

Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

Einleitung

In [8] wurde das folgende Resultat bewiesen, das ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Deformationen rationaler Singularitäten darstellt (vgl. z.B. [1], [3], [4], [9]):

SATZ 0. *Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$ eine reguläre Familie komplexer Mannigfaltigkeiten mit regulärer Basis S . Die Faser \tilde{Z}_0 über einem festen Punkt $s_0 \in S$ sei Auflösung einer rationalen Singularität (X, x_0) . Dann läßt sich $\tilde{\pi}$ faserweise zu einer Deformation $\pi : Z \rightarrow S$ von $(X, x_0) = \pi^{-1}(s_0)$ zusammenblasen (nach evtl. Verkleinerung von S).*

Da sich jedoch die Voraussetzung der Regularität von S bei den Anwendungen als hinderlich erwies, werden wir in dieser Arbeit einen Beweis für beliebiges S nachtragen. Wir haben dazu die beiden Hauptschritte des Beweises als eigenständige Aussagen herauspräpariert, zumal sie nicht von der Rationalität der Singularität (X, x_0) abhängen und deswegen auch zur Untersuchung nichtrationaler Singularitäten herangezogen werden können. Wir beweisen in Abschnitt 1:

SATZ 1. *Es sei $\pi : Z \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser $X = \pi^{-1}(s_0)$, $s_0 \in S$ fest. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset X$ offene Mengen $U \subset Z$, $V \subset S$ mit $K \subset U$, $s_0 \in V$, $\pi(U) \subset V$, s.d. $\pi|_U : U \rightarrow V$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist.*

In Abschnitt 2 zeigen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen Plattheit beim Zusammenblasen 1-konvexer holomorpher Abbildungen erhalten bleibt (zur Definition 1-konvexer holomorpher Abbildungen und zur Existenz ihrer Reduktion vgl. die Abschnitte 1 und 2 und die dort angegebene Literatur). Es gilt:

SATZ 2. *Es sei*

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\
 \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\
 & & S
 \end{array}$$

das kanonische Reduktionsdiagramm einer 1-konvexen holomorphen Abbildung $\tilde{\pi}$. \mathcal{F} sei eine kohärente analytische Garbe auf \tilde{Z} , die entlang einer Faser $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ platt über S sei. Ferner sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt (\mathcal{F}_s bezeichnet die analytische Einschränkung von \mathcal{F} auf die Faser \tilde{Z}_s):

- (i) $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$
- (ii) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s)$ konstant in einer Umgebung von s_0 und S reduziert in s_0 .

Die Bildgarbe $\sigma_*\mathcal{F}$ ist dann π -platt entlang der Faser $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$.

Zum Beweis von Satz 2 ist es notwendig, einen der Halbstetigkeitssätze aus [7] zu verallgemeinern (Lemma 1).

Im Abschnitt 3 wenden wir die Sätze 1 und 2 auf Deformationen analytischer Singularitäten an. Zunächst vervollständigen wir ein Resultat aus [10]: Ist $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$ eine platte 1-konvexe Deformation der streng pseudokonvexen Mannigfaltigkeit $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ mit reduziertem S und $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$, so ist in dem Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

π eine platte Deformation von $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$ und $X = Z_0$ ist der Remmert-Quotient von \tilde{X} (Satz 3). Hieraus folgt sofort Satz 0 bei beliebigem Grundraum S (Satz 4). Satz 5 liefert eine partielle Umkehrung von Satz 3, mit deren Hilfe für bestimmte 1-konvexe Deformationen $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$ von \tilde{X} maximale Teilfamilien $\tilde{Z} \mid S_a \rightarrow S_a$, $S_a \hookrightarrow S$, gefunden werden können, die sich simultan zu Deformationen von X zusammenblasen lassen (Satz 6). Dieses Ergebnis wird sodann bei der Konstruktion simultaner Auflösungen isolierter Singularitäten verwendet. Schließlich beweisen wir einen Satz von Huikeshoven [4] über Brieskorns Auflösung der versellen Deformation eines rationalen Doppelpunktes in einer schärferen Fassung.

1. Beweis von Satz 1

Wir erinnern zunächst an die Definition streng pseudokonvexer komplexer Räume und 1-konvexer holomorpher Abbildungen. Die auftretenden komplexen Räume sind nicht notwendig reduziert.

DEF. 1. Eine holomorphe Abbildung $\pi : Z \rightarrow S$ heißt 1-konvex, wenn es eine C^∞ -Funktion $\varphi : Z \rightarrow \mathbf{R}$ und eine Konstante $c_* \in \mathbf{R}$ gibt, s.d. folgendes gilt:

- (i) $\varphi \mid \{z \in Z : \varphi(z) > c_*\}$ ist streng plurisubharmonisch,
- (ii) für jedes $c \in \mathbf{R}$ ist die Abbildung

$$\pi \mid \{z \in Z : \varphi(z) \leq c\}$$

eigentlich.

Man nennt dann φ eine Ausschöpfungsfunktion mit Konvexitätsschranke c_* .

Ein komplexer Raum X heißt streng pseudokonvex, wenn die Abbildung von X auf den reduzierten einpunktigen Raum 1-konvex ist.

