manuscripta math. 14, 91 - 99 (1974)

BEMERKUNGEN ZUR DEFORMATIONSTHEORIE NICHTRATIONALER SINGULARITÄTEN

Oswald Riemenschneider

Let $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\longrightarrow S$ be a 1-convex holomorphic mapping between complex spaces $\tilde{Z}$ resp. S, and let $\tilde{\pi}=\pi\circ\sigma$ be the blowing-down factorization of $\tilde{\pi}$ over S. We prove in part 1 of the present note: The fiber $\pi^{-1}(s_0)$ over a point $s_0\in S$ is the Remmert quotient of $\tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ if and only if every holomorphic function on $\tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ (defined in a neighborhood of the exceptional subvariety of that fiber) can be extended holomorphically to $\tilde{Z}$. This is true, for instance, in the case: $\tilde{\pi}$ flat, S reduced at s_0 and $\dim H^1(\tilde{\pi}^{-1}(s), \mathcal{O}(\tilde{\pi}^{-1}(s)) = \text{const}$ for all $s\in S$. In part 2, we use this result to obtain the following: For any Riemann surface R with genus $g\geq 2$ there exists a 2-dimensional normal complex analytic singularity X such that the minimal resolution $\tilde{X}$ of X contains R as exceptional subvariety, and $\tilde{X}$ has a deformation over the unit disc $S=\{|s|<1\}$ which can not be blown down to a deformation of X.

0. Einleitung

Es sei im folgenden (X,x_0) eine normale isolierte komplex-analytische Singularität und $\tilde{X}\longrightarrow X$ eine Auflösung. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß X steinsch und $\tilde{X}$ damit streng pseudokonvex ist. Es sei ferner $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\longrightarrow S$ eine Deformation von $\tilde{X}=\tilde{\pi}^{-1}(s_0)=\tilde{Z}_{s_0}$, $s_0\in S$ fest. Dann interessiert die Frage:

<u>Wann läßt sich $\tilde{\pi}$ zu einer Deformation $\pi:Z\longrightarrow S$ von $X=\pi^{-1}(s_0)=Z_{s_0}$ zusammenblasen</u> ?

In [3] wurde gezeigt, daß dies möglich ist unter den Voraussetzungen $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})=0$ und S hinreichend klein, also im Falle $\dim_{x_0} X=2$ für rationale Singularitäten. Entscheidend war beim Beweis die Konstanz von $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ in der Nähe von s_0, die sich aus den Halbstetigkeitssätzen für 1-konvexe holomorphe Abbildungen [2] ergibt. Setzt man nun im Fall $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})\neq 0$ die Konstanz von $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}), s\in S$, voraus, so lassen die Methoden von [2] ebenfalls den Schluß zu, daß $\tilde{\pi}$ (bei reduziertem S) zu einer Deformation von X zusammengeblasen werden kann (Satz 2). Dies ist das komplex-analytische Analogon zu einem algebraischen Satz von J.Wahl.

Durch Verkleinerung von $\tilde{Z}$ und S kann man immer erreichen, daß $\tilde{\pi}$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion ϕ und S steinsch ist (vgl. [3], proof of Theorem 1; zur Theorie der 1-konvexen holomorphen Abbildungen vgl. [1] oder [4]). $\tilde{\pi}$ läßt sich dann folgendermaßen faktorisieren:

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ S & Z \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

Hierbei ist σ eigentlich und biholomorph außerhalb der Vereinigung E aller maximalen kompakten analytischen Teilmengen $E_s\subset\tilde{Z}_s, s\in S$, π ist steinsch und $\pi|\sigma(E)$ ist endlich. Insbesondere ist $\tilde{Z}$ holomorph-konvex, und Z ist der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}$, d.h. $\mathcal{O}_Z=R^0\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. Wir setzen im folgenden voraus, daß wir uns stets in dieser kommutativen Dreieckssituation befinden.

Die oben aufgeworfene Frage reduziert sich dann auf das Problem, wann die Faser Z_{s_0} der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{s_0}$ ist. Sie wird damit vollständig beantwortet durch

SATZ 1. *In der obigen Situation sind die beiden folgenden Aussagen für einen Punkt $s_0\in S$ äquivalent:*

(a) *Z_{s_0} ist der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{s_0}$.*

(b) *Die Restriktionsabbildung $\Gamma(E_{s_0},\mathcal{O}_{\tilde{Z}})\longrightarrow\Gamma(E_{s_0},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_0}})$ ist surjektiv.*

Der Beweis von Satz 1 wird ebenso wie der des schon weiter oben zitierten Satzes 2 im 1.Abschnitt geführt.

