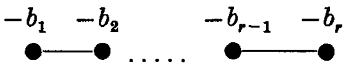
Diedersingularitäten

Herrn Erich Kähler zum 70. Geburtstag gewidmet

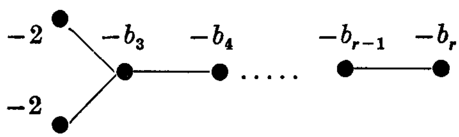
Von Kurt Behnke und Oswald Riemenschneider in Hamburg

In dieser Arbeit wird die in [6] begonnene Untersuchung von Deformationen zweidimensionaler Quotientensingularitäten fortgesetzt. Während dort Quotienten von $\mathbb{C}^2$ nach zyklischen Gruppen behandelt wurden, deren Auflösung durch die dualen Graphen



, $b_\varrho \geqslant 2$, $\varrho = 1, \ldots, r$

mit $\bullet \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ beschrieben werden, interessieren wir uns hier für diejenigen zweidimensionalen normalen analytischen Singularitäten, die einen Graphen der Form



, $b_\varrho \geqslant 2$, $r \geqslant 4$

besitzen. Da diese nach Brieskorn [2] *straff* (engl. „taut") sind, d.h. durch die topologischen, aus dem Graphen abzulesenden Größen analytisch bestimmt werden, wird ihre analytische Struktur schon festgelegt durch die beiden natürlichen Zahlen n, q mit $1 < q < n$, $(n, q) = 1$, die man aus dem Hirzebruch-Jungschen Kettenbruch

$$\frac{n}{q} = b_3 - \underline{1}\rfloor\overline{b_4} - \ldots - \underline{1}\rfloor\overline{b_r}$$

gewinnt. Da ferner im Falle $b_3 = \ldots = b_r = 2$ die Quotientensingularität nach der binären Diedergruppe D_q der Ordnung $4q$ vorliegt, wollen wir sie allgemein als *Diedersingularitäten* (vom Typ $D_{n,q}$) bezeichnen.

Brieskorns Klassifikation der Quotientensingularitäten in [2] gestattet es, diese Singularitäten als Quotienten von $\mathbb{C}^2$ nach einer geeigneten Gruppe $G_{n,q}$ darzustellen, wobei sich $G_{n,q}$ in einfacher Weise aus D_q und der zyklischen Gruppe Z_{2m} bzw. $Z_{4m} \subset ZL(2, \mathbb{C})$ der Ordnung $2m$ bzw. $4m$, $m = n - q$, zusammensetzt (vgl. § 1). Es ist nicht schwer, die Invarianten der Gruppe $G_{n,q}$ (§ 2) und damit die Gleichungen der Diedersingularitäten (§ 3) zu bestimmen.

Der zweite Teil dieser Arbeit ist der Berechnung des Vektorraumes T^1 der infinitesimalen Deformationen der Diedersingularitäten gewidmet. Nach PINKHAMS Methode [5], die wir in § 4 kurz darstellen, ist dazu nur die Kenntnis der Invarianten und gewisser invarianter Derivationen nötig. Die letzteren berechnen wir in § 5. Im abschließenden Paragraphen wird dann das Problem reduziert auf die Lösung eines linearen Gleichungssystemes, das aber leider schon in den einfachsten Fällen zu umfangreichen Rechnungen führt. Das von uns berechnete Zahlenmaterial weist genügend viele Gesetzmäßigkeiten auf, um eine allgemeine Vermutung über die Dimension dieses Raumes aufstellen zu können. Einen Beweis dieser Vermutung werden wir in einer späteren Arbeit erbringen.

§ 1. Die Gruppen

Wie in der Einleitung betrachten wir natürliche Zahlen n und q mit $1 < q < n$ und $(n, q) = 1$. Mit Hilfe der Koeffizienten $b_\varrho \geqslant 2$, $3 \leqslant \varrho \leqslant r$, $r \geqslant 4$, der Hirzebruch-Jungschen Kettenbruchentwicklung für n/q bilden wir

$$\frac{n_1}{q_1} = b_4 - 1 \rfloor\overline{\ \ldots\ } \quad - 1 \rfloor\overline{b_r}, \quad (n_1, q_1) = 1.$$

Es gilt dann

$$\frac{n}{q} = b_3 - \frac{q_1}{n_1}$$

und also $n = b_3 n_1 - q_1$, $q = n_1$. Ferner sei $m = n - q = (b_3 - 1) n_1 - q_1$. Wir interessieren uns mithin in BRIESKORNS Schreibweise ([2], p. 345) für den Graphen

$$\langle b_3;\ 2,1;\ 2,1;\ n_1, q_1 \rangle.$$

Folglich ist nach [2], Satz 2.11, die Diedersingularität vom Typ $D_{n,q}$ analytisch isomorph zu $\mathbb{C}^2/G_{n,q}$ mit

$$G_{n,q} = \begin{cases} (Z_{2m}, Z_{2m};\ D_q, D_q), & m \text{ ungerade} \\ (Z_{4m}, Z_{2m};\ D_q, C_{2q}), & m \text{ gerade.} \end{cases}$$

Hierbei sind D_q, Z_{2m} und Z_{4m} die in der Einleitung erwähnten Gruppen, C_{2q} ist die zyklische Gruppe der Ordnung $2q$ in $SL(2, \mathbb{C})$, und es ist

$$(Z_{2m}, Z_{2m};\ D_q, D_q) = \{h_1 h_2 : h_1 \in Z_{2m},\ h_2 \in D_q\},$$
$$(Z_{4m}, Z_{2m};\ D_q, C_{2q}) = \{h_1 h_2 : h_1 \in Z_{4m},\ h_2 \in D_q,\ h_1 \bmod Z_{2m} = h_2 \bmod C_{2q}\},$$

wobei die Gleichung in der letzten Klammer bzgl. der kanonischen Isomorphie $Z_{4m}/Z_{2m} \cong D_q/C_{2q} \cong Z_2$ zu verstehen ist.

