

INFINITESIMALE DEFORMATIONEN  
VON DIEDERSINGULARITÄTEN

Kurt Behnke und Oswald Riemenschneider

Denote by  $T^1$  the vector space of infinitesimal deformations of a dihedral singularity of type  $D_{n,q}$ . Using Pinkham's method for quotient surface singularities we prove a formula for  $\dim T^1$ .

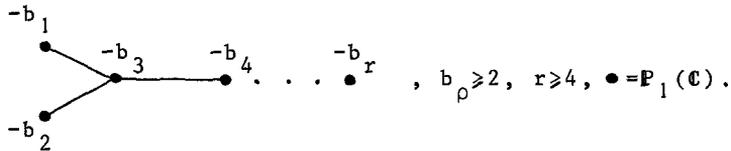
0. Einleitung

Es bezeichne  $\zeta_k$  stets eine  $k$ -te primitive Einheitswurzel. Für natürliches  $m$  und  $q$  seien  $\phi_m, \psi_q$  bzw.  $\eta \in GL(2, \mathbb{C})$  die durch

$$\begin{pmatrix} \zeta_{2m} & 0 \\ 0 & \zeta_{2m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \zeta_{2q} & 0 \\ 0 & \zeta_{2q}^{-1} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & \zeta_4 \\ \zeta_4 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentierten Abbildungen. Sind  $m$  und  $q$  teilerfremd und gilt  $q \geq 2$ , so erzeugen  $\phi_m, \psi_q$  und  $\eta$  (für ungerades  $m$ ) bzw.  $\phi_{2m} \circ \eta$  und  $\psi_q$  (für gerades  $m$ ) eine Gruppe der Ordnung  $4mq$  in  $GL(2, \mathbb{C})$ , die wir mit  $G_{n,q}$ ,  $n=m+q$ , bezeichnen (vgl. [2]). Für  $m=1$  ist dies die binäre Diedergruppe der Ordnung  $4q$ . Der Quotient von  $\mathbb{C}^2$  nach der natürlichen

Aktion von  $G_{n,q}$  besitzt genau eine normale komplex-analytische Singularität: die Diedersingularität (vom Typ)  $D_{n,q}$ . Sie wird nach Brieskorn [3] charakterisiert durch den dualen Graphen ihrer minimalen Auflösung, der die folgende Gestalt hat:



Hierbei ist  $b_1 = b_2 = 2$ , und die  $b_\rho$ ,  $\rho \geq 3$ , gewinnt man aus der Hirzebruch-Jung'schen Kettenbruchentwicklung für  $n/q$ :

$$(1) \quad \frac{n}{q} = b_3 - \frac{1}{\sqrt{b_4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{b_r}}.$$

Von der entsprechenden Entwicklung

$$(2) \quad \frac{n}{m} = a_2 - \frac{1}{\sqrt{a_3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{a_{e-1}}}, \quad a_e \geq 2, \quad e = 2, \dots, e-1$$

kann man alle Größen ablesen, die zur Aufstellung der definierenden Gleichungen der Singularität  $D_{n,q}$  nötig sind (vgl. [2], [10]). Insbesondere ist  $e$  die Einbettungsdimension von  $D_{n,q}$ . Die Situation ist also völlig analog zu derjenigen bei den zyklischen Quotienten [9].

Das Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung des Vektorraums  $T^1$  der infinitesimalen Deformationen von  $D_{n,q}$ . Mit Hilfe der Pinkham'schen Methode [8] wurde dieses Problem in [2] auf die Lösung eines homogenen linearen Gleichungs-

systems reduziert. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführte Analyse des Systems erbringt die Formel

$$(3) \quad \dim T^1 - \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_{\varepsilon} = \begin{cases} 1, & e=3 \\ 0, & e \geq 4 \end{cases}$$

und liefert überdies eine Basis für  $T^1$ . Benutzt man die in [9] skizzierten Zusammenhänge der  $b_{\rho}$  mit den  $a_{\varepsilon}$ , so läßt sich die Gleichung (3) auch in der Form

$$\dim T^1 - \sum_{\rho=1}^r (2b_{\rho} - 3) = \begin{cases} 0, & \text{alle } b_{\rho}=2, \\ -1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

schreiben. Eine Vereinfachung dieser Formel erhält man, wenn man folgendes beachtet: Erstens ist

$$(4) \quad e = \sum_{\rho=1}^r (b_{\rho} - 2) + 3;$$

und zweitens folgt (wie in [5] oder [11]) für  $\tilde{T}^1 = H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}})$ , den Vektorraum der infinitesimalen Deformationen einer (streng pseudokonvexen) minimalen Auflösung  $\tilde{X}$  der Singularität  $D_{n,q}$ , aus der Tatsache, daß die  $D_{n,q}$  "taut" sind (vgl. zu diesem Begriff [7]), daß  $\tilde{T}^1$  isomorph ist zu

$$\bigoplus_{\rho=1}^r H^1(C_{\rho}, N_{\rho}),$$

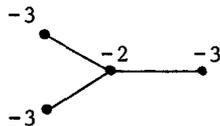
wobei  $C_\rho \cong \mathbb{P}^1$  die  $\rho$ -te Komponente der exzeptionellen Menge in  $\tilde{X}$  und  $N_\rho$  ihr Normalenbündel bezeichnet. Wegen  $\dim H^1(C_\rho, N_\rho) = b_\rho - 1$  ergibt sich hieraus sofort

$$(5) \quad \dim \tilde{T}^1 = \sum_{\rho=1}^r (b_\rho - 1),$$

und die Formel (3) erhält die Gestalt

$$(6) \quad \dim T^1 - \dim \tilde{T}^1 = \begin{cases} 0 & , \quad e=3,4, \\ e-4 & , \quad e \geq 5 \end{cases}$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Fall der zyklischen Quotienten. Die naheliegende Vermutung, daß diese Formel für jede rationale Singularität gültig ist ([10], Correction), ist jedoch falsch: Nach einer brieflichen Mitteilung von J. Wahl muß für



das Gleichheitszeichen in (6) durch ein  $>$ -Zeichen ersetzt werden.