Im 2.Abschnitt konstruieren wir zu jeder Riemannschen

Fläche R vom Geschlecht $g\geq 2$ eine 1-konvexe Abbildung $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\longrightarrow S=\{s\in\mathbb{C}:|s|<1\}$ mit $E_o\cong R$, für die die Bedingung (b) aus Satz 1 nicht erfüllt ist. $\tilde{\pi}$ kann somit nicht zu einer Deformation der 2-dimensionalen normalen Singularität (X,x_o) zusammengeblasen werden, die durch Kontraktion von E_o in $\tilde{X}=\tilde{\pi}^{-1}(0)$ entsteht.

1. Beweis der Sätze 1 und 2.

BEWEIS VON SATZ 1. (a)$\Rightarrow$(b). Es sei $f\in\Gamma(E_{s_o},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$; dann gibt es stets eine streng pseudokonvexe Umgebung U_{s_o} von E_{s_o} in $\tilde{Z}_{s_o}$, so daß $f\in\Gamma(U_{s_o},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$. Ferner gibt es eine steinsche Umgebung $V=V(s_o)\subset S$ und eine offene Menge $U\subset\tilde{\pi}^{-1}(V)$, s.d. $U\cap\tilde{Z}_{s_o}=U_{s_o}$ und $\tilde{\pi}|U:U\longrightarrow V$ 1-konvex ist. Diese Überlegung zeigt, daß es genügt, statt (b) die folgende Aussage zu beweisen:

(b') Die Restriktionsabbildung $\Gamma(\tilde{Z},\mathcal{O}_{\tilde{Z}})\longrightarrow\Gamma(\tilde{Z}_{s_o},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$ ist surjektiv.

Da Z_{s_o} der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{s_o}$ ist, gibt es zu $f\in\Gamma(\tilde{Z}_{s_o},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$ eine holomorphe Funktion $g\in\Gamma(Z_{s_o},\mathcal{O}_{Z_{s_o}})$ mit $f=g\circ\sigma_{s_o}$, $\sigma_{s_o}=\sigma|\tilde{Z}_{s_o}$. Nun ist Z steinsch, und infolgedessen kann g holomorph zu einer Funktion $\tilde{g}\in\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$ fortgesetzt werden. $\tilde{f}=\tilde{g}\circ\sigma\in\Gamma(\tilde{Z},\mathcal{O}_{\tilde{Z}})$ ist dann eine Fortsetzung von f.

(b)$\Rightarrow$(a). Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{Z_{s_o}}\longrightarrow R^o\sigma_{s_o *}\mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}}$ ist injektiv, da die Abbildung σ_{s_o} außerhalb der niederdimensionalen analytischen Menge $E_{s_o}\subset\tilde{Z}_{s_o}$ biholomorph ist. Die Surjektivität folgt dann sofort aus (b) und der Surjektivität von $\mathcal{O}_Z\longrightarrow R^o\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. Folglich ist Z_{s_o} der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{s_o}$, q.e.d.

SATZ 2. *In der Situation von Satz 1 sei $\tilde{\pi}$ platt, $\dim H^1(\tilde{Z}_s,\mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})=\text{const.}$ für alle $s\in S$ und S reduziert. Dann ist Z_s der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_s$ für alle $s\in S$.*

BEMERKUNG. Der Beweis von Theorem 2 in [3] zeigt, daß man die Voraussetzung der Reduziertheit von S im Falle

$\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = 0, s \in S$, fortlassen kann.

BEWEIS VON SATZ 2. Es sei $s_o \in S$ und $L \subset S$ ein steinsches Kompaktum mit $s_o \in \mathring{L}$. Nach [2], Satz (2.4) gibt es dann eine geeignete Ausschöpfungsfunktion ϕ auf $\tilde{Z}$ und für jede reelle Zahl $d \geq d_o$ einen Komplex

$$C^\cdot : \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow C^o \longrightarrow C^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^\ell \longrightarrow 0 \rightarrow \ldots$$

von platten $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$-Moduln, so daß

$$H^q(C^\cdot) = H^q(\tilde{Z}_L^d, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}), \quad q \geq 0,$$

