Arch. Math., Vol. 37, 406–417 (1981) 0003-889X/81/3705-0012 $ 01.50 + 0.20/0

Zweidimensionale Quotientensingularitäten: Gleichungen und Syzygien

Von

Oswald Riemenschneider

In [10] wurden minimale Erzeugendensysteme für die Algebra $\mathbb{C}[u, v]^G$ der Polynome in zwei Veränderlichen berechnet, die unter der Aktion einer endlichen spiegelungsfreien Gruppe $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ invariant sind. Die erzeugenden Relationen zwischen diesen Invarianten können aufgefaßt werden als die Gleichungen der zugehörigen (algebraischen oder analytischen) Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$. Diese Gleichungen wurden in der eingangs zitierten Arbeit in vielen Fällen bestimmt, wobei jedoch in den nicht durch Determinanten beschreibbaren Fällen kein einfaches Bildungsgesetz zu erkennen war.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für alle Quotientensingularitäten verhältnismäßig einfach gebaute Gleichungen anzugeben. Es zeigt sich, daß sie sich (mit Ausnahme zweier Serien von Tetraedersingularitäten der Einbettungsdimension $e \geqq 6$) durch *verallgemeinerte Determinantenideale* beschreiben lassen: Ist $\mathbb{C}[u, v]^G$ von der Einbettungsdimension e, also $\mathbb{C}[u, v]^G = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_e]/\mathfrak{a}$, so läßt sich $\mathfrak{a}$ minimal erzeugen von Elementen der Form

$$(*) \qquad f_{ij} = a_i b_j - b_i c_{i,i+1} c_{i+1,i+2} \cdots c_{j-1,j} a_j ,$$

$1 \leqq i < j \leqq e - 1$. Wir fassen die f_{ij} als verallgemeinerte 2×2-Unterdeterminanten der $2 \times (e-1)$-Matrix

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{e-1} \\ b_1 \ldots b_{e-1} \end{pmatrix}$$

auf, die mit Hilfe der Zusatzgrößen $c_{1,2}, \ldots, c_{e-2,e-1}$ gemäß (*) zu bilden sind, und beschreiben $\mathfrak{a}$ durch das Symbol

$$(***) \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_{e-2} & a_{e-1} \\ b_1 & b_2 \ldots b_{e-2} & b_{e-1} \end{pmatrix}. \\ c_{1,2} \quad \cdots \quad c_{e-2,e-1} \end{array}$$

Die $c_{i,i+1}$ mit $c_{i,i+1} = 1$ lassen wir fort, so daß das Symbol (***) ohne Angabe von Zusatzgrößen tatsächlich ein Determinantenideal bezeichnet.

Wir geben in jedem Einzelfall das Symbol (***) und zumeist auch die in [10] gewonnenen Invarianten an und überlassen dem Leser den (trivialen) Nachweis, daß die f_{ij} Relationen sind. Da die $\binom{e-1}{2}$ Polynome f_{ij}, wie man ohne Schwierigkeit nachprüft, mit quadratischen Termen beginnen, die linear unabhängig sind, folgt nach dem allgemeinen Struktursatz von Wahl [13] über die Gleichungen rationaler Singularitäten, daß die f_{ij} schon ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ bilden.

Die Syzygienketten (endliche freie Auflösungen von $\mathbb{C}[u, v]^G$ über $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_e]$) erhält man dann explizit aus (***) mit Hilfe des in [7] dargestellten verallgemeinerten Eagon-Northcott-Komplexes. Betrachtet man die lokale (konvergente oder formale) Situation, so ist dieser Komplex sogar minimal.

Die Gleichungen der nicht durch Determinanten beschreibbaren Tetraedersingularitäten der Einbettungsdimension $e \geqq 6$ geben wir in Form aller 2×2-*Unterdeterminanten* eines „*arrays*" der Gestalt

$$\binom{**}{**} \qquad \begin{vmatrix} a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{e-1} \\ b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_{e-1} \\ c_1\, c_2 \end{vmatrix}$$

an. Von den so gewonnenen Gleichungen sind tatsächlich zwei stets überflüssig; die restlichen erfüllen wieder die Wahlschen Bedingungen und beschreiben daher die Singularität minimal.

Für solche „arrays" wurde allgemein von Sharpe [12] ein (nicht minimales) Erzeugendensystem für die Syzygien erster Ordnung angegeben. Wir werden in unseren Fällen ein minimales Erzeugendensystem für die Relationen zwischen den Gleichungen berechnen. Nach dem in [7] beschriebenen Verfahren wäre es sogar möglich gewesen, auch in diesen Fällen die vollen Syzygienketten zu bestimmen.

Den an der allgemeinen Theorie der Syzygien rationaler Singularitäten interessierten Leser verweisen wir auf die Arbeiten [13] und [4]. Aussagen über Deformationen zweidimensionaler Quotientensingularitäten, für deren explizite Berechnung die hier vorgestellten Ergebnisse notwendig sind, findet man z.B. in [1], [2], [5], [8], [9], [11], [13].