In Verallgemeinerung der Brieskornschen Konstruktion [4] wurde von mehreren Autoren vermutet, daß die Artin-komponente der simultan auflösbaren Deformationen einer rationalen Singularität (vgl. [1]) ein Quotient von  $\tilde{T}^1$

nach einer gewissen, aus dem dualen Graphen ablesbaren Spiegelungsgruppe, mithin also glatt ist (zur genaueren Formulierung siehe [5] und [12]; einen wichtigen Beitrag zur Lösung dieser Frage verdankt man Wahl [11]). Ähnlich wie in [9] sollte es nicht schwer sein, diese Vermutung für die Diedersingularitäten mit Hilfe der expliziten Gleichungen zu verifizieren. Der Ausdruck  $\dim \tilde{T}^1$  in (6) wäre dann zu identifizieren mit der Dimension des Unterraumes derjenigen infinitesimalen Deformationen, die simultan aufgelöst werden können.

An dieser Stelle möchten wir Jonathan Wahl dafür danken, daß er in starkem Maße zu unserem Verständnis der aus der Deformationstheorie rationaler Singularitäten erwachsenden Problematik beigetragen hat.

### 1. Einige Aussagen über die Kettenbruchentwicklung (2)

Wir setzen

$$(7) \quad A_3 = a_3 + 1, \quad A_\varepsilon = a_\varepsilon, \quad \varepsilon \neq 3,$$

und

$$(8) \quad \begin{aligned} s_2 = 1, \quad s_3 = 1, \quad s_{\varepsilon+1} = A_\varepsilon s_\varepsilon - s_{\varepsilon-1}, \quad 3 \leq \varepsilon \leq e-1, \\ t_2 = a_2, \quad t_3 = a_2 - 1, \quad t_{\varepsilon+1} = A_\varepsilon t_\varepsilon - t_{\varepsilon-1}, \quad 3 \leq \varepsilon \leq e-1, \\ r_\varepsilon = m t_\varepsilon - q s_\varepsilon, \quad \tilde{r}_\varepsilon = m t_\varepsilon + q s_\varepsilon, \quad 2 \leq \varepsilon \leq e. \end{aligned}$$

Für diese Größen gilt (wie man aus [9] leicht ableitet):

$$(9) \quad r_2 = (a_2 + 1)^{m-n} > r_3 = a_2^{m-n} > \dots > r_{e-1} = 1 > r_e = 0,$$

$$(10) \quad s_2=1=s_3 < s_4 < \dots < s_e=m,$$

und mit  $b=\max(b_3, 3)$ :

$$t_2 > t_3 = t_2 - 1,$$

$$(11) \quad t_3 < \dots < t_e = q \quad \text{für } b_3=2, \text{ d.h. } a_2 \geq 3,$$

$$t_3 = \dots = t_b = 1 < t_{b+1} < \dots < t_e = q \quad \text{für } b_3 \geq 3, \text{ d.h. } a_2 = 2.$$

Wir setzen weiter für natürliches  $t$

$$s_0^+ = s_0^+(t) = \max\{s \in \mathbb{Z} : mt - qs > 0\}$$

$$(12) \quad s_0^- = s_0^-(t) = \min\{s \in \mathbb{Z} : mt + qs > 1\}.$$

Nun gilt  $mt_{e-1} - qs_{e-1} = r_{e-1} = 1$ , und  $t_{e-1}$  ist die kleinste natürliche Zahl  $t$ , zu der es ein natürliches  $s$  mit  $mt - qs = 1$  gibt. Dies hat

$$(13) \quad s_0^-(t) + s_0^+(t) = \begin{cases} 1, & t \equiv t_{e-1} \pmod{q} \\ 0, & t \not\equiv t_{e-1} \pmod{q} \end{cases}$$

zur unmittelbaren Konsequenz. Insbesondere ist  $s_0^- \leq 0 \leq s_0^+$  außer im Fall  $m=t=1$ , wo  $s_0^+ = 0$ ,  $s_0^- = 1$ .

Wählen wir bei festem  $t \in \mathbb{N}$  nichtnegative ganze Zahlen  $\tau_\epsilon$ ,  $\epsilon=b, \dots, e$ , so daß  $0 \leq t - \tau_\epsilon t_\epsilon - \dots - \tau_b t_b < t_\epsilon$  für alle  $\epsilon=b, \dots, e$ , so erhalten wir eine kanonische Darstellung

$$(14) \quad t = \tau_{b-1} t_{b-1} + \tau_b t_b + \dots + \tau_e t_e, \quad 0 \leq \tau_{b-1} < t_b.$$

Grundlegend für den späteren Beweis ist

LEMMA 1. Schreibt man  $t \in \mathbb{N}$  in der kanonischen Darstellung

(14), so gilt

$$(15) \quad s_o^+(t) = \begin{cases} \tau_b s_b + \dots + \tau_e s_e, & (\tau_{b-1}, \dots, \tau_{e-1}) \neq (0), \\ \tau_e s_{e-1} & , (\tau_{b-1}, \dots, \tau_{e-1}) = (0). \end{cases}$$

BEWEIS. Wir führen zunächst die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$(16) \quad \begin{aligned} j_2 &= 0, \quad j_3 = 1, \quad j_{\epsilon+1} = a_\epsilon j_\epsilon - j_{\epsilon-1}, \quad 3 \leq \epsilon \leq e-1, \\ k_1 &= 1, \quad k_2 = 1, \quad k_{\epsilon+1} = a_\epsilon k_\epsilon - k_{\epsilon-1}, \quad 2 \leq \epsilon \leq e-1, \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $j_\epsilon = s_\epsilon$  und  $k_\epsilon = t_\epsilon$  für alle  $\epsilon \geq 3$ . Man zeigt dann wie in [9] (Hilfssatz 1 und Aussage (\*) auf p. 216):

Ist  $j_\epsilon < j < j_{\epsilon+1}$ ,  $\epsilon \geq 3$ , und  $(r, k)$  die (eindeutig bestimmte) Lösung der Gleichung  $r + qj = mk$  mit  $0 \leq r < m$ , so gilt

$$k \geq k_\epsilon, \quad r \geq r_\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{j}{k} \leq \frac{j_\epsilon}{k_\epsilon}.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß der "Kegel"

$$K_{m,q} = \{(s, t) \in \mathbb{Z}_+^2 : mt - qs > 0\}$$

von den Elementen  $(j_\epsilon, k_\epsilon)$ ,  $\epsilon = 2, \dots, e$ , erzeugt wird.