Liegt eine 1-konvexe holomorphe Abbildung $\pi : Z \rightarrow S$ mit Ausschöpfungsfunktion φ vor, so schreiben wir abkürzend für alle $a, b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$:

$$Z_a^b = \{z \in Z : a < \varphi(z) < b\}$$

$$Z_{-\infty}^b = Z^b, \quad Z_a^\infty = Z_a,$$

$$\pi^b = \pi \mid \{z \in Z : \varphi(z) \leq b\}.$$

Wir können nun mit dem Beweis von Satz 1 beginnen. Da $X = \pi^{-1}(s_0)$ streng pseudokonvex ist, besitzt X eine Ausschöpfungsfunktion φ mit Konvexitätsschranke c_* . Mithin gibt es ein $c \in \mathbf{R}$ mit $K \subset X^c$, wobei wir ohne Einschränkung $c > c_*$ voraussetzen können.

Wir werden U sogar so konstruieren, daß $U \cap X = X^c$ gilt.

Wähle reelle Konstanten $a_1, \dots, a_s, b_1, b_2$ mit $c_* = a_1 < \dots < a_s < c < b_2 < b_1$. Nun gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset Z$ von x , eine Umgebung $V_x \subset S$ von s_0 und eine abgeschlossene holomorphe Einbettung $j_x : U_x \hookrightarrow U_x \times V_x$, s.d. $\pi(U_x) \subset V_x$ und mit $\pi_x = \pi \mid U_x$ das kanonische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{j_x} & U_x \times V_x \\ & \searrow \pi_x & \swarrow pr_2 \\ & & V_x \end{array}$$

kommutiert, wobei pr_2 die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Da nach Voraussetzung X^{b_1} kompakt ist, genügen endlich viele Punkte $x_j, j = 1, \dots, t$, s.d.

die U_x , $j = 1, \dots, t$, die Menge $\overline{X^{b_1}}$ überdecken. Setze

$$V_0 = \bigcap_{j=1}^t V_{x_j}, \quad U_0 = \bigcup_{j=1}^t \pi_{x_j}^{-1}(V_0).$$

Dann ist U_0 eine offene Menge in Z mit $U_0 \cap X \supset \overline{X^{b_1}}$, es gilt $\pi(U_0) \subset V_0$, und U_0 besitzt abzählbare Topologie, wenn die U_x hinreichend klein gewählt wurden.

Da $X_{a_1}^{b_1} \in U_0 \cap X$ und φ dort streng plurisubharmonisch ist, gibt es nach Richberg [6] eine offene Menge U_1 in Z mit $U_1 \in U$, $U_1 \cap X = X_{a_1}^{b_1}$ und eine streng plurisubharmonische Funktion $\phi_1: U_1 \rightarrow \mathbf{R}$ mit $\phi_1|_{U_1 \cap X} = \varphi$. Wegen $X_{a_2}^{b_2} \in X_{a_1}^{b_1}$ und $X^{a_3} \in X^{a_4} \in X^{b_1}$ findet man weitere offene Mengen U_2, U_3, U_4 in Z mit

$$\begin{aligned} U_2 \in U_1, \quad U_2 \cap X &= X_{a_2}^{b_2}, \\ U_3 \in U_4 \in U_0, \quad U_i \cap X &= X^{a_i}, \quad i = 3, 4. \end{aligned}$$

Setze $\varphi|_{X^{a_4}}$ beliebig zu einer C^∞ -Funktion ϕ_4 auf U_4 fort. Ist dann $\{\delta_1, \delta_4\}$ eine Teilung der 1 bzgl. der Überdeckung $\{U_1, U_4\}$ von $W_1 = U_1 \cup U_4$, so ist

$$\phi := \delta_1 \phi_1 + \delta_4 \phi_4$$

eine C^∞ -Funktion auf W_1 mit

$$\phi|_{W_1 \cap X} = \varphi|_{X^{b_1}},$$

und

$$\phi|_{W_1 \setminus \bar{U}_4} = \phi_1|_{U_1 \setminus \bar{U}_4}$$

ist streng plurisubharmonisch. Setze schließlich noch $W_2 = U_2 \cup U_3$; es gilt dann $W_2 \in W_1$, $W_2 \cap X = X^{b_2}$.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Beweis von Satz 1 in drei Schritten.

BEHAUPTUNG 1. *Es existiert eine Umgebung $V_1 = V_1(s_0) \subset V_0$, s.d.*

$$\{z \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1) : \phi(z) > a_5\} \subset W_1 \setminus \bar{U}_4.$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem $V = V(s_0) \subset V_0$ ein $z \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1) \cap \bar{U}_4$ mit $\phi(z) > a_5$. Man findet somit eine unend-

liche Folge $z_j \in W_1 \cap \bar{U}_4$ mit $\Phi(z_j) > a_5$ und $\lim \pi(z_j) = s_0$. Da \bar{U}_4 kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die Folge (z_j) gegen ein Element $z_0 \in \bar{U}_4$ konvergiert. Also ist $z_0 \in \bar{U}_4 \cap X \subset X^{a_5}$, d.h. $z_0 \in W_1$ und $\Phi(z_0) = \varphi(z_0) < a_5$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\Phi(z_j) > a_5$ für alle j .

BEHAUPTUNG 2. *Es existiert eine Umgebung $V = V(s_0) \subset V_1$, s.d. die Abbildungen*

$$\omega^d = \pi | \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) \leq d\}, \quad d \leq c,$$

eigentlich sind.

