Inventiones math. 11, 263–292 (1970)

Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen

HANS GRAUERT (Göttingen) und OSWALD RIEMENSCHNEIDER (Princeton)

Einleitung

Es sei X eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit, K das kanonische Geradenbündel von X und $F \to X$ ein positives komplex-analytisches Geradenbündel. Dann gilt, wie Kodaira [9] zeigte,

$$H^\nu(X, \underline{F} \otimes \underline{K}) = 0, \qquad \nu \geqq 1,$$

wobei $\underline{F}$ bzw. $\underline{K}$ die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in F bzw. K bezeichnet. Man kann einen entsprechenden Satz auch für positive Vektorraumbündel beweisen (Nakano [12]).

In der vorliegenden Arbeit soll eine Übertragung dieses Resultates auf kompakte komplexe Räume vorgenommen werden. Dazu ist es zunächst notwendig, für beliebige komplexe Räume X eine kanonische Garbe $\underline{K} = \underline{K}(X)$ zu definieren. Wir gehen folgendermaßen vor: Nach Hironaka [7] gibt es zu jedem (reduzierten) komplexen Raum (mit zusätzlichen Eigenschaften) eine eigentliche Modifikation $(\hat{X}, \pi)$, bei der $\hat{X}$ eine Mannigfaltigkeit ist. Wir definieren dann die kanonische Garbe $\underline{K}$ als das (nullte) direkte Bild $\pi_{(0)}(\hat{\underline{K}})$ der kanonischen Garbe $\hat{\underline{K}}$ von $\hat{X}$. $\underline{K}$ ist eine torsionsfreie kohärente analytische Garbe auf X, die unabhängig von der Modifikation $(\hat{X}, \pi)$ definiert ist (§2.1). – Das Hauptresultat läßt sich dann entsprechend dem Verschwindungssatz von Nakano formulieren:

Es sei X ein Moišezon-Raum, d.h. ein irreduzibler kompakter komplexer Raum der Dimension n, der n unabhängige meromorphe Funktionen besitzt, es sei $V \to X$ ein positives Vektorraumbündel und $\underline{K}$ die kanonische Garbe von X. Dann gilt

$$H^\nu(X, \underline{V} \otimes \underline{K}) = 0, \qquad \nu \geqq 1.$$

Wir beweisen sogar eine etwas allgemeinere Fassung (Satz 2.1): $\underline{V}$ kann durch eine quasi-positive torsionsfreie kohärente analytische Garbe S auf X ersetzt werden (solche Garben werden in §1.2 definiert).

Beim Beweis benutzen wir die (etwas verallgemeinerten) alten Resultate für kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten (Satz 2.2), die Hironakasche Desingularisation und ein Algebraisierungs-Theorem von Artin [3]. Es ist wesentlich zu zeigen, daß für eine Desingularisation $\pi: \hat{X} \to X$ die direkten Bilder

$$\pi_{(\nu)}(\pi^*(\underline{V}) \otimes \underline{\hat{K}}), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

verschwinden (Satz 2.3).

Die Beziehungen zwischen der Kohomologie auf $\hat{X}$ und der auf X interessieren auch für den Fall, daß $\pi: \hat{X} \to X$ eine eigentliche Modifikation kompakter Kählerscher Mannigfaltigkeiten X und $\hat{X}$ ist. Wir untersuchen solche Abbildungen in §4.

In der Dualitätstheorie komplexer Räume (Serre-Dualität) wird anstelle von $\underline{K}$ eine andere kanonische Garbe $\underline{K}^*$ verwendet, die mit Hilfe des Hom-Funktors definiert wird (vgl. §3). $\underline{K}$ und $\underline{K}^*$ stimmen natürlich in regulären Punkten überein; i.a. ist aber bei normalen komplexen Räumen $\underline{K}$ echt in $\underline{K}^*$ enthalten. Wir zeigen an einem Beispiel, daß unser Verschwindungssatz mit $\underline{K}^*$ als kanonischer Garbe i.a. nicht gilt (§3.3).

Interessant wäre noch zu wissen, ob der Verschwindungssatz auch für gewisse nicht kompakte komplexe Räume richtig ist, etwa für streng pseudokonvexe Räume X. Sind nur isolierte Singularitäten im Inneren von X vorhanden, so folgt ein solcher Satz leicht aus dem entsprechenden Ergebnis für streng pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten ([6], Satz 7; wir geben hier in einem Spezialfall einen neuen Beweis dieses Resultates, vgl. das Korollar zu Satz 2.4). Der Satz dürfte auch richtig sein, wenn der streng pseudokonvexe Raum X nicht-isolierte Singularitäten besitzt. Der Beweis wird jedoch viel schwieriger sein, da die Methoden von Artin für diesen Fall i.a. keine Algebraisation, sondern nur eine algebraische Approximation erlauben.

Zum Schluß wollen wir noch erwähnen, daß die Resultate dieser Arbeit in einer Note gleichen Titels angekündigt wurden (Several Complex Variables I. Maryland 1970. Lecture Notes in Mathematics 155. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970).

§ 1. Vorbereitungen

1. Es sei zunächst X ein beliebiger komplexer Raum und S eine kohärente analytische Garbe über X. Der zu S gehörende *lineare Raum* $L = L(S)$ ist auf folgendem Wege erklärt: Es sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt und $U = U(x_0) \subset X$ eine offene Menge, über der eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}^p | U \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q | U \to S | U \to 0$$

existiert. Es sei $h_*: \Gamma(U, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(U, \mathcal{O}^q)$ die durch h induzierte Abbildung und L_U der durch

$$\left\{(z, w_1, \dots, w_q) \in U \times \mathbb{C}^q \colon \sum_{\nu=1}^{q} f_\nu(z)\, w_\nu = 0, (f_1, \dots, f_q) \in \operatorname{im} h_*\right\}$$

definierte (nicht notwendig reduzierte) Unterraum von $U \times \mathbb{C}^q$. Die Produktprojektion $U \times \mathbb{C}^q \to U$ definiert eine Abbildung $\pi_u\colon L_U \to U$. Ist $V = V(x_1)$ eine weitere Umgebung eines Punktes $x_1 \in X$ mit den obigen Eigenschaften, so hat man einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $L_V|U \cap V \cong L_U|U \cap V$. Man erhält deshalb (bis auf Isomorphie) einen komplexen Raum L zusammen mit einer holomorphen Abbildung $\pi\colon L \to X$. Die Fasern $L_x = \pi^{-1}(x)$ sind (reduzierte) komplexe Vektorräume $\mathbb{C}^{r(x)}$, deren Dimension von x abhängt.

Ist X ein zusammenhängender reduzierter komplexer Raum, so ist die Menge N der Punkte $x \in X$, in denen S nicht frei ist, eine niederdimensionale analytische Menge in X. Außerhalb von N ist S lokal frei von einem festen Rang r. Wir nennen $r = r(S)$ den Rang von S. Für die oben definierten Dimensionen $r(x)$ gilt stets $r(x) \geqq r$. Die Zahl $r(x)$ ist genau dann gleich r, wenn S in x lokal frei ist.

2. Wir benutzen den linearen Raum $L(S)$, um die Semi- bzw. Quasi-Positivität einer kohärenten analytischen Garbe S zu erklären.

Es sei im folgenden X stets ein zusammenhängender (reduzierter) komplexer Raum, S eine kohärente analytische Garbe über X und $L = L(S)$ der zu S gehörende lineare Raum. Es sei ferner auf jeder Faser L_x eine positiv definite hermitesche Form h_x gegeben. Wir nennen $h = \{h_x\}$ eine hermitesche Form auf L, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$, eine Einbettung von $L|U$ in $U \times \mathbb{C}^q$ und eine positiv definite hermitesche Form

$$\hat{h} = \sum \hat{h}_{ij} w_i \bar{w}_j$$

auf $U \times \mathbb{C}^q$ mit in U beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\hat{h}_{ij}$ gibt, so daß $h_x = \hat{h}|L_x$ für alle $x \in U$.

Wir bezeichnen weiter mit $R = R(X, S)$ die Menge der Punkte $x \in X$, in denen X regulär und S lokal frei ist. $X - R$ ist dann eine niederdimensionale analytische Menge in X. $L|R$ ist ein Vektorraumbündel über der Mannigfaltigkeit R.

Die Garbe S heißt *semi-positiv (semi-negativ)*, wenn es eine hermitesche Form h auf dem linearen Raum $L = L(S)$ gibt, so daß das Vektorraumbündel $L_R = L|R$ zusammen mit der hermiteschen Form $h_R = h|L_R$ semi-positiv (semi-negativ) im Nakanoschen Sinne ist, d.h. wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in R$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset R$ mit in x_0 verschwindenden Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ und einen Isomorphismus $\tau\colon L|U \to U \times \mathbb{C}^r$

gibt, so daß für die Matrix der h_{ij} in x_0 gilt:

1) $(h_{ij}(x_0)) = (\delta_{ij}) =$ Einheitsmatrix,

2) $(dh_{ij}(x_0)) = 0$,

3) die hermitesche Form $(*)$ $\sum \frac{\partial^2 h_{ij}(x_0)}{\partial z_\nu \, \partial \bar{z}_\mu} \xi_{i\nu} \bar{\xi}_{j\mu}$ ist negativ semidefinit (positiv semi-definit).