Ferner weist man leicht nach (loc. cit., Hilfssatz 2), daß je zwei Darstellungen

$$\sum_{\epsilon=2}^e c_\epsilon (j_\epsilon, k_\epsilon) = \sum_{\epsilon=2}^e \tilde{c}_\epsilon (j_\epsilon, k_\epsilon)$$

unter alleiniger Benutzung der elementaren Umformungen

$$(17) \quad \begin{aligned} (j_{\epsilon+1}, k_{\epsilon+1}) + (j_{\epsilon-1}, k_{\epsilon-1}) &= a_\epsilon (j_\epsilon, k_\epsilon), \quad 3 \leq \epsilon \leq e-1, \\ (j_\delta, k_\delta) + (j_\epsilon, k_\epsilon) &= (a_{\delta+1} - 1) (j_{\delta+1}, k_{\delta+1}) + \\ &+ (a_{\delta+2} - 2) (j_{\delta+2}, k_{\delta+2}) + \dots + (a_{\epsilon-2} - 2) (j_{\epsilon-2}, k_{\epsilon-2}) + \\ &+ (a_{\epsilon-1} - 1) (j_{\epsilon-1}, k_{\epsilon-1}), \quad 3 \leq \delta+1 < \epsilon-1 \leq e-1 \end{aligned}$$

ineinander übergeführt werden können.

Zum Beweis von (15) kann man sich auf die Betrachtung der  $t$  mit  $t < t_e$  beschränken. Wir nehmen uns ein Paar  $(s, t) \in K_{m, q}$  her, so daß  $s$  nicht maximal ist, und haben zu zeigen, daß es keine Darstellung

$$(s, t) = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} c_{\varepsilon} (j_{\varepsilon}, k_{\varepsilon})$$

gibt, für die  $t = \sum c_{\varepsilon} k_{\varepsilon}$  kanonisch ist. Aufgrund unserer Voraussetzung gibt es ein  $\delta \geq 3$ , so daß  $(s, t) - (j_{\delta-1}, k_{\delta-1})$  noch im Kegel  $K_{m, q}$  liegt. Man hat daher eine Darstellung

$$(s, t) = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} \tilde{c}_{\varepsilon} (j_{\varepsilon}, k_{\varepsilon}) + (a_{\delta-1}-1) (j_{\delta-1}, k_{\delta-1}) + \\ + (a_{\delta-2}-2) (j_{\delta-2}, k_{\delta-2}) + \dots + (a_2-2) (j_2, k_2).$$

Bei jeder elementaren Umformung treten unterhalb des höchsten nichtverschwindenden Terms Faktoren auf, die größer oder gleich  $a_{\varepsilon}-1$  sind. Dann kann die entsprechende Darstellung von  $t$  aber nicht kanonisch sein,

q.e.d.

In dem zweiten Hilfssatz dieses Abschnitts machen wir eine analoge Aussage über die Größen

$$(18) \quad s_{\varepsilon}^{+}(t) = s_{\varepsilon}^{+}(t - t_{\varepsilon}), \quad t > t_{\varepsilon}.$$

LEMMA 2. Für  $b \leq \varepsilon \leq e$  gilt

$$(19) \quad s_{\varepsilon}^{+}(t) + s_{\varepsilon}^{-} s_{\varepsilon}^{+}(t) = \begin{cases} -1, & t = \sum_{j=\varepsilon+1}^e \tau_j t_j + \tau_{\varepsilon} t_{\varepsilon}, \\ -1, & t = t_{\varepsilon} + \tau_{\varepsilon} t_{\varepsilon}, \quad \varepsilon < e, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Offensichtlich ist  $s_{\varepsilon}^{+}(t) = s_{\varepsilon}^{+}(t) - s_{\varepsilon}$ , so daß wir uns auf  $\varepsilon < e$  beschränken können. Kommt in der kanonischen Darstellung von  $t$  das Element  $t_{\varepsilon}$  vor, so ist

$\tau_{b-1} + \tau_b t_b + \dots + (\tau_{\varepsilon} - 1)t_{\varepsilon} + \dots + \tau_{\varepsilon} t_{\varepsilon}$  die kanonische Darstellung von  $t - t_{\varepsilon}$ . Mithin liefert Lemma 1

$$s_{\varepsilon}^{+}(t) + s_{\varepsilon}^{-} = \begin{cases} s_{\varepsilon}^{+}(t) - 1, & t = t_{\varepsilon} + \tau_{\varepsilon} t_{\varepsilon}. \\ s_{\varepsilon}^{+}(t), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zweite Aussage ist z.B. erfüllt, wenn  $t_{\varepsilon} < t < t_{\varepsilon+1}$ .

Wir können daher im folgenden annehmen, daß  $\tau_{\varepsilon} = 0$  und

$t_{\delta} \leq t < t_{\delta+1}$  mit  $b \leq \varepsilon < \delta \leq e$  (wobei  $t_{e+1}$  formal gleich  $\infty$  gesetzt werde). Es sind dann die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

$$(20a) \quad t = \tau_{b-1} + \sum_{j=b}^{\kappa} \tau_j t_j + \sum_{j=\gamma}^{\delta} \tau_j t_j, \quad \begin{aligned} b \leq \kappa < \varepsilon < \gamma < \delta, \\ \tau_{\kappa} \neq 0, \quad \tau_{\gamma} \neq 0, \end{aligned}$$

$$(20b) \quad t = \tau_{b-1} + \sum_{j=\gamma}^{\delta} \tau_j t_j, \quad b \leq \varepsilon < \gamma \leq \delta \quad \tau_{\gamma} \neq 0.$$