Die zyklischen Gruppen $C_{n,q}$. Es sei $0 < q < n$, $\operatorname{ggT}(n, q) = 1$, $m = n - q$; n/q besitze die Hirzebruch-Jungsche Kettenbruchentwicklung $b_1 - 1|\overline{b_2} - \cdots - 1|\overline{b_r}$, $r \geqq 1$, $b_\varrho \geqq 2$, und es sei $n/m = a_2 - 1|\overline{a_3} - \cdots - 1|\overline{a_{e-1}}$, $e \geqq 3$, $a_\varepsilon \geqq 2$. Dann hat die Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/C_{n,q}, 0)$ den dualen Graphen

$$\overset{-b_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{-b_2}{\bullet} \;\cdots\; \overset{-b_{r-1}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{-b_r}{\bullet},$$

und $\mathbb{C}[u, v]^{C_{n,q}}$ wird erzeugt von den Monomen

$$z_\varepsilon = u^{c_\varepsilon} v^{d_\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1, \ldots, e,$$

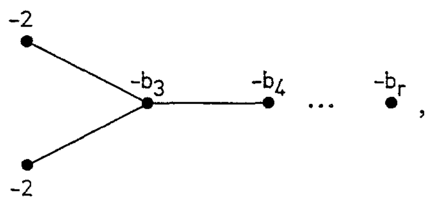
wobei

$$\begin{aligned} c_1 &= n, & c_2 &= n - q, & c_{\varepsilon+1} &= a_\varepsilon c_\varepsilon - c_{\varepsilon-1}, & 2 &\leqq \varepsilon \leqq e - 1, \\ d_1 &= 0, & d_2 &= 1, & d_{\varepsilon+1} &= a_\varepsilon d_\varepsilon - d_{\varepsilon-1}, & 2 &\leqq \varepsilon \leqq e - 1. \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man sofort die Gleichungen in der Form eines verallgemeinerten Determinantenideals (vgl. [9], [10]):

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{e-2} & z_{e-1} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} z_2^{a_2-2} & z_3^{a_3-2} & \cdots & z_{e-1}^{a_{e-1}-2} \end{matrix} \end{array}$$

Die Diedergruppen $D_{n,q}$. Es sei $2 \leqq q < n$, $\operatorname{ggT}(n, q) = 1$, $m = n - q$, $n/q = b_3 - 1|\overline{b_4} - \cdots - 1|\overline{b_r}$, $r \geqq 4$, $b_\varrho \geqq 2$, und $n/m = a_2 - 1|\overline{a_3} - \cdots - 1|\overline{a_{e-1}}$, $e \geqq 3$, $a_\varepsilon \geqq 2$. Dann gehört zu $(\mathbb{C}^2/D_{n,q}, 0)$ der duale Graph



und die in [1] gefundenen Gleichungen lassen sich sofort in die Form

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{e-2} & z_{e-1} \\ z_2 & z_1^{a_2-1} + z_3^2 & z_4 & \cdots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} z_3^{a_3-2} & \cdots & z_{e-1}^{a_{e-1}-2} \end{matrix} \end{array}$$

bringen.

Die Tetraedergruppen T_m. Es bezeichne w_1, w_2, w_3 die Erzeugenden der Invariantenalgebra $\mathbb{C}[u, v]^T$ unter der (binären) Tetraedergruppe $T = T_1$ von der Ordnung 8, 12 bzw. 6, zwischen denen nach Klein [5] nach geeigneter Normierung die Relation

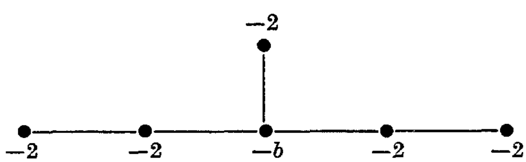
$$w_2^2 = w_1^3 + w_3^4$$

besteht. Ferner seien w_4 und $w_5 \in \mathbb{C}[u, v]$ wie in [10], p. 41 ff. so gewählt, daß

$$w_1 = -3\, w_4 w_5\,, \qquad 3\sqrt{3}\, w_{3+j}^3 = (-1)^j w_2 + w_3^2\,, \qquad j = 1, 2\,.$$

Wir haben dann die Fälle $m \equiv 1$, 3 und 5 modulo 6 zu unterscheiden.