Da alle im Spiel befindlichen Gruppen einfache Erzeugende besitzen, können wir die Gruppen $G_{n,q}$ explizit beschreiben. Setzen wir zur Abkürzung $\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

1. Z_{2m} wird erzeugt von $\varphi_m = \begin{pmatrix} \zeta_{2m} & 0 \\ 0 & \zeta_{2m} \end{pmatrix}$,
2. Z_{4m} wird erzeugt von φ_{2m},
3. C_{2q} wird erzeugt von $\psi_q = \begin{pmatrix} \zeta_{2q} & 0 \\ 0 & \zeta_{2q}^{-1} \end{pmatrix}$,
4. D_q wird erzeugt von ψ_q und $\eta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Die letzte Aussage findet man z.B. in KLEINS Buch [3] auf p. 37. Wegen $\psi_q^q = \eta^2 = -id$ gilt offensichtlich

$$D_q = \{\eta^\alpha \psi_q^\beta : \alpha = 0, 1;\ \beta = 0, \ldots, 2q-1\}$$

und damit, wie eingangs behauptet, ord $D_q = 4q$. Ebenso gilt $\varphi_m^m = -id \in D_q$, und dies hat mit $(m, q) = 1$

$$G_{n,q} = \{\eta^\alpha \psi_q^\beta \varphi_m^\gamma : \alpha = 0, 1;\ \beta = 0, \ldots, 2q-1;\ \gamma = 0, \ldots, m-1\}$$

und ord $G_{n,q} = 4mq$ für *ungerades* m zur Folge. Für *gerades* m ergibt sich ebenso einfach

$$G_{n,q} = \{\psi_q^\beta \varphi_{2m}^\gamma : \beta = 0, \ldots, 2q-1;\ \gamma = 0, 2, \ldots, 2\mathrm{m}-2\}$$
$$\cup\ \{\eta \psi_q^\beta \varphi_{2m}^\gamma : \beta = 0, \ldots, 2q-1;\ \gamma = 1, 3, \ldots, 2\mathrm{m}-1\},$$

wenn man berücksichtigt, daß ψ_q und $\varphi_{2m}^2 = \varphi_m$ bzw. η und φ_{2m} das Bild id bzw. $-id$ in $Z_2 \cong D_q/C_{2q} \cong Z_{4m}/Z_{2m}$ besitzen. Auch hier ergibt sich ord $G_{n,q} = 4mq$.

§ 2. Die Invarianten

Wir lassen nun $G_{n,q}$ auf $S = \mathbb{C}\,[u, v]$ wirken vermöge $\varphi(u) = au + bv$, $\varphi(v) = cu + dv$, wobei $\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{n,q}$. Nach einer Bemerkung von E. NOETHER [4] wird die invariante Algebra $S_{n,q} = S^{G_{n,q}}$ erzeugt von den Polynomen

$$\mu(u^j v^k) = \frac{1}{\mathrm{ord}\, G_{n,q}} \sum_{\varphi \in G_{n,q}} \varphi(u^j v^k),\ 1 \leqslant j + k \leqslant \mathrm{ord}\, G_{n,q}.$$

1. Fall: m ungerade.

$$4mq\, \mu(u^j v^k) = \sum_{\alpha = 0, 1} \sum_{\beta = 0}^{2q-1} \sum_{\gamma = 0}^{m-1} \eta^\alpha \psi_q^\beta \varphi_m^\gamma (u^j v^k).$$

Nun ist

$$\sum_{\gamma=0}^{m-1} \varphi_m^\gamma (u^j v^k) = \left(\sum_{\gamma=0}^{m-1} \zeta_{2m}^{\gamma(j+k)}\right) u^j v^k,$$

$$\sum_{\beta=0}^{2q-1} \psi_{2q}^\beta (u^j v^k) = \left(\sum_{\beta=0}^{2q-1} \zeta_{2q}^{\beta(j-k)}\right) u^j v^k$$

und

$$\sum_{\beta=0}^{2q-1} \zeta_{2q}^{\beta(j-k)} = \begin{cases} 2q & j-k \equiv 0 \bmod 2q \\ 0 & j-k \not\equiv 0 \bmod 2q. \end{cases}$$

Im ersten Fall ist $j+k$ gerade und damit

$$2\sum_{\gamma=0}^{m-1} \zeta_{2m}^{\gamma(j+k)} = \sum_{\gamma=0}^{2m-1} \zeta_{2m}^{\gamma(j+k)} = \begin{cases} 2 & j+k \equiv 0 \bmod 2m \\ 0 & j+k \not\equiv 0 \bmod 2m. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\mu(u^j v^k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(u^j v^k + i^{j+k} u^k v^j) & \begin{matrix} j+k \equiv 0 \bmod 2m \\ j-k \equiv 0 \bmod 2q \end{matrix} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Fall: m gerade.

$$4mq\mu(u^j v^k) = \sum_{\beta=0}^{2q-1} \sum_{\gamma=0}^{m-1} (\psi_q^\beta \varphi_{2m}^{2\gamma} + \eta \psi_q^\beta \varphi_{2m}^{2\gamma+1})(u^j v^k)$$

$$= \begin{cases} 2q\left(\sum_{\gamma=0}^{m-1} \zeta_{4m}^{2\gamma(j+k)} u^j v^k + i^{j+k} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \zeta_{4m}^{(2\gamma+1)(j+k)} u^k v^j\right) \\ \qquad\qquad j-k \equiv 0 \bmod 2q \\ 0 \qquad\qquad j-k \not\equiv 0 \bmod 2q \end{cases}$$

Im oberen Fall ergibt sich

$$\mu(u^j v^k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(u^j v^k + i^{j+k} \zeta_{4m}^{j+k} u^k v^j) & j+k \equiv 0 \bmod 2m \\ 0 & j+k \not\equiv 0 \bmod 2m \end{cases}$$

Setzt man noch $j+k = 2mt$, $j-k = 2qs$, so kann man ohne Einschränkung $s \geqslant 0$ annehmen. Da sich der Fall $s=0$ von selbst erledigt, erhält man in Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

Satz 1. *$S_{n,q}$ wird erzeugt von den Polynomen $(uv)^{2m}$ und*

$$(uv)^{mt-qs}\left(u^{2qs} + (-1)^t v^{2qs}\right)$$

mit $\quad 1 \leqslant t \leqslant 2q, \;\; s \geqslant 1, \;\; mt - qs \geqslant 0.$

Dieses Erzeugendensystem ist jedoch i.a. zu groß. Um ein minimales auswählen zu können, bilden wir die Hirzebruch-Jungsche Kettenbruchentwicklung für n/m:

$$\frac{n}{m} = a_2 - 1\underline{|}\overline{a_3} - \ldots - 1\underline{|}\overline{a_{e-1}}, \; e \geqslant 3, \; a_\varepsilon \geqslant 2.$$

Nach [6], Lemma 4 gilt

$$e = 3 + \sum_{\varrho=3}^{r} (b_\varrho - 2),$$

und dies ist wegen [2], p. 349, die Einbettungsdimension der Diedersingularität vom Typ $D_{n,q}$. Es genügt daher, aus den Erzeugenden in Satz 1 e Stück so auszuwählen, daß die übrigen sich durch diese algebraisch darstellen lassen. Wir setzen

$$A_\varepsilon = \begin{cases} a_\varepsilon + 1, & \varepsilon = 3 \\ a_\varepsilon, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$s_2 = 1,\ s_3 = 1,\ s_{\varepsilon+1} = A_\varepsilon s_\varepsilon - s_{\varepsilon-1},\ 3 \leqslant \varepsilon \leqslant e-1,$$

$$t_2 = a_2,\ t_3 = a_2 - 1,\ t_{\varepsilon+1} = A_\varepsilon t_\varepsilon - t_{\varepsilon-1},\ 3 \leqslant \varepsilon \leqslant e-1,$$

$$r_\varepsilon = m t_\varepsilon - q s_\varepsilon,\ 2 \leqslant \varepsilon \leqslant e.$$

Wir setzen ferner $\bar{n} = (a_2 + 1)m - n$, $\bar{m} = a_2 m - n$. Dann gilt im Falle $e = 3$ wegen $m = 1$ auch $a_2 = n$ und damit $\bar{n} = 1$, $\bar{m} = 0$. Im Falle $e \geqslant 4$ dagegen ist $\bar{m} \neq 0$ und

$$\frac{\bar{n}}{\bar{m}} = A_3 - 1 \underline{|} A_4 - \ldots - 1 \underline{|} A_{e-1}.$$

Nun ist $r_2 = a_2 m - q = (a_2 + 1)m - n = \bar{n}$ und $r_3 = r_2 - m = \bar{m}$. Hieraus folgt (siehe z.B. [6]):

Die r_ε fallen streng monoton mit wachsendem ε. Es gilt $r_{e-1} = 1$, $r_e = 0$. Die s_ε wachsen monoton. Es ist $s_e = \bar{n} - \bar{m} = m$.

