Math. Ann. 192, 216—226 (1971)
© by Springer-Verlag 1971

Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen

OSWALD RIEMENSCHNEIDER*

Einleitung

In der letzten Zeit sind einige Anstrengungen unternommen worden, den Grauertschen Kohärenzsatz für eigentliche Abbildungen auf sog. $(p, -q)$-konvexe Abbildungen zu übertragen. Dies sind holomorphe Abbildungen $f: X \to Y$ komplexer Räume, deren Fasern $X_y = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, p-konvex und q-konkav im Sinne von Andreotti u. Grauert [1] sind. Sie treten z. B. im Falle $p = q = 1$ in natürlicher Weise bei dem Problem auf, kohärente analytische Garben über analytische Ausnahmemengen hinaus fortzusetzen (vgl. z. B. [11]). In den „ungemischten" Fällen der q-konkaven $(= (0, -q)$-konvexen) und p-konvexen $(= (p, 0)$-konvexen) Abbildungen sind die zu erwartenden *Kohärenzsätze* mittlerweile fast vollständig von Siu [12] und Knorr [6] bewiesen worden.

Entsprechend dem eigentlichen Fall (vgl. [3], § 7, und [10]) sollten nun auch die folgenden *Halbstetigkeitssätze* richtig sein (der Einfachheit halber beschränken wir uns bei der Formulierung auf p-konvexe Abbildungen):

Es seien X und Y (nicht notwendig reduzierte) komplexe Räume mit abzählbarer Topologie, $f: X \to Y$ sei eine p-konvexe holomorphe Abbildung, $p \geqq 1$, und $\mathcal{S}$ sei eine f-platte kohärente analytische Garbe über X. Es bezeichne X_y die Faser von X über dem Punkt $y \in Y$ bezüglich f und $\mathcal{S}_y$ die analytische Einschränkung von $\mathcal{S}$ auf X_y. Dann gilt:

(I) *Die Funktionen*

$$d_q(y) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{S}_y), \qquad q = p, p+1, \ldots$$

sind halbstetig nach oben auf Y. Ist Y überdies reduziert, so existiert eine niederdimensionale analytische Menge N in Y, so daß alle d_q in $Y \setminus N$ lokal konstant sind, $q \geqq p$.

(II) *Ist Y reduziert und die Funktion d_q für ein $q \geqq p$ lokal konstant, so ist die q-te direkte Bildgarbe $f_q \mathcal{S}$ von $\mathcal{S}$ lokal frei.*

Möglicherweise lassen sich diese Sätze unter alleiniger Ausnutzung der Kohärenz der Bildgarben beweisen. Man könnte dann die Bedingung der p-Konvexität ersetzen durch die schwächere Bedingung der „cohomologischen" p-Konvexität: Eine holomorphe Abbildung $f: X \to Y$ heißt *cohomologisch p-konvex*, wenn für alle kohärenten analytischen Garben $\mathcal{S}$ über X die direkten

* The author received support from National Science Foundation Grant GP 7952 X 2 during the preparation of this paper at the Institute for Advanced Study.

Bilder $f_q \mathscr{S}, q \geqq p$, kohärent sind. Insbesondere gilt dann für jede Faser X_y und jede kohärente analytische Garbe $\mathscr{T}_y$ auf X_y

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathscr{T}_y) < \infty,$$

$q = p, p+1, \ldots$.

Es war das Ziel des Verfassers, den obigen Satz mit den in [10] entwickelten Methoden zu beweisen. Dies ist bisher aber nur für den Fall $p=1$ gelungen, der ohnehin eine Sonderstellung einnimmt: Man kann 1-konvexe Abbildungen zusammenblasen (Siu [13], Knorr u. Schneider [7], Markoe u. Rossi [8]). Beim Beweis der Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe Abbildungen wird diese Relativierung des bekannten Grauertschen Ergebnisses [4] entscheidend verwendet. Nichtsdestotrotz kann man weiter hoffen, auch den Fall $p \geqq 2$ in ähnlicher Weise zu behandeln.

Wir stellen in § 1 einige Ergebnisse über 1-konvexe Abbildungen aus den Arbeiten [13] und [7] zusammen. In § 2 zeigen wir, daß es bei 1-konvexen Abbildungen zu jedem Steinschen Kompaktum $L \subset Y$ gewisse Kompakta $K \subset f^{-1}(L)$ gibt, die sich mit endlich vielen Steinschen Kompakta $K_0, \ldots, K_l$ überdecken lassen, so daß der Komplex $C^{\cdot}$ mit

$$C^q = \Pi\, \Gamma(K_{j_0} \cap \cdots \cap K_{j_q}, \mathscr{S})$$

ähnliche Eigenschaften besitzt wie der in [10], (2.10) konstruierte Komplex im eigentlichen Fall. Der Beweis des Halbstetigkeitssatzes in § 3 verläuft dann wörtlich wie in [10].

