Linksnebenklassen  $G/G_x$  und der Bahn  $Gx$ .*

*Beweis.* Es gelte  $x_1 G \sim x_2$ , also  $x_2 = h \cdot x_1$ ,  $h \in G$ . Ist dann  $g \in G_{x_1}$ , so ist

$$(hgh^{-1}) \cdot x_2 = (hg) \cdot x_1 = h \cdot (gx_1) = h \cdot x_1 = x_2 ,$$

also  $hgh^{-1} \in G_{x_2}$ . Dieses Argument funktioniert auch in der umgekehrten Richtung, so daß

$$hG_{x_1}h^{-1} = G_{x_2} .$$

Ist weiter  $\bar{g} = gG_x \in G/G_x$ , also  $\bar{g} = \{gh : h \in G_x\}$ , so gilt wegen

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x ,$$

daß die Abbildung  $G \rightarrow Gx$  über die (surjektive) Quotientenabbildung  $G \rightarrow G/G_x$  faktorisiert. Somit gewinnen wir eine Abbildung

$$\begin{cases} G/G_x \rightarrow Gx \\ \bar{g} \mapsto gx , \end{cases}$$

die automatisch surjektiv ist. Sie ist aber auch injektiv: Ist nämlich  $g_1 x = g_2 x$ , so folgt

$$(g_1^{-1} g_2) \cdot x = g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = g_1^{-1} \cdot (g_1 x) = e \cdot x = x ,$$

also  $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ , d. h.  $g_2 \in g_1G_x$  und damit  $\overline{g_2} = \overline{g_1}$ .  $\square$

Die triviale Operation  $G \rightarrow \{\text{id}_X\} \subset \text{Aut } X$  zeigt, daß Gruppenoperationen sehr „ineffektiv“ sein können.

*Definition und Bemerkung.* Eine Linksoperation  $G \times X \rightarrow X$  heißt *effektiv*, wenn  $g \cdot x = x$  für alle  $x \in X$  zur Folge hat, daß  $g = e$ . Man sieht unmittelbar, daß diese Bedingung zu der *Injektivität* der kanonischen Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } X$  äquivalent ist. Es ist somit klar, daß man aus *jeder* Gruppenoperation von  $G$  auf  $X$  eine *effektive* Operation von  $\overline{G} := G/\ker \varphi$  (mit den gleichen Bahnen) machen kann.

**Folgerung 6.4** *Ist  $X$  endlich und operiert  $G$  effektiv auf  $X$ , so ist auch  $G$  notwendig endlich.*

Denn dann ist  $G$  Untergruppe der *endlichen* Permutationsgruppe  $\text{Aut } X$ .  $\square$

Es sei nun  $G$  für den Rest des Abschnitts *endlich*,  $X$  beliebig. Dann ist auch jede Bahn  $Gx$  endlich, und es gilt der folgende

**Satz 6.5 (Lagrange)** *Für alle  $x \in X$  gilt*

$$\text{ord } G = \text{ord } G_x \cdot \text{ord } Gx .$$

*Beweis.* Nach dem vorigen Satz ist  $\text{ord } Gx = \text{ord}(G/G_x)$ . Nach einem Satz von LAGRANGE ist aber für eine beliebige Untergruppe  $H$  von  $G$  die Ordnung  $\text{ord } H$  ein Teiler von  $\text{ord } G$ , und  $\text{ord } G/\text{ord } H$  ist die Anzahl der Links-Nebenklassen  $gH$ .  $\square$

*Beispiel.* Es sei  $I$  die Symmetriegruppe des regulären *Icosaeders*. Dann ist

$$\text{ord } I = \text{ord } I_x \cdot \text{ord } Ix = 5 \cdot 12 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 ,$$

je nachdem, ob man für  $x$  einen *Eckpunkt*, einen *Flächenmittelpunkt* oder einen *Kantenmittelpunkt* wählt. Tatsächlich ist  $I \cong \mathfrak{A}_5$ . Die auftretenden Teiler 12, 20 und 30 sind die Anzahlen der Ecken, Flächen bzw. Kanten.

*Aufgabe.* Man führe die vorigen Überlegungen für die anderen Platonischen Körper durch.

Offensichtlich liegt eine spezielle Situation vor, wenn stets  $G_x = \{e\}$  ist, d. h. wenn  $g \cdot x = x$  nur für  $g = e$  möglich ist.

*Definition.* Die Operation  $G \times X \rightarrow X$  heißt *frei* (oder genauer: *fixpunktfrei*), wenn für alle  $x \in X$  und  $g \in G$  aus  $g \cdot x = x$  folgt, daß  $g = e$ .

*Beispiel.* Ist  $X = |G|$  und  $G \times X \rightarrow X$  die Operation von  $G$  durch Linkstranslation auf sich selbst, d. h.

$$(g, x) \mapsto gx ,$$

so gilt  $gx = x$  für ein  $x \in X = |G|$  genau dann, wenn  $g = e$ . Also ist die Linkstranslation, ebenso wie die Rechtstranslation, eine *freie* Operation.

*Bemerkung.* Ist  $G \times X \rightarrow X$  eine freie Operation von  $G$  auf  $X$ , und ist  $H \subset G$  eine Untergruppe, so ist auch die induzierte Operation  $H \times X \rightarrow X$  frei.

**Satz 6.6** *Operiert die endliche Gruppe  $G$  frei auf  $X$ , so haben alle Bahnen  $Gx$  die gleiche Kardinalität  $\text{ord } G$ .*

*Beweis.* Wegen  $G_x = \{e\}$  und  $G \cong G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$  ist die Behauptung trivialerweise richtig.  $\square$

*Beispiel (RUBIKS Würfel).* Die von uns eingeführte (endliche) Gruppe  $G$  der „effektiven Spielzüge“ auf den denkbaren Mustern auf dem Würfel operiert offensichtlich *frei*. Also besitzen *alle* Orbits die *gleiche* Länge  $\text{ord } G$ , die ein Teiler von  $N_3$  sein muß. Insbesondere ist  $\text{ord } G$  die Anzahl der Muster, die man aus dem Ausgangsmuster durch *erlaubte* Spielzüge erzielen kann, also nur durch Drehen der Seitenflächen (und nicht durch Auseinandernehmen und Zusammensetzen).

## Literatur

Zur **Gruppentheorie** siehe z. B.:

A. Speiser: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*.  
Birkhäuser: Basel und Stuttgart, 1956.  
(Mit Anwendungen auf Kristallstrukturen und Ornamente.)

W. Ledermann: *Einführung in die Gruppentheorie*.  
Vieweg: Braunschweig, 1977.

Zu **Rubik's Würfel** siehe z. B.:

D. Singmaster: *The Hungarian Magic Cube*.  
In: *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 2, No. 1, pp. 29 - 30.  
Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

D. Singmaster: *Notes on the "Magic Cube"*.  
In der Bibliothek vorhanden.

D.R.. Hofstadter: *Vom Zauber des Zauberwürfels*.  
In: *Spektrum der Wissenschaften*, Mai 1981, pp. 17 - 29.  
(Mit Beschreibung der Mechanik und Beziehungen zur Elementarteilchenphysik der Quarks.)

Ch. Bandelow: *Rubiks Zauberwürfel*.  
In: *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1981*, pp. 227 - 244.  
Bibliographisches Institut: Mannheim, 1981.

Ch. Bandelow: *Einführung in die Cubologie*.  
Vieweg: Wiesbaden, 1981.