Ein Vektorraumbündel V über einer Mannigfaltigkeit X ist genau dann semi-positiv im Sinne von Nakano, wenn die Garbe $\underline{V}$ der Keime von holomorphen Schnitten in V semi-positiv ist.

Man beweist leicht:

Ist V ein Vektorraumbündel über einer Mannigfaltigkeit X, h eine hermitesche Form auf V und $\mathring{X}$ eine offene dichte Teilmenge von X, so daß $V|\mathring{X}$ bezüglich h semi-positiv ist, so ist ganz V bezüglich h semi-positiv.

Wir nennen eine kohärente analytische Garbe S über einem komplexen Raum X *quasi-positiv (quasi-negativ)*, wenn es eine hermitesche Form h auf $L = L(S)$ und eine offene dichte Teilmenge $\mathring{R} \subset R(X, S)$ gibt, so daß das Vektorraumbündel $L|\mathring{R}$ positiv (negativ) im Sinne von Nakano ist. Dies bedeutet, daß man zu jedem Punkt $x_0 \in \mathring{R}$ eine Koordinatenumgebung $U \subset \mathring{R}$ und eine Trivialisierung $L|U \cong U \times \mathbb{C}^r$ finden kann, so daß 1) und 2) erfüllt sind und außerdem die hermitesche Form $(*)$ negativ definit (positiv definit) ist.

Jede quasi-positive Garbe ist semi-positiv.

3. Man kann beliebige Garben durch Modifikationen zu lokal freien Garben (modulo Torsion) machen. Dies besagt der folgende

Satz 1.1 (Rossi [13], Theorem 3.5). *Es sei X ein irreduzibler analytischer Raum und S eine kohärente analytische Garbe über X. Dann existiert ein irreduzibler komplexer Raum $\tilde{X}$ und eine eigentliche Modifikation $\pi: \tilde{X} \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

i) *Ist $N \subset X$ die Menge der Punkte $x \in X$, in denen S nicht lokal frei ist, so ist $\pi|\tilde{X} - \pi^{-1}(N)$ biholomorph,*

ii) *Die analytische Urbildgarbe $S^* = \pi^* S$ von S ist bis auf Torsion lokal frei, d.h.: bezeichnet $T(S^*)$ die Garbe der Torsionselemente von S^*, so ist $S^*/T(S^*)$ lokal frei.*

Rossi behauptet überdies ([13], Remarks, S. 72), daß $\pi^* S$ schon lokal frei ist für torsionsfreies S. Dies ist jedoch nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei $X = \mathbb{C}^2(x, y)$ und $S = \mathfrak{m}(0)$ die maximale Idealgarbe des Nullpunktes $0 \in \mathbb{C}^2$. Man sieht dann sofort, daß die Konstruktion von Rossi übereinstimmt mit dem Hopfschen Sigmaprozeß im Nullpunkt des $\mathbb{C}^n$. Man kann also zu jedem Punkt $z \in \pi^{-1}(0)$

Koordinaten u, v der Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$ mit $u(z)=v(z)=0$ finden, so daß $\hat{\pi}_z$: $\mathcal{O}_{X,0} \to \mathcal{O}_{\tilde{X},z}$ durch $\tilde{\pi}_z(x)=u$, $\hat{\pi}_z(y)=u \cdot v$ gegeben wird. Aus der exakten Sequenz

$$\mathcal{O}_{X,0} \xrightarrow{h} \mathcal{O}_{X,0} \oplus \mathcal{O}_{X,0} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0(0) \to 0$$

mit $h(f)=(f\,y, -f\,x)$ und $\varepsilon(f_1, f_2)=f_1\,x+f_2\,y$ folgt dann eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_{\tilde{X},z} \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{O}_{\tilde{X},z} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{X},z} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} (\pi^* S)_z = \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_{X,0}} \mathcal{O}_{\tilde{X},z} \to 0$$

mit $\tilde{h}(g)=(g\,u\,v, -g\,u)$ und $\tilde{\varepsilon}(g_1, g_2)=x \otimes g_1 + y \otimes g_2$. Wir betrachten nun das Element

$$g^* = \tilde{\varepsilon}(v, -1) = x \otimes v - y \otimes 1 .$$

g^* ist von Null verschieden, denn sonst würde mit einem gewissen Element g eine Gleichung $(v, -1)=(g\,u\,v, -g\,u)$ gelten, was nicht sein kann. Man hat aber

$$\begin{aligned} u \cdot g^* &= x \otimes u\,v - y \otimes u = x \otimes \hat{\pi}_z(y) - y \otimes \hat{\pi}_z(x) \\ &= x\,y \otimes 1 - x\,y \otimes 1 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $\pi^* S$ hat in jedem Punkt von $\pi^{-1}(0)=\mathbb{P}^1$ Torsion!

Satz 1.1 von Rossi führt uns dazu, die torsionsfreie Urbildgarbe $S \circ \pi := S^*/T(S^*)$, $S^* = \pi^* S$, zu betrachten. Wir bemerken dann als erstes:

Satz 1.2. *Es sei π: $Y \to X$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume X, Y, und es seien S eine beliebige und F eine lokal freie kohärente analytische Garbe über X. Dann gilt*

$$(S \otimes F) \circ \pi = (S \circ \pi) \otimes \pi^* F .$$

Beweis. Es sei $S^* = \pi^* S$ und $F^* = \pi^* F$. Dann gilt per definitionem

$$(S \otimes F) \circ \pi = (S^* \otimes F^*)/T(S^* \otimes F^*).$$

Ist $y \in Y$ ein beliebiger Punkt, so läßt sich jedes Element $s^* \in S_y^* \otimes F_y^*$ eindeutig als Summe

$$s^* = \sum_{j=1}^{t} s_j^* \otimes f_j^*$$

schreiben, wobei $s_j^* \in S_y^*$ und $f_1^*, \ldots, f_t^*$ eine Basis des freien $\mathcal{O}_{Y,y}$-Moduls F_y^* ist. Daraus folgt unmittelbar

$$T(S^* \otimes F^*)_y = T(S_y^* \otimes F_y^*) = T(S_y^*) \otimes F_y^* = \big(T(S^*) \otimes F^*\big)_y,$$

und also

$$\begin{aligned} (S \otimes F) \circ \pi &= (S^* \otimes F^*)/T(S^*) \otimes F^* \\ &= \big(S^*/T(S^*)\big) \otimes F^* = (S \circ \pi) \otimes \pi^* F, \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Die in §2 auftretenden Abbildungen $\pi\colon Y \to X$ haben stets die Eigenschaft

(E) *X und Y sind irreduzible komplexe Räume der Dimension n, π ist in mindestens einem Punkt $y_0 \in Y$ diskret.*

Für solche Abbildungen ist das torsionsfreie Urbild nur für torsionsfreie Garben sinnvoll. Es gilt nämlich

Satz 1.3. *Die holomorphe Abbildung $\pi\colon Y \to X$ besitze die Eigenschaft* (E). *Ist S eine kohärente analytische Garbe auf X, so gilt*

$$\big(S/T(S)\big) \circ \pi \cong S \circ \pi .$$

Beweis. Die exakte Sequenz $0 \to T(S) \to S \to S/T(S) \to 0$ impliziert eine exakte Sequenz

$$\pi^*(T) \xrightarrow{i^*} S^* \xrightarrow{\varphi^*} (S/T)^* \to 0,$$

wobei $T = T(S)$, $S^* = \pi^* S$ und $(S/T)^* = \pi^*(S/T)$ gesetzt ist. Nun besitzt T als Torsionsgarbe einen niederdimensionalen Träger. Da aufgrund der Eigenschaft (E) das Urbild einer niederdimensionalen analytischen Menge in X unter π wieder niederdimensional ist, ist auch

$$\operatorname{Tr}\big(i^*(\pi^*(T))\big) \subset \operatorname{Tr}\big(\pi^*(T)\big) = \pi^{-1}\big(\operatorname{Tr}(T)\big)$$

niederdimensional in Y, d.h. $i^*\big(\pi^*(T)\big) \subset T(S^*)$, und folglich gilt wegen $(S/T)^* \cong S^*/i^*\big(\pi^*(T)\big)$:

$$S \circ \pi = S^*/T(S^*) = (S/T)^*/\big(T(S^*)/\ker \varphi^*\big).$$

Da $\varphi^*\colon S^* \to (S/T)^*$ surjektiv ist und $\ker \varphi^*$ in $T(S^*)$ enthalten ist, folgt sofort

$$T\big((S/T)^*\big) = T(S^*)/\ker \varphi^*$$

und damit nach Definition die Behauptung, w.z.b.w.