Zusatz (nach Abschluß des Manuskripts). Inzwischen hat Yum-Tong Siu gezeigt [14], daß die Halbstetigkeitssätze tatsächlich unter alleiniger Verwendung der Kohärenz gewisser Bildgarben gefolgert werden können. Insbesondere ist die obige Vermutung über cohomologisch p-konvexe holomorphe Abbildungen richtig. Leider ist Siu's Arbeit insofern unvollständig, als die Aussage (II) nur für Mannigfaltigkeiten Y hergeleitet wird. Die Schwierigkeiten, die man beim Beweis des Allgemeinfalles eines beliebigen Parameterraumes Y zu überwinden hätte, entsprechen dem schwierigsten Teil in [10], der Induktion in § 4. Trotzdem – oder gerade deswegen – sollte es möglich sein, die Aussage (II) im Allgemeinfall auch mit Siu's Methoden zu behandeln. Daß dies jedoch nocht nicht geschehen ist und somit die Aussage (II) in dieser Arbeit stärker ist als Siu's Satz im Falle 1-konvexer Abbildungen, mag es rechtfertigen, die vorliegende Arbeit der Öffentlichkeit zu präsentieren.

§ 1. 1-konvexe holomorphe Abbildungen

(1.0) Wir stellen zunächst einige Ergebnisse aus den Arbeiten [13] und [7] zusammen, die im folgenden benutzt werden. Dieselben Resultate findet man auch in [8] für den Spezialfall holomorpher Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten mit maximalem Rang.

(1.1) **Definition.** *Eine holomorphe Abbildung $f: X \to Y$ komplexer (nicht notwendig reduzierter) Räume X und Y mit abzählbarer Topologie heißt* 1-konvex, *wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $U = U(y) \subset Y$ von y, eine reellwertige C^2-Funktion φ auf $f^{-1}(U)$ und eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß folgendes gilt:*

i) *$\varphi \mid \{x \in f^{-1}(U): \varphi(x) > c_0\}$ ist streng plurisubharmonisch,*

ii) *für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $f \mid \{x \in f^{-1}(U): \varphi(x) \leqq c\}$ eine eigentliche Abbildung.*

(1.2) Da wir in bezug auf Y lokale Aussagen beweisen wollen, können wir stets *$U = Y$ annehmen.* Wir nennen dann φ eine *(globale) Ausschöpfungsfunktion* von X, c_0 die *Ausnahmekonstante*, und bezeichnen für alle $c \in \mathbb{R}$ mit f_c die Einschränkung von f auf $\{x \in X: \varphi(x) < c\}$. $f_q \mathcal{S}$ bzw. $f_{cq} \mathcal{S}$ bezeichnet die q-te direkte Bildgarbe einer Garbe $\mathcal{S}$ auf X unter f bzw. f_c.

Jede Faser X_y einer 1-konvexen Abbildung $f: X \to Y$ ist ein streng pseudokonvexer Raum (mit maximaler kompakter analytischer Teilmenge E_y).

(1.3) **Satz.** *Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmekonstante c_0. Dann sind für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{S}$ auf X und jedes $c > c_0$ die Halme $(f_{cq} \mathcal{S})_y$ für $q \geqq 1$ endlich erzeugt über $\mathcal{O}_{Y,y}$, $y \in Y$ beliebig.*

Dies ist Siu's Proposition 2.2 in [13] (vgl. auch [11]) oder ein Korollar aus Knorr's Kohärenzsatz in [6] (Hauptsatz I).

Hieraus gewinnt man das folgende Resultat ([13], Corollary 2.3):

(1.4) **Satz.** *Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe Abbildung und K ein Kompaktum in einer Faser X_y. Dann existiert eine holomorph-konvexe Umgebung G von K in X.*

Unter Benutzung eines Isomorphie-Lemmas ([6], Hauptsatz II) zeigen Knorr u. Schneider sofort mehr ([7], Satz 3.1):

Ist $f: X \to Y$ eine 1-konvexe Abbildung, so ist f_c für jedes $c > c_0$ eine holomorph-konvexe Abbildung; d. h. zu jedem Punkt $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(y) \subset Y$, so daß $f_c^{-1}(U)$ holomorph-konvex ist.