Schließlich ist $t_4 = (a_3 + 1)(a_2 - 1) - a_2 = a_3(a_2 - 1) - 1$ etc., insbesondere $t_e = q$.

Satz 2. *Die Polynome*

$$x_1 = (uv)^{2m}$$

$$x_\varepsilon = (uv)^{r_\varepsilon} \left(u^{2qs_\varepsilon} + (-1)^{t_\varepsilon} v^{2qs_\varepsilon}\right),\ \varepsilon = 2, \ldots, e,$$

bilden ein minimales Erzeugendensystem von $S_{n,q}$.

Beweis: Wegen $r_\varepsilon = m t_\varepsilon - q s_\varepsilon \geqslant 0$, $\varepsilon = 2, \ldots, e$, kommen diese Polynome unter den in Satz 1 angegebenen vor. Es sei umgekehrt

$$x = (uv)^r \left(u^{2qs} + (-1)^t v^{2qs}\right)$$

mit $1 \leqslant t \leqslant 2q$, $s \geqslant 1$ und $r = mt - qs \geqslant 0$ vorgegeben. Wir können dann $r < 2m$ voraussetzen und führen Induktion nach s, $1 \leqslant s \leqslant 2m$. Für $s = 1$ muß $q \leqslant mt$ und damit $n \leqslant m(t+1)$ gelten. Dies ist wegen $r < 2m$ nur für $t = a_2$ und $t = a_2 - 1$ möglich. Also ist in diesem Fall $x = x_2$ oder $x = x_3$. Ist $s \leqslant m$, so folgt mit einer ähnlichen Aussage wie in [6], p. 216 unten, aus der Gleichung $r + qs = mt$ die Existenz von natürlichen Zahlen $c_\varepsilon \geqslant 0$, $\varepsilon = 2, \ldots, e$, mit der Eigenschaft

$$r = \sum_{\varepsilon=2}^{e} c_\varepsilon r_\varepsilon, \quad s = \sum_{\varepsilon=2}^{e} c_\varepsilon s_\varepsilon, \quad t = \sum_{\varepsilon=2}^{e} c_\varepsilon t_\varepsilon.$$

Ist $s > m$, so ergibt sich aus $qs < mt$ auch $t > q$. Indem wir $r = mt - qs = m(t-q) - q(s-m) = m(t-t_e) - q(s-s_e)$ und die obige Zerlegung für r, $s - s_e$, $t - t_e$ anwenden, erhalten wir eine entsprechende Zerlegung für r, s und t. Ist also $s > 1$, so bekommen wir auf diese Weise eine Darstellung

$$s = s' + s'', \quad 1 \leqslant s'' \leqslant s', \quad t = t' + t'',$$

so daß $r' = mt' - qs'$ und $r'' = mt'' - qs''$ nicht negativ sind. Wir bilden

$$x' = (uv)^{r'} \left(u^{2qs'} + (-1)^{t'} v^{2qs'}\right)$$

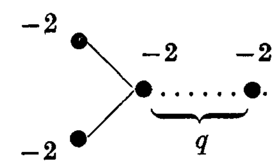
und entsprechend x''. Dann gilt

$$x'\,x'' = x + (-1)^{t''} (uv)^{r+2qs''} \left(u^{2q(s'-s'')} + (-1)^{t} v^{2q(s'-s'')}\right),$$

wobei der rechts stehende Ausdruck wegen $mt - q(s' - s'') = r + 2qs''$ von der bekannten Form ist. Da dieser und die Polynome x' und x'' sich nach Induktionsvoraussetzung durch die x_ε ausdrücken lassen, gilt dasselbe auch für x, q.e.d.

Bemerkung: Mit ähnlichen Argumenten kann man auch direkt beweisen, daß e die minimale Anzahl von Erzeugenden ist.

Beispiel 1. Es sei $e = 3$; dann ist $m = 1$ und $n = q + 1$, $q \geqslant 2$. Es handelt sich in diesem Fall um den rationalen Doppelpunkt, dessen Graph mit dem Dynkin-Schema vom Typ D_{q+2} übereinstimmt:

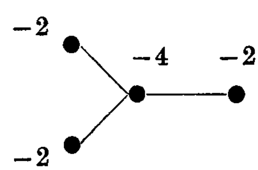


Satz 2 liefert das minimale Erzeugendensystem

$$x_1 = (uv)^2, \quad x_2 = (uv)\left(u^{2q} - (-1)^q v^{2q}\right), \quad x_3 = u^{2q} + (-1)^q v^{2q},$$

das man schon bei Klein [3] findet.

Beispiel 2. Wir betrachten die Singularität



Es ergeben sich wegen $4-1\sqrt{2}=7/2$ die Zahlen n, q, m zu 7, 2 und 5. Daraus erhält man

$$\begin{array}{rcllll} A_\varepsilon & : & 2 & 3 & 3 & \\ r_\varepsilon & : & 8 & 3 & 1 & 0 \\ s_\varepsilon & : & 1 & 1 & 2 & 5 \\ t_\varepsilon & : & 2 & 1 & 1 & 2, \end{array}$$

und damit die Erzeugenden

$$x_1=(uv)^{10}$$

$$x_2=(uv)^8\,(u^4+v^4) \qquad x_3=(uv)^3\,(u^4-v^4)$$
$$x_4=(uv)\,(u^8-v^8) \qquad x_5=u^{20}+v^{20}.$$

Die im Beweis von Satz 2 benutzte Zerlegung von r, s und t in die r_ε, s_ε und t_ε ist nicht eindeutig, da man stets Beziehungen

$$r_\varepsilon+r_{\varepsilon+2}=A_{\varepsilon+1}\,r_{\varepsilon+1}$$
$$r_\delta+r_\varepsilon=(A_{\delta+1}-1)\,r_{\delta+1}+(A_{\delta+2}-2)\,r_{\delta+2}+\dots$$
$$\dots+(A_{\varepsilon-2}-2)\,r_{\varepsilon-2}+(A_{\varepsilon-1}-1)\,r_{\varepsilon-1},$$