Korollar. *Es seien $\rho\colon Z \to Y$ und $\pi\colon Y \to X$ zwei holomorphe Abbildungen, von denen ρ die Eigenschaft* (E) *besitzt. Dann gilt für eine beliebige kohärente analytische Garbe S auf X das Transitivitätsgesetz*

$$(S \circ \pi) \circ \rho = S \circ (\pi \circ \rho).$$

Beweis. Mit $S^* = \pi^* S$ folgt aus Satz 1.3 unmittelbar

$$\begin{aligned}(S \circ \pi) \circ \rho &= \big(S^*/T(S^*)\big) \circ \rho = S^* \circ \rho = \rho^* S^*/T(\rho^* S^*)\\ &= (\pi \circ \rho)^* S/T\big((\pi \circ \rho)^* S\big) = S \circ (\pi \circ \rho),\end{aligned}$$

w.z.b.w.

Wir haben schließlich noch zu untersuchen, wie sich semi- und quasi-positive Garben bei Bildung des torsionsfreien Urbildes verhalten. Wir beweisen

Satz 1.4. *Die Abbildung* $\pi\colon Y \to X$ *besitze die Eigenschaft* (E). *Ist dann* S *eine torsionsfreie semi- (bzw. quasi-) positive kohärente analytische Garbe auf* X, *so ist auch* $S \circ \pi$ *semi- (bzw. quasi-) positiv.*

Beweis. Es sei $L = L(S)$ der lineare Raum zu S und U eine offene Menge in X, für die eine Einbettung $L|U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ und eine hermitesche Form $\hat{h} = \sum \hat{h}_{ij} w_i \overline{w}_j$ auf $U \times \mathbb{C}^q$ existiert mit $\hat{h}|L = h$, wobei h die semi-positive hermitesche Form auf L bezeichnet. Da ein surjektiver Garbenhomomorphismus $\pi^* S \to S \circ \pi$ existiert, ist $L(S \circ \pi)$ ein abgeschlossener Unterraum von

$$L(\pi^* S) = L \times_X Y.$$

Ist nun $V = \pi^{-1}(U)$, so erhält man eine Einbettung

$$L(S \circ \pi)|V \hookrightarrow V \times \mathbb{C}^q,$$

und die Einschränkung $h \circ \pi$ der auf $V \times \mathbb{C}^q$ definierten hermiteschen Form

$$\hat{h} \circ \pi = \sum \hat{h}_{ij}(\pi(y))\, w_i \overline{w}_j$$

auf $L(S \circ \pi)|V$ liefert eine hermitesche Form auf $L(S \circ \pi)$.

Wir bezeichnen weiter mit M die Menge der Punkte $y \in Y$, in denen π kein lokaler Isomorphismus ist. M ist eine (abgeschlossene) analytische Menge in Y. Da π in einer Umgebung von y_0 endlich ist, muß M niederdimensional sein.

Ist $y \in Y - M$ und $x = \pi(y)$, so gilt also $L(S \circ \pi)_y = L_x$ und $(h \circ \pi)_y = h_x$. Infolgedessen ist $h \circ \pi$ semi-positiv auf dem Vektorraumbündel

$$L(S \circ \pi)|R(Y, S \circ \pi) \cap \pi^{-1}(R(X, S)) - M.$$

Da $\pi^{-1}(X - R(X, S)) \cup M$ eine niederdimensionale analytische Menge in Y ist, ist dann auch $h \circ \pi$ auf $L(S \circ \pi)|R(Y, S \circ \pi)$ semi-positiv und folglich $S \circ \pi$ eine semi-positive Garbe auf Y.

Wenn S sogar quasi-positiv ist, so gibt es eine offene dichte Teilmenge $\mathring{R} \subset R(X, S)$, so daß $L|\mathring{R}$ ein positives Vektorraumbündel über der Mannigfaltigkeit $\mathring{R}$ ist. Dann ist aber auch

$$L(S \circ \pi)|R(\hat{X}, \hat{S}) \cap \pi^{-1}(\mathring{R}) - M$$

ein positives Vektorraumbündel, und $R(\hat{X}, \hat{S}) \cap \pi^{-1}(\mathring{R}) - M$ liegt offen und dicht in $R(\hat{X}, \hat{S})$, w.z.b.w.

4. Ein irreduzibler kompakter komplexer Raum X der (komplexen) Dimension n heißt nach Artin ein *Moišezon-Raum*, wenn er n unabhängige meromorphe Funktionen besitzt. Es sei nun S eine torsionsfreie kohärente analytische Garbe über einem Moišezon-Raum X. Nach Satz 1.1 gibt es dann einen irreduziblen Raum $\tilde{X}$ und eine eigentliche Modifikation $\tilde{\pi}: \tilde{X} \to X$, so daß $S \circ \tilde{\pi}$ lokal frei ist. $\tilde{X}$ ist als eigentliche Modifikation eines Moišezon-Raumes wieder ein Moišezon-Raum. Nach Moišezon [11], §2 besitzt $\tilde{X}$ dann eine projektiv-algebraische Desingularisation $\hat{X}$, d. h. es existiert eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ und eine eigentliche Modifikation $\pi: \hat{X} \to \tilde{X}$. Mit dem Korollar zu Satz 1.3 und mit Satz 1.4 erhalten wir deshalb

Satz 1.5. *Es sei X ein Moišezon-Raum und S eine torsionsfreie kohärente analytische Garbe über X. Dann existiert eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ und eine eigentliche Modifikation $\pi: \hat{X} \to X$, so daß $\hat{S} = S \circ \pi$ lokal frei ist.*

Ist S zusätzlich quasi-positiv, so auch $\hat{S}$.

Eine wichtige Eigenschaft von Moišezon-Räumen wurde von Artin bewiesen (vgl. [3], §7):

Zu jedem Punkt x_0 eines Moišezon-Raumes X gibt es einen affin-algebraischen Raum $\mathring{Y}$ und eine offene holomorphe Abbildung $\mathring{\varphi}: \mathring{Y} \to X$, die lokal biholomorph ist, so daß $x_0 \in \mathring{\varphi}(\mathring{Y})$ und für jede meromorphe Funktion f auf X die Funktion $f \circ \mathring{\varphi}$ rational ist ($\mathring{\varphi}: \mathring{Y} \to X$ ist also ein morphisme étale).

Man kann $\mathring{Y}$ zu einem projektiv-algebraischen Raum Y vervollständigen und $\mathring{\varphi}$ zu einer regulären holomorphen Abbildung $\varphi: Y \to X$ fortsetzen. φ besitzt die Eigenschaft (E).

§ 2. Das Hauptresultat

1. Es sei X ein n-dimensionaler Moišezon-Raum und $\pi: \hat{X} \to X$ eine eigentliche Modifikation, bei der $\hat{X}$ eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit ist. Ist dann $\hat{K} = K(\hat{X})$ das kanonische Geradenbündel von $\hat{X}$, so setzen wir

$$\underline{K} = \underline{K}(X) := \pi_{(0)}(\underline{K}(\hat{X}))$$

und erhalten damit eine torsionsfreie kohärente analytische Garbe über X.

$\underline{K} = \underline{K}(X)$ ist unabhängig von der Desingularisation $(\hat{X}, \pi)$ von X definiert.

Beweis. Es seien $(\hat{X}_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$, zwei Desingularisationen von X mit projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten $\hat{X}_1$ und $\hat{X}_2$. Dann ist die Reduktion $\hat{Y}$ des Faserproduktes $\hat{X}_1 \times_X \hat{X}_2$ ein projektiv-algebraischer komplexer Raum, der vermöge der natürlichen Abbildungen $p_i: \hat{Y} \to \hat{X}_i$ eine eigentliche Modifikation von $\hat{X}_1$ und $\hat{X}_2$ ist. Es sei schließlich $(\hat{Z}, \rho)$ eine Desingularisation von $\hat{Y}$ und $\varphi_i = p_i \circ \rho$; $i = 1, 2$:

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_1 \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \hat{Z} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & X \\ & \hat{X}_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Wir brauchen jetzt nur noch zu zeigen, daß

$$\pi_{1(0)}(\underline{K}(\hat{X}_1)) = (\pi_1 \circ \varphi_1)_{(0)}(\underline{K}(\hat{Z}))$$

gilt. Wegen $(\pi_1 \circ \varphi_1)_{(0)}(\underline{K}(\hat{Z})) = \pi_{1(0)}(\varphi_{1(0)}(\underline{K}(\hat{Z})))$ genügt es dazu sogar, die Gleichheit

$$\underline{K}(\hat{X}_1) = \varphi_{1(0)}(\underline{K}(\hat{Z}))$$

zu verifizieren. Wir schreiben $\hat{X}$ für $\hat{X}_1$ und φ für φ_1 und bezeichnen mit $\hat{E} \subset \hat{Z}$ die Entartungsmenge der eigentlichen Modifikationsabbildung φ. $E = \varphi(\hat{E})$ ist dann mindestens 2-codimensional in $\hat{X}$. Infolgedessen läßt sich jede holomorphe n-Form auf einer Menge $U - E$ nach ganz U fortsetzen, wenn U eine offene Teilmenge von $\hat{X}$ ist. Insbesondere gilt dies für Formen $(\hat{\alpha} | \hat{U} - \hat{E}) \circ \varphi'^{-1}$, wobei $\hat{\alpha}$ eine n-Form auf der offenen Menge $\hat{U} = \varphi^{-1}(U) \subset \hat{Z}$ und φ' die Einschränkung von φ auf $\hat{Z} - \hat{E}$ ist. Dies bedeutet, daß jede holomorphe n-Form auf $\hat{U}$ von einer n-Form auf U herkommt, w.z.b.w.