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu beliebigem $V = V(s_0)$ ein Kompaktum $K \subset V$ und ein $d \leq c$, s.d. $L = (\omega^d)^{-1}(K)$ nicht kompakt ist. Wähle dann eine Folge (z_j) in L , die keine in L konvergente Teilfolge besitzt. Da \bar{W}_2 kompakt ist, existiert jedoch eine Teilfolge, die in \bar{W}_2 konvergiert. Der Grenzwert z_0 besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

$$\Phi(z_0) \leq d, \quad z_0 \in \overline{W_2} \setminus W_2 = \partial W_2, \quad \pi(z_0) \in K.$$

Läßt man nun V immer kleiner werden, so erhält man auf diese Weise eine Folge (z_{0j}) mit

$$\Phi(z_{0j}) \leq c, \quad z_{0j} \in \partial W_2, \quad \lim \pi(z_{0j}) = s_0.$$

Da ∂W_2 kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß diese Folge gegen ein Element $z_{00} \in \partial W_2$ konvergiert. Für dieses gilt dann

$$\Phi(z_{00}) \leq c,$$

andererseits aber

$$z_{00} \in \partial W_2 \cap X = \partial X^{b_2} \subset \{x \in X : \varphi(x) = b_2\}$$

und damit $\Phi(z_{00}) = \varphi(z_{00}) = b_2 > c$. Widerspruch!

BEHAUPTUNG 3. *Man wähle V wie in Behauptung 2 und*

$$U = \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) < c\}.$$

Dann ist $\pi: U \rightarrow V$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion

$$\psi = (c - \Phi)^{-1}$$

und Konvexitätsschranke $a_* = (c - a_5)^{-1}$.

Denn ψ ist eine C^∞ -Funktion auf U , die dort streng plurisubharmonisch ist, wo dies auch für Φ zutrifft, nach Behauptung 1 also auf $\{z \in U: \Phi(z) > a_5\} = \{z \in U: \psi(z) > a_*\}$. Ist weiter $a \in \mathbf{R}$ und $K \subset V$ kompakt, so ist

$$\{z \in U \cap \pi^{-1}(K): \psi(z) \leq a\} = \begin{cases} \emptyset, & a \leq 0 \\ \left\{ z \in U \cap \pi^{-1}(K): \Phi(z) \leq c - \frac{1}{a} \right\}, & a > 0. \end{cases}$$

Da die rechts stehende Menge nach Behauptung 2 kompakt ist, ist

$$\pi^a = \pi | \{z \in U: \psi(z) \leq a\}$$

eigentlich für alle $a \in \mathbf{R}$.—Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die Definition einer 1-konvexen holomorphen Abbildung π schließt nicht aus, daß einzelne oder sogar alle Fasern der Abbildung kompakt sein können und damit nicht streng pseudokonvex im eigentlichen Sinne sind. Setzt man jedoch voraus, daß π platt und eine Faser $\pi^{-1}(s_0)$ nicht kompakt ist, so sind auch alle hinreichend nahe bei $\pi^{-1}(s_0)$ liegenden Fasern nicht kompakt. Nur unter dieser Voraussetzung liefert Satz 1 die Existenz einer “schönen” Familie mit streng pseudokonvexen Fasern.

2. Beweis von Satz 2

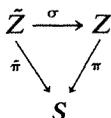
Es sei im folgenden $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion φ , es sei $s_0 \in S$, und \mathcal{F} sei eine kohärente analytische Garbe auf \tilde{Z} , die $\tilde{\pi}$ -platt entlang $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ sei. Da uns nur lokale Aussagen bzgl. s_0 interessieren, können wir annehmen, daß S klein ist. Da weiter Platttheit eine offene Eigenschaft ist, $\tilde{\pi} | \tilde{Z}^c$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist für alle $c > c_*$ und die Restriktionsabbildungen

$$H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) \rightarrow H^q(\tilde{Z}_s^c, \mathcal{F}_s)$$

bijektiv sind für alle $q \geq 1$ und alle $c > c_*$, können wir außerdem voraussetzen, daß \mathcal{F} in jedem Punkt von \tilde{Z} platt über S ist.

Setzt man ohne Einschränkung S als Steinsch voraus, so gelten die folgenden Aussagen (vgl. [5], [11]):

1. \tilde{Z} ist holomorph-konvex.
2. Ist $Z = Q(\tilde{Z})$ der Remmert-Quotient von \tilde{Z} (i.e. der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Steinsche Raum Z , für den es eine eigentliche holomorphe Abbildung $\sigma: \tilde{Z} \rightarrow Z$ mit $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, gibt), und ist $\tilde{E} = \cup_{s \in S} \tilde{E}_s$ die Vereinigung aller maximalen kompakten analytischen Mengen \tilde{E}_s in den streng pseudokonvexen Fasern \tilde{Z}_s , $s \in S$, so ist $\sigma|_{\tilde{Z} \setminus \tilde{E}}: \tilde{Z} \setminus \tilde{E} \rightarrow Z \setminus E$, $E = \sigma(\tilde{E})$, biholomorph. Insbesondere ist σ eine eigentliche Modifikation, wenn $\tilde{\pi}$ platt entlang \tilde{Z}_0 , \tilde{Z}_0 nicht kompakt und S hinreichend klein ist.
3. Die Abbildung $\tilde{\pi}$ faktorisiert eindeutig über σ ; d.h. es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\pi: Z \rightarrow S$, s.d. das Diagramm



kommutiert. (Dies ist das kanonische Reduktionsdiagramm aus Satz 2).

4. Die Abbildung π ist Steinsch (d.h. Urbilder offener Steinscher Mengen sind Steinsch), und $\pi|_E$ ist endlich. Insbesondere ist dann $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$ für alle $q \geq 1$ wegen

$$R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F} = \pi_*(R^q \sigma_* \mathcal{F}), \quad \text{Tr} R^q \sigma_* \mathcal{F} \subset E, \quad q \geq 1,$$

kohärent.