Indem man nun bei festem $c > c_0$ zu jedem $y \in Y$ eine holomorph-konvexe Umgebung G_y von $K_y = \{x \in X: \varphi(x) \leqq c\} \cap X_y$ findet, deren „Remmert-Quotienten" $Q(G_y)$ bildet und diese Steinschen Räume miteinander und außerhalb $\{\varphi \leqq c\}$ mit X verheftet, erhält man einen komplexen Raum Z mit den folgenden Eigenschaften:

(1.5) *$f: X \to Y$ läßt sich faktorisieren über Z:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd},$$

wobei die holomorphen Abbildungen $g: X \to Z$ und $h: Z \to Y$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

i) *g ist eigentlich und biholomorph außerhalb der Vereinigung E aller maximalen kompakten analytischen Mengen $E_y \subset X_y$, $y \in Y$.*

ii) *h ist Steinsch, d. h. das Urbild einer offenen Steinschen Menge in Y ist wieder Steinsch. $h \mid g(E)$ ist eine endliche holomorphe Abbildung.*

Insbesondere folgt aus i) und ii):

Das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Steinschen Menge $U \subset Y$ ist holomorph-konvex in X.

(1.6) **Theorem.** *Sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmekonstante c_0. Dann gilt für alle $c > c_0$, $q \geqq 1$ und alle kohärenten analytischen Garben $\mathscr{S}$ auf X:*

i) *$f_q \mathscr{S}$ ist kohärent auf Y,*

ii) *$f_q \mathscr{S} \to f_{cq} \mathscr{S}$ ist ein Garbenisomorphismus,*

iii) *die natürliche Abbildung $H^q(f^{-1}(U), \mathscr{S}) \to \Gamma(U, f_q \mathscr{S})$ ist bijektiv für alle offenen Steinschen Mengen U in Y.*

Beweis ([13], Proposition 3.3; [7], Theorem 3.5). Wir faktorisieren f gemäß (1.5) über $Z: f = h \circ g$. Da h Steinsch ist, verschwinden für alle kohärenten analytischen Garben $\mathscr{T}$ auf Z die direkten Bilder $h_q \mathscr{T}$, $q \geqq 1$. Daraus folgt unmittelbar

$$f_q \mathscr{S} = h_0(g_q \mathscr{S}),$$

denn $g_q \mathscr{S}$ ist kohärent über Z. Nun ist g bijektiv außerhalb E und also $\mathrm{Tr}(g_q \mathscr{S}) \subset g(E)$ für $q \geqq 1$. Dann ist $h \mid \mathrm{Tr}(g_q \mathscr{S})$ endlich und folglich $f_q \mathscr{S}$ kohärent. Zum Beweis der Aussagen ii) und iii) verweisen wir auf [13] und [7].

§ 2. Angepaßte Komplexe und Überdeckungen

(2.0) **Definition.** *Eine Teilmenge K eines komplexen Raumes X heißt (semianalytisches) Steinsches Kompaktum, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*

i) *K ist kompakt,*

ii) *K ist semianalytisch,*

iii) *es existiert eine Umgebungsbasis $\{U_\iota : \iota \in I\}$ von K in X, die aus offenen Steinschen Mengen $U_\iota \subset X$ besteht.*

Genau wie in [10] werden wir im folgenden das Adjektiv „semianalytisch" stets fortlassen.

(2.1) **Definition.** *Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe Abbildung, $L \subset Y$ ein Steinsches Kompaktum und $A := \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ die noethersche $\mathbb{C}$-Algebra der holomorphen Funktionen auf L; ferner sei $\mathscr{S}$ eine f-platte kohärente analytische Garbe über X. Ein nach oben beschränkter Komplex*

$$C^{\cdot}: \cdots \to C^p \xrightarrow{\delta^p} C^{p+1} \to \cdots \to C^l \to 0 \to \cdots$$

von platten A-Moduln heißt angepaßt, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

i) $H^q(C^{\cdot}) \cong \Gamma(L, f_q \mathscr{S}), \quad q \geqq 1,$

ii) *ist $y \in L$ und $\mathfrak{m}_y$ das zu y gehörende maximale Ideal von A, so gilt*

$$H^q(C^{\cdot} \otimes_A (A/\mathfrak{m}_y)) \cong H^q(X_y, \mathscr{S}_y), \quad q \geqq 1.$$

Ist $\mathfrak{m}(y)$ die zu y gehörende maximale Idealgarbe, so gilt

$$H^q(C^\cdot)\otimes_A(A/\mathfrak{m}_y)\cong\Gamma(L,f_q\mathscr{S})/\mathfrak{m}_y\Gamma(L,f_q\mathscr{S})$$
$$\cong\Gamma(L,f_q\mathscr{S}/\mathfrak{m}(y)f_q\mathscr{S})\cong(f_q\mathscr{S}/\mathfrak{m}(y)f_q\mathscr{S})_y.$$

Man hat für jeden A-Modul M eine kanonische Abbildung

$$t_M^q: H^q(C^\cdot)\otimes M\to H^q(C^\cdot\otimes M);$$

außerdem existiert ein kanonischer Homomorphismus

$$t_y^q: (f_q\mathscr{S}/\mathfrak{m}(y)f_q\mathscr{S})_y\to H^q(X_y,\mathscr{S}_y).$$

Wir setzen dann zusätzlich zu i) und ii) voraus, daß

iii) *das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^q(C^\cdot)\otimes_A(A/\mathfrak{m}_y) & \xrightarrow{t^q_{A/\mathfrak{m}_y}} & H^q(C^\cdot\otimes(A/\mathfrak{m}_y)) \\ \downarrow\cong & & \cong\downarrow \\ (f_q\mathscr{S}/\mathfrak{m}(y)f_q\mathscr{S})_y & \xrightarrow{t^q_y} & H^q(X_y,\mathscr{S}_y) \end{array}$$

kommutativ ist.