$m = 6(b-2) + 1$. Die zugehörige Singularität besitzt die Einbettungsdimension $e = b + 1$ und den dualen Graphen



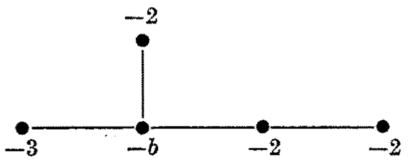
Die Gleichungen sind durch Determinanten beschreibbar (vgl. [10], Satz 10):

$\boldsymbol{b = 2}$ $\qquad z_2^2 = z_1^3 + z_3^4$

$\boldsymbol{b > 2}$ $\qquad \left(\begin{array}{cc:c:c} z_1 & z_2 & z_3 \,\ldots\, z_{b-1} & z_b{}^2 \\ z_2 & z_1 + z_3^3 & z_4 \,\ldots\, z_b & z_{b+1} \end{array}\right)$

(hierbei hat man im Fall $b = 3$ in der ersten Zeile z_3^2, nicht z_3 stehen).

$\boldsymbol{m = 6(b-2) + 3}$. Dies ist eine Singularität der Einbettungsdimension $e = b + 2$ mit dualem Graphen



Die Gleichungen für $\boldsymbol{b = 2}$ sind von der Form (vgl. [10], Satz 11):

$$\begin{pmatrix} z_1 z_3 & z_2 + z_1 & z_4 \\ z_4 & -z_3 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $b > 2$ besteht ein minimales Erzeugendensystem nach [10], Satz 5, aus den Elementen

$$\begin{aligned} & z_1 = w_3^{6b-9}, \quad z_2 = w_2 w_3^{6b-11}, \quad z_3 = \sqrt{3}\, w_1 w_3^{4b-8} w_5, \\ & z_{4+\varepsilon} = \sqrt{3}\, w_1 w_2^{\varepsilon} w_3^{2(b-\varepsilon)-5} w_4, \qquad \varepsilon = 0, \ldots, b-3, \\ & z_{b+2} = 3\, w_1^2 w_2^{2b-5} w_4^2. \end{aligned}$$

Man berechnet nun leicht aus den anfangs angegebenen Relationen

$$\begin{aligned} z_1 - z_3 z_4 &= w_3^{6b-9} - 3\, w_1^2 w_3^{6b-13} w_4 w_5 = w_3^{6b-13}(w_3^4 + w_1^3) = w_2^2 w_3^{6b-13}, \\ z_3 + z_4^2 &= \sqrt{3}\, w_1 w_3^{4b-8} w_5 + 3\, w_1^2 w_3^{4b-10} w_4^2 \\ &= \sqrt{3}\, w_1 w_3^{4b-10} w_5 (w_3^2 - 3\sqrt{3}\, w_4^3) = \sqrt{3}\, w_1 w_2 w_3^{4b-10} w_5, \\ z_4 + z_5 &= \sqrt{3}\, w_1 w_3^{2b-7} w_4 (w_2 + w_3^2) = 9\, w_1 w_3^{2b-7} w_4 w_5^3 \\ &= -3\, w_1^2 w_3^{2b-7} w_5^2 \qquad (b \geqq 4). \end{aligned}$$

Der Fall $\boldsymbol{b = 3}$ $(e = 5)$ läßt sich wohl am einfachsten als verallgemeinertes Determinantenideal wie folgt schreiben

$$\begin{pmatrix} z_3 & -(z_1 + z_2) & z_1 & z_3 + z_4^2 \\ z_4 & z_3 & z_2 - z_1 & z_5 \end{pmatrix}.$$
$$\qquad\qquad z_4$$

Für $\boldsymbol{b \geqq 4}$ erhält man die gewünschten Relationen als die 2×2-Unterdeterminanten des „arrays"

$$\left|\begin{array}{cccccc} z_1 & z_3 & z_2 & z_4 \,\ldots & z_b & z_{b+1}^2 \\ z_2 & z_3 + z_4^2 & z_1 - z_3 z_4 & z_5 \,\ldots & z_{b+1} & z_{b+2} \\ z_3 & -(z_4 + z_5) & & & & \end{array}\right|.$$

Wir bezeichnen die aus der oberen $2 \times (b+1)$-Matrix resultierenden Gleichungen mit f_{ij}, $1 \leqq i < j \leqq b+1$, die aus der links stehenden 3×2-Matrix resultierenden mit $g_{1,2}, g_{2,3}, g_{1,3}$. Dann gilt:

$$g_{1,2} = f_{1,2}\,,$$
$$f_{2,3} = z_3(z_1 - z_3 z_4) - z_2(z_3 + z_4^2) = f_{1,2} + z_4(f_{1,4} + g_{1,3})\,,$$
$$g_{2,3} = g_{1,3} - f_{3,4} + f_{1,4}\,.$$

Nach Elimination von $g_{1,2}$, $f_{2,3}$ und $g_{2,3}$ erhält man also die richtige Anzahl von Gleichungen, deren lineare Unabhängigkeit sofort ersichtlich ist.