$\varepsilon-\delta>2$, und entsprechend für die s_ε und t_ε, hat. Nutzt man dies im Beweis von Satz 2 geschickt aus, so erhält man induktiv die folgende

Verschärfung von Satz 2. *Es gelte* $r=\sum_{\varepsilon=2}^{\delta} c_\varepsilon r_\varepsilon$ *mit* $3\leqslant\delta\leqslant e$ *und* $c_\delta\neq 0$, *und entsprechend für s und t.*

Dann ist

$$x=(uv)^r\left(u^{2qs}+(-1)^t\,v^{2qs}\right)$$

ein Polynom in $x_1,\dots,x_\delta$, *dessen Grad in* x_δ *kleiner oder gleich* c_δ *ist.*

Ist insbesondere $s<s_{\delta+1}$ für $3\leqslant\delta\leqslant e-1$, so müssen wegen der Monotonie der s_ε alle $c_\varepsilon=0$ sein für $\varepsilon>\delta$. x ist also ein Polynom in $x_1,\dots,x_\delta$.

Beispiel 3. Wir betrachten in Beispiel 2 die Exponenten $r=9$, $s=3$ und $t=3$, also $r=3r_3$, $s=3s_3$, $t=3t_3$.

Eine leichte Rechnung ergibt

$$x_3^3=(uv)^9\,(u^{12}-v^{12})+3\,(uv)^{9+4}\,(u^4-v^4)$$

und damit

$$(uv)^9\,(u^{12}-v^{12})=x_3^3-3x_1\,x_3.$$

§ 3. Die Gleichungen

Für die Berechnung der infinitesimalen Deformationen sind die in Satz 2 angegebenen Invarianten $x_1,\dots,x_e$ wegen ihrer einfachen Form sehr gut geeignet. Die zwischen ihnen bestehenden Relationen sind jedoch unübersichtlich. Wir führen deshalb ein weiteres Erzeugendensystem ein. Zu diesem Zwecke definieren wir bei festem n und q:

$$w_1 = \alpha uv, \quad w_2 = u^{2q} + (-1)^{a_2} v^{2q}, \quad w_3 = u^{2q} + (-1)^{a_2-1} v^{2q},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ so gewählt sei, daß die Relation

$$w_2^2 = w_3^2 + w_1^{2q}$$

besteht. Wir setzen ferner

$$c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1, \quad c_{\varepsilon+1} = a_\varepsilon c_\varepsilon - c_{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon \geqslant 4,$$
$$d_2 = 0, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = a_3 - 1, \quad d_{\varepsilon+1} = a_\varepsilon d_\varepsilon - d_{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon \geqslant 4,$$

und

$$z_1 = w_1^{2m}, \quad z_\varepsilon = w_1^{r_\varepsilon} w_2^{c_\varepsilon} w_3^{d_\varepsilon}, \quad \varepsilon = 2, \ldots, e.$$

Wegen $c_\varepsilon + d_\varepsilon = s_\varepsilon$ und $a_2 c_\varepsilon + (a_2 - 1) d_\varepsilon \equiv t_\varepsilon \bmod 2$ sieht man sofort, daß die z_ε Invarianten mit dem Totalgrad $2mt_\varepsilon$ sind.

z_1, z_2 und z_3 stimmen mit x_1, x_2 und x_3 (resp.) bis auf eine multiplikative Konstante überein. Für z_ε, $\varepsilon \geqslant 4$, ergibt sich durch leichte Rechnung eine Darstellung

$$\sum_{j=0}^{s_\varepsilon} \beta_j (uv)^{r_\varepsilon + qj} \left(u^{2q(s_\varepsilon - j)} + (-1)^{t_\varepsilon} v^{2q(s_\varepsilon - j)}\right)$$

mit $\beta_0 \neq 0$ und daraus mit Hilfe der Verschärfung zu Satz 2

$$z_\varepsilon = \beta_0 x_\varepsilon + P(x_1, \ldots, x_{\varepsilon-1}).$$

Mithin bilden auch $z_1, \ldots, z_e$ ein minimales Erzeugendensystem.

Satz 3. *Zwischen den $z_1, \ldots, z_e$ bestehen die folgenden Relationen:*

$$z_2^2 = z_1 (z_3^2 + z_1^{a_2-1})$$
$$z_1 z_\varepsilon = z_2 z_3^{a_3-2} \ldots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, \quad \varepsilon = 4, \ldots, e$$
$$z_2 z_\varepsilon = z_3^{a_3-2} \ldots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1} (z_3^2 + z_1^{a_2-1}), \quad \varepsilon = 4, \ldots, e$$
$$z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1} = z_\varepsilon^{a_\varepsilon}, \quad \varepsilon = 4, \ldots, e-1$$
$$z_\delta z_\varepsilon = z_{\delta+1}^{a_{\delta+1}-1} z_{\delta+2}^{a_{\delta+2}-2} \ldots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, \quad 4 \leqslant \delta + 1 < \varepsilon - 1 \leqslant e - 1.$$

Beweis:

Der Nachweis der ersten Relation geht auf F. Klein zurück und ist denkbar einfach:

$$\begin{aligned} z_2^2 - z_1 z_3^2 &= (w_1^{r_2} w_2)^2 - w_1^{2m} (w_1^{r_3} w_3)^2 \\ &= w_1^{2r_2} (w_2^2 - w_3^2) = w_1^{2(r_2+q)} = w_1^{2a_2 m} \\ &= z_1^{a_2}. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus

$$r_2 + r_4 + 2q = (a_3 + 1)\, r_3 + 2q = (a_3 - 1)\, r_3 + 2\,(a_2 - 1)$$

sofort

$$\begin{aligned} z_2 z_4 &= w_1^{r_2+r_4} w_2^2 w_3^{a_3-1} = w_1^{(a_3+1)r_3} w_3^{a_3+1} + w_1^{r_2+r_4+2q} w_3^{a_3-1} \\ &= (w_1^{r_3} w_3)^{a_3+1} + (w_1^{2m})^{a_2-1} (w_1^{r_3} w_3)^{a_3-1} \\ &= z_3^{a_3+1}(z_3^2 + z_1^{a_2-1}). \end{aligned}$$

Wegen $r_{\varepsilon-1} + r_{\varepsilon+1} = a_\varepsilon r_\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 4$, und entsprechend für die c_ε und d_ε ist die vierte Zeile trivial.

Es ist leicht zu sehen, daß die restlichen Relationen Implikationen der bisher bewiesenen sind, q.e.d.