Hierbei verstehen wir unter $C^\cdot\otimes M$ für einen beliebigen A-Modul M stets den Komplex

$$\cdots\to C^p\otimes M\xrightarrow{\delta^p\otimes id}C^{p+1}\otimes M\to\cdots.$$

(2.2) **Folgerung.** *Ist zusätzlich zu* (2.1) $f_q\mathscr{S}$ *für ein* $q\geqq 1$ *lokal frei über* L, *so ist* $H^q(C^\cdot)$ *ein platter* A-*Modul.*

Der Beweis ist wegen der Isomorphie $H^q(C^\cdot)\cong\Gamma(L,f_q\mathscr{S})$ trivial ([10], (2.16)).

Wir notieren noch einige Ergebnisse der homologischen Algebra für angepaßte Komplexe:

(2.3) **Satz.** *Es sei* $C^\cdot:\cdots\to C^{p-1}\to C^p\xrightarrow{\delta^p}C^{p+1}\to\cdots\to C^l\to 0\to\cdots$ *ein angepaßter Komplex. Dann gilt:*

a) *Es existiert ein Komplex* $D^\cdot$ *mit* $D^q=0$ *für* $q>l$ *und eine Komplexabbildung* $\alpha^\cdot: D^\cdot\to C^\cdot$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

i) *Alle* D^q *sind frei und für* $q\geqq 1$ *sogar endlich erzeugt,*

ii) *für jeden beliebigen* A-*Modul* M *sind die durch* $\alpha^\cdot\otimes id: D^\cdot\otimes M\to C^\cdot\otimes M$ *induzierten Homomorphismen*

$$H^q(D^\cdot\otimes M)\to H^q(C^\cdot\otimes M),\qquad q\in\mathbb{Z},$$

bijektiv.

b) *Sind alle* $Z^q=\ker\delta^q$ *und* $B^q=\operatorname{im}\delta^{q-1}$ *platte* A-*Moduln für* $q\geqq 1$, *so existiert eine kanonische exakte Sequenz*

$$0\to H^q(C^\cdot)\otimes M\xrightarrow{t_M^q}H^q(C^\cdot\otimes M)\to\operatorname{Tor}_1^A(H^{q+1}(C^\cdot),M)\to 0$$

für alle $q\geqq 1$.

c) *Sind alle* $H^q(C^\cdot)$ *platte* A-*Moduln für* $q\geqq 1$, *so sind die Abbildungen*

$$t_M^q: H^q(C^\cdot)\otimes M\to H^q(C^\cdot\otimes M)$$

für alle A-*Moduln* M *und alle* $q\geqq 1$ *bijektiv.*

d) *Die folgenden Aussagen für ein* $q \in \mathbb{Z}$ *sind äquivalent:*
i) $t^q_M: H^q(C^\cdot) \otimes M \to H^q(C^\cdot \otimes M)$ *ist bijektiv für alle* A*-Moduln* M,
ii) $Z^{q+1}_c(C^\cdot) := \operatorname{coker} \delta^q = C^{q+1}/B^{q+1}$ *ist ein platter* A*-Modul.*

Beweis. a) Wegen $H^q(C^\cdot) \cong \Gamma(L, f_q \mathscr{S})$ und der Kohärenz von $f_q \mathscr{S}$ für $q \geqq 1$ ist $H^q(C^\cdot)$ ein endlicher $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$-Modul, $q \geqq 1$. Man kann dann wie in [5], ($\mathrm{O_{III}}$, 11.9.1) beweisen, daß es einen Komplex $D^\cdot$ und eine Komplexabbildung $\alpha^\cdot: D^\cdot \to C^\cdot$ gibt mit i) und $H^q(D^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\cdot)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Die Aussage ii) folgt dann aus [5], (III, 6.3.3) und (6.3.7).

b) und c) lassen sich genau wie [10], Satz (1.7) und Satz (1.9) beweisen.

d) ist eine Zusammenfassung von [5], (III, 7.3.1) und (7.4.2).