Im ersten Fall beachte man, daß für die kanonische Darstellung

$$(21) \quad t_{\kappa} + t_{\gamma} - t_{\varepsilon} = \tau'_{\kappa+1} t_{\kappa+1} + \dots + \tau'_{\gamma-1} t_{\gamma-1}$$

auch die entsprechende Relation für die  $s_j$  gilt:

$$s_{\kappa} + s_{\gamma} - s_{\varepsilon} = \tau'_{\kappa+1} s_{\kappa+1} + \dots + \tau'_{\gamma-1} s_{\gamma-1} .$$

Offensichtlich ist dann

$$\begin{aligned} t - t_{\varepsilon} &= \tau_{b-1} + \sum_{j=b}^{\kappa-1} \tau_j t_j + (\tau_{\kappa}-1) t_{\kappa} + \sum_{j=\kappa+1}^{\gamma-1} \tau_j t_j \\ &\quad + (\tau_{\gamma}-1) t_{\gamma} + \sum_{j=\gamma+1}^{\delta} \tau_j t_j \end{aligned}$$

die kanonische Darstellung von  $t - t_{\varepsilon}$ , so daß nach Lemma 1

$$\begin{aligned} s_{\varepsilon}^+(t) + s_{\varepsilon} &= \sum_{j=b}^{\kappa-1} \tau_j s_j + (\tau_{\kappa}-1) s_{\kappa} + \sum_{j=\kappa+1}^{\gamma-1} \tau_j s_j + s_{\varepsilon} \\ &\quad + (\tau_{\gamma}-1) s_{\gamma} + \sum_{j=\gamma+1}^{\delta} \tau_j s_j \\ &= \sum_{j=b}^{\delta} \tau_j s_j = s_o^+(t) . \end{aligned}$$

Im Fall der Darstellung (20b) wählen wir wie in (21) eine geeignete Zerlegung

$$t_{b-1} + t_{\gamma} = \tau'_b t_b + \dots + \tau'_{\gamma-1} t_{\gamma-1}$$

mit  $\tau'_b \geq 1$ , in der wegen  $A_b \geq 3$  auch  $\tau'_b \geq 1$  ist. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned} t &= \tau_{b-1} + (t_b - t_{b-1}) + (\tau'_b - 1) t_b \\ &+ \sum_{j=b+1}^{\gamma-1} \tau_j t_j + (\tau_{\gamma}-1) t_{\gamma} + \sum_{j=\gamma+1}^{\delta} \tau_j t_j . \end{aligned}$$

Im Fall  $b \geq 4$  ist  $t_{b-1} = t_b = 1$  und  $\tau_{b-1} = 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} s_\varepsilon^+(t) + s_\varepsilon &= (\tau_b^1 - 1) s_b + \sum_{j=b+1}^{\gamma-1} \tau_j^1 s_j + (\tau_\gamma - 1) s_\gamma + \sum_{j=\gamma+1}^{\delta} \tau_j s_j \\ &= \sum_{j=\gamma}^{\delta} \tau_j s_j + (s_{b-1} - s_b) \\ &= \begin{cases} s_o^+(t) & , \quad \gamma = \delta = e , \\ s_o^+(t) - 1 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall  $b=3$  ist  $t_b - t_{b-1} = -1$ , und es gilt daher für  $\tau_{b-1} \geq 1$  entsprechend wie oben

$$s_\varepsilon^+(t) + s_\varepsilon = \sum_{j=\gamma}^{\delta} \tau_j s_j + (s_{b-1} - s_b) = s_o^+(t).$$

Ist dagegen  $\tau_{b-1} = 0$ , so erhält man nach naheliegender Rechnung

$$s_\varepsilon^+(t) + s_\varepsilon = \sum_{j=\gamma}^{\delta} \tau_j s_j + (s_{b-1} - 2s_b) = \begin{cases} s_o^+(t) & , \quad \gamma = \delta = e, \\ s_o^+(t) - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 2. Was Pinkhams Methode liefert

Es bezeichne  $\mathcal{O}$  die Strukturgarbe des  $\mathbb{C}^2$  mit Koordinaten  $u$  und  $v$ , und es sei  $V$  der unendlichdimensionale Vektorraum

$$H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial u} \oplus \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial v})^{G_{n,q}}.$$

Dann läßt sich  $T^1$  nach Pinkham [8] als Untervektorraum von  $V$  realisieren. In [2] wurde bewiesen:

SATZ 1. Der Vektorraum  $V$  besitzt eine natürliche Graduierung

$$V = \bigoplus_{t=1}^{\infty} V(t),$$

wobei  $V(t)$  erzeugt wird von den Derivationen

$$(22) \quad \partial_{s,t} = \frac{1}{u^{mt+qs-1} v^{mt-qs}} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{u^{mt-qs} v^{mt+qs-1}} \frac{\partial}{\partial v},$$

$$s_0^-(t) \leq s \leq s_0^+(t).$$

SATZ 2. Der Untervektorraum  $U(t) = T^1 \cap V(t)$  wird erzeugt von den Derivationen

$$\partial = \sum_{s_0^-(t)}^{s_0^+(t)} \partial_{s,t},$$

deren Koeffizienten den folgenden Gleichungen genügen:

$$(I_{1,s}) \quad c_s - (-1)^t c_{-s} = 0, \quad 0 \leq s \leq s_1^+(t) = s_0^+(t-2), \quad t > 2,$$

$$(I_{\varepsilon,s}) \quad \tilde{r}_{\varepsilon} (c_{s+s_{\varepsilon}} - (-1)^{t+t_{\varepsilon}} c_{-s+s_{\varepsilon}}) - (-1)^t r_{\varepsilon} (c_{-(s+s_{\varepsilon})} - (-1)^{t+t_{\varepsilon}} c_{-(-s+s_{\varepsilon})}) = 0,$$

$$0 \leq s \leq s_{\varepsilon}^+(t), \quad t > t_{\varepsilon}, \quad \varepsilon = 2, \dots, e.$$

BEMERKUNGEN. 1. Offensichtlich zerfällt dieses System bei

festem  $t$  in zwei Teilsysteme mit geraden bzw. ungeraden Indizes.