Die oben angegebenen $\frac{1}{2}\,(e-1)\,(e-2)$ Relationen sind quadratisch und linear unabhängig modulo Ausdrücken der Ordnung $\geqslant 3$. Ein allgemeiner Satz von Wahl [9] über die Gleichungen rationaler Singularitäten liefert dann sofort

Satz 4. *Durch die Relationen in* Satz 3 *wird ein minimales Gleichungssystem für $S_{n,q}$ gegeben.*

Korollar. *Der rationale Doppelpunkt $S_{q+1,q}$, $q \geqslant 2$, wird beschrieben durch*

$$z_2^2 = z_1\,(z_3^2 + z_1^q).$$

Beispiel 4. Wie in Beispiel 2 sei $(n, q) = (7, 2)$. Die Gleichungen dieser Singularität lauten also:

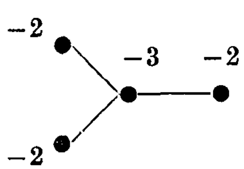
$$z_2^2 = z_1\,(z_3^2 + z_1) \quad z_2 z_4 = z_3\,(z_3^2 + z_1) \quad z_3 z_5 = z_4^3$$
$$z_1 z_4 = z_2 z_3 \quad z_2 z_5 = z_4^2\,(z_3^2 + z_1)$$
$$z_1 z_5 = z_2 z_4^2.$$

Den Fall $e = 4$ wollen wir noch gesondert hervorheben, da sich hierbei die Gleichungen in Übereinstimmung mit [7] als maximale Unterdeterminanten einer 3×2-Matrix schreiben lassen:

Satz 5. *Für $e = 4$ ist $S_{n,q}$ „determinantal". Die beschreibende Matrix ist*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^{a_3-1} \\ z_2 & z_3^2 + z_1^{a_2-1} & z_4 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5. Für die Singularität



erhält man $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$ und damit die Matrix

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^2 \\ z_2 & z_3^2 + z_1 & z_4 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Pinkhams Beschreibung von T^1

Es sei G eine endliche Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$, und X sei der Quotient von $\mathbb{C}^2$ nach G. Die kanonische Projektion $\mathbb{C}^2 \to X$ werde mit π bezeichnet. Wir sind interessiert an der analytischen Deformationstheorie der Singularität (X, x_0), wobei $x_0 = \pi(0)$. Insbesondere soll der Vektorraum T^1 der infinitesimalen Deformationen, oder anders ausgedrückt: der Tangentialraum des Basisraumes der versellen Deformation von (X, x_0) im ausgezeichneten Punkt, berechnet werden. Dazu bezeichnen wir $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ mit M' und $X \backslash \{x_0\}$ mit X', ferner sei $i : (X, x_0) \to (\mathbb{C}^e, 0)$ eine analytische Einbettung. Man hat dann eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \to \Theta_{X'} \xrightarrow{\chi} i^* \Theta_{\mathbb{C}^e} \to N_{X' \mid \mathbb{C}^e} \to 0,$$

in der Θ die entsprechenden Tangentialbündel und N das Normalenbündel bezeichnet. χ gibt Anlaß zu einer Abbildung

$$\chi : H^1(X', \Theta_{X'}) \to H^1(X', i^* \Theta_{\mathbb{C}^e}),$$

deren Kern gerade T^1 ist, wie SCHLESSINGER [8] gezeigt hat. Außerdem gilt $H^1(X', \Theta_{X'}) = H^1(M', \Theta_{\mathbb{C}^2})^G$. Sind $x_1 = f_1(u, v), \ldots, x_e = f_e(u, v)$ homogene Erzeugende von $\mathbb{C}[u, v]^G$, die die Einbettung i induzieren, so ist $i^* \Theta_{\mathbb{C}^e}$ ein freier Modul über $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_e}$. PINKHAM hat in [5] gezeigt:

Satz 6. *Das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} H^1\left(M', \mathcal{O}_{M'} \dfrac{\partial}{\partial u} \oplus \mathcal{O}_{M'} \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^G & & \\ \downarrow & \searrow^{\chi} & \\ H^1\left(M', \mathcal{O}_{M'} \dfrac{\partial}{\partial u} \oplus \mathcal{O}_{M'} \dfrac{\partial}{\partial v}\right) & \to & H^1\left(M', \sum\limits_{\varepsilon=1}^{e} \mathcal{O}_{M'} \dfrac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right). \end{array}$$

Hierbei ist die waagerechte Abbildung die direkte Summe der Cup-Produkte mit $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial u} \oplus \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial v}$ *(diese Elemente aufgefaßt als Elemente in* $H^0(M', \mathcal{O}_{M'})$*).*

Indem man beachtet, daß $H^1(M', \mathcal{O}_{M'})$ bezüglich der Standardüberdeckung $\mathcal{U}$, bestehend aus $\{(u, v) : u \neq 0\}$ und $\{(u, v) : v \neq 0\}$, von den Restklassen der 1-Kozyklen

$$\frac{1}{u^j v^k}, \quad j + k = l \geqslant 1, \quad j \geqslant 1, \quad k \geqslant 1$$

erzeugt wird, ist eine Berechnung von T^1 bei Kenntnis der f_ε prinzipiell möglich.

§ 5. Invariante Derivationen

Jeder Automorphismus φ von $\mathbb{C}[u, v]$ wirkt auf dem Raum der Derivationen vermöge $\partial \to \varphi\partial\varphi^{-1}$. Für die uns interessierenden Automorphismen φ_m, ψ_q und η läßt sich diese Aktion leicht ausrechnen. Es ergibt sich

$$\varphi_m\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \zeta_{2m}^{-1}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \varphi_m\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \zeta_{2m}^{-1}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\psi_q\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \zeta_{2q}^{-1}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \psi_q\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \zeta_{2q}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = i^{-1}\frac{\partial}{\partial v}, \quad \eta\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = i^{-1}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Nach dem in § 4 Gesagten müssen wir bei festem $l \geqslant 1$ die unter $G_{n,q}$ invarianten Derivationen der Form

$$\partial = \partial_1 + \partial_2:$$

$$\partial_1 = \sum_{j_1+k_1=l}{}' \frac{a_{j_1k_1}}{u^{j_1}v^{k_1}}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \partial_2 = \sum_{j_2+k_2=l}{}' \frac{b_{j_2k_2}}{u^{j_2}v^{k_2}}\frac{\partial}{\partial v}$$

bestimmen, wobei der Strich an den Summenzeichen bedeutet, daß nur positive Indizes zugelassen sind, und unter

$$\frac{1}{u^j v^k}$$

genauer die zugehörige Restklasse in der Čechschen Kohomologiegruppe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ zu verstehen ist. Wie man sich leicht überlegt, operieren die einzelnen Automorphismen wie folgt auf der Kohomologie:

$$\varphi_m\left(\frac{1}{u^j v^k}\right) = \frac{1}{\zeta_{2m}^l}\frac{1}{u^j v^k}$$

$$\psi_q\left(\frac{1}{u^j v^k}\right) = \frac{1}{\zeta_{2q}^{j-k}}\frac{1}{u^j v^k}$$

$$\eta\left(\frac{1}{u^j v^k}\right) = \frac{-1}{i^l}\frac{1}{u^k v^j}.$$

Das Minuszeichen bei der Aktion von η entsteht dadurch, daß η die Überdeckungselemente der Standardüberdeckung vertauscht. — Zusammen ergibt sich also:

$$\varphi_m(\partial) = \zeta_{2m}^{-(l+1)}\partial, \quad \psi_q(\partial) = \tilde{\partial}_1 + \tilde{\partial}_2, \quad \eta(\partial) = \hat{\partial}_1 + \hat{\partial}_2$$

wobei

$$\partial_1 = \sum_{j_1+k_1=l}' \frac{a_{j_1k_1}\zeta_{2q}^{k_1-j_1-1}}{u^{j_1}v^{k_1}} \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\partial_2 = \sum_{j_2+k_2=l}' \frac{b_{j_2k_2}\zeta_{2q}^{k_2-j_2+2}}{u^{j_2}v^{k_2}} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\hat{\partial}_1 = -i^{-(l+1)} \sum_{j_1+k_1=l}' \frac{b_{k_1j_1}}{u^{j_1}v^{k_1}} \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\hat{\partial}_2 = -i^{-(l+1)} \sum_{j_2+k_2=l}' \frac{a_{k_2j_2}}{u^{j_2}v^{k_2}} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Im Falle m ungerade muß ∂ unter φ_m, ψ_q und η invariant sein. Dies hat $a_{j_1k_1} = 0$ und $a_{j_2k_2} = 0$ zur Folge, außer wenn

$$\begin{aligned} l+1 &\equiv 0 \bmod 2m \\ k_1 - j_1 - 1 &\equiv 0 \bmod 2q \\ k_2 - j_2 + 1 &\equiv 0 \bmod 2q. \end{aligned}$$

Ferner folgt $a_{j_1k_1} = -i^{-(l+1)}b_{k_1j_1}$ für alle j_1, k_1. Setzen wir also

$$l = 2mt - 1,\ \ t \geqslant 1,$$

so wird der von uns gesuchte Unterraum der invarianten Derivationen, den wir von nun an mit $V(t)$ bei festem t bezeichnen wollen, erzeugt von den Elementen

$$\partial = \frac{1}{u^j v^k}\frac{\partial}{\partial u} - (-1)^t \frac{1}{u^k v^j}\frac{\partial}{\partial v}$$

mit $j \equiv k-1 \bmod 2q$, $j+k = 2mt-1$, $j, k \geqslant 1$.

Im Fall, daß m gerade ist, muß ∂ invariant sein unter $\varphi_{2m}^2 = \varphi_m$, ψ_q und $\eta\varphi_{2m}$. Dies führt zu den Bedingungen $l+1 \equiv 0 \bmod 2m$, $k_1 - j_1 - 1 \equiv$ $\equiv k_2 - j_2 + 1 \equiv 0 \bmod 2q$ und $a_{j_1k_1} = -(i\zeta_{4m})^{-(l+1)}\, b_{k_1j_1}$. Setzen wir wieder $l = 2mt-1$, so ergibt sich das gleiche Ergebnis wie oben.

Die Lösungen der obigen Kongruenzen werden gegeben durch

$$\begin{aligned} j &= j(s,t) = mt + qs - 1 \\ k &= k(s,t) = mt - qs \end{aligned} \qquad s_0^- = s_0^-(t) \leqslant s \leqslant s_0^+(t) = s_0^+,$$

wobei

$$\begin{aligned} s_0^+ &= \max\{s \in \mathbb{Z} : mt - qs \geqslant 1\}, \\ s_0^- &= \min\{s \in \mathbb{Z} : mt + qs - 1 \geqslant 1\}. \end{aligned}$$

Es gibt eine kleinste natürliche Zahl t, so daß $mt \equiv 1 \bmod q$, nämlich t_{e-1}. Offensichtlich gilt

$$s_0^- = \begin{cases} -s_0^+ + 1 & t \equiv t_{e-1} \bmod q \\ -s_0^+ & t \not\equiv t_{e-1} \bmod q. \end{cases}$$

Insbesondere ist $s_0^- \leqslant 0 \leqslant s_0^+$ außer im Fall $m = t = 1$, wo $s_0^- = 1$, $s_0^+ = 0$. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz 7: *Der Vektorraum* $V(t)$, $t \geqslant 1$, *wird erzeugt von den Derivationen*

$$\partial_{s,t} = \frac{1}{u^{j(s,t)} v^{k(s,t)}} \frac{\partial}{\partial u} - (-1)^t \frac{1}{u^{k(s,t)} v^{j(s,t)}} \frac{\partial}{\partial v}, \quad s_0^-(t) \leqslant s \leqslant s_0^+(t).$$

§ 6. Berechnung von T^1

Wir betrachten nun gemäß § 4 die durch $\chi_\varepsilon(\partial) = [\partial x_\varepsilon]$, $\varepsilon = 1, \ldots, e$, definierten Abbildungen

$$\chi_\varepsilon : V(t) \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

und bestimmen

$$U(t) = \bigcap_{\varepsilon=1}^{e} \ker \chi_\varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 1$ ergibt sich mit $\partial = \sum c_s \partial_s$, $\partial_s = \partial_{s,t}$, sofort

$$\frac{1}{2m} \partial x_1 \sim \sum_{s=s_1^-}^{s_1^+} \left(\frac{c_s}{u^{j(s)-2m+1} v^{k(s)-2m}} - \frac{(-1)^t c_s}{u^{k(s)-2m} v^{j(s)-2m+1}} \right),$$

wobei $j(s) = j(s,t)$, $k(s) = k(s,t)$ und

$$\begin{aligned} s_1^+ &= s_1^+(t) = \max\{s \in \mathbb{Z} : k(s) > 2m\} = s_0^+(t-2) \leqslant s_0^+, \\ s_1^- &= s_1^-(t) = \min\{s \in \mathbb{Z} : j(s) < 2m\} = -s_1^+ \geqslant s_0^-. \end{aligned}$$

Der Bereich $-s_1^+ \leqslant s \leqslant s_1^+$ ist genau dann nicht leer, wenn $s_0^+(t-2) \geqslant 0$, d.h. wenn $t > 2$. Aus der obigen Formel liest man unmittelbar ab, daß $\partial x_1 \sim 0$ genau dann gilt, wenn $c_r - (-1)^t c_s = 0$ ist für $j(r) - 2m + 1 = k(s) - 2m$. Wir erhalten somit die erste Bedingung:

$$c_r - (-1)^t c_s = 0, \quad r + s = 0, \quad -s_1^+ \leqslant s \leqslant s_1^+.$$