Wir nennen $\underline{K} = \underline{K}(X)$ die *kanonische Garbe von* X. Ist X eine Mannigfaltigkeit, so stimmt $\underline{K}$ natürlich mit der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in dem kanonischen Geradenbündel von X überein.

2. Die Garbe $\underline{K}(X)$ läßt sich auch ohne Verwendung der Desingularisationstheorie definieren (X sei normal).

Es sei $N \subset X$ die (mindestens 2-codimensionale) analytische Menge der singulären Punkte von X. Wir betrachten dann zu jeder offenen Menge $U \subset X$ den Modul

$$\Gamma_*(U) = \left\{\varphi \in \Gamma(U - N, \underline{K}(X - N)) \colon \int_{U-N} \varphi \wedge \bar{\varphi} < \infty \right\}$$

und zeigen, daß *die durch die Praegarbe* $\{\Gamma_*(U)\}$ *definierte Garbe auf* X *mit der kanonischen Garbe* $\underline{K}(X)$ *übereinstimmt.*

Es sei $\varphi \in \Gamma(U, \underline{K}(X))$ und $V \subset\subset U$ beliebig. Wir nehmen dann eine Desingularisation $\pi: \hat{X} \to X$ vor und setzen $\hat{U} = \pi^{-1}(U)$, $\hat{V} = \pi^{-1}(V)$

und $\hat{N}=\pi^{-1}(N)$. Ist nun ψ das φ entsprechende Element aus $\Gamma(\hat{U}, \underline{K}(\hat{X}))\cong \Gamma(U, \underline{K}(X))$, so folgt sofort wegen $\hat{V}\subset\subset\hat{U}$:

$$\int_{V-N} \varphi\wedge\bar{\varphi}=\int_{\hat{V}-\hat{N}} \psi\wedge\bar{\psi}=\int_{\hat{V}}\psi\wedge\bar{\psi}<\infty .$$

Es ist also $\underline{K}(X)$ in der oben definierten Garbe enthalten. Um die Umkehrung zu zeigen, betrachten wir zunächst X (lokal) als verzweigte Überlagerung über einem Gebiet $G\subset\mathbb{C}^n(z_1, \ldots, z_n)$:

$$\tau\colon X\to G .$$

φ sei eine holomorphe n-Form auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $X-N$; dann gilt

$$(*)\qquad \varphi=a(x)\,(d\mathfrak{z}\circ\tau), \qquad d\mathfrak{z}=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

wobei $a(x)$ eine meromorphe Funktion auf X ist, die außerhalb N holomorph ist und auf N höchstens Polstellen besitzt.

Dies sieht man folgendermaßen ein: Über Punkten, die nicht zum singulären Ort $S(\Delta)$ des Verzweigungsortes $\Delta\subset G$ gehören, besitzt X nur Windungspunkte, d.h. X ist dort von der Form $\{w^b-z_1\}$. In diesen Punkten ist die Gleichung $(*)$ sofort nachprüfbar. Da $S(\Delta)$ mindestens 2-codimensional in G liegt, erhält man $(*)$ wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes auf ganz X.

Es sei nun $\psi=\varphi\circ\pi$, wobei $\pi\colon\hat{X}\to X$ wiederum eine Desingularisation von X ist. Dann gilt $\psi=b(\hat{x})\,(d\mathfrak{z}\circ\tau\circ\pi)$ mit $b(\hat{x})=a(\pi(x))$. Nun ist $d\mathfrak{z}\circ\tau\circ\pi$ von der Form $h(\hat{x})\,d\hat{x}_1\wedge\cdots\wedge d\hat{x}_n$, wobei h holomorph auf $\hat{X}$ ist. Es ist also

$$\psi=b(\hat{x})\,h(\hat{x})\,d\hat{x}_1\wedge\cdots\wedge d\hat{x}_n$$

eine meromorphe Differentialform auf $\hat{X}$. Sie hat höchstens Polstellen auf $\hat{N}$. Ist nun $\int_{X-N}\varphi\wedge\bar{\varphi}<\infty$, so gilt auch $\int_{\hat{X}-\hat{N}}\psi\wedge\bar{\psi}<\infty$. Dann kann aber $b\cdot h$ keine Polstellen besitzen. Andernfalls gäbe es nämlich einen Punkt $\hat{x}_0\in\hat{X}$ und Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in $\hat{x}_0$ von $\hat{X}$ mit

$$\hat{N}=\{\xi_1=0\}$$

und

$$b(\xi)\,h(\xi)=\frac{b_1(\xi)}{\xi_1^s}, \quad b_1(\hat{x}_0)\neq 0, \quad s\geqq 1 .$$

Es folgt dann für eine kleine Umgebung $\hat{U}$ von $\hat{x}_0$:

$$\left|\int_{\hat{U}-\hat{N}}\psi\wedge\bar{\psi}\right|=\left|\int_{\hat{U}-\hat{N}}\frac{b_1\cdot\bar{b}_1}{(\xi_1\cdot\bar{\xi}_1)^s}\,do\right|\geqq c\int_0^{r_0}\frac{dr}{r^{2s-1}}, \qquad c>0,$$

und also $\int\limits_{\hat{U}-\hat{N}} \psi \wedge \bar{\psi} = \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist bh holomorph in ganz $\hat{X}$, d.h. ψ läßt sich zu einem Schnitt $\hat{\psi}$ aus $\Gamma(\hat{X}, \underline{K}(\hat{X}))$ fortsetzen, und φ ist die Einschränkung von $\hat{\psi}$, aufgefaßt als Schnitt in $\Gamma(X, \underline{K}(X))$, auf $X-N$, w.z.b.w.

3. Es sei jetzt X ein n-dimensionaler Moišezon-Raum und S eine torsionsfreie kohärente analytische Garbe über X. Es sei $\pi: \hat{X} \to X$ eine eigentliche Modifikation von X, so daß $S \circ \pi$ lokal frei über $\hat{X}$ ist. Die kohärente analytische Garbe

$$S \cdot \underline{K}(X) := \pi_{(0)}\big((S \circ \pi) \otimes \underline{K}(\hat{X})\big)$$

ist torsionsfrei über X. Man zeigt wie in Abschnitt 1, daß sie unabhängig von der speziellen Wahl der Modifikation $(\hat{X}, \pi)$ definiert ist. Ist insbesondere S lokal frei, so gilt $S \cdot \underline{K}(X) = S \otimes \underline{K}(X)$.

Wir können nun unser Hauptergebnis formulieren:

Satz 2.1. *Es sei X ein n-dimensionaler irreduzibler kompakter komplexer Raum, der n unabhängige meromorphe Funktionen besitzt, und es sei S eine quasi-positive torsionsfreie kohärente analytische Garbe auf X. Dann gilt*

$$H^\nu\big(X, S \cdot \underline{K}(X)\big) = 0$$

für $\nu \geqq 1$.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile, einen transzendenten und einen algebraischen. Wir zeigen zunächst:

Satz 2.2. *Es sei X eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit und V ein quasi-positives Vektorraumbündel über X. Dann gilt:*

$$H^\nu\big(X, \underline{V} \otimes \underline{K}(X)\big) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Der Beweis besteht aus einer Kopie der Nakanoschen Idee im Falle eines positiven Vektorraumbündels [12]. Wir begnügen uns deshalb mit einer kurzen Skizze:

Es bezeichne $A^{p,q}(V)$ den Vektorraum der Differentialformen vom Typ (p, q) über X mit Werten in dem Vektorraumbündel V. Man hat dann eine Anzahl von Operatoren, die in der üblichen Weise definiert sein sollen (V^* bezeichnet das zu V duale Vektorraumbündel):

$$\begin{aligned}
d'' &: A^{p,q}(V) \to A^{p,q+1}(V)\\
\bar{*} &: A^{p,q}(V) \to A^{n-p,n-q}(V^*)\\
\delta'' = -\bar{*} d'' \bar{*} &: A^{p,q}(V) \to A^{p,q-1}(V)\\
L &: A^{p,q}(V) \to A^{p+1,q+1}(V)\\
\Lambda = -\bar{*} L \bar{*} &: A^{p,q}(V) \to A^{p-1,q-1}(V)\\
\chi &: A^{p,q}(V) \to A^{p+1,q+1}(V).
\end{aligned}$$

Ferner wird in $A^{p,q}(V)$ vermöge

$$(\varphi, \psi) := \int_X \varphi \wedge \bar{*} \psi$$

ein hermitesches Skalarprodukt erklärt. Ist

$$\mathscr{H}^{p,q}(V) = \{\varphi \in A^{p,q}(V) : d'' \varphi = \delta'' \varphi = 0\}$$

der Vektorraum der harmonischen Formen aus $A^{p,q}$, so gilt

$$\mathscr{H}^{p,q}(V) \cong H^{p,q}(V) := H^q(X, \underline{V} \otimes \Omega^p),$$

wenn Ω^p die Garbe der Keime von holomorphen p-Formen auf X bezeichnet. Wegen $\underline{K}(X) = \Omega^n$ haben wir also $\mathscr{H}^{n,q}(V)$, $q \geqq 1$, zu betrachten.