mit $\tilde{Z}_L^d = \{\tilde{z} \in \tilde{Z} \cap \tilde{\pi}^{-1}(L) : \phi(\tilde{z}) \leq d\}$. Bezeichnet $\mathfrak{m}$ das zu $s_o \in L$ gehörende maximale Ideal von A, so gilt ferner

$$H^q(C^\cdot \otimes_A (A/\mathfrak{m})) \cong H^q(\tilde{Z}_{s_o}^d, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$$

mit $\tilde{Z}_{s_o}^d = \tilde{Z}_L^d \cap \tilde{Z}_{s_o}$. Wegen der Konstanz der Dimension der Kohomologiegruppen $H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ und der Reduziertheit von S erhält man aus [2] ,(3.6) die Plattheit des A-Moduls

$$Z_c^1(C^\cdot) = \operatorname{coker}(C^o \longrightarrow C^1).$$

Dies wiederum impliziert ([2],Satz (2.3.d)), daß für jeden A-Modul M der kanonische A-Modulhomomorphismus

$$t_M^o : H^o(C^\cdot) \otimes M \longrightarrow H^o(C^\cdot \otimes M)$$

bijektiv ist. Also ist speziell mit $M = A/\mathfrak{m}$ die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(\tilde{Z}_L^d, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Z}_{s_o}^d, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_o}})$$

surjektiv. Durch Verkleinerung von L kann erreicht werden, daß $\tilde{Z}_{s_o}^d$ beliebig klein wird. Man erhält somit die Bedingung (b) aus Satz 1, und diese liefert die Behauptung, q.e.d.

<u>BEMERKUNG</u>. Dieselben Überlegungen führen zu der folgenden Ergänzung des Zusatzes (3.8) zu Theorem (II) in [2]:

<u>Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \longrightarrow S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung</u>,

$\mathfrak{F}$ *sei eine* $\tilde{\pi}$*-platte kohärente analytische Garbe auf* $\tilde{Z}$ *mit* $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathfrak{F}/\mathfrak{m}(s)\mathfrak{F}) = \text{const.}$ *und* S *sei in* s_0 *reduziert. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\Gamma(E_{s_0}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(E_{s_0}, \mathfrak{F}/\mathfrak{m}(s_0)\mathfrak{F})$$

surjektiv. Hierbei bezeichnet $\mathfrak{F}/\mathfrak{m}(s)\mathfrak{F}$ *die analytische Einschränkung von* $\mathfrak{F}$ *auf die Faser* $\tilde{Z}_s$.

2. Beispiele

Wir beweisen vorbereitend das folgende

LEMMA. *Für jede Riemannsche Fläche* R *vom Geschlecht* $g \geq 2$ *gibt es holomorphe Geradenbündel* $L \longrightarrow R$ *mit der folgenden Eigenschaft: Es existieren Schnitte* $s \in \Gamma(R, \mathcal{O}(L))$ *und Kohomologieklassen* $\xi \in H^1(R, \mathcal{O}(L))$, *so daß das Cup-Produkt* $s \cup \xi \in H^1(R, \mathcal{O}(L^2))$ *von Null verschieden ist. Insbesondere ist* $s \neq 0$ *und folglich die Chernsche Zahl* $c(L) > 0$.

BEWEIS. Es bezeichne K das kanonische Bündel von R. Es gibt dann Punkte $y_0 \in R$ und abelsche Differentiale $h \in \Gamma(R, \mathcal{O}(K))$ mit der Nullstellenordnung $o_{y_0}(h) = 2$. Ist nämlich R hyperelliptisch, so wähle man einen hyperelliptischen Weierstraß=punkt $y_0 \in R$. Es gibt dann eine kanonische Basis $h_1, \ldots, h_g$ von $\Gamma(R, \mathcal{O}(K))$ mit $o_{y_0}(h_j) = 2(j-1)$, $j = 1, \ldots, g$, so daß h_2 die Bedingung erfüllt. Ist R nicht hyperelliptisch, so ist $g \geq 3$ und man wähle einen Nicht-Weierstraßpunkt $y_0 \in R$. Es gibt dann eine kanonische Basis h_j, $j = 1, \ldots, g$, mit $o_{y_0}(h_j) = j-1$, und h_3 erfüllt die Behauptung.