Für $\varepsilon = 2, \ldots, e-1$ ergibt die entsprechende Rechnung

$$\partial x_\varepsilon \sim \sum_{s=-s_\varepsilon^+}^{s_\varepsilon^+} \frac{(mt_\varepsilon + qs_\varepsilon) c_{s+s_\varepsilon} + (-1)^{t_\varepsilon} r_\varepsilon c_{s-s_\varepsilon}}{u^{m(t-t_\varepsilon)+qs} v^{m(t-t_\varepsilon)-qs}}$$

$$- (-1)^t \sum_{s=-s_\varepsilon^+}^{s_\varepsilon^+} \frac{r_\varepsilon c_{s-s_\varepsilon} + (-1)^{t_\varepsilon} (mt_\varepsilon + qs_\varepsilon) c_{s+s_\varepsilon}}{u^{m(t-t_\varepsilon)-qs} v^{m(t-t_\varepsilon)+qs}}$$

mit

$$s_\varepsilon^+ = s_\varepsilon^+(t) = s_0^+(t - t_\varepsilon).$$

Damit braucht nur $t > t_\varepsilon$ betrachtet zu werden, und man erhält als Bedingungen

$$(mt_\varepsilon + qs_\varepsilon)\left(c_{r+s_\varepsilon} - (-1)^{t+t_\varepsilon} c_{s+s_\varepsilon}\right) - (-1)^t r_\varepsilon \left(c_{s-s_\varepsilon} - (-1)^{t+t_\varepsilon} c_{r-s_\varepsilon}\right) = 0$$

für

$$r + s = 0, \quad -s_\varepsilon^+ \leqslant s \leqslant s_\varepsilon^+.$$

Schließlich folgt

$$\frac{1}{2qm}\,\partial x_e \sim \sum_{s=-s_0^+ + 2m}^{s_0^+} \left(\frac{c_s}{u^{j(s)-2qm+1}\,v^{k(s)}} - \frac{(-1)^{t+q} c_s}{u^{k(s)}\,v^{j(s)-2qm+1}}\right),$$

und damit

$$c_r - (-1)^{t+q} c_s = 0, \quad r + s = 2m, \quad -s_0^+ + 2m \leqslant s \leqslant s_0^+.$$

Auch hier ist $-s_0^+ + 2m \leqslant s \leqslant s_0^+$ nur möglich, wenn $t > q = t_e$. — Somit haben wir

Satz 8. *$U(t)$ besteht aus den Derivationen*

$$\partial = \sum_{s=s_0^-(t)}^{s_0^+(t)} c_s\,\partial_{s,t},$$

deren Koeffizienten den folgenden Relationen genügen:

$$(I_{1,s}) \qquad c_s - (-1)^t c_{-s} = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_1^+(t), \quad t > 2,$$

$$(I_{\varepsilon,s}) \qquad (mt_\varepsilon + qs_\varepsilon)\left(c_{s+s_\varepsilon} - (-1)^{t+t_\varepsilon} c_{-s+s_\varepsilon}\right) - (-1)^t r_\varepsilon\left(c_{-s-s_\varepsilon} - (-1)^{t+t_\varepsilon} c_{s-s_\varepsilon}\right) = 0,$$
$$0 \leqslant s \leqslant s_\varepsilon^+(t), \quad t > t_\varepsilon, \quad \varepsilon = 2, \ldots, e-1,$$

$$(I_{e,s}) \qquad c_{m+s} - (-1)^{t+q} c_{m-s} = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0^+(t) - m, \quad t > q.$$

Wir wollen die Wirkungsweise dieses Satzes zunächst an dem einfachsten Fall $e = 3$ testen. Schon hier zeigen sich die prinzipiellen Schwierigkeiten, die sich bei konkreten Rechnungen ergeben.

Satz 9. *T^1 besitzt im Fall $m = 1$, $q \geqslant 2$ die Basis*

$$\partial_{0,2\tau}, \quad \tau = 1, \ldots, q, \quad \partial_{1,q+2} + (-1)^q (2q+1)\,\partial_{-1,q+2}$$
$$\partial_{2,2q+2} + (-1)^q\,\partial_{0,2q+2} + (4q+1)\,\partial_{-2,2q+2}.$$

Insbesondere gilt $\dim T^1 = q + 2 = r$.

Beweis: Wie man sich sofort überlegt, sieht die Verteilung der s_ε^+, $\varepsilon = 1, 2, 3$ und s_0^- wie folgt aus (hierbei ist $\alpha \geqslant 0$ und negative Einträge in der Tabelle sind fortzulassen):

t	$\alpha q+1$	$\alpha q+2$	$\alpha q+3$	$\dots$	$(\alpha+1)q-1$	$(\alpha+1)q$
s_0^+	α	α	α		α	α
s_0^-	$-\alpha+1$	$-\alpha$	$-\alpha$		$-\alpha$	$-\alpha$
s_1^+	$\alpha-1$	$\alpha-1$	α		α	α
s_2^+	$\alpha-2$	$\alpha-1$	$\alpha-1$		$\alpha-1$	$\alpha-1$
s_3^+	$\alpha-1$	$\alpha-1$	$\alpha-1$		$\alpha-1$	$\alpha-1$

$V(1)$ ist leer. Für $t=2$ hat man keine Bedingungen und damit die erste unabhängige Lösung $\partial_{0,2}$. Im Bereich $3 \leqslant t \leqslant 2q$ gibt es bei geradem t keine Bedingung an c_0. Dies liefert die anderen Derivationen $\partial_{0,2\tau}$, $\tau = 2, \dots, q$, die zwischen 3 und q auch die einzigen Lösungen sind. Für $t = q+1$ ergibt sich sofort $c_1 = 0$ aus $I_{3,0}$. Bei $t = q+2$ gibt es nur eine Relation zwischen c_1 und c_{-1}, nämlich die aus $I_{2,0}$ stammende

$$(2q+1)\,c_1 = (-1)^q c_{-1}.$$

Im Bereich $q+3 \leqslant t \leqslant 2q$ ist jeweils eine von den beiden Gleichungen $I_{2,0}$ oder $I_{3,0}$ nichttrivial und liefert zusammen mit $I_{1,1}$ sofort $c_1 = c_{-1} = 0$. Man sieht leicht, daß alle anderen Gleichungssysteme nur die triviale Lösung besitzen mit Ausnahme des Falles $\alpha = 2$, $t = 2q+2$. Hier lautet das System

$$\begin{gathered}
c_1 - c_{-1} = 0\\
(2q+1)\left(c_1 + (-1)^q c_1\right) - \left(c_{-1} + (-1)^q c_{-1}\right) = 0\\
(2q+1)\left(c_2 + (-1)^q c_0\right) - \left(c_{-2} + (-1)^q c_0\right) = 0\\
c_1 - (-1)^q c_1 = 0\\
c_2 - (-1)^q c_0 = 0.
\end{gathered}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar $c_1 = c_{-1} = 0$ und

$$c_0 = (-1)^q c_2, \quad c_{-2} = (4q+1)\,c_2.$$

Damit ist auch die letzte Lösung nachgewiesen, q.e.d.

Für die abschließenden Überlegungen können wir $e \geqslant 4$ voraussetzen. Wir bemerken, daß dann $V(1) \neq (0)$ ist, die Bedingungen in Satz 8 für $t=1$ aber leer sind. Folglich ist stets $\dim T^1 \geqslant 1$; mit anderen Worten: *Die Diedersingularitäten sind nicht starr*. Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Aussage für beliebige rationale Singularitäten, die von Artin [1] bewiesen wurde.