Es sei nun L ein Steinsches Kompaktum in S mit $s_0 \in \overset{\circ}{L}$ (vgl. hierzu und dem Folgenden [7], §2). Dann gibt es für alle $c > c_*$ ein Steinsches Kompaktum $K \subset Z$ mit $Z_0 \cap E \subset \overset{\circ}{K}$, $\pi^{-1}(L) \supset K$, und einen nach oben beschränkten Komplex platter $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Moduln

$$C: \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \dots,$$

s.d. folgendes gilt:

- i) $H^q(C) = H^q(\overset{\circ}{K}, \mathcal{F})$, $\overset{\circ}{K} = \sigma^{-1}(K)$, $q \geq 0$
 $= \Gamma(L, R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})$, $q \geq 1$.

ii) Ist $s \in S$ und \mathfrak{m}_s das zu s gehörende maximale Ideal von A , so gilt

$$\begin{aligned} H^q(C \otimes_A (A/\mathfrak{m}_s)) &= H^q(\{z \in \tilde{Z}_s : \varphi(z) \leq c\}, \mathcal{F}_s), \quad q \geq 0, \\ &= H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s), \quad q \geq 1. \end{aligned}$$

Da wegen der Kohärenz von $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$ die Moduln $H^q(C')$ für $q \geq 1$ endlich sind, können wir sogar ohne Einschränkung voraussetzen, daß alle C^q frei und für $q \geq 1$ endlich sind.

Mit diesen Vorbereitungen ist es möglich, die folgende Verallgemeinerung von Theorem (3.1.II) aus [7] zu beweisen.

LEMMA 1. *Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung, und \mathcal{F} sei eine $\tilde{\pi}$ -platte kohärente analytische Garbe auf \tilde{Z} . Gilt für eine natürliche Zahl $q \geq 1$*

$$i) \quad H^q(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$$

oder

$$ii) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = \text{const}, \text{ und } S \text{ ist reduziert in } s_0,$$

dann ist $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$ lokal frei nahe s_0 (und im Falle i) sogar Null). Bezeichnet $\mathfrak{m}(s)$ die maximale Idealgarbe des Punktes $s \in S$, so sind außerdem die kanonischen Abbildungen

$$i_s^k : (R^k \tilde{\pi}_* \mathcal{F} / \mathfrak{m}(s) R^k \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_s \rightarrow H^k(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_{s_0})$$

für $k = q, \max(q-1, 1)$ nahe s_0 bijektiv, und im Falle $q = 1$ ist

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}_{s_0})$$

surjektiv für alle $c > c_*$.

Beweis. Der Fall ii) ist Theorem (3.1.II) zusammen mit dem Zusatz (3.8) aus [7] und der Bemerkung auf p. 94 aus [10]. Es genügt also, den Fall i) zu behandeln. Wegen [7] Theorem (3.1.I) können wir annehmen, daß $H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0$ für alle $s \in S$. Wir betrachten dann den Komplex C' an der Stelle q :

$$C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}.$$

Für den ersten Teil der Aussage genügt der Nachweis, daß $H^q = H^q(C') = 0$ ist,

denn dann gilt für alle $s \in L$:

$$(R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_s^\wedge = \Gamma(L, R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_{m_s}^\wedge = (H_{m_s}^q)^\wedge = 0$$

(hierbei bezeichnet $\hat{}$ die entsprechenden Kompletzungen), und damit

$$R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F} | \hat{L} = 0.$$

Für den zweiten Teil genügt der Nachweis, daß

$$Z_c^{q+1} = \text{coker } \delta^q$$

ein platter A -Modul ist. Denn aus den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \text{im } \delta^q \rightarrow C^{q+1} \rightarrow Z_c^{q+1} \rightarrow 0$$

$$0 = H^q \rightarrow Z_c^q \rightarrow \text{im } \delta^q \rightarrow 0$$

folgt dann auch die Platteheit von Z_c^q , und dies impliziert gemäß [7], Satz (2.3.d) die Bijektivität der kanonischen Abbildungen

$$t_M^k: H^k(C) \otimes M \rightarrow H^k(C \otimes M), \quad k = q, \quad q-1$$

für beliebige A -Moduln M . Mit $M = A/m_s$, $s \in L$, folgt dann die zweite Behauptung.

Es sei nun $m \subset A$ ein beliebiges maximales Ideal. Wir lokalisieren den Komplex C zu

$$(*) \quad C_m^{q-1} \xrightarrow{\delta_m^{q-1}} C_m^q \xrightarrow{\delta_m} C_m^{q+1},$$

und erhalten durch Tensorieren mit A_m/mA_m :

$$C_m^{q-1}/mC_m^{q-1} \rightarrow C_m^q/mC_m^q \rightarrow C_m^{q+1}/mC_m^{q+1}.$$

Die letzte Sequenz ist aber exakt, da es ein $s \in L$ gibt $m = m_s$, so daß nach Voraussetzung

$$H^q(C_m/mC_m) = H^q(C/mC) = H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0.$$

Da die Moduln C_m^l frei und für $l \geq 1$ endlich sind, folgt hieraus nach einem bekannten Lemma der kommutativen Algebra die Exaktheit von (*), und

coker δ_m^q ist direkter Summand von C_m^{q+1} , also frei. Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes ist $\text{coker } \delta_m^q = (\text{coker } \delta^q)_m = (Z_c^{q+1})_m$. Damit ist Z_c^{q+1} platt und $H^q = H^q(C) = 0$, q.e.d.