Es sei L das zu dem Divisor y_0 gehörende Geradenbündel. L hat einen holomorphen Schnitt s, der nur in y_0 verschwindet, und zwar von der Ordnung 1. Die meromorphen Schnitte $h \otimes \frac{1}{s^i}$ in $K \otimes L^{-i}$, $i = 1, 2$, sind wegen $o_{y_0}(h) = 2$ holomorph und nichttrivial. Da die Paarungen

$$H^1(R, \mathcal{O}(L^i)) \times \Gamma(R, \mathcal{O}(K \otimes L^{-i})) \xrightarrow{\langle \cdot , \cdot \rangle_i} \mathbb{C}, \quad i = 1, 2,$$

nichtsingulär sind, gibt es ein $\xi \in H^1(R, \mathcal{O}(L))$ mit

$$\left\langle \xi, h\otimes\frac{1}{s}\right\rangle_1 = 1.$$

Wir repräsentieren ξ vermöge des Dolbeault-Isomorphismus durch eine globale (0,1)-Form $\phi\in\Gamma(R,\mathcal{E}^{0,1}(L))$. Dann wird $s\cup\xi$ durch $s\cdot\phi\in\Gamma(R,\mathcal{E}^{0,1}(L^2))$ repräsentiert, und es gilt

$$\left\langle s\cup\xi, h\otimes\frac{1}{s^2}\right\rangle_2 = \int_R s\phi\wedge\left(h\otimes\frac{1}{s^2}\right) = \int_R \phi\wedge\left(h\otimes\frac{1}{s}\right)$$

$$= \left\langle \xi, h\otimes\frac{1}{s}\right\rangle_1 = 1,$$

woraus $s\cup\xi\neq 0$ folgt, q.e.d.

Wir wählen nun R,L,s und ξ wie im obigen Lemma. Es gibt dann offene Überdeckungen $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ von R, so daß L und ξ durch Kozyklen in $Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}^*)$ bzw. $Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}(L))$ dargestellt werden können. Es existieren also Funktionen

$$f_{ij}\in\Gamma(U_{ij},\mathcal{O}^*),\quad g_{ij}\in\Gamma(U_{ij},\mathcal{O}),\quad f_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{O}),$$

$U_{ij}=U_i\cap U_j$, mit

$$f_{ik} = f_{ij}\, f_{jk}, \qquad f_j = f_{ij}\, f_i,$$

$$g_{ij} = -f_{ji}\, g_{ji}, \qquad g_{ij}-g_{ik} = -f_{ji}\, g_{jk}.$$

Wegen $s\cup\xi\neq 0$ gibt es kein System holomorpher Funktionen $h_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{O})$ mit

$$h_i - f_{ji}^2\, h_j = f_i\, g_{ij}.$$

Wir können ferner voraussetzen, daß die Überdeckung $\mathfrak{U}$ so fein ist, daß alle g_{ij} beschränkt sind: $|g_{ij}(y)|<M$, $y\in U_{ij}$, für alle $i,j\in I$.

Es sei nun $\tilde{X}$ eine hinreichend kleine streng pseudokonvexe Umgebung des Nullschnittes $E\cong R$ in dem negativen Geradenbündel $p:L^{-1}\longrightarrow R$. Wir bezeichnen die Faserkoordinate von $\tilde{X}$ über U_i mit u_i und können ohne Einschränkung annehmen, daß $|u_i|<\varepsilon=\frac{1}{M}$ für alle $(y,u_i)\in\tilde{X}_i=p^{-1}(U_i)$. Wir bilden dann

$$\tilde{Z}_i = \tilde{X}_i \times S, \qquad S = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$$

und verkleben $\tilde{Z}_i$ mit $\tilde{Z}_j$ vermöge $H_{ij}(y,u_i,s) = (y, h_{ij}(y,u_i,s), s)$, wobei

$$h_{ij}(y,u_i,s) = \frac{f_{ji}(y)u_i}{1-g_{ij}(y)u_i s} .$$

Dies liefert einen Raum $\tilde{Z}$, da die h_{ij} in $\tilde{Z}_i \cap (p^{-1}(U_{ij}) \times S)$ biholomorph und wegen

$$h_{jk}(y,h_{ij}(y,u_i,s),s) = \frac{f_{kj}\ h_{ij}(y,u_i,s)}{1-g_{jk}\ h_{ij}(y,u_i,s)}$$

$$= \frac{f_{kj}f_{ji}u_i}{1-g_{ij}u_i s}\left[1 - \frac{g_{jk}f_{ji}u_i s}{1-g_{ij}u_i s}\right]^{-1}$$

$$= \frac{f_{kj}f_{ji}u_i}{1-(g_{ij}+f_{ji}g_{ik})u_i s} = \frac{f_{ki}u_i}{1-g_{ik}u_i s}$$

$$= h_{ik}(y,u_i,s)$$

die Verträglichkeitsrelationen auf dreifachen Durchschnitten erfüllt sind.