Die Syzygien bestimmen wir vermittels des Eagon-Northcott-Komplexes wieder mit Hilfe der Zerlegung in eine $2 \times (b+1)$-Matrix und eine 3×2-Matrix, wobei zwei überflüssige Relationen entstehen müssen. Man erhält insbesondere die vier Relationen:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad z_1 f_{2,3} - z_3 f_{1,3} + z_2 f_{1,2} = 0\,,\\
&(2) \qquad z_2 f_{2,3} - (z_3 + z_4^2) f_{1,3} + (z_1 - z_3 z_4) f_{1,2} = 0\,,\\
&(3) \qquad z_1 g_{2,3} - z_2 g_{1,3} + z_3 g_{1,2} = 0\,,\\
&(4) \qquad z_3 g_{2,3} - (z_3 + z_4^2) g_{1,3} - (z_4 + z_5) g_{1,2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (4) ist wegen der Beziehungen zwischen den f_{ij} und g_{ij} gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
-(z_4 + z_5) f_{1,2} &= z_3 f_{3,4} - z_3 f_{1,4} + z_4^2 g_{1,3}\\
&= z_3 f_{3,4} - z_3 f_{1,4} + z_4 f_{2,3} - z_4 f_{1,2} - z_4^2 f_{1,4}\,,
\end{aligned}$$

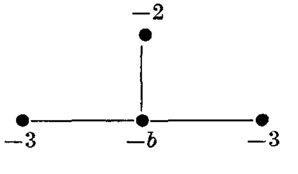
was jedoch auch aus den ebenfalls vorhandenen Relationen

$$\begin{aligned}
&z_2 f_{2,4} - (z_3 + z_4^2) f_{1,4} + z_5 f_{1,2} = 0\,,\\
&z_3 f_{3,4} - z_2 f_{2,4} + z_4 f_{2,3} = 0
\end{aligned}$$

folgt. Ebenso sieht man, daß die Gleichung (2) aus (1) und (3) folgt. — Somit erhält man:

Ein Erzeugendensystem minimaler Länge für die Relationen zwischen den Gleichungen wird durch das System der kanonischen Relationen der oberen $2 \times (b+1)$-Matrix geliefert, aus dem man die Gleichung (2) entfernen und dem man die Gleichung (3) hinzufügen muß.

$\boldsymbol{m = 6(b-2) + 5}$. Die zugehörige Singularität besitzt die Einbettungsdimension $e = b + 3$ und den dualen Graphen



Im Fall $\boldsymbol{b} = 2$ lauten die Gleichungen (vgl. [10], Satz 12 a):

$$\begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_1 + z_2 + z_5 & & z_3 & z_3 + z_4 \\ z_3 & z_4 & & z_2 - z_1 & z_5 \\ & & z_3 & & \end{pmatrix}.$$

Die erzeugenden Invarianten sind für $\boldsymbol{b} > 2$ ([10], Satz 4):

$$z_1 = w_3^{6b-7}, \quad z_2 = w_2 w_3^{6b-9}, \quad z_3 = w_1 w_3^{4b-6}, \quad z_4 = w_1 w_2 w_3^{4b-8},$$
$$z_{5+\varepsilon} = w_1^2 w_2^{\varepsilon} w_3^{2(b-\varepsilon)-5}, \quad \varepsilon = 0, \ldots, b-3, \quad z_{b+3} = w_1^{3b-8} w_2^3.$$

Weitere Invarianten sind

$$w_2^2 w_3^{6b-11} = (w_1^3 + w_3^4) w_3^{6b-11} = z_1 + z_3 z_5,$$
$$w_1 w_2^2 w_3^{4b-10} = w_1 (w_1^3 + w_3^4) w_3^{4b-10} = z_3 + z_5^2 \quad \text{und} \quad w_1^{3b-8} w_2^2 w_3^2 = P.$$

Es gilt

$$P = z_3 + z_5^2, \quad b = 3, \quad P = z_6^2, \quad b = 4, \quad P = z_7^2 - z_6^2, \quad b = 5,$$
$$P = z_8^2 - 2z_7^2 + z_6^2, \quad b = 6,$$

und allgemein für $b \geqq 4$:

$$P = \binom{b-4}{0} z_{b+2}^2 - \binom{b-4}{1} z_{b+1}^2 + \binom{b-4}{2} z_b^2 - \cdots \pm \binom{b-4}{b-4} z_6^2.$$

Offensichtlich sind dann die 2×2-Untermatrizen des folgenden „arrays" Relationen zwischen den Invarianten:

$$\left|\begin{array}{cccc:ccc:c} z_2 & z_3 & z_1 & z_4 & z_5 & \cdots & z_{b+1} & P \\ z_1 + z_3 z_5 & z_4 & z_2 & z_3 + z_5^2 & z_6 & \cdots & z_{b+2} & z_{b+3} \\ z_4 & z_5 \,| & & & & & & \end{array}\right|$$

wobei im Fall $b = 3$ der Teil

$$\begin{array}{:ccc:} z_5 & \cdots & z_{b+1} \\ z_6 & \cdots & z_{b+2} \end{array}$$

fortzulassen ist.