(2.4) **Satz.** *Es sei* $f: X \to Y$ *eine 1-konvexe holomorphe Abbildung. Dann gibt es zu jedem Punkt* $y \in Y$ *beliebig kleine Steinsche Kompakta* L *mit* $y \in \mathring{L}$, *so daß folgendes gilt: Zu jedem solchen* L *und jeder* f*-platten kohärenten analytischen Garbe* $\mathscr{S}$ *über* X *existiert ein angepaßter Komplex* $C^\cdot$ *von* $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$*-Moduln.*

Beweis. Wir können zunächst ohne Einschränkung annehmen, daß Y Steinsch ist. Dann ist in der Faktorisierung (1.5)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

auch Z Steinsch. Es existiert somit auf Z eine reell-analytische streng plurisubharmonische Funktion ψ mit $\{z \in Z : \psi(z) < d\} \subset\subset Z$ für alle $d \in \mathbb{R}$ (vgl. [9]). Es sei nun $L \subset Y$ ein beliebiges Steinsches Kompaktum; dann ist auch $h^{-1}(L) \cap g(E)$ ein Steinsches Kompaktum, da $h \mid g(E)$ endlich ist (1.5). Infolgedessen existiert das Maximum d_0 von ψ auf $h^{-1}(L) \cap g(E)$. Es sei nun $d > d_0$ und

$$L' := h^{-1}(L) \cap \{z \in Z : \psi(z) \leqq d\}.$$

Da die Menge $\{\psi < d'\}$ für alle $d' > d$ relativ kompakt in Z liegt und Steinsch ist und h eine Steinsche Abbildung ist, ist L' ein Steinsches Kompaktum in Z; es gilt offensichtlich

$$h^{-1}(L) \cap g(E) \subset L'.$$

Wie in [10], (2.10) kann man dann $K := g^{-1}(L') \subset f^{-1}(L)$ mit endlich vielen Steinschen Kompakta K_j, $j = 0, \ldots, l$, überdecken, da g eigentlich ist:

$$K = \bigcup_{j=0}^{l} K_j.$$

Wir setzen wie üblich $K_{j_0 \ldots j_q} = K_{j_0} \cap \cdots \cap K_{j_q}$ und $C^q = \Pi\, \Gamma(K_{\iota_0 \ldots \iota_q}, \mathscr{S})$ und erhalten den formalen Komplex

$$C^\cdot : \cdots \to 0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^l \to 0 \to \cdots.$$

Es gilt dann ([2], Théorème 5.2.4, Cor.):

$$H^q = H^q(C^{\cdot}) \cong H^q(K, \mathscr{S})$$

für alle $q \geqq 0$. Daß alle C^q platte A-Moduln sind, folgt wie in [10], (2.12) aus der Plattheit von $\mathscr{S}$ über Y.

Wir haben noch die Bedingungen i), ii) und iii) nachzuweisen:

Da g eine eigentliche Abbildung ist, folgt

$$\begin{aligned} H^q = H^q(K, \mathscr{S}) &= \varinjlim_{\mathfrak{U}' \ni U'} H^q(g^{-1}(U'), \mathscr{S}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}' \ni U'} \Gamma(U', g_q \mathscr{S}) \\ &= \Gamma(L', g_q \mathscr{S}), \end{aligned}$$

wenn $\mathfrak{U}'$ ein Fundamentalsystem von offenen Steinschen Umgebungen von L' bezeichnet. Nun ist $\mathrm{Tr}(g_q \mathscr{S}) \subset g(E)$ für $q \geqq 1$, $h^{-1}(L) \cap g(E) = L' \cap g(E)$ und $h \mid g(E)$ endlich. Daraus folgt

$$\begin{aligned} H^q = \Gamma(L', g_q \mathscr{S}) &= \Gamma(L' \cap g(E), g_q \mathscr{S}) = \Gamma(L, h_0(g_q \mathscr{S})) \\ &= \Gamma(L, f_q \mathscr{S}), \end{aligned}$$

womit i) bewiesen wäre.

Um ii) zu beweisen, rechnet man zunächst die folgende Identität aus:

$$\begin{aligned} C^q \otimes_A (A/\mathfrak{m}_y) &= \Pi\, \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathscr{S}) / \mathfrak{m}_y \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathscr{S}) \\ &= \Pi\, \Gamma(K^*_{j_0 \dots j_q}, \mathscr{S}_y), \end{aligned}$$

wobei $K^*_{j_0 \dots j_q} = K_{j_0 \dots j_q} \cap X_y$ gesetzt ist und $\mathscr{S}_y$ die analytische Einschränkung von $\mathscr{S}$ auf X_y bezeichnet. Da $\{K^*_0, \dots, K^*_l\}$ eine Überdeckung von $K \cap X_y$ mit Steinschen Kompakta ist, folgt

$$H^q(C^{\cdot} \otimes_A (A/\mathfrak{m}_y)) = H^q(K \cap X_y, \mathscr{S}_y).$$