Wir kommen nun zum *Beweis von Satz 2*. Die Abbildung σ ist außerhalb \tilde{E} biholomorph. Wir brauchen daher nur Punkte $z_0 \in Z_0 \cap E$ zu betrachten. Wähle Steinsche Kompakta $L \subset S$ und $K \subset Z$ wie zu Beginn dieses Abschnittes. Es genügt zu zeigen, daß $M = \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F})$ ein platter $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Modul ist; denn bezeichnet m bzw. n das zu s_0 bzw. z_0 in A bzw. $B = \Gamma(K, \mathcal{O}_Z)$ gehörende maximale Ideal, so folgt daraus die Platteit von

$$(\sigma_* \mathcal{F})_{z_0}^\wedge = (M_n)^\wedge \quad \text{über} \quad \mathcal{O}_{S, s_0}^\wedge = (A_m)^\wedge$$

und damit die Platteit von $(\sigma_* \mathcal{F})_{z_0}$ über \mathcal{O}_{S, s_0} . Da σ eigentlich und K Steinsch ist, folgt aber

$$\begin{aligned} M = \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F}) &= \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(U, \sigma_* \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(\sigma^{-1}(U), \mathcal{F}) = \Gamma(\sigma^{-1}(K), \mathcal{F}) \\ &= \Gamma(\tilde{K}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

und damit $M = H^0 = H^0(C)$, wobei C der oben beschriebene Komplex platter A -Moduln ist. Da \mathcal{F} die Voraussetzungen von Lemma 1 für $q = 1$ erfüllt, ist

$$Z_c^1 = \text{coker } \delta^0$$

ein platter A -Modul (dies folgt im Fall *i*) aus dem Beweis von Lemma 1 und im Fall *ii*) aus [7], (3.6)). Aus den exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{im } \delta^0 \rightarrow C^1 \rightarrow Z_c^1 \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \ker \delta^0 \rightarrow C^0 \rightarrow \text{im } \delta^0 \rightarrow 0 \\ 0 &= \text{im } \delta^{-1} \rightarrow \ker \delta^0 \rightarrow H^0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

folgt dann die Platteit von H^0 . q.e.d.

3. Anwendungen

Wir ziehen sofort eine Folgerung aus Satz 2:

SATZ 3. Es sei

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

das Reduktionsdiagramm einer platten 1-konvexen holomorphen Abbildung $\tilde{\pi}$. Es gelte für einen festen Punkt $s_0 \in S$:

i) $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{O}_{\tilde{z}_0}) = 0$

oder

ii) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{z}_s})$ konstant nahe s_0 und S reduziert in s_0 .

Dann ist π (nach evtl. Verkleinerung von S bzgl. s_0) eine platte holomorphe Abbildung mit dem Remmert-Quotienten $Q(\tilde{Z}_0)$ als spezieller Faser Z_0 .

Beweis. Lemma 1, angewendet auf die $\tilde{\pi}$ -platte Garbe $\mathcal{O}_{\tilde{z}}$, liefert die Surjektivität der Restriktionsabbildung

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{z}}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{z}_0}).$$

Nach [10] Satz 1 impliziert dies die Gleichung $Z_0 = Q(\tilde{Z}_0)$. Die Platteheit von π folgt unmittelbar aus Satz 2 wegen $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. q.e.d.

Die Bedeutung von Satz 3 für die Deformationstheorie analytischer Singularitäten liegt in Folgendem: Ist (X, x_0) eine normale isolierte analytische Singularität und ist $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$ eine (wegen Satz 1 ohne Einschränkung 1-konvexe) Deformation einer Auflösung \tilde{X} von X mit einer der Eigenschaften i) oder ii), so liefert das Reduktionsdiagramm eine Deformation $\pi: Z \rightarrow S$ von X über S .

Da die Herleitung von Satz 0 bei beliebigem Grundraum S mit Hilfe der Sätze 1 und 3 ohne Schwierigkeiten wie in [8] geschehen kann, begnügen wir uns mit der Formulierung und überlassen die Einzelheiten des Beweises dem Leser.

SATZ 4. Es sei $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$ eine platte Familie komplexer Räume. Die Faser \tilde{Z}_0 über einem festen Punkt $s_0 \in S$ sei Auflösung einer rationalen Singularität (X, x_0) . Dann läßt sich $\tilde{\pi}$ (nach evtl. Verkleinerung von S) faserweise zu einer Deformation $\pi: Z \rightarrow S$ von $\pi^{-1}(s_0) = (X, x_0)$ zusammenblasen, und die Nachbarfasern $Z_s, s \in S$, besitzen höchstens rationale Singularitäten in der Nähe von x_0 .

Wir zeigen jetzt in Ergänzung zu Satz 3, daß in gewissen 1-konvexen Deformationen $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$ von \tilde{X} eine maximale Teilfamilie $\tilde{Z}_a \rightarrow S_a$ mit reduziertem $S_a \subset S$ enthalten ist, deren Reduktionsdiagramm zu einer (platten) Deformation $\pi_a: Z_a \rightarrow S_a$ von X führt. Dazu benötigen wir die folgende partielle Umkehrung von Satz 3:

SATZ 5. *Es sei $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$ eine platte 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Reduktionsdiagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

für die folgendes gilt:

- i) $Q(\tilde{Z}_s) = Z_s$ für alle $s \in S$,
- ii) $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ lokal konstant auf S .

Dann ist auch $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ lokal konstant auf S .