Nach Nakano hat man nun für beliebiges $\varphi \in \mathscr{H}^{p,q}(V)$ bei beliebigem Vektorraumbündel V die Ungleichung

$$(\chi \wedge \Lambda \varphi, \varphi) \geqq 0.$$

Andererseits ist die Definition der Quasi-Positivität von V gerade so gefaßt, daß für $\varphi \in A^{n,q}(V)$, $q \geqq 1$, die (n, n)-Form

$$\chi \wedge \Lambda \varphi \wedge \bar{*} \varphi \leqq 0$$

und in jedem Punkt x_0 aus der offenen dichten Teilmenge $\mathring{R} \subset R(X, \underline{V})$ echt kleiner als Null ist, wenn dort φ von Null verschieden ist. Infolgedessen muß jede Form $\varphi \in \mathscr{H}^{n,q}(V)$, $q \geqq 1$, auf $\mathring{R}$ und damit auf ganz X verschwinden, w.z.b.w.

Den zweiten Teil des Beweises von Satz 2.1 formulieren wir als

Satz 2.3. *Es sei X ein projektiv-algebraischer Raum und S eine quasipositive torsionsfreie kohärente analytische Garbe über X. Ferner sei $\pi: \hat{X} \to X$ eine Desingularisation von X derart, daß $\hat{S} = S \circ \pi$ lokal frei ist. Dann gilt*

$$\pi_{(\nu)}(\hat{S} \otimes \underline{K}(\hat{X})) = 0, \qquad \nu \geqq 1.$$

Beweis. Wir setzen $\underline{\hat{K}} = \underline{K}(\hat{X})$ und beweisen durch vollständige Induktion nach ν, daß $\pi_{(\nu)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}) = 0$ für alle $\nu \geqq 1$. Der Induktionsanfang $\nu = 1$ wird dabei mit erledigt.

Es sei also $\nu \geqq 1$ und für $1 \leqq \mu < \nu$ schon bewiesen, daß $\pi_{(\mu)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}) = 0$. Wir wählen dann eine Steinsche Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\rho\}$ von X und eine Steinsche Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_\sigma\}$ von $\hat{X}$ und setzen $\hat{\mathfrak{U}} = \{\hat{U}_\rho = \pi^{-1}(U_\rho)\}$. Wir bilden dann den zu den beiden Überdeckungen $\hat{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{V}$ gehörenden Doppelkomplex $\{C^{r,s} = C^{r,s}(\hat{\mathfrak{U}}, \mathfrak{V}); \delta', \delta''\}$. Dabei sind Elemente aus $C^{r,s}$ nichts anderes als Kollektionen von Schnittflächen in $\hat{U}_{\rho_0 \ldots \rho_r} \cap V_{\sigma_0 \ldots \sigma_s} = \hat{U}_{\rho_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{\rho_r} \cap V_{\sigma_0} \cap \cdots \cap V_{\sigma_s}$, δ' ist der bezüglich der Überdeckung $\hat{\mathfrak{U}}$ und δ'' der bezüglich $\mathfrak{V}$ gebildete Korandoperator. Wir malen uns das folgende Diagramm auf:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
C^{0,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,0} & \to\cdots\to & C^{\nu,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,0} & \to\cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & \\
C^{0,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,1} & \to\cdots\to & C^{\nu,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,1} & \to\cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
C^{0,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,\nu-1} & \to\cdots\to & C^{\nu,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,\nu-1} & \to\cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & & \downarrow{\scriptstyle\delta''} & & & & & \\
C^{0,\nu} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,\nu} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,\nu} & & & & &
\end{array}
$$

Da bei beliebigem $V_{\sigma_0\ldots\sigma_s}$ das System $\hat{\mathfrak{U}} \cap V_{\sigma_0\ldots\sigma_s}$ eine Steinsche Überdeckung von $V_{\sigma_0\ldots\sigma_s}$ ist, sind alle waagerechten Sequenzen in dem obigen Diagramm exakt. Außerdem gilt für eine beliebige Steinsche Menge $U \subset X$ nach Induktionsvoraussetzung

$$H^\mu(\pi^{-1}(U), \hat{S} \otimes \hat{\underline{K}}) = \Gamma(U, \pi_{(\mu)}(\hat{S} \otimes \hat{\underline{K}})) = 0; \qquad \mu = 1, \ldots, \nu-1.$$

Infolgedessen sind auch die senkrechten Sequenzen

$$C^{r,0} \xrightarrow{\delta''} C^{r,1} \xrightarrow{\delta''} \cdots \xrightarrow{\delta''} C^{r,\nu-1}$$

für alle r exakt. Durch Treppensteigen erhält man dann in bekannter Weise einen kanonischen Isomorphismus

$$H^{2,\nu-1} \cong H^{\nu+1,0}.$$

Wir werden nun zeigen, daß man ohne Einschränkung $H^{\nu+1,0} = 0$ annehmen kann. Da nämlich X projektiv-algebraisch ist, existiert ein in unserem Sinne quasi-positives komplex-analytisches Geradenbündel $F \to X$. Ist $\hat{\underline{F}} = \pi^* \underline{F}$, so folgt aus Satz 1.2 die Beziehung

$$\hat{S} \otimes \hat{\underline{F}}^l = (S \otimes \underline{F}^l) \circ \pi =: \widehat{S \otimes \underline{F}^l}$$

und damit für alle μ:

$$\begin{aligned}\pi_{(\mu)}(\widehat{S \otimes \underline{F}^l} \otimes \hat{\underline{K}}) &= \pi_{(\mu)}(\hat{S} \otimes (\hat{\underline{K}} \otimes \hat{\underline{F}}^l)) \\ &= \pi_{(\mu)}(\hat{S} \otimes \hat{\underline{K}}) \otimes \underline{F}^l.\end{aligned}$$

Es verschwindet also $\pi_{(\mu)}(\hat{S} \otimes \hat{\underline{K}})$ genau dann, wenn $\pi_{(\mu)}(\widehat{S \otimes \underline{F}^l} \otimes \hat{\underline{K}})$ verschwindet. $S \otimes \underline{F}^l$ ist eine quasi-positive kohärente analytische Garbe.

Nach [5] existiert nun ein l_0, so daß für alle $l \geqq l_0$ gilt:

$$H^{\nu+1}(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{\underline{K}}) \otimes \underline{F}^l) = 0.$$

Also ist auch $H^{\nu+1}(X, \pi_{(0)}(\widehat{S \otimes \underline{F}^l} \otimes \underline{\hat{K}})) = 0$ und wir können ohne Einschränkung

$$H^{\nu+1,0} = H^{\nu+1}(\hat{\mathfrak{U}}, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}) = H^{\nu+1}(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})) = 0$$

voraussetzen.

Angenommen, es wäre $\pi_{(\nu)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}) \neq 0$. Da wir wieder mit einer genügend hohen Potenz von $\underline{F}$ tensorieren dürfen, können wir ohne Einschränkung die Existenz eines globalen Schnittes $\sigma \in \Gamma(X, \pi_{(\nu)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}))$, $\sigma \neq 0$, voraussetzen.

Mit Hilfe von σ konstruieren wir nun eine nicht-verschwindende Kohomologieklasse aus $H^\nu(\hat{X}, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})$:

Wegen $\sigma | U_\rho \in \Gamma(U_\rho, \pi_{(\nu)}(\hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})) = H^\nu(\hat{U}_\rho, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})$ gibt es Zyklen $\xi_\rho \in Z^\nu(\hat{U}_\rho \cap \mathfrak{B}, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})$ mit $\pi_{(\nu)} \xi_\rho = \sigma | U_\rho$. Man bilde nun $\zeta = \delta' \{\xi_\rho\} \in C^{1,\nu}$. Wegen $\pi_{(\nu)} \zeta = 0$ gibt es ein $\eta \in C^{1,\nu-1}$ mit $\zeta = \delta'' \eta$. Nun ist $\delta' \delta' \eta = 0$ und $\delta'' \delta' \eta = \delta' \zeta = 0$ und also $\delta' \eta \in Z^{2,\nu-1}$. Wegen $H^{2,\nu-1} = H^{\nu+1,0} = 0$ ist jedoch $Z^{2,\nu-1} = B^{2,\nu-1}$; es gilt somit $\delta' \eta \in B^{2,\nu-1}$.