Führt man entsprechend wie im vorigen Abschnitt die Bezeichnungen

$$f_{1,2}, f_{1,3}, \ldots, g_{1,2}, g_{2,3}, g_{1,3}$$

ein, so erhält man die Beziehungen

$$g_{1,2} = f_{1,2},$$
$$f_{1,2} = -f_{3,4} + z_5 (g_{2,3} - f_{2,4}),$$
$$f_{1,4} = f_{2,3} + z_5 g_{1,3}.$$

Nach Elimination von $g_{1,2}$, $f_{1,2}$ und $f_{1,4}$ erhält man wieder die richtige Anzahl von Gleichungen, deren lineare Unabhängigkeit sofort ersichtlich ist.

Ebenso sieht man sehr schnell, daß von den kanonischen Relationen genau zwei von den restlichen abhängig sind, nämlich z.B.

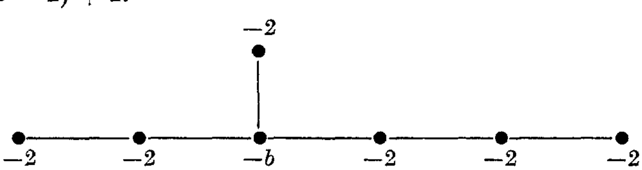
$$\begin{aligned}(z_1 + z_3 z_5) f_{2,3} - z_4 f_{1,3} + z_2 f_{1,2} \qquad &= 0\,,\\ (z_1 + z_3 z_5) f_{2,4} - z_4 f_{1,4} + (z_3 + z_5^2) f_{1,2} &= 0\,.\end{aligned}$$

Die Oktaedergruppen O_m. Es bezeichne w_1, w_2, w_3 die Erzeugenden der Invariantenalgebra $\mathbb{C}[u, v]^O$ unter der (binären) Oktaedergruppe $O = O_1$ von der Ordnung 12, 18 bzw. 8, zwischen denen nach Klein nach geeigneter Normierung die Relation

$$w_2^2 = w_1 (w_1^2 + w_3^3)$$

besteht. Wir haben die Fälle $m \equiv 1, 5, 7, 11 \bmod 12$ zu unterscheiden.

$\boldsymbol{m = 12(b-2) + 1.}$



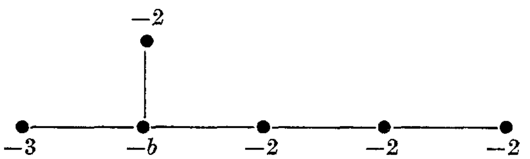
$e = b + 1.$

Die Gleichungen findet man in [10], p. 48 (wo sich im Fall $b = 3$ ein Fehler eingeschlichen hat):

$\boldsymbol{b = 2}$ $$z_2^2 = z_1 (z_1^2 + z_3^3)$$

$\boldsymbol{b > 2}$ $$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_b^3 \\ z_2^2 & z_3^2 - z_2 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} \end{array}\right).$$

$\boldsymbol{m = 12(b-2) + 5.}$



$e = b + 2.$

Ein minimales Erzeugendensystem der Invarianten wird gegeben durch ([10], Satz 6):

$$\begin{aligned} &z_1 = w_3^{12b-19}\,, && z_2 = w_1 w_3^{6b-11}\,, \\ &z_{3+\varepsilon} = w_1^{2\varepsilon} w_2 w_3^{3(b-\varepsilon)-7}\,, && \varepsilon = 0, \dots, b-3\,, \\ &z_{b+1} = w_1^{6b-11} w_2\,, && z_{b+2} = w_1^{4b-7} w_3\,, \quad b > 2\,, \\ &z_{b+2} = w_2 w_3^4\,, \quad b = 2\,. \end{aligned}$$

Die Gleichungen lauten dann für

$\boldsymbol{b = 2}$ $$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_4 \\ z_4 & z_3 & z_2^2 (z_1 + z_2^2) \end{pmatrix}$$

(auf [10], p. 49 oben, ist wieder ein Fehler zu verzeichnen). Im allgemeinen Fall berechnet man nun leicht

$$z_3^2 - z_2 = w_2^2 w_3^{6b-14} - w_1 w_3^{6b-11} = w_1^3 w_3^{6b-14}$$

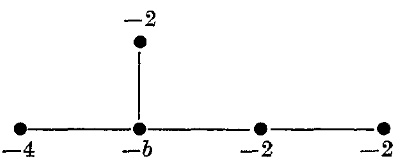
und

$$P = (z_{b+2} - z_2) + z_2^2 - z_3 z_4 + z_4^2 - \cdots - z_{b-1} z_b + z_b^2 = w_1^{4b-10} w_2^2 w_3 .$$

Also können die Gleichungen in verallgemeinerter Determinantenform wie folgt geschrieben werden:

$$\boldsymbol{b > 2} \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \vdots & z_3 \ \cdots \ z_{b-1} & \vdots & z_{b+2} & z_b \\ z_2^2 & z_2 - z_3^2 & \vdots & z_4 \ \cdots \ z_b & \vdots & z_{b+1} & P \end{pmatrix}.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad z_b$$