Nun ist $\chi = \psi \circ g \mid X_y$ eine reellwertige Funktion auf X_y, die außerhalb $\{\chi(x) \leqq d_0\}$ streng plurisubharmonisch ist. Es folgt daraus für alle $d > d_0$ (vgl. [1]):

$$\begin{aligned} H^q(\{\chi(x) \leqq d\}, \mathscr{S}_y) &= \varinjlim_{d' > d} H^q(\{\chi(x) < d'\}, \mathscr{S}_y) \\ &= H^q(X_y, \mathscr{S}_y), \qquad q \geqq 1. \end{aligned}$$

Wegen $K \cap X_y = \{x \in X_y : \chi(x) \leqq d\}$ ist dies gleichbedeutend mit ii).

Die Aussage iii) ist wegen der kanonischen Konstruktionen trivial einzusehen.

(2.5) Wir nennen die Überdeckung $K = \bigcup_{j=0}^{l} K_j \subset f^{-1}(L)$ ebenfalls *angepaßt*.

Im folgenden werden wir zeigen, daß sich diese angepaßten Überdeckungen in kanonischer Weise auf geliftete Familien vererben. Dies ist entscheidend für den Induktionsbeweis in § 3.

(2.6) Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe und $\alpha: Y^* \to Y$ eine beliebige holomorphe Abbildung, $\mathscr{S}$ sei eine f-platte kohärente analytische Garbe über X.

Dann hat man für $X^* = X \times_Y Y^*$ ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\beta"'] & Y^* \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

wo f^* eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist ([6], Theorem 1.5). Die analytische Urbildgarbe $\mathscr{S}^* = \mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^*}$ von $\mathscr{S}$ bezüglich β ist eine f^*-platte kohärente analytische Garbe über X^*. Das System $(X^*, f^*, Y^*, \mathscr{S}^*)$ heißt die *Liftung* von $(X, f, Y, \mathscr{S})$ nach Y^*.

(2.7) Wir setzen im folgenden α zusätzlich als *endlich* voraus. Ist Z wie in (1.5) beschaffen, so erhalten wir mit $Z^* = Z \times_Y Y^*$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "g^*"] \arrow[dd, "\beta"'] & & Y^* \arrow[dd, "\alpha"] \\ & Z^* \arrow[ur, "h^*"'] \arrow[dd, "\gamma"] & \\ X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

in dem α, β und γ endliche Abbildungen sind. Wir können weiter annehmen, daß Y und Y^* und damit auch Z und Z^* Steinsch sind. g^* ist eigentlich und außerhalb $E^* = \beta^{-1}(E)$ biholomorph; h^* ist Steinsch und $h^* \mid g^*(E^*)$ ist endlich. Somit erfüllen f^*, g^* und h^* dieselben Bedingungen, wie sie in (1.5) für f, g und h nachgewiesen worden sind.

Es sei nun $L \subset Y$ ein Steinsches Kompaktum und

$$K = \bigcup_{j=0}^{l} K_j = g^{-1}(L') \subset f^{-1}(L)$$

die in (2.4) konstruierte angepaßte Überdeckung. Wir wollen zeigen, daß mit

$$L^* = \alpha^{-1}(L), \quad L^{*\prime} = \gamma^{-1}(L'), \quad K^* = \beta^{-1}(K), \quad K_j^* = \beta^{-1}(K_j)$$

auch

$$K^* = \bigcup_{j=0}^{l} K_j^* = g^{*-1}(L^{*\prime}) \subset f^{*-1}(L^*)$$

eine angepaßte Überdeckung ist. Da nämlich α endlich ist, ist mit L auch L^* ein Steinsches Kompaktum. Wie in [10], (2.20) folgt daraus

$$C^{*q} = C^q \otimes_A A^*,$$

wobei $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$, $A^* = \Gamma(L^*, \mathcal{O}_{Y^*})$ und C^{*q} analog zu C^q gebildet ist. Da alle C^q platte A-Moduln sind, ist C^{*q} ein platter A^*-Modul für alle q. Genau wie im Beweis zu Satz (2.4) gilt

$$H^q(C^{*\cdot}) = H^q(K^*, \mathscr{S}^*) = \Gamma(L^*, f_q^* \mathscr{S}^*), \qquad q \geqq 1.$$

Auch die Aussage (ii) ist trivial nachzuweisen, da mit $y^* \in L^*$, $y = \alpha(y^*)$ gilt ($\mathfrak{m}^*_{y^*}$ ist das zu y^* gehörende maximale Ideal von A^*):

$$\begin{aligned} H^q(C^{*\cdot} \otimes (A^*/\mathfrak{m}^*_{y^*})) &= H^q(K^* \cap X^*_{y^*}, \mathscr{S}^*_{y^*}) \\ &= H^q(K \cap X_y, \mathscr{S}_y) = H^q(X_y, \mathscr{S}_y) = H^q(X^*_{y^*}, \mathscr{S}^*_{y^*}). \end{aligned}$$

Schließlich ist (iii) wegen der kanonischen Konstruktionen offensichtlich.