2. Die Gleichungen  $(I_{e,s})$  lassen sich wegen  $r_e=0, \tilde{r}_e \neq 0$  erheblich einfacher schreiben:

$$c_{s+m} - (-1)^{t+q} c_{-s+m} = 0.$$

3. Die Gleichung  $I_{1,0}$  ist trivial erfüllt für  $t \equiv 0 \pmod 2$ , ebenso die Gleichung  $I_{\varepsilon,0}$  für  $t \equiv t_\varepsilon \pmod 2, \varepsilon=2, \dots, e$ .

4. In [2] wurde eine a-priori-Schranke  $t_*$  mit  $U(t)=(0)$  für alle  $t > t_*$  angegeben. Diese kann jedoch i.a. erheblich verbessert werden, wie die im 3. Abschnitt erzielten Resultate zeigen.

### 3. Analyse des Gleichungssystems

#### A. Der Fall $b_3 \geq 3$

Hierbei ist  $b=b_3 \geq 3, a_2=a_3= \dots =a_{b-1}=2, a_b \geq 3, s_2=s_3=1, s_4=2, \dots, s_b=b-2$  und  $t_2=2, t_3= \dots =t_b=1, t_{b+1}=a_b-1$ .

Wir untersuchen im folgenden zunächst den Bereich  $1 \leq t \leq t_{b+1}+1=a_b$  und schreiben dazu die Verteilung der in Frage kommenden  $s_\varepsilon^+$  auf, wobei wir zur Abkürzung  $\beta=b-2$  setzen:

$t$	1	2	3	...	$a_b-2$	$a_b-1$	$a_b$
$s_0^+$	$\beta$	$2\beta$	$3\beta$	...	$(a_b-2)\beta$	$(a_b-1)\beta+1$	$a_b\beta+1$
$s_1^+=s_2^+$			$\beta$	...	$(a_b-4)\beta$	$(a_b-3)\beta$	$(a_b-2)\beta$
$s_3^+=\dots=s_b^+$		$\beta$	$2\beta$	...	$(a_b-3)\beta$	$(a_b-2)\beta$	$(a_b-1)\beta+1$
$s_{b+1}^+$							$\beta$

t=1. Es gibt keine Bedingungen. Also ist  $U(1)=V(1)$ .

t=2. Das Gleichungssystem lautet ausgeschrieben

$$(23) \quad \begin{aligned} \tilde{\rho}_j (c_{j+s} + c_{j-s}) - \rho_j (c_{-(j+s)} + c_{-(j-s)}) = 0, \\ 0 \leq s \leq \beta, \quad 1 \leq j \leq \beta, \end{aligned}$$

wobei

$$(24) \quad \rho_j = m - qj, \quad \tilde{\rho}_j = m + qj.$$

Für diese Koeffizienten berechnet man leicht

$$(25) \quad \begin{aligned} \rho_k \tilde{\rho}_j - \rho_j \tilde{\rho}_k &= 2mq(j-k), \\ \rho_k \rho_j - \tilde{\rho}_j \tilde{\rho}_k &= -2mq(j+k), \\ (j+1)\rho_{j+1} - j\rho_j &= \rho_{2j+1}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst das Teilsystem mit ungeradem  $j+s$ . Wir nehmen die speziellen Werte  $(j,s)=(k,k-1)$ ,  $k=1, \dots, \beta$  und  $(j,s)=(k-1,k)$ ,  $k=2, \dots, \beta$ , und erhalten die Gleichungen

$$(26) \quad \tilde{\rho}_1 c_1 - \rho_1 c_{-1} = 0$$

$$(27) \quad \begin{aligned} \tilde{\rho}_k (c_{2k-1} + c_1) - \rho_k (c_{-2k+1} + c_{-1}) &= 0 \\ \tilde{\rho}_{k-1} (c_{2k-1} + c_{-1}) - \rho_{k-1} (c_{-2k+1} + c_1) &= 0, \end{aligned}$$

$k=2, \dots, \beta$ . Aus (26) folgt  $c_1 = \rho_1 c$  und  $c_{-1} = \tilde{\rho}_1 c$  mit beliebigem  $c \in \mathbb{C}$ . Mit Hilfe der Relationen (25) folgt aus

(27) dann sofort

$$(28) \quad c_{2k-1} = \rho_{2k-1} c, \quad c_{-2k+1} = \tilde{\rho}_{2k-1} c, \quad k=1, \dots, \beta.$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß (28) tatsächlich alle Gleichungen löst. Ist z.B.  $j+s=2k-1$ ,  $j>s$ , so ist  $j-s=2(j-k+1)-1$ , und es ergibt sich (wobei wir ohne Einschränkung  $c=1$  setzen)

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}_j (c_{j+s} + c_{j-s}) - \rho_j (c_{-(j+s)} + c_{-(j-s)}) \\ &= \tilde{\rho}_j (\rho_{2k-1} + \rho_{2(j-k+1)-1}) - \rho_j (\tilde{\rho}_{2k-1} + \tilde{\rho}_{2(j-k+1)-1}) \\ &= 2\tilde{\rho}_j \rho_j - 2\rho_j \tilde{\rho}_j = 0. \end{aligned}$$

Im geraden Fall erhält man ebenso einfach die Lösungen

$$(29) \quad \begin{aligned} c_{2k} &= \frac{\rho_{2k}}{m} c_0, \quad c_{-2k} = \frac{\tilde{\rho}_{2k}}{m} c_0, \quad k=1, \dots, \beta-1, \\ c_{2\beta} &= \frac{\rho_\beta}{\tilde{\rho}_\beta} c_{-2} - \frac{2q\beta}{\tilde{\rho}_\beta} c_0. \end{aligned}$$

Der Lösungsraum des Systems (23) hat also die Dimension 3.