$\boldsymbol{m = 12(b-2) + 7.}$



$e = b + 3.$

Ein minimales Erzeugendensystem der Invarianten wird gegeben durch ([10], Satz 6):

$$z_1 = w_3^{12b-17}, \qquad z_2 = w_1 w_3^{6b-10},$$
$$z_{3+\varepsilon} = w_1^{2\varepsilon+1} w_2 w_3^{3(b-\varepsilon)-8}, \quad \varepsilon = 0, \ldots, b-3,$$
$$z_{b+1} = w_1^{6b-10} w_2, \qquad z_{b+2} = w_2 w_3^{9b-15},$$
$$z_{b+3} = w_1^3 w_3^{6b-13}, \quad b > 2, \qquad z_{b+3} = w_1^4 w_3, \quad b = 2.$$

Man errechnet leicht

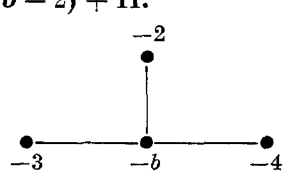
$$z_2(z_1 + z_2^2) = w_1 w_3^{18b-30}(w_3^3 + w_1^2) = (w_3^{9b-15} w_2)^2 = z_{b+2}^2,$$
$$z_2(z_5 + z_2^2) = w_1^3(w_1^2 + w_3^3) w_3^3 = (w_1^2 w_2)(w_2 w_3^3) = z_3 z_4, \qquad b = 2,$$
$$P = -z_{b+3} + (z_3^2 - z_3 z_4 + z_4^2 - z_4 z_5 + - \cdots - z_{b-1} z_b + z_b^2)$$
$$= w_1^{4b-7} w_3^2, \quad b > 2.$$

Damit ergeben sich die Gleichungen zu

$$\boldsymbol{b = 2} \qquad \begin{pmatrix} z_1 + z_2^2 & z_4 & z_5 + z_2^2 & z_2 z_3 \\ z_4 & z_2 & z_3 & z_5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b > 2} \qquad \begin{pmatrix} z_1 + z_2^2 & z_{b+2} & z_2 + z_{b+3} & \vdots & z_3 \ \cdots \ z_{b-1} & \vdots & z_2 & z_b P \\ z_{b+2} & z_2 & z_3 & \vdots & z_4 \ \cdots \ z_b & \vdots & z_{b+3} & z_{b+1} \end{pmatrix}.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad z_3$$

$\boldsymbol{m = 12(b-2) + 11.}$



$e = b + 4.$

Die erzeugenden Invarianten sind

$$\begin{aligned}
&z_1 = w_3^{12b-13}, && z_2 = w_1 w_3^{6b-8}, \\
&z_{3+\varepsilon} = w_1^{2\varepsilon+1} w_2 w_3^{3(b-\varepsilon)-7}, && \varepsilon = 0, \ldots, b-3, \\
&z_{b+1} = w_1^{6b-8} w_2, && z_{b+2} = w_2 w_3^{9b-12}, \qquad z_{b+3} = w_1^3 w_3^{6b-11}, \\
&z_{b+4} = w_1^{4b-5} w_3, \quad b > 2, && z_{b+4} = w_1^2 w_2 w_3^3, \quad b = 2.
\end{aligned}$$

Setzt man hier

$$P = z_{b+4} - z_{b+3} + (z_3^2 - z_3 z_4 + z_4^2 - + \cdots - z_{b-1} z_b + z_b^2), \qquad b > 2,$$

so folgt

$$P = w_1^{4b-8} w_2^2 w_3,$$

und die Gleichungen ergeben sich zu

$b = 2$
$$\begin{pmatrix} z_1 + z_2^2 & z_4 & z_6 & & z_2 & z_5 \\ z_4 & z_2 & z_5 & & z_6 & z_3 \end{pmatrix},$$
$$(z_2 + z_5)$$

$b > 2$
$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} z_1 + z_2^2 & z_{b+2} & z_2 + z_{b+3} & z_2 & z_3 & \ldots & z_{b-1} & z_{b+4} & z_b \\ z_{b+2} & z_2 & z_3 & z_{b+3} & z_4 & \ldots & z_b & z_{b+1} & P \end{array}\right).$$
$$z_3 \qquad\qquad\qquad z_b$$

Die Ikosaedergruppen I_m. In diesem Abschnitt bezeichnen w_1, w_2, w_3 die Erzeugenden der Invariantenalgebra $\mathbb{C}[u, v]^I$, unter der (binären) Ikosaedergruppe $I = I_1$ von der Ordnung 12, 20 bzw. 30 mit der einzigen Relation