§ 3. Beweis des Hauptsatzes

(3.1) **Theorem.** *Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmekonstante c. Es sei $\mathscr{S}$ eine kohärente analytische Garbe über X, deren Einschränkung $\mathscr{S}_{c_1} = \mathscr{S} \mid \{\varphi < c_1\}$ für ein $c_1 > c$ f_{c_1}-platt sei. Dann gilt:*

(I) *Die Funktionen*

$$d_q(y) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathscr{S}_y), \qquad q \geqq 1,$$

sind halbstetig nach oben auf Y. Ist Y überdies reduziert, so existiert eine niederdimensionale analytische Menge N in Y, so daß alle d_q in $Y \setminus N$ lokal konstant sind.

(II) *Ist Y reduziert und die Funktion d_q für ein $q \geqq 1$ lokal konstant, so ist die q-te direkte Bildgarbe $f_q \mathscr{S}$ von $\mathscr{S}$ lokal frei.*

Der Beweis kann nach den Vorbereitungen in § 2 analog zu [10] geführt werden. Wir bemerken zunächst

(3.2) *In den Voraussetzungen von* (3.1) *kann ohne Einschränkung $c_1 = \infty$ angenommen werden.*

Man kann nämlich alle Überlegungen in § 2 für f_{c_1} anstelle von f durchführen. Man erhält dann für ein Steinsches Kompaktum $L \subset Y$ einen angepaßten Komplex $C^{\cdot}$ von platten A-Moduln C^q, $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$, mit

$$H^q(C^{\cdot}) \cong \Gamma(L, f_{c_1 q} \mathscr{S})$$

und

$$H^q(C^{\cdot} \otimes (A/\mathfrak{m}_y)) = H^q(X_y \cap \{\varphi < c_1\}, \mathscr{S}_y), \qquad y \in L.$$

Nun ist aber $f_{c_1 q} \mathscr{S} \cong f_q \mathscr{S}$ nach (1.6) und

$$H^q(X_y \cap \{\varphi < c_1\}, \mathscr{S}_y) \cong H^q(X_y, \mathscr{S}_y)$$

wegen [1]. Daraus folgt die Behauptung.

(3.3) *Ist Y reduziert, so existiert eine niederdimensionale analytische Menge N in Y, so daß alle Funktionen d_q in $Y \setminus N$ lokal konstant sind, $q \geqq 1$.*

Beweis (wörtlich wie [10], Satz (2.17)). Das System der niederdimensionalen analytischen Mengen

$$N_q = \{y \in Y : (f_q \mathscr{S})_y \text{ ist nicht frei über } \mathcal{O}_{Y,y}\}$$

ist lokal endlich und folglich $N = \bigcup_{q=1}^{\infty} N_q$ eine niederdimensionale analytische Menge in Y.

Es sei nun $y_0 \in Y$ und L ein Steinsches Kompaktum mit $y_0 \in \mathring{L} \subset L \subset Y \setminus N$. Die Funktionen

$$\mathrm{cg}_y(f_q \mathscr{S}) = \dim_{\mathbb{C}}(f_q \mathscr{S}/\mathfrak{m}(y) f_q \mathscr{S})_y$$

sind lokal konstant über L. Ist $C^{\cdot}$ ein angepaßter Komplex, so ist wegen

$$H^q(C^{\cdot}) \cong \Gamma(L, f_q \mathscr{S})$$

und der Plattheit von $\Gamma(L, f_q \mathscr{S})$ (vgl. (2.2)) die Abbildung

$$t_y^q : (f_q \mathscr{S}/\mathfrak{m}(y) f_q \mathscr{S})_y \to H^q(X_y, \mathscr{S}_y)$$

nach (2.1), ii) und iii) und Satz (2.3), c) bijektiv. Folglich ist d_q lokal konstant auf $\mathring{L}$ für alle $q \geqq 1$.

(3.4) *Die Aussagen* (I) *und* (II) *sind für Riemannsche Flächen Y richtig.*

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $Y = \mathbb{C}$, $L \subset Y$ ein Steinsches Kompaktum und $C^{\cdot}$ ein angepaßter Komplex. Da $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ ein eindimensionaler regulärer Ring ist, sind alle Z^q und B^q als Untermoduln der platten A-Moduln C^q platt. Wegen (2.3), b) sind dann alle Abbildungen t_y^q, $y \in L$, $q \geqq 1$, injektiv und wegen (3.3) bijektiv außerhalb einer diskreten Menge $N \subset Y$. Daraus folgt (3.4) unmittelbar wie in [10], (3.2) und (3.3).