$3 \leq t \leq a_b - 1$ . Die Gleichungen  $I_{1,2}$ ,  $I_{2,1}$  und  $I_{3,1}$  lauten

$$\begin{aligned} c_2 - (-1)^t c_{-2} &= 0 \\ \tilde{r}_2 (c_2 - (-1)^t c_0) - (-1)^t r_2 (c_{-2} - (-1)^t c_0) &= 0 \\ \tilde{r}_3 (c_2 + (-1)^t c_0) - (-1)^t r_3 (c_{-2} + (-1)^t c_0) &= 0, \end{aligned}$$

woraus sofort  $c_2 = c_{-2} = c_0 = 0$  folgt. Entsprechend ergibt sich  $c_1 = c_{-1} = 0$  aus  $I_{1,1}$  und  $I_{2,0}$  oder  $I_{3,0}$ . Durch weitere Anwendung von  $I_{2,s}$  und  $I_{3,s}$  erhält man  $c_0 = c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \dots = c_{\pm(\beta(t-2)+1)} = 0$  und eine Relation zwischen  $c_{\beta(t-2)+2}$  und  $c_{-\beta(t-2)-2}$ . Durch naheliegende Verwendung der Gleichungen  $I_{\epsilon,s}$ ,  $\epsilon \geq 3$ , folgt das Verschwinden aller  $c_s$  mit

$|s| \leq \beta t - 1$ , und es ergibt sich aus  $I_{b, \beta(t-1)}$  die Beziehung

$$(30) \quad \tilde{r}_b c_{\beta t} - (-1)^t r_b c_{-\beta t} = 0,$$

so daß

$$(31) \quad c_{\beta t} = r_b, \quad c_{-\beta t} = (-1)^t \tilde{r}_b, \quad c_s = 0 \text{ sonst}$$

eine unabhängige Lösung ist. Diese erzeugt dann auch den Lösungsraum außer im Fall  $t = a_b - 1 = t_{b+1}$ , wo  $\beta t = s_0^+(t) - 1$  ist, so daß dort  $c_s$  und  $c_{-s}$  (bzw.  $c_s$  allein im Fall  $t_{b+1} = t_{e-1}$ ),  $s = s_0^+(t)$ , noch beliebig gewählt werden können.

$t \geq a_b$ . Genau wie in dem vorangehenden Fall sieht man ein, daß die folgende Aussage richtig ist:

(\*) Ist  $\sigma$  die größte natürliche Zahl, so daß  $c_\sigma$  in zwei verschiedenen Gleichungen vorkommt, so gilt

$$c_0 = c_{\pm 1} = \dots = c_{\pm \sigma} = 0.$$

Wir betrachten nun den Bereich  $t_\varepsilon < t < t_{\varepsilon+1}$  mit  $b < \varepsilon < e$ . Wegen Lemma 2 kommt in  $I_{\varepsilon, s}$  für  $s = s_\varepsilon^+(t)$  der Index  $s_0^+(t)$  vor. Gilt dies auch für ein  $I_{\varepsilon-1, s}$ , so ist  $U(t) \neq 0$ . Da dies wiederum nach Lemma 2 gleichbedeutend mit  $t \neq \tau_\varepsilon t_\varepsilon$  ist und für  $t = \tau_\varepsilon t_\varepsilon$  die Beziehung  $s_{\varepsilon-1}^+(t) + s_{\varepsilon-1} = s_0^+(t) - 1$  gilt, ist im anderen Fall  $\sigma = s_0^+(t) - 1$ , und es besteht die Relation

$$(32) \quad \tilde{r}_\varepsilon c_{\sigma+1} - (-1)^t r_\varepsilon c_{-(\sigma+1)} = 0.$$

Somit ist  $\dim U(t) = 1$ ,  $t = \tau_\varepsilon t_\varepsilon$ ,  $2 \leq \tau_\varepsilon \leq a_\varepsilon - 1$ .

Für  $t = t_{\varepsilon+1}$ ,  $\varepsilon+1 < e$ , ist nach Lemma 2  $\sigma = s_0^+(t) - 1$ , und die Indizes  $\pm(\sigma+1)$  kommen im System nicht vor. Dies liefert jeweils zwei, bei  $\varepsilon+1 = e-1$  wegen (13) jedoch nur eine weitere Lösungsdimension.

Schließlich sei  $t \geq t_e$ . Ist  $t = \tau_e t_e$ , so ist  $\sigma = s_0^+(t)$  und damit  $U(t) = (0)$ . Im anderen Fall ist  $\sigma = s_0^+(t) - 1$ .

Die Gleichung  $I_{e, \sigma+1-m}$  liefert dann

$$c_{\sigma+1} = c_{(\sigma+1-m)+m} = (-1)^{t+q} c_{-(\sigma+1-m)+m} = 0.$$

Ist  $t \equiv t_{e-1} \pmod{q}$ , so ist damit  $U(t)$  schon als trivial erkannt. Gilt diese Kongruenz nicht, so ist jedoch nach Lemma 2  $s_{e-1}^+(t) + s_{e-1} = s_0^+(t)$ . Die Gleichung  $I_{e-1, s_{e-1}}$  macht dann auch  $c_{-(\sigma+1)}$  zu Null, was wiederum  $U(t) = (0)$  nach sich zieht.

Indem wir die auf diese Weise gefundenen Dimensionen addieren, erhalten wir in der Tat die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned} \dim T^1 &= (2\beta+1) + 3 + (a_b - 3) + \sum_{\varepsilon=b+1}^{e-1} a_{\varepsilon-1} \\ &= \left( \sum_{\varepsilon=2}^{b-1} a_{\varepsilon} + 1 \right) + \left( \sum_{\varepsilon=b}^{e-1} a_{\varepsilon-1} \right) \\ &= \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die gesammelten Informationen über die Basis von  $T^1$

fassen wir im folgenden Satz zusammen:

SATZ 3. Ist  $\beta = b - 2 \geq 1$ , so besitzt  $T^1$  die folgende Basis:

$$\partial_{s,1}, \quad |s| \leq \beta,$$

$$\sum_{s=1}^{\beta} (\tilde{\rho}_{2s-1} \partial_{-2s+1, 2} + \rho_{2s-1} \partial_{2s-1, 2}),$$

$$\sum_{s=1}^{\beta-1} (\tilde{\rho}_{2s} \partial_{-2s, 2} + \rho_{2s} \partial_{2s, 2})^{-m(\partial_{-2\beta, 2} + \partial_{2\beta, 2})},$$

$$\tilde{r}_b \partial_{-2\beta, 2} + r_b \partial_{2\beta, 2},$$

$$\tilde{r}_b \partial_{-\beta t, t} + (-1)^t r_b \partial_{\beta t, t}, \quad t = 3, \dots, a_b - 1,$$

$$\partial_{s, t_\varepsilon}, \quad s = \pm s_o^+(t_\varepsilon), \quad \varepsilon = b+1, \dots, e-1,$$

$$\tilde{r}_\varepsilon \partial_{-s, \tau t_\varepsilon} + (-1)^{\tau t_\varepsilon} r_\varepsilon \partial_{s, \tau t_\varepsilon}, \quad s = s_o^+(\tau t_\varepsilon),$$

$$\varepsilon = b+1, \dots, e-1,$$

$$\tau = 2, \dots, a_\varepsilon - 1.$$

Hierbei ist der in der ersten oder sechsten Gruppe auftretende Ausdruck  $\partial_{s,t}$  mit  $t = t_{e-1}$  und  $s = -s_o^+(t_{e-1})$  fortzulassen.

### B. Der Fall $b_3 = 2$

Ist hierbei zusätzlich  $b_4 = \dots = b_r = 2$ , d.h.  $e = 3$ , so gilt  $a_2 = r - 1$  und  $q = r - 2$ . Bekanntlich ist  $\dim T^1 = r = q + 2 = a_2 + 1$ , wie in (3) behauptet wird. Eine Basis wurde schon in [2] be-

rechnet:

SATZ 4.  $T^1$  besitzt im Fall  $m=1, q \geq 2$  die Basis

$$\partial_{0,2t}, \quad t=1, \dots, q,$$

$$\partial_{1,q+2} + (-1)^q (2q+1) \partial_{-1,q+2}$$

$$\partial_{2,2q+2} + (-1)^q \partial_{0,2q+2} + (4q+1) \partial_{-2,2q+2}.$$

Wir können daher im folgenden  $e \geq 4$  voraussetzen. Es ist dann  $b=3, t_2=a_2 \geq 3, t_3=a_2-1$  und  $t_4=(a_3+1)(a_2-1)-a_2 = a_3(a_2-1)-1$ . Wir untersuchen zuerst den Bereich  $1 \leq t \leq t_4+1$ , den wir in  $a_3$  Abschnitte der Länge  $a_2-1$  zerlegen. Die Verteilung der  $s_\varepsilon^+(t), \varepsilon=0,1,2,3$ , sieht wie folgt aus:

t	1	2	3	...	$a_2-2$	$a_2-1$
$s_0^+$	0	0	0	...	0	1
$s_1^+$			0	...	0	0

t	$a_2$	$a_2+1$	$a_2+2$	...	$2a_2-3$	$2(a_2-1)$
$s_0^+$	1	1	1	...	1	2
$s_1^+$	0	1	1	...	1	1
$s_2^+$		0	0	...	0	0
$s_3^+$	0	0	0	...	0	1

und für  $2 \leq \alpha \leq a_3-1, a_3 \geq 3$ :

t	$\alpha t_3 + 1$	$\alpha t_3 + 2$	...	$(\alpha + 1)t_3 - 1$	$(\alpha + 1)t_3$
$s_0^+$	$\alpha$	$\alpha$	...	$\alpha$	$\alpha + 1$
$s_1^+$	$\alpha - 1$	$\alpha$	...	$\alpha$	$\alpha$
$s_2^+$	$\alpha - 1$	$\alpha - 1$	...	$\alpha - 1$	$\alpha - 1$
$s_3^+$	$\alpha - 1$	$\alpha - 1$	...	$\alpha - 1$	$\alpha$

Hierbei ist der Wert von  $s_0^+(t)$  für  $t = t_4 = a_3 t_3 - 1$  tatsächlich um 1 höher als in der Tabelle angegeben.

Für  $t = 1, 2$  und  $3 \leq t \leq 2(a_2 - 1)$ ,  $t$  gerade, gibt es keine Bedingung an  $c_0$ . Dies führt zu  $a_2 - 1$  unabhängigen Lösungsvektoren  $\partial_{0,t}$ . Entsprechend gibt es für  $t = a_2 - 1$  keine Bedingungen an  $c_{\pm 1}$ , während für  $t = a_2$  eine einzige nicht-triviale Relation

$$(33) \quad \tilde{r}_3 c_1 - (-1)^{a_2} r_3 c_{-1} = 0$$

besteht. Ist  $t \geq a_2 + 1$ , so ist eine der beiden Gleichungen  $I_{2,0}$  und  $I_{3,0}$  nichttrivial, und zusammen mit  $I_{1,1}$  ergibt sich sofort  $c_{\pm 1} = 0$ . Für  $t = 2(a_2 - 1)$  ist die einzige zwischen den Koeffizienten mit geraden Indizes bestehende Relation die von  $I_{3,1}$  stammende

$$(34) \quad \tilde{r}_3 (c_2 + (-1)^{a_2} c_0) - r_3 (c_{-2} + (-1)^{a_2} c_0) = 0.$$

In dem Bereich  $\alpha t_3 + 1 \leq t \leq (\alpha + 1)t_3 - 1$ ,  $\alpha \geq 2$ , gibt es offensicht-

lich nur die triviale Lösung außer für  $t=t_4$ , wo zwei weitere Lösungen auftreten. Schließlich ergibt sich für  $t=(\alpha+1)t_3$  sofort  $c_j=0$ ,  $|j|\leq\alpha$ , und aus  $I_{3,\alpha}$  folgt

$$(35) \quad \tilde{r}_{(\alpha+1)t_3} c_{\alpha+1}^{-(-1)} (\alpha+1)t_3 r_{(\alpha+1)t_3} c_{-(\alpha+1)} = 0.$$

Dies ist die einzige Relation außer im Fall  $\alpha=a_3-1$ , d.h.  $t=t_4+1$ , wo zusätzlich  $I_{4,0}$  nichttrivial ist und damit  $c_{\pm(\alpha+1)}$  zu Null macht.