Beweis. Durch Liften des Reduktionsdiagramms auf die Normalisierung von S , anschließendes Einschränken auf 1-dimensionale reduzierte Unterräume und erneutes Liften auf die Normalisierung reduziert sich der Beweis auf den Fall einer (regulären) Riemannschen Fläche S . Es sei dann $s_0 \in S$ und $L \subset S$ ein Steinsches Kompaktum mit $s_0 \in \overset{\circ}{L}$ und $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ auf L . Wir betrachten wie oben den Komplex C von platten $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Moduln bzgl. $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. Für beliebiges $s \in L$ hat man eine exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^q(C) \otimes A/\mathfrak{m}_s \xrightarrow{t_s^q} H^q(C \otimes A/\mathfrak{m}_s) \rightarrow \text{Tor}_1^A(H^{q+1}(C), A/\mathfrak{m}_s) \rightarrow 0,$$

$q \geq 0$ (vgl. [7]). Nach Voraussetzung und Konstruktion des Komplexes C ist die Abbildung

$$H^0(C) \rightarrow H^0(C \otimes A/\mathfrak{m}_s)$$

surjektiv ([10], Satz 1), und infolgedessen

$$\text{Tor}_1^A(H^1(C), A/\mathfrak{m}_s) = 0, \quad s \in L.$$

Also ist $H^1(C)$ ein platter A -Modul, und damit (da $H^1(C)$ als endlicher A -Modul insbesondere projektiv ist)

$$\text{cg } H^1(C)_{m_s} = \dim H^1(C) \otimes A/m_s$$

lokal konstant auf L . Wegen $\dim H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ für $s \in L$ ist dann nach Lemma 1, ii) die Abbildung t_s^1 bijektiv für alle $s \in L$. Also ist $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ lokal konstant auf L . q.e.d.

Wir sind nun in der Lage, das folgende Resultat zu beweisen, das eine wichtige Rolle bei der Konstruktion simultaner Auflösungen von isolierten Singularitäten spielt:

SATZ 6. *Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$ eine 1-konvexe Deformation von $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ mit $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ Dann gibt es einen (bzgl. Inklusion) maximalen reduzierten analytischen Unterraumkeim S_a von S in s_0 , s.d. im Reduktionsdiagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid S_a & \xrightarrow{\sigma_a} & Z_a \\ \tilde{\pi}_a = \tilde{\pi} \mid Z_a \searrow & & \swarrow \pi_a \\ & S_a & \end{array}$$

der 1-konvexen Abbildung $\tilde{\pi}_a : \tilde{Z}_a \rightarrow S_a$ die Abbildung π_a eine platte Deformation von $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$ ist.

Beweis. Es sei T ein reduzierter Unterraumkeim von S durch s_0 , $\tilde{\pi}_T : \tilde{Z}_T = \tilde{Z} \mid T \rightarrow T$, und im Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_T & \xrightarrow{\sigma_T} & Z_T \\ \tilde{\pi}_T \searrow & & \swarrow \pi_T \\ & T & \end{array}$$

sei Z_{T,s_0} der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{T,s_0} = \tilde{X}$. Da \tilde{X} regulär ist, ist Z_{T,s_0} normal, und da weiter π_T als platt vorausgesetzt ist, sind auch alle Nachbarfasern $Z_{T,t}$, t hinreichend nahe bei s_0 , normal. Die Abbildungen $\sigma_{T,t} : \tilde{Z}_{T,t} \rightarrow Z_{T,t}$ sind eigentlich und biholomorph außerhalb \tilde{E}_t ; folglich gilt $Q(\tilde{Z}_{T,t}) = Z_{T,t}$ für alle diese t . Da nach Voraussetzung $\dim H^2(\tilde{Z}_{T,t}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{T,t}}) = \text{const.}$ ist, kann man Satz 5 anwenden und erhält lokal um s_0 :

$$T \subset \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = d_0 := \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})\}.$$

Wir setzen für die rechts stehende Menge S_a und brauchen nur noch zu zeigen, daß sie analytisch in der Nähe von s_0 ist. Denn dann erfüllt die Familie $\tilde{\pi}_a : \tilde{Z}_a = \tilde{Z} | S_a \rightarrow S_a$, wobei S_a mit der reduzierten Struktur versehen ist, die Voraussetzungen von Satz 3, und somit ist $\pi_a : Z_a \rightarrow S_a$ eine platte Deformation von $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$.

Nach Siu [12] ist $S_0 = \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \geq d_0\}$ eine analytische Menge in S . Da aufgrund der Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen

$$\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \leq d_0$$

für alle s nahe bei s_0 gelten muß, stimmen die Mengenkeime von S_0 und S_a in s_0 überein. q.e.d.

Im folgenden sei $X = (X, x_0)$ eine normale isolierte analytische Singularität, und $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ sei eine ein für allemal fest gewählte Auflösung von X . Ferner sei $\pi : Z \rightarrow S$ eine Deformation von $\pi^{-1}(s_0) = X$, $s_0 \in S$, über dem reduzierten Basisraum S .

DEF. 2. Ein kommutatives Diagramm holomorpher Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & Z \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\varepsilon} & S \end{array}$$

heißt *simultane Auflösung von π (mit spezieller Faser \tilde{X})*, wenn folgendes gilt:

- i) $\tilde{\sigma}$ ist eigentlich und surjektiv und ε ist endlich und surjektiv mit $\varepsilon^{-1}(s_0) = \{t_0\}$.
- ii) $\tilde{\pi}$ ist eine Deformation von $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$ über dem reduzierten Basisraum T .
- iii) Für alle $t \in T$ ist $\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma} | \tilde{Z}_t : \tilde{Z}_t \rightarrow Z_s$, $s = \varepsilon(t)$, eine Auflösung der Singularitäten von Z_s . Es gilt $\tilde{\sigma}_{t_0} = \sigma$.

Ist $T = S$ und $\varepsilon = id$, so sprechen wir von einer simultanen Auflösung *ohne Basiswechsel*.