Im Falle $\nu > 1$ gibt es also ein $\gamma \in C^{1,\nu-2}$ mit $\delta'' \delta' \gamma = \delta' \eta$. Da die $(\nu-1)$-te waagerechte Sequenz bei $C^{1,\nu-1}$ exakt ist, gibt es schließlich ein $\alpha \in C^{0,\nu-1}$, so daß $\eta - \delta'' \gamma = \delta' \alpha$. Wir setzen $\xi_\rho^* = \xi_\rho - \delta'' \alpha_\rho$, $\alpha_\rho = \alpha | \hat{U}_\rho$. Wegen $\delta' \{\xi_\rho^*\} = \zeta - \delta'' \eta = 0$ ist $\xi^* = \{\xi_\rho^*\} \in C^\nu(\mathfrak{B}, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}})$, und aus $\delta'' \xi_\rho^* = \delta'' \xi_\rho$ folgt $\pi_{(\nu)} \xi^* = \sigma \neq 0$, d.h.

$$H^\nu(\hat{X}, \hat{S} \otimes \underline{\hat{K}}) \neq 0.$$

Nun ist $\hat{S}$ jedoch nach Satz 1.4 und Voraussetzung die Garbe der Keime holomorpher Schnitte in dem quasi-positiven Vektorraumbündel $V = L(\hat{S})$. Wir haben somit einen Widerspruch zu Satz 2.2!

In etwas modifizierter Form kann man in gleicher Weise den Fall $\nu = 1$ behandeln, w.z.b.w.

Nun zum Beweis von Satz 2.1! Nach dem in § 1.4 Gesagten gibt es zu X eine projektiv-algebraische Desingularisation $(\hat{X}, \pi)$, so daß $S \circ \pi$ eine quasi-positive lokal freie Garbe ist; außerdem gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ einen projektiv-algebraischen Raum Y, eine holomorphe Abbildung $\varphi: Y \to X$ und eine algebraische Menge $E \subset Y$, so daß $\varphi | Y - E$ lokal biholomorph und $x_0 \in \varphi(Y - E)$ ist. Das gefaserte Produkt $\tilde{Y} = Y \times_X \hat{X}$ ist dann ein projektiv-algebraischer Raum, der nach Hironaka eine projektiv-algebraische Desingularisation $\hat{Y}$ besitzt[1]. Wir haben dann das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y} & \xrightarrow{\psi} & \hat{X} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

[1] Wir nehmen immer nur diejenige irreduzible Komponente, die *auf* X abgebildet wird.

Mit π ist auch σ eine eigentliche Modifikation, und $\hat{S}=(S\circ\pi)\circ\psi=(S\circ\varphi)\circ\sigma$ ist eine quasi-positive lokal freie Garbe. Wegen Satz 2.3 ist dann $\sigma_{(\nu)}(\hat{S}\otimes\underline{K}(\hat{Y}))=0$ für $\nu\geqq 1$. Außerhalb $\hat{E}=\sigma^{-1}(E)$ ist ψ lokal biholomorph, und es gilt $x_0\in\pi(\psi(\hat{Y}-\hat{E}))$. Daraus folgt das Verschwinden von $\pi_{(\nu)}((S\circ\pi)\otimes\hat{\underline{K}})$, $\hat{\underline{K}}=\underline{K}(\hat{X})$, in der Nähe von x_0 für alle $\nu\geqq 1$. Da dies für beliebiges $x_0\in X$ gilt, erhalten wir

$$\pi_{(\nu)}((S\circ\pi)\otimes\hat{\underline{K}})=0, \qquad \nu\geqq 1,$$

woraus

$$\begin{aligned} H^\nu(X, S\cdot\underline{K}) &= H^\nu(X, \pi_{(0)}((S\circ\pi)\otimes\hat{\underline{K}})) \\ &= H^\nu(\hat{X}, (S\circ\pi)\otimes\hat{\underline{K}})=0, \qquad \nu\geqq 1, \end{aligned}$$

wegen Satz 2.2 folgt, w.z.b.w.

Da ein Moišezon-Raum X eine projektiv-algebraische Desingularisation $\hat{X}$ besitzt, *trägt jeder Moišezon-Raum eine quasi-positive torsionsfreie kohärente analytische Garbe vom Rang* 1. Die Umkehrung dieser Aussage ist offen:

Ist jeder (normale) kompakte komplexe Raum, der eine quasi-positive torsionsfreie kohärente analytische Garbe trägt, ein Moišezon-Raum?

4. In diesem Abschnitt leiten wir in einem Sonderfall den Verschwindenssatz aus [6] für streng pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten erneut her. Es sei X eine streng pseudokonvexe komplexe Mannigfaltigkeit und $E\subset X$ die maximale kompakte analytische Teilmenge. X ist dann eigentliche Modifikation eines normalen Steinschen Raumes Y, der nur endlich viele singuläre Punkte enthält. Es sei $\pi: X\to Y$ die Modifikationsabbildung. Wir zeigen zunächst

Satz 2.4. *Es gilt* $\pi_{(\nu)}(\underline{K}(X))=0$ *für* $\nu\geqq 1$.

Beweis. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß E zusammenhängend ist. Y enthält dann höchstens einen singulären Punkt $y_0=\pi(E)$. Es gibt somit nach Artin ([2], Theorem 3.8) eine Umgebung $U=U(y_0)\subset Y$, die offene Teilmenge eines normalen projektiv-algebraischen Raumes $\hat{Y}$ ist. Wir dürfen ohne Einschränkung $U=Y$ annehmen. Sei ferner $\hat{\pi}: \hat{X}\to\hat{Y}$ eine Desingularisation von $\hat{Y}$, so daß X offene Teilmenge von $\hat{X}$ und π die Einschränkung von $\hat{\pi}$ auf X ist. Ist dann F ein positives Geradenbündel über $\hat{Y}$, so folgt nach Satz 2.3

$$\hat{\pi}_{(\nu)}(\underline{K}(\hat{X}))\otimes\underline{F}=\hat{\pi}_{(\nu)}(\hat{\underline{F}}\otimes\underline{K}(\hat{X}))=0$$

und also $\pi_{(\nu)}(\underline{K}(X))=0$, $\nu\geqq 1$, w.z.b.w.

Da Y Steinsch ist, folgt aus Satz 2.4 sofort

$$H^\nu(X, \underline{K}(X))=H^\nu(Y, \pi_{(0)}(\underline{K}(X)))=0, \qquad \nu\geqq 1.$$

Wir erhalten also das

Korollar. *Ist X eine streng pseudokonvexe komplexe Mannigfaltigkeit, so gilt*

$$H^\nu(X, \underline{K}(X)) = 0, \quad \nu \geqq 1.$$

Diese Aussage bleibt auch richtig, wenn man $\underline{K} = \underline{K}(X)$ durch $\underline{V} \otimes \underline{K}$ ersetzt, wobei V ein semi-positives Vektorraumbündel auf X bezeichnet. Da man jedoch bei dem obigen Beweis zeigen müßte, daß V Beschränkung eines semi-positiven Vektorraumbündels von $\hat{X}$ ist, wird der Beweis wesentlich schwieriger.

§ 3. Die kanonische Garbe von Grothendieck

1. Wir betrachten in diesem Paragraphen die von Grothendieck eingeführte kanonische Garbe $\underline{K}^* = \underline{K}^*(X)$, die in der Dualitätstheorie (Serre-Dualität) von großer Wichtigkeit ist.

Es sei X ein n-dimensionaler komplexer Raum. U sei eine offene Menge in X, die biholomorph in ein Gebiet G des $\mathbb{C}^m$ eingebettet sei, es sei $d = m - n$ die Codimension von U in G, $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von U und $\underline{K}$ die kanonische Garbe von G. Dann verschwinden die Garben

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}(G)}(\mathcal{O}, K); \quad i = 0, \ldots, d-1.$$

Wir setzen

$$\underline{K}^*(U) = \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{O}(G)}(\mathcal{O}, \underline{K}) | U.$$

$\underline{K}^*(U)$ ist eine kohärente analytische Garbe auf U, deren Träger ganz U ist und die in den regulären Punkten von U mit der gewöhnlichen kanonischen Garbe übereinstimmt. Man kann zeigen, daß $\underline{K}^*(U)$ von der Einbettung $U \hookrightarrow G$ unabhängig definiert ist. Infolgedessen kann man die Garben $\underline{K}^*(U)$ zu einer globalen Garbe $\underline{K}^*$ auf X zusammenkleben.

2. Wir wollen nun zeigen, daß für einen normalen komplexen Raum X mit Singularitätenmenge A die kanonische Garbe $\underline{K}^*(X)$ gleich dem nullten direkten Bild der gewöhnlichen kanonischen Garbe $\underline{K}(X - A)$ unter der Einbettungsabbildung $X - A \hookrightarrow X$ ist. Insbesondere ist dann die von uns definierte Garbe $\underline{K}(X)$ eine Untergarbe von $\underline{K}^*(X)$.

Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus dem nächsten Satz, in dem X nicht normal zu sein braucht:

Satz 3.1 (2. Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Es sei $A \subset X$ eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in X. Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(X, \underline{K}^*) \to \Gamma(X - A, \underline{K}^*)$$

bijektiv.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jede Schnittfläche $f \in \Gamma(X - A, \underline{K}^*)$ lokal über A hinaus fortgesetzt werden kann.