Ebenso wie in [10], (3.4) zeigt man:

Ist L wie im Beweis zu (3.4) *gewählt und d_q konstant auf L, so sind $Z_c^q(C^{\cdot})$ und $Z_c^{q+1}(C^{\cdot})$ platte A-Moduln.*

(3.5) *Die Aussage* (I) *ist für beliebiges Y richtig.*

Beweis (durch Induktion nach $n = \dim Y$). Wörtlich wie in [10], (4.3).

(3.6) Um die Aussage (II) zu beweisen, leitet man induktiv die folgende Aussage ab:

Es sei $f: X \to Y$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung, $\mathscr{S}$ sei eine f-platte kohärente analytische Garbe über X, es sei $d_q(y) = \dim H^q(X_y, \mathscr{S}_y)$ konstant auf Y und Y reduziert. Dann gibt es zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ ein Steinsches Kompaktum L_0 mit $y_0 \in \mathring{L}_0$, so daß für alle Steinschen Kompakta $L \subset L_0$ ein angepaßter Komplex $C^{\cdot}$ existiert, bei dem

$$Z_c^q(C^{\cdot}) \quad \textit{und} \quad Z_c^{q+1}(C^{\cdot})$$

platte $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$-Moduln sind.

Man beweist dies wörtlich wie in [10], (4.9), (4.10), (4.11) und (4.12), indem man die Liftung angepaßter Komplexe (2.7) und Satz (2.3), a) anwendet.

(3.7) *Die Aussage* (II) *ist für beliebige reduzierte Räume Y richtig.*

Beweis (vgl. [10], (4.6)). Man wähle $L = L_0$ und $C^{\cdot}$ wie in (3.6). Die Plattheit von $Z_c^{q+1}(C^{\cdot})$ impliziert dann gemäß (2.3), d) die Bijektivität der Abbildungen

$$t_y^q : (f_q \mathscr{S}/\mathfrak{m}(y) f_q \mathscr{S})_y \to H^q(X_y, \mathscr{S}_y), \qquad y \in L.$$

Wegen $\dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = \text{const.}$ bedeutet dies, daß der Corang von $f_q\mathcal{S}$ konstant auf L ist, d. h. $f_q\mathcal{S}$ ist lokal frei in einer Umgebung eines jeden Punktes $y_0 \in Y$.

(3.8) **Zusatz zu Theorem (II).** *Ist Y reduziert und d_q für ein $q \geqq 1$ lokal konstant, so sind die kanonischen Abbildungen*

$$t_y^k : (f_k\mathcal{S}/\mathfrak{m}(y)\, f_k\mathcal{S})_y \to H^k(X_y, \mathcal{S}_y)$$

für alle $y \in Y$ und $k = q$, $\max(q-1, 1)$ bijektiv.

Für $k = q$ ist dies schon in (3.7) bewiesen worden. Der Fall $k = q-1$ folgt wegen der Plattheit von $Z_c^q(C^{\cdot})$ (3.6) aus (2.3), d).

Literatur

1. Andreotti, A., Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France **90**, 193—259 (1962).
2. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1964.
3. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I.H.E.S. No. **5**, 5—64 (1960).
4. — Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331—368 (1962).
5. Grothendieck, A.: Eléments de géometrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. No. **11** (1961) et No. **17** (1963).
6. Knorr, K.: Noch ein Theorem der analytischen Garbentheorie. Preprint: Regensburg 1970.
7. — Schneider, M.: Relativexzeptionelle analytische Mengen. Preprint: Regensburg 1970.
8. Markoe, A., Rossi, H.: Families of strongly pseudoconvex manifolds. Proc. Conf. Several Complex Variables. Park City, Utah: 1970.
9. Narasimhan, R.: The Levi problem for complex spaces. Math. Ann. **142**, 355—365 (1961).
10. Riemenschneider, O.: Über die Anwendung algebraischer Methoden in der Deformationstheorie komplexer Räume. Math. Ann. **187**, 40—55 (1970).
11. Siu, Y.-T.: Extending coherent analytic sheaves. Ann. of Math. **90**, 108—143 (1969).
12. — A pseudoconcave generalization of Grauert's direct image theorem: I, II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **24**, 278—330 (1970).
13. — The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem. Math. Ann. **190**, 203—214 (1971).
14. — Dimensions of sheaf cohomology groups under holomorphic deformation. Math. Ann. **192**, 203—215 (1971).

Dr. Oswald Riemenschneider
The Institute for Advanced Study
Princeton, N.J. 08540, USA
und
Mathematisches Institut der Universität
BRD-3400 Göttingen, Bunsenstr. 3—5
Deutschland

(Eingegangen am 12. November 1970)