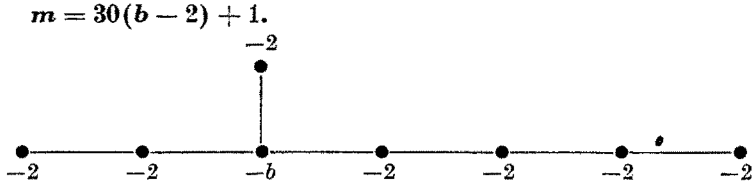
$$w_3^2 = w_1^5 + w_2^3.$$

Mit $z_1, \ldots, z_e$ bezeichnen wir stets die in [10], Satz 7, aufgezählten erzeugenden Invarianten von $\mathbb{C}[u, v]^{I_m}$, die wir nicht noch einmal angeben. Wir haben die Fälle $m \equiv 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \bmod 30$ zu unterscheiden. Wir geben nur die Gleichungen an und überlassen dem Leser die Nachprüfung.

In allen Fällen ist

$$P = P(z_3, \ldots, z_b) = z_3^2 - z_3 z_4 + z_4^2 - \cdots - z_{b-1} z_b + z_b^2.$$

$m = 30(b-2) + 1.$

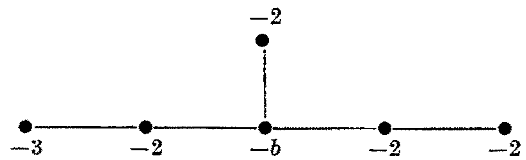


$e = b + 1$

$b = 2$ $\qquad z_3^2 = z_1^5 + z_2^3.$

$b > 2$
$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_{b-1} & z_b^5 \\ z_2 z_3 & z_3^2 - z_2 & z_4 & \ldots & z_b & z_{b+1} \end{array}\right).$$

$m = 30(b-2) + 7.$

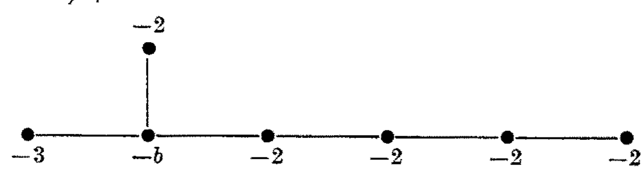


$e = b + 2$

$$b = 2 \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_3 & z_1^2 - z_2 \end{pmatrix},$$

$$b > 2 \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_b & z_{b+1} \\ z_2 z_3 & z_3^2 - z_2 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} & z_{b+2} \end{array}\right). \\ \qquad\qquad\qquad P - z_2 \end{array}$$

$m = 30(b-2) + 11.$

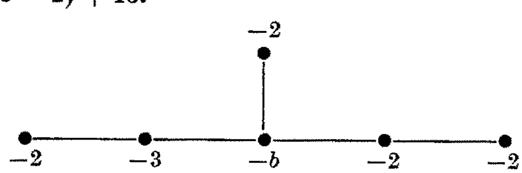


$e = b + 2$

$$b = 2 \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 z_4 & z_2^2 + z_3 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix},$$

$$b > 2 \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} z_1 & z_2 + z_{b+1} & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_2 & z_b(P - z_{b+1})^2 \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} & z_{b+2} \end{array}\right). \\ z_3 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

$m = 30(b-2) + 13.$

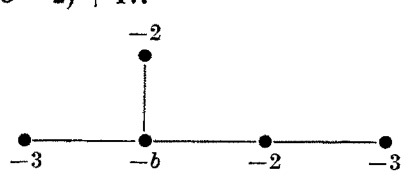


$e = b + 2$

$$b = 2 \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2^2 & z_3 \\ z_2^2 + z_3 & z_4 & z_1 z_2 \end{pmatrix},$$

$$b > 2 \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} z_1 & z_{b+1} & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_b & z_2^2 \\ z_3(P - z_{b+1}) & z_2 & z_4 & \dots & z_b & z_2 + z_{b+1} & z_{b+2} \end{array}\right). \\ \qquad\qquad\qquad z_b \end{array}$$

$m = 30(b-2) + 17.$



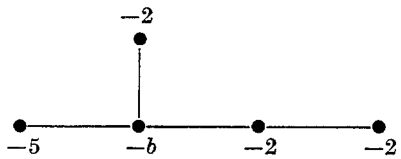
$e = b + 3$

$$\boldsymbol{b=2} \qquad \begin{array}{c}\begin{pmatrix} z_1 & z_3+z_2^2 & z_2 & z_4 \\ z_2 & z_4 & z_3 & z_5 \end{pmatrix}, \\ z_4 \end{array}$$

$$\boldsymbol{b>2} \qquad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc:ccc:ccc} z_1 & z_2+z_{b+1} & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_2 & z_b & z_{b+2} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} & Q & z_{b+3} \end{array}\right). \\ z_3 \qquad\qquad\qquad\qquad z_b^2 \end{array}$$

Hierbei ist $Q = z_{b+2} + z_b(P - z_{b+1})$, und $z_{b+3} = w_2^{15b-26} w_3^3$ ist anders gewählt als in [10].