Es sei U eine offene Teilmenge von X, die biholomorph in ein Holomorphiegebiet $G\subset\mathbb{C}^m$ eingebettet sei. Die Symbole d, $\mathcal{O}$ und $\underline{K}$ mögen dann dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 1 haben. Es gibt eine freie Auflösung

$$0\to\mathscr{F}_m\to\cdots\to\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_0\to\mathcal{O}\to 0$$

von $\mathcal{O}$ über G. Wegen $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)}(\mathcal{O},\underline{K})=0$, $i=1,\ldots,d-1$, erhält man hieraus exakte Sequenzen

$$0\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_0,\underline{K})\to\cdots\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1},\underline{K})\to\operatorname{Im}\to 0$$

$$0\to\operatorname{Im}\to\operatorname{Ker}\to\operatorname{Ext}^d(\mathcal{O},\underline{K})=\underline{K}^*(U)\to 0,$$

wobei Im das Bild des Homomorphismus $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1},\underline{K})\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_d,\underline{K})$ und Ker den Kern von $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_d,\underline{K})\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d+1},\underline{K})$ bezeichnet. Die homologische Dimension hd(Im) ist also $\leqq d-1$, und folglich gilt für alle $x\in U\cap A$:

$$(\operatorname{codim}_x A-2)-\operatorname{hd}_x(\operatorname{Im})\geqq 1.$$

Dann ist nach Scheja ([14], Korollar zu Satz II) die Einschränkungsabbildung

$$H^1(G,\operatorname{Im})\to H^1(G-A,\operatorname{Im})$$

bijektiv und also wegen $H^1(G,\operatorname{Im})=0$ auch $H^1(G-A,\operatorname{Im})=0$. Aus der zweiten Sequenz folgt dann mit Hilfe der exakten Kohomologiesequenz die Surjektivität der Abbildung

$$\Gamma(G-A,\operatorname{Ker})\to\Gamma(U-A,\underline{K}^*).$$

Die Schnittfläche $f\in\Gamma(U-A,\underline{K}^*)$ kommt also von einer Schnittfläche $g\in\Gamma(G-A,\operatorname{Ker})$ her. Nun ist aber Ker eine Untergarbe der freien Garbe $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_d,\underline{K})$ und also g zu einer Schnittfläche $\hat{g}\in\Gamma(G,\operatorname{Ker})$ fortsetzbar. Das Bild $\hat{f}$ von $\hat{g}$ in $\Gamma(U,\underline{K}^*)$ setzt dann f nach U fort.

Die Existenz einer globalen Fortsetzung und die Injektivität der Restriktionsabbildung folgt aus

Satz 3.2. *Es sei A eine mindestens* 1*-codimensionale analytische Menge in X und $f\in\Gamma(X,\underline{K}^*)$ eine Schnittfläche mit* $\operatorname{Tr} f\subset A$. *Dann ist* $f=0$.

Beweis. Wir stellen dieselbe Situation wie im Beweis zu Satz 3.1 her. f ist dann Bild einer Schnittfläche $g\in\Gamma(G,\operatorname{Ker})$, für die

$$g|G-A\in\Gamma(G-A,\operatorname{Im})$$

gilt. Ist Ker_1 der Kern der Abbildung $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-2},\underline{K})\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1},\underline{K})$, so hat man exakte Sequenzen

$$0\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_0,\underline{K})\to\cdots\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-2},\underline{K})\to\operatorname{Ker}_1\to 0,$$

$$0\to\operatorname{Ker}_1\to\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1},\underline{K})\to\operatorname{Im}\to 0$$

und folglich für alle $x \in U \cap A$:

$$(\operatorname{codim}_x A - 2) - \operatorname{hd}_x(\operatorname{Ker}_1) \geqq 1.$$

Wie im Beweis von Satz 1 findet man dann eine Schnittfläche $h \in \Gamma(G-A, \operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1}, \underline{K}))$, die auf $g|G-A$ abgebildet wird. h kann zu einem Schnitt $\hat{h} \in \Gamma(G, \operatorname{Hom}(\mathscr{F}_{d-1}, \underline{K}))$ fortgesetzt werden. Das Bild $\hat{g}$ von $\hat{h}$ in der freien Garbe $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_d, \underline{K})$ stimmt außerhalb von A mit g überein und ist deshalb mit g identisch. Das bedeutet aber $g \in \Gamma(G, \operatorname{Im})$ und also $f=0$, w.z.b.w.

3. Wir konstruieren nun das Beispiel eines normalen kompakten komplexen Raumes X, für den unser Verschwindungssatz nicht gilt, wenn man statt $\underline{K}(X)$ die kanonische Garbe $\underline{K}^*(X)$ verwendet.

Es sei $R \subset \mathbb{P}^2$ eine singularitätenfreie Kurve vom Grad d. Die analytische Menge R ist dann eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht

$$g = \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Das Hopfsche Geradenbündel über dem $\mathbb{P}^2$ besitzt eine nirgends verschwindende meromorphe Schnittfläche, die außerhalb einer 1-dimensionalen Ebene E holomorph ist und in jedem Punkt von E eine Polstelle erster Ordnung besitzt. Da R genau d Punkte mit E gemeinsam hat, ist die Chernsche Zahl der Einschränkung F des Hopfschen Bündels auf R gleich $-d$.

Wir schließen jede Faser des Geradenbündels $F \to R$ zu der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ ab und erhalten auf diese Weise ein projektives Faserbündel $\bar{F} \to R$. Da F negativ ist, können wir die Nullschnittfläche R in $\bar{F}$ zu einem Punkt zusammenblasen. Der auf diese Weise entstehende normale Raum Y ist projektiv-algebraisch und hat genau eine Singularität; Y läßt sich in natürlicher Weise als Unterraum des $\mathbb{P}^3$ realisieren. (Durch Zusammenblasen der Nullschnittfläche $\mathfrak{O}$ in dem projektiven Hopfschen Bündel über dem $\mathbb{P}^2$ entsteht der $\mathbb{P}^3$. Wegen $R \subset \mathfrak{O}$ ist dann $Y \subset \mathbb{P}^3$.) Es sei weiter $H_Y = H$ das zu der Hyperfläche der unendlich fernen Punkte von Y gehörende Geradenbündel. Da H_Y quasi-positiv ist, ist auch das Urbild $\bar{H}$ von H bezüglich der eigentlichen Modifikation $\bar{F} \to Y$ quasi-positiv.

Wir beweisen nun als erstes:

Ist $d \geqq 6$, so existieren auf $\bar{F}$ 2-dimensionale meromorphe Differentialformen mit Werten in dem quasi-positiven Geradenbündel $\bar{H}$, die außerhalb R holomorph sind und in jedem Punkt von R eine Polstelle zweiter Ordnung besitzen.

Beweis. Wir bezeichnen mit G das Geradenbündel auf $\bar{F}$, das zu dem Divisor $R \subset \bar{F}$ gehört. Unsere Behauptung lautet dann

$$\Gamma(\bar{F}, \underline{G}^2 \otimes \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F})) \neq 0$$

für $d \geqq 6$. Betrachten wir dazu zunächst das Geradenbündel $F \otimes K(R)$. Da $K(R)$ genau g linear unabhängige holomorphe Schnittflächen besitzt, folgt

$$\dim \Gamma(R, \underline{F} \otimes \underline{K}(R)) \geqq g + c(F) = g - d = \tfrac{1}{2} d(d-5) + 1.$$

Ist nun $V \to \bar{F}$ ein beliebiges Geradenbündel, so hat man stets eine exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to \underline{G}^{-1} \otimes \underline{V} \to \underline{V} \to \underline{V} | R \to 0,$$

wobei unter $\underline{V} | R$ genauer die triviale Fortsetzung nach $\bar{F}$ der analytischen Einschränkung von $\underline{V}$ auf R zu verstehen ist. Die letzte Bemerkung benutzen wir dazu, die Fortsetzbarkeit hinreichend vieler holomorpher Schnitte in $F \otimes K(R)$ nach $G^2 \otimes \bar{H} \otimes K(\bar{F})$ zu verifizieren.

Es sei zunächst $V = G \otimes \bar{H} \otimes K(\bar{F})$. Da die Gleichheit $G \otimes K(\bar{F}) | R = K(R)$ besteht und $\bar{H}$ in einer Umgebung von R trivial ist, so folgt aus $(*)$ die exakte Sequenz

$$0 \to \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F}) \to \underline{G} \otimes \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F}) \to \underline{K}(R) \to 0.$$

Nach Satz 2.1 gilt nun $H^\nu(\bar{F}, \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F})) = 0$ für $\nu \geqq 1$ und somit

$$H^\nu(\bar{F}, \underline{G} \otimes \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F})) = H^\nu(R, \underline{K}(R)), \qquad \nu \geqq 1.$$

Setzt man in $(*)$ $V = G^2 \otimes \bar{H} \otimes K(\bar{F})$ ein, so liefert die Kohomologiesequenz und die Beziehung $G | R = F$ die exakte Sequenz

$$\Gamma(\bar{F}, \underline{G}^2 \otimes \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F})) \to \Gamma(R, \underline{F} \otimes \underline{K}(R)) \to H^1(R, \underline{K}(R)),$$

woraus wegen $\dim H^1(R, \underline{K}(R)) = 1$ die Behauptung

$$\dim \Gamma(\bar{F}, \underline{G}^2 \otimes \underline{\bar{H}} \otimes \underline{K}(\bar{F})) \geqq \dim \Gamma(R, \underline{F} \otimes \underline{K}(R)) - 1 \geqq \tfrac{1}{2} d(d-5) \geqq 1$$

für $d \geqq 6$ folgt, w.z.b.w.