Um Satz 8 für die Berechnung der T^1 tatsächlich verwenden zu können, benötigen wir noch eine a-priori-Abschätzung für das Verschwinden der $U(t)$. Wir zeigen

Satz 10. *Es sei* $t_* = \max\{t : s_2^+(t) < m\}$. *Dann gilt* $U(t) = (0)$ *für alle* $t > t_*$. *Insbesondere ist*

$$T^1 = \bigoplus_{t=1}^{t_*} U(t).$$

Beweis: Für $t > t_*$ ist $s_2^+(t) \geqslant m$. $t_2 = a_2 \geqslant 2$ impliziert sofort $s_2^+(t) \leqslant s_1^+(t)$; ebenso folgt mit $t_2 > t_3$, daß $s_2^+(t) \leqslant s_3^+(t)$. Es sei nun $1 \leqslant s \leqslant s_2^+(t) - 1$ (dieser Bereich ist nicht leer, da $m \geqslant 2$ ist). Dann gilt

$$c_{s+1} - (-1)^t c_{-(s+1)} = c_{s-1} - (-1)^t c_{-s+1} = 0$$

und damit aufgrund der zweiten und dritten Gleichung

$$(mt_\varepsilon + qs_\varepsilon - r_\varepsilon)\left(c_{s+1} - (-1)^{t+t_\varepsilon} c_{-s+1}\right) = 0, \quad \varepsilon = 2, 3.$$

Wegen $mt_\varepsilon + qs_\varepsilon - r_\varepsilon = 2qs_\varepsilon \neq 0$ und $t_3 = t_2 - 1$ ergibt sich daraus $c_{s+1} = c_{-s+1} = 0$.

Berücksichtigt man nochmals die erste Gleichung, so erhält man

$$c_s = 0, \quad -s_2^+(t) \leqslant s \leqslant s_2^+(t).$$

Man sieht leicht ein, daß die t_ε für $\varepsilon \geqslant 3$ monoton steigen und daß überdies $t_3 < q$ und damit auch $t_2 \leqslant q$ erfüllt ist. Dies hat $s_0^+(t) \leqslant s_2^+(t) + m$ zur Folge, was wiederum zusammen mit der Gleichung

$$c_{m+s} - (-1)^{t+q} c_{m-s} = 0$$

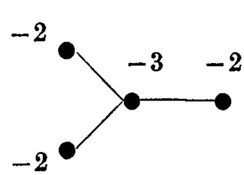
das Verschwinden aller c_s mit $s \geqslant -s_2^+(t)$ nach sich zieht. Indem man nun die zweite Gleichung für $\varepsilon = 3$ schrittweise anwendet, erweitert man diesen Bereich auf $s \geqslant -s_3^+(t)$. Beachtet man nun noch $s_{e-1}^+(t) \leqslant s_3^+(t)$ und die wegen $mt_{e-1} - qs_{e-1} = r_{e-1} = 1$ gültige Gleichheit

$$\begin{aligned} s_{e-1}^+ &= \max\{s : mt - qs > mt_{e-1} = 1 + qs_{e-1}\} \\ &= -s_{e-1} + \max\{s : mt - qs > 1\} = -s_{e-1} - s_0^-, \end{aligned}$$

so ergibt sich die Behauptung aus der zweiten Gleichung für $\varepsilon = e - 1$,

q.e.d.

Beispiel 6. Für die Singularität



gilt $\dim T^1 = 5$. Es ist nämlich $(n, m, q) = (5, 3, 2)$ und damit

$$\begin{array}{llll} r_\varepsilon: & 4 & 1 & 0 \\ s_\varepsilon: & 1 & 1 & 3 \\ t_\varepsilon: & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Man errechnet $s_0^+(t)$ sukzessive zu 1, 2, 4, 5, 7. Wegen $s_2^+(5) = s_0^+(5-2) = 4 > m$ braucht man nur t von 1 bis 4 zu betrachten. Weiter ist s_0^- gleich 0, -2, -3, -5 für diese Werte von t. Wir haben also ein Gleichungssystem mit 26 Unbekannten zu lösen. Da man für $t = 1$ keine Bedingungen hat, ergeben sich 2 frei Parameter. Für $t = 2$ lautet das Gleichungssystem

$$5c_1 - c_{-1} = 0$$

$$5(c_2 + c_0) - (c_{-2} + c_0) = 0.$$

Dies gibt weitere $5 - 2 = 3$ Parameter. Für $t = 3$ ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{lll} c_0 + c_0 = 0 & 8(c_1 + c_1) + 4(c_{-1} + c_{-1}) = 0 & c_3 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_{-1} = 0 & 8(c_2 + c_0) + 4(c_{-2} + c_0) = 0 & c_4 + c_2 = 0 \\ 5(c_2 - c_0) + (c_{-2} - c_0) = 0 & 5(c_3 - c_{-1}) + (c_{-3} - c_1) = 0, & \end{array}$$

die nur die triviale Lösung besitzen. Das gleiche gilt im Fall $t = 4$. Damit ist die Dimensionsbehauptung bewiesen. Man könnte außerdem ohne Schwierigkeiten eine Basis von T^1 anschreiben.

In allen von uns berechneten Fällen ergab sich für $e \geqslant 4$ die folgende einfache Formel

$$\dim T^1 = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_\varepsilon.$$

Sie ist gleichbedeutend mit

$$\dim T^1 = \sum_{\varrho=1}^{r} (b_\varrho - 1) + (e - 4), \quad b_1 = b_2 = 2$$

und stimmt daher mit dem Ergebnis für die zyklischen Quotienten [6] überein. Den Beweis und die notwendige Interpretation dieser Formel werden wir in einer weiteren Arbeit erbringen.

Zusatz bei der Korrektur: Der Beweis der oben angegebenen Formel erschien mittlerweile in der Arbeit „Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten", manuscripta math. 20, 377—400 (1977).

Literatur

[1] M. Artin, Algebraic construction of Brieskorn's resolutions. Jour. Algebra **29**, 330—348 (1974).
[2] E. Brieskorn, Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones math. **4**, 336—358 (1968).
[3] F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig: Teubner 1884.
[4] E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. Math. Ann. **77**, 89—92 (1916).
[5] H. Pinkham, Deformations of quotient surface singularities. Proc. Sympos. Pure Math. **30**, Part 1 (Proc. Conf. on Several Complex Variables, Williamstown, 1975), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
[6] O. Riemenschneider, Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann. **209**, 211—248 (1974).
[7] M. E. Schaps, Non-singular deformations of space curves, using determinantal schemes. Thesis: Harvard University 1972.
[8] M. Schlessinger, Rigidity of quotient singularities. Inventiones math. **14**, 17—26 (1971).
[9] J. Wahl, Equations defining rational singularities. Ann. Sci. École Norm. Sup. **10**, 231—263 (1977).

Eingegangen am 19. 1. 1976

Anschrift der Autoren: K. Behnke/O. Riemenschneider, Math. Seminar d. Univ. Hamburg, Bundesstr. 55, D-2000 Hamburg 13