$\boldsymbol{m = 30(b-2)+19.}$



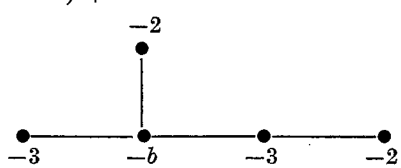
$e = b+4$

$$\boldsymbol{b=2} \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_3+z_2^2 & z_4 & z_1z_2 & z_5+z_2^2 & z_6 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{b>2}$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc:ccc:cccc} z_1 & P-z_2 & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_b & z_{b+1} & z_{b+2} & z_{b+3} \\ z_2z_3 & z_{b+1} & z_4 & \dots & z_b & P+z_{b+1}-z_2 & z_{b+2} & z_{b+3}+z_{b+1}^2 & z_{b+4} \end{array}\right). \\ z_b \end{array}$$

$\boldsymbol{m = 30(b-2)+23.}$



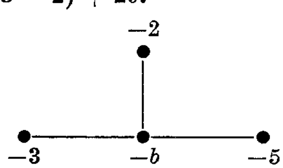
$e = b+3$

$$\boldsymbol{b=2} \qquad \begin{array}{c}\begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_2 & z_3^2 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}, \\ (z_2+z_3) \end{array}$$

$$\boldsymbol{b>2} \qquad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc:ccc:ccc} z_1 & z_2+z_{b+1} & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_2 & z_b & z_{b+2}^2 \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} & Q & z_{b+3} \end{array}\right). \\ z_3 \qquad\qquad\qquad\qquad z_b \end{array}$$

Hierbei ist $Q = P + z_{b+2} + z_2 - z_2z_3$.

$\boldsymbol{m = 30(b-2)+29.}$



$e = b+5$

$$b = 2 \qquad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_1 & z_4 & \quad & z_2 & z_3 & z_5 & z_6 \\ z_2 & z_3 & \quad & z_4 & z_5 & z_3^2 + z_6 & z_7 \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad (z_2 + z_3) \end{array}$$

$$b > 2 \qquad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc:ccc:ccccc} z_1 & z_2 + z_{b+1} & z_3 & \ldots & z_{b-1} & z_2 & z_b & z_{b+2} & z_{b+3} & z_{b+4} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \ldots & z_b & z_{b+1} & Q & z_{b+3} & z_{b+4} + z_{b+2}^2 & z_{b+5} \end{array}\right). \\ \qquad\qquad\quad z_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad z_b \end{array}$$

Hierbei ist $Q = P + z_{b+2} - z_{b+1}$.

Literaturverzeichnis

[1] K. Behnke und O. Riemenschneider, Diedersingularitäten. Abh. Math. Seminar Universität Hamburg **47**, 210—227 (1978).

[2] K. Behnke und O. Riemenschneider, Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten. Manuscripta Math. **20**, 377—400 (1977). Korrektur: ibid. **24**, 81 (1978).

[3] E. Brieskorn, Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones math. **4**, 336—358 (1968).

[4] D. Eisenbud, O. Riemenschneider und F.-O. Schreyer, Projective Resolutions of Cohen-Macaulay Algebras. Math. Ann. **257**, 85—98 (1981).

[5] F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade. Leipzig 1884.

[6] H. B. Laufer, Ambient deformations for one-dimensional exceptional sets. Preprint 1978. (To appear).

[6a] H. B. Laufer, Ambient deformations for exceptional sets in two-manifolds. Inventiones math. **55**, 1—36 (1979).

[6b] H. B. Laufer, Versal deformations for two-dimensional pseudoconvex manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (to appear).

[6c] H. B. Laufer, Lifting cycles to deformations of two-dimensional pseudoconvex manifolds. Trans. AMS (to appear).

[7] J. Pesselhoy und O. Riemenschneider, Projective resolutions of Hodge algebras: Some examples. (In Vorbereitung).

[8] H. Pinkham, Deformations of algebraic varieties with G_m action. Astérisque **20**, 1—131 (1974).

[9] O. Riemenschneider, Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann. **209**, 211—248 (1974).

[10] O. Riemenschneider, Die Invarianten der endlichen Untergruppen von $GL(2, \mathbb{C})$. Math. Z. **153**, 37—50 (1977).

[11] O. Riemenschneider, Dihedral singularities: Invariants, equations and infinitesimal deformations. Bull. AMS **82**, 745—747 (1976); Correction: ibid. **82**, 967 (1976).

[12] D. W. Sharpe, The syzygies and semi-regularity of certain ideals defined by matrices. Proc. London Math. Soc. (3) **15**, 645—679 (1965).

[13] J. Wahl, Equations defining rational singularities. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **10**, 231—264 (1977).

Eingegangen am 23. 7. 1980

Anschrift des Autors:

Oswald Riemenschneider
Mathem. Seminar der Universität
Bundesstr. 55
D-2000 Hamburg 13