Die kanonische Abbildung $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \longrightarrow S$ ist lokal trivial und damit eine Deformation von $\tilde{\pi}^{-1}(0) = \tilde{X}$. Durch Verkleinerung von $\tilde{Z}$ und S kann man zudem noch voraussetzen, daß $\tilde{\pi}$ 1-konvex ist.

Aus der Potenzreihenentwicklung bzgl. der Faserkoordinaten u_i erhält man eine kanonische Injektion

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \hookrightarrow \bigoplus_{t=0}^{\infty} \Gamma(R, \mathcal{O}(L^t)) .$$

Umgekehrt gibt jeder Schnitt aus $\Gamma(R, \mathcal{O}(L^t)), t \geq 0$, Anlaß zu einer holomorphen Funktion auf $\tilde{X}$. Insbesondere liefert $s \in \Gamma(R, \mathcal{O}(L))$ die durch

$$f|p^{-1}(U_i)=f_i(y)u_i$$

definierte holomorphe Funktion. Wir zeigen jetzt:

f <u>ist nicht zu einer holomorphen Funktion</u> $F\in\Gamma(\tilde{Z},\mathcal{O}_{\tilde{Z}})$ <u>fortsetzbar</u>.

Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es Funktionen $F_i=F_i(y,u_i,s)\in\Gamma(\tilde{Z}_i,\mathcal{O}_{\tilde{Z}_i})$ mit

$$F_i(y,u_i,s)=F_j\left(y,\frac{f_{ji}(y)u_i}{1-g_{ij}(y)u_is},\ s\right)$$

und $F_i(y,u_i,0)=f_i(y)u_i$. Wir entwickeln dann F_i in eine Potenzreihe

$$F_i(y,u_i,s)=\sum F^{(i)}_{k\ell}u_i^k s^\ell$$

mit holomorphen Funktionen $F^{(i)}_{k\ell}\in\Gamma(U_i,\mathcal{O}_R)$. Es folgt dann

$$\sum_{k,\ell}F^{(i)}_{k\ell}u_i^ks^\ell=\sum_{\kappa,\lambda}F^{(j)}_{\kappa\lambda}\left(\frac{f_{ji}u_i}{1-g_{ij}u_is}\right)^\kappa s^\lambda$$

$$=\sum_{\lambda=0}F^{(j)}_{0\lambda}s^\lambda+\sum_{\substack{\kappa\geq 1\\ \lambda,\tau}}\binom{\tau+\kappa-1}{\kappa-1}F^{(j)}_{\kappa\lambda}f^\kappa_{ji}g^\tau_{ij}u_i^{\kappa+\tau}s^{\lambda+\tau}$$

$$=\sum_{\ell=0}F^{(j)}_{0\ell}s^\ell+\sum_{k\geq 0,\ell\geq 1}\left(\sum_{\tau=0}^{\min(\ell,k-1)}\binom{k-1}{\tau}F^{(j)}_{k-\tau,\ell-\tau}f^{k-\tau}_{ji}g^{\tau}_{ij}\right)u_i^k s^\ell.$$

Insbesondere folgt für $k=2$, $\ell=1$ wegen $F^{(j)}_{10}f_{ji}=f_jf_{ji}=f_i$:

$$F^{(i)}_{21}=f^2_{ji}F^{(j)}_{21}+f_ig_{ij},$$

und dies ist ein Widerspruch zu $s\cup\xi\neq 0$, q.e.d.

LITERATUR

[1] KNORR, K., SCHNEIDER, M.: Relativexzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 193, 238-254 (1971).

[2] RIEMENSCHNEIDER, O.: Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen. Math.Ann. 192, 216-226 (1971).

[3] - Deformations of rational singularities and their resolutions. Proc. of the Conf. on Complex Analysis at Rice University 1972. Rice Univ. Studies 59, 119-130 (1973).

[4] SIU, Y.T.: The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem. Math.Ann.190, 203-214 (1971).

Mathematisches Seminar
D-2000 Hamburg
Rothenbaumchaussee 67/69

(Eingegangen am 16. August 1974)