Ist allgemeiner  $t_\varepsilon < t \leq t_{\varepsilon+1}$ ,  $\varepsilon=4, \dots, e-1$ , oder  $t_e < t$ , und überdies  $s_\varepsilon^+(t) > 0$ , so kann man wie im Abschnitt A mit Hilfe der Aussage (\*) argumentieren und findet jeweils eine Lösung an den Stellen  $\tau_\varepsilon t_\varepsilon$ ,  $2 \leq \tau_\varepsilon \leq a_\varepsilon - 1$ ,  $\varepsilon=4, \dots, e-1$ , zwei Lösungen an den Stellen  $t_{\varepsilon+1}$ ,  $4 \leq \varepsilon < e-1$ , und eine Lösung für  $t_{e-1}$ .

Insgesamt haben wir damit

$$(a_2-1)+2+1+2+2+(a_3-3)+(a_4-2)+\sum_{\varepsilon=5}^{e-1} a_\varepsilon - 1 = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_\varepsilon$$

Lösungsdimensionen gefunden. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß  $U(t)=(0)$  gilt, falls  $s_\varepsilon^+(t)$  für ein  $\varepsilon$  mit  $4 \leq \varepsilon \leq e$  und  $t > t_4+1$  verschwindet. Hierfür genügt wegen (\*) der Nachweis der folgenden Aussage:

Für jedes  $t > t_4 + 1$  und jedes  $\varepsilon \geq 4$  mit  $s_\varepsilon^+(t) = 0$  bestehen die Gleichungen  $s_{\varepsilon-2}^+(t) + s_{\varepsilon-2} = s_{\varepsilon-1}^+(t) + s_{\varepsilon-1} = s_0^+(t)$ .

BEWEIS. Es ist  $s_\varepsilon^+(t) = 0$  genau dann, wenn  $0 < t - t_\varepsilon < a_2 - 1 = t_3$ . Die kanonische Darstellung von  $t$  ist also von der Gestalt  $t = \tau_2 + t_\varepsilon$ ,  $0 < \tau_2 < t_3$ . Ist  $\varepsilon \geq 5$ , so folgen beide Gleichungen aus Lemma 2. Für  $\varepsilon = 4$  ist dies zumindest noch für die rechte Identität richtig. Aus  $s_2^+(t) = s_3^+(t-1)$  und  $s_2 = s_3 = 1$  folgt aber auch die linke für  $t > t_4 + 1$ ,  
q.e.d.

Zusammenfassend ergibt sich

SATZ 5. Ist  $b_3 = 2$ , so besitzt  $T^1$  die Basis

$$\begin{aligned} & \partial_{0,t}, \quad t=1, 2\tau, \tau=1, \dots, a_2-2, \\ & \quad , \quad \partial_{-1, a_2-1}, \quad \partial_{1, a_2-1}, \\ & \tilde{r}_3^{\partial_{-1, a_2}} + (-1)^{a_2} r_3^{\partial_{1, a_2}}, \quad \tilde{r}_3^{\partial_{-2, 2(a_2-1)}} + r_3^{\partial_{2, 2(a_2-1)}}, \\ & \quad \partial_{-2, 2(a_2-1)} - (-1)^{a_2} \partial_{0, 2(a_2-1)} + \partial_{2, 2(a_2-1)}, \\ & \tilde{r}_{\tau t_3}^{\partial_{-\tau, \tau t_3}} + (-1)^{\tau t_3} r_{\tau t_3}^{\partial_{\tau, \tau t_3}}, \quad \tau=3, \dots, a_3-1, \\ & \quad \partial_{s, t_\varepsilon}, \quad s = \pm s_0^+(t_\varepsilon), \quad \varepsilon=4, \dots, e-1, \\ & \tilde{r}_\varepsilon^{\partial_{-s, \tau t_\varepsilon}} + (-1)^{\tau t_\varepsilon} r_\varepsilon^{\partial_{s, \tau t_\varepsilon}}, \quad s = s_0^+(\tau t_\varepsilon), \quad \varepsilon=4, \dots, e-1, \\ & \quad \tau=2, \dots, a_\varepsilon-1. \end{aligned}$$

Hierbei ist wieder der in der zweiten oder sechsten

Gruppe auftretende Ausdruck  $\partial_{s,t}$  mit  $t=t_{e-1}$  und  
 $s=-s_0^+(t_{e-1})$  fortzulassen.

L I T E R A T U R

- [ 1 ] ARTIN, M.: Algebraic construction of Brieskorn's resolutions, Jour. Alg. 29, 330-348 (1974).
- [ 2 ] BEHNKE, K., und O. RIEMENSCHNEIDER: Diedersingularitäten. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (erscheint demnächst).
- [ 3 ] BRIESKORN, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones math. 4, 336-358 (1968).
- [ 4 ] - Singular elements of semisimple algebraic groups. Actes Congrès Intern. Math. 2, pp. 279-284, Nice 1970.
- [ 5 ] BURNS, D., and M. RAPOPORT: On the Torelli problem for Kählerian K-3 surfaces. Ann. Sci. École Norm. Sup. 8, 235-274 (1975).
- [ 6 ] - , and J. WAHL: Local contributions to global deformations of surfaces. Inventiones math. 26, 67-88 (1974).
- [ 7 ] LAUFER, H.: Taut two-dimensional singularities. Math. Ann. 205, 131-164 (1973).
- [ 8 ] PINKHAM, H.C.: Deformations of quotient surface singularities. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 30, Providence: Amer. Math. Soc. 1976.
- [ 9 ] RIEMENSCHNEIDER, O.: Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann. 209, 211-248 (1974).
- [ 10 ] - Dihedral singularities: Invariants, equations and infinitesimal deformations. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976). Correction: ibid.
- [ 11 ] WAHL, J.: Vanishing theorems for resolutions of singularities. Inventiones math. 31, 17-41 (1975).

- [12] - Local cohomology groups for resolutions of singularities. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 30, Providence: Amer. Math. Soc. 1976.

Kurt Behnke und Oswald Riemenschneider  
Mathematisches Seminar  
Bundesstraße 55  
D-2000 Hamburg  
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 29. Oktober 1976)