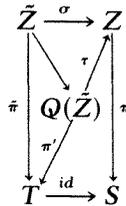
Wegen Satz 1 können wir stets annehmen, daß in einem simultanen Auflösungsdiagramm $\tilde{\pi}$ 1-konvex und π Steinsch ist. Ferner können wir S und T als Steinsch und damit Z als Steinsch und \tilde{Z} als holomorph-konvex voraussetzen. Dann gilt

LEMMA 2. $Q(\tilde{Z}) \cong Z \times_S T$, falls $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) = \text{const.}$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $S = T$, $\varepsilon = id$. Es genügt dann nachzuweisen, daß

$$(*) \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = \text{const.}$$

Hieraus folgt nämlich nach Satz 3, daß in dem kommutativen Diagramm



π' eine Deformation von $Q(\tilde{X}) = X$ ist. Da $Q(\tilde{Z})$ der Remmert-Quotient von \tilde{Z} , Z Steinsch und $\tilde{\sigma}$ eigentlich und surjektiv ist, existiert eine holomorphe Abbildung $\tau: Q(\tilde{Z}) \rightarrow Z$, die das obere Dreieck kommutativ macht. Da $\tau|_X = id$ ist, muß τ biholomorph sein (bei hinreichend kleinem Z).

Um (*) zu beweisen, gehen wir zur Normalisierung $\nu: \hat{T} \rightarrow T$ über und setzen $\hat{Z} = \tilde{Z} \times_T \hat{T}$, $Z' = Z \times_T \hat{T}$. Z' ist als Totalraum einer Deformation des normalen Raumes X über der normalen Basis \hat{T} normal. Hieraus folgt, daß die kanonische Abbildung $\hat{\sigma}: \hat{Z} \rightarrow Z'$ der Remmert-Quotient von \hat{Z} ist. Wegen Definition 2, iii) gilt ferner

$$Z'_t = Z_{\nu(t)} = Q(\tilde{Z}_{\nu(t)}) = Q(\hat{Z}_t)$$

für alle $t \in \hat{T}$. Also sind die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so daß

$$\dim H^1(\hat{Z}_t, \mathcal{O}_{\hat{Z}_t}) = \text{const.}, \quad t \in \hat{T},$$

was sofort (*) nach sich zieht. q.e.d.

Wir setzen jetzt noch zusätzlich voraus:

1. $H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$.
2. Es existiert eine Deformation $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow T$ von $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$, die versell ist bzgl. Deformationen des Keimes von \tilde{X} entlang der exzeptionellen Menge $\tilde{E}_0 = \sigma^{-1}(x_0)$.

Dann liefert Satz 6 einen reduzierten Unterraum $T_a \subset T$ (nach Verkleinerung von T) und ein Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid T_a & \xrightarrow{\sigma_a} & Z'_a \\ \tilde{\pi}_a \downarrow & & \downarrow \pi'_a \\ T_a & \xrightarrow{id} & T_a \end{array}$$

in welchem π'_a eine Deformation von X über T_a ist.

SATZ 7. *Das obige Diagramm ist versell bzgl. Deformationen von X über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (ohne Basiswechsel und spezieller Faser \tilde{X}).*

Beweis. Es sei $Z_1 \rightarrow S_1$ eine Deformation von X mit reduzierter Basis S_1 und simultaner Auflösung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_1 & \longrightarrow & Z_1 \\ \tilde{\pi}_1 \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & S_1 & \end{array}$$

mit \tilde{X} als spezieller Faser von $\tilde{\pi}_1$. Nach Lemma 2 gilt $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1)$, und außerdem ist $Z_{1,s} = Q(\tilde{Z}_{1,s})$ für alle $s \in S_1$ nach Voraussetzung. Deshalb kann man Satz 5 anwenden und erhält

$$\dim H^1(\tilde{Z}_{1,s}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{1,s}}) = d_0 = \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

Weiter existiert ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_1 & \longrightarrow & \tilde{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_1 & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

mit bis zur ersten Ordnung eindeutig bestimmtem φ . Wegen $T_a = \{t \in T : \dim H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = d_0\}$ gilt $\varphi(S_1) \subset T_a$. Da alle Basisräume reduziert sind, faktorisiert φ über die Inklusion $T_a \hookrightarrow T$, und es ergibt sich

$$\tilde{Z}_1 \cong \tilde{Z}_a \times_{T_a} S_1,$$

woraus $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1) \cong Q(\tilde{Z}_a) \times_{T_a} S_1 = Z_a \times_{T_a} S_1$ folgt. q.e.d.

Bezeichnet $\pi : Z \rightarrow S$ die *verselle* Deformation von X , so existiert ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z'_a & \longrightarrow & Z \\ \pi'_a \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_a & \xrightarrow{\varepsilon} & S. \end{array}$$

Aus [1] folgt, daß ε im Falle $\dim X = 2$, \tilde{X} minimale Auflösung von X eine *endliche* holomorphe Abbildung ist. Ist X sogar rational, so ist wegen Satz 4 $T_a = T$ und ε bildet T surjektiv auf eine irreduzible Komponente von S ab ([1]).

FRAGE 1. Ist ε stets endlich?

Wenn dies der Fall ist, so kann man $S_a = \varepsilon(T_a)$ mit der reduzierten Struktur versehen, und man erhält mit $\pi_a = \pi | \pi^{-1}(S_a)$, $Z_a = \pi^{-1}(S_a)$ ein simultanes Auflösungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a & \longrightarrow & Z_a \\ \tilde{\pi}_a \downarrow & & \downarrow \pi_a \\ T_a & \xrightarrow{\varepsilon} & S_a \end{array}$$

der Deformation π_a von X .

FRAGE 2. Ist das obige Diagramm versell bzgl. Deformationen von X über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (mit Basiswechsel und spezieller Faser \tilde{X})?

Mit Hilfe von Lemma 2 und Satz 7 kann man sich leicht klarmachen, daß die Frage 2 mit ja zu beantworten ist, falls man folgende Aussage beweisen könnte: Sind $\pi_i : Z_i \rightarrow S_i$, $i = 0, 1, 2$, Deformationen einer isolierten Singularität X , ist π_0 versell, sind S_1 und S_2 reduziert, und gibt es eine holomorphe Abbildung $\varphi_0 : S_1 \rightarrow S_0$ und eine endliche surjektive Abbildung $\varphi_1 : S_1 \rightarrow S_2$ mit $Z_0 \times_{S_0} S_1 \cong Z_1 \cong Z_2 \times_{S_2} S_1$, so existiert eine holomorphe Abbildung $\varphi_2 : S_2 \rightarrow S_0$ mit $Z_2 \cong Z_0 \times_{S_0} S_2$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_0$.

In [2] konstruierte Brieskorn für die verselle Deformation $\pi : Z \rightarrow S$ eines rationalen Doppelpunktes X eine simultane Auflösung

$$\begin{array}{ccc} \hat{Z} & \longrightarrow & Z \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \hat{T} & \xrightarrow{\varepsilon} & S, \end{array}$$

in der ε sogar eine Galois-Überlagerung ist. Huikeshoven [4] zeigte:

1. Dieses Diagramm ist versell bzgl. auflösbarer Deformationen von X .
2. $\hat{\pi}$ ist versell bzgl. Deformationen der minimalen Auflösung \hat{X} von X über regulären Basisräumen.

Ersetzt man in Huikeshovens Beweis von 2 das Zitat [8], Theorem 2 durch Satz 4 der vorliegenden Arbeit, so erhält man die Aussage 2 auch für Deformationen mit *reduzierter* Basis. Also stimmt unsere Konstruktion in diesem Fall mit der Brieskornschen überein.

Zum Schluß wollen wir noch zwei *Beispiele* angeben.

1. Es sei $X_{n,q}$ die zweidimensionale normale Singularität mit dem dualen Graphen

$$\overset{-b_1}{\bullet} \text{---} \overset{-b_2}{\bullet} \cdots \overset{-b_{r-1}}{\bullet} \text{---} \overset{-b_r}{\bullet} \quad \bullet \cong \mathbf{P}_1(\mathbf{C}),$$

wobei $n/q = b_1 - 1/\overline{b_2} - \cdots - 1/\overline{b_r}$. In diesem Fall ist $T = T_a$ regulär von der Dimension $\sum_{\rho=1}^r (b_\rho - 1)$. Die Deformation $Z_a \rightarrow S_a$ ist die in [9] konstruierte "spezielle Familie." Ferner ergibt eine einfache Analyse der in [9] angegebenen Gleichungen, daß $\varepsilon : T \rightarrow S_a$ eine Galois-Überlagerung ist, deren Gruppe das direkte Produkt derjenigen Weyl-Gruppen ist, die zu den maximalen Konfigurationen von Kurven mit Selbstschnittzahl -2 gehören.

2. Es sei X_b eine einfach elliptische Singularität mit dem dualen Graphen

$$\overset{-b}{\circ}$$

(\circ = elliptische Kurve, $b \geq 1$). Dann ist T regulär von der Dimension $b + 1$ und T_a ist regulär von der Dimension 1. In den Fällen $b = 1, 2, 3$ ist $T_a \rightarrow S$ eine abgeschlossene Einbettung und S ist regulär von der Dimension $11 - b$. Insbesondere ist S_a keine irreduzible Komponente von S .

LITERATUR

- [1] M. ARTIN, *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions*. J. of Algebra 29, (1974), 330–348.
- [2] E. BRIESKORN, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*. Actes Congrès intern. Math. Nice 1970. Tome II, 279–284.
- [3] D. M. BURNS and J. WAHL, *Local contributions to global deformations of surfaces*. Inventiones math. 26, (1974), 67–88.
- [4] F. HUIKESHOVEN, *On the versal resolutions of deformations of rational double points*. Inventiones math. 20, (1973), 15–33.
- [5] K. KNORR, und M. SCHNEIDER, *Relativexzeptionelle analytische Mengen*. Math. Ann. 193, (1971), 238–254.
- [6] R. RICHBURG, *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen*. Math. Ann. 175, (1968), 257–286.
- [7] O. RIEMENSCHNEIDER, *Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen*. Math. Ann. 192, (1971), 216–226.
- [8] —, *Deformations of rational singularities and their resolutions*. Proc. of the Conf. on Complex Analysis at Rice University 1972. Rice Univ. Studies 59, (1973), 119–130.
- [9] —, *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*. Math. Ann. 209, (1974), 211–248.
- [10] —, *Bemerkungen zur Deformationstheorie nichtrationaler Singularitäten*. Manuscripta math. 14, (1974), 91–99.
- [11] Y.-T. SIU, *The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem*. Math. Ann. 190, (1971), 203–214.
- [12] —, *Dimensions of sheaf cohomology groups under holomorphic deformation*. Math. Ann. 192, (1971), 203–215.

Oswald Riemenschneider
Math. Seminar der Univ.
D-2000 Hamburg 13
Bundesstraße 55

Eingegangen den 25. Januar/5. November 1975