Wir betrachten jetzt ein Geradenbündel über dem $\mathbb{P}^1$ mit der Chernschen Zahl $-c \leqq -1$ (also ohne Einschränkung $= S^c$, wenn S das Hopfsche Bündel über dem $\mathbb{P}^1$ ist). Da Y ein Kegel (mit der isolierten Singularität als Zentrum) ist, operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$ auf Y. Wir können also zu diesem Geradenbündel das assoziierte Bündel konstruieren, das Y zur Faser hat. Man erhält dadurch einen 3-dimensionalen normalen kompakten komplexen Raum X, dessen Singularitätenmenge isomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist.

Es sei nun $\mathring{Y}$ der affin algebraische Raum $Y - Y_\infty$, wobei Y_∞ die Menge der unendlich fernen Punkte von $Y \subset \mathbb{P}^3$ bezeichnet; es gilt also $\mathring{Y} \subset \mathbb{C}^3$. Die Gruppe $\mathbb{C}^*$ operiert auch auf $\mathbb{C}^3$. Wir können dann das zu S^c assoziierte Bündel V mit Fasern $\mathbb{C}^3$ konstruieren und erhalten sofort $X \subset V = S^c \oplus S^c \oplus S^c$. Nun ist S^c ein negatives Geradenbündel, so daß V ein negatives Vektorraumbündel ist. Nach [5], Satz 5, wird dann aus V

durch Niederblasen der Nullschnittfläche $\mathbb{P}^1 \subset V$ ein affin algebraischer Raum. Hieraus folgt nun unmittelbar:

Die Nullschnittfläche $\mathbb{P}^1 \subset X$ läßt sich zu einem Punkt zusammenblasen. Dabei entsteht aus X ein projektiv-algebraischer Raum X'. Insbesondere ist X dann selbst projektiv-algebraisch.

Es sei $\tilde{H}'$ das Geradenbündel, das zu dem Divisor der unendlich fernen Punkte von X' gehört. Ist $X' \subset \mathbb{P}^n$, so ist $\tilde{H}'$ als Einschränkung des zu $\mathbb{P}^n_\infty$ gehörenden Geradenbündels quasi-positiv. Das Urbild $\tilde{H}$ von $\tilde{H}'$ bezüglich der eigentlichen Modifikation $X \to X'$ ist dann ebenfalls quasi-positiv. $\tilde{H}$ ist nichts anderes als das Geradenbündel, das zu dem Divisor der unendlich fernen Punkte der Fasern des Bündels $X \to \mathbb{P}^1$ gehört, d.h. es gilt $\tilde{H} | Y = H_Y$.

Wir können nun beweisen, daß X (zusammen mit $\tilde{H}$) ein Beispiel der gesuchten Art ist:

Es gilt $H^1(X, \underline{\tilde{H}} \otimes \underline{K}^*(X)) \neq 0$.

Beweis. Wegen Satz 3.1 und § 2.2 können wir Schnitte

$$\xi \in \Gamma(Y, \underline{H} \otimes \underline{K}^*(Y))$$

als meromorphe Schnittflächen in dem Bündel $K(\bar{F}) \otimes \bar{H}$ auffassen. Es sei p die maximale Polstellenordnung aller Schnitte ξ auf der Nullschnittfläche $R \subset \bar{F}$. Aufgrund des eingangs Bewiesenen gilt $p \geqq 2$ für $d \geqq 6$. Es sei $\Gamma_* \subset \Gamma(Y, \underline{H} \otimes \underline{K}^*(Y))$ der Untervektorraum der Schnittflächen, die auf R eine Polstellenordnung $< p$ besitzen. Da die Gruppe $\mathbb{C}^*$ auf Γ operiert und Γ_* in Γ_* abbildet, operiert sie auch auf dem Quotienten Γ/Γ_*. Ist $\xi_1, \ldots, \xi_l$, $l \geqq 1$, eine Basis von Γ/Γ_*, so gilt, falls φ die Abbildung $\mathbb{C}^* \to \operatorname{Aut}(\Gamma/\Gamma_*)$ bezeichnet, für $\lambda = 1, \ldots, l$:

$$(\ast) \qquad \varphi(a)\, \xi_\lambda = a^{p-1}\, \xi_\lambda, \qquad a \in \mathbb{C}^*.$$

Es sei nun $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ und $\Pi = \pi_{(0)}(\underline{\tilde{H}} \otimes \underline{K}^*(X))$; ferner sei Π_* die kohärente analytische Garbe auf $\mathbb{P}^1$, die durch das Garbendatum

$$\Pi_*(U) = \{\xi \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \underline{\tilde{H}} \otimes \underline{K}^*(X))\colon \xi | \pi^{-1}(z) \in \Gamma_* \text{ für alle } z \in U\};$$

$U \subset \mathbb{P}^1$, definiert ist. Jedes Element aus $(\Pi/\Pi_*)_z$, $z \in \mathbb{P}^1$, wird nach Trivialisierung $X | U \cong U \times Y$ repräsentiert durch eine holomorphe Abbildung $\xi\colon U \to \Gamma/\Gamma_*$ ($U = U(z) \subset \mathbb{P}^1$ muß hinreichend klein sein). Sind f_{ij} die Übergangsfunktionen von S^c und g_{ij} die Übergangsfunktionen des kanonischen Bündels $K(\mathbb{P}^1)$, so sieht man mittels $(\ast)$ unmittelbar, daß sich ξ vermöge der Funktionen $g_{ij} \cdot f_{ij}^{p-1}$ transformiert. Es gilt folglich

$$\Pi/\Pi_* = \underline{V},$$

wobei das Vektorraumbündel V die l-fache Whitney-Summe des Geradenbündels $K(\mathbb{P}^1) \otimes S^{c(p-1)}$ ist.

Der Grad von V ist dann gleich

$$l\bigl(c(K(R))-c(p-1)\bigr)=-l\bigl(2+c(p-1)\bigr)<0,$$

so daß $\Gamma(\mathbb{P}^1, \underline{V})=0$. Der Satz von Riemann-Roch liefert dann

$$\dim H^1(\mathbb{P}^1, \underline{V})=l\bigl(2+c(p-1)\bigr)-l=l\bigl(1+c(p-1)\bigr)>0.$$

Da wegen $H^2(\mathbb{P}^1, \Pi_*)=0$ die Abbildung

$$H^1(\mathbb{P}^1, \Pi)\to H^1(\mathbb{P}^1, \Pi/\Pi_*)$$

surjektiv ist, ist auch $H^1\bigl(\mathbb{P}^1, \pi_{(0)}(\underline{H}\otimes\underline{K}^*(X))\bigr)=H^1(\mathbb{P}^1, \Pi)\neq 0$. Daraus folgt unmittelbar $H^1\bigl(X, \underline{H}\otimes\underline{K}^*(X)\bigr)\neq 0$, w.z.b.w.

§ 4. Modifikationen von Mannigfaltigkeit zu Mannigfaltigkeit

1. Es sei $\pi: \hat{X}\to X$ eine eigentliche holomorphe Abbildung reduzierter komplexer Räume mit abzählbarer Topologie; $\hat{E}\subset\hat{X}$ und $E\subset X$ seien abgeschlossene analytische Teilmengen mit $\pi(\hat{E})\subset E$, so daß π eine biholomorphe Abbildung $\hat{X}-\hat{E}\to X-E$ induziert. Wir wollen im folgenden eine exakte Sequenz herleiten, welche die Homologiegruppen (mit Koeffizienten in einem Körper) von $\hat{X}, X, \hat{E}$ und E miteinander verknüpft. – Ähnliche Überlegungen findet man für die Kohomologie von Mannigfaltigkeiten $\hat{X}$ und X schon bei Aeppli [1].

Da man nach [4] und [10] beliebig feine Triangulierungen von X finden kann, so daß E Unterkomplex dieser Triangulierungen ist, so ist E starker Deformationsretrakt beliebig kleiner (abgeschlossener) Umgebungen $U=U(E)\subset X$. Für solche U ist die kanonische Abbildung

$$H_l(E)\to H_l(U)$$

ein Isomorphismus für alle $l\geqq 0$. Das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to & H_l(E) & \to & H_l(X) & \to & H_l(X, E) & \to & H_{l-1}(E) & \to & H_{l-1}(X) & \to\cdots\\
& \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\cdots\to & H_l(U) & \to & H_l(X) & \to & H_l(X, U) & \to & H_{l-1}(U) & \to & H_{l-1}(X) & \to\cdots
\end{array}$$

liefert dann die Isomorphie

$$H_l(X, E)\xrightarrow{\sim} H_l(X, U).$$

Sind $U_1\subset U_2$ zwei Umgebungen von E mit der obigen Eigenschaft, so ist dann auch die Abbildung

$$H_l(X, U_1)\to H_l(X, U_2)$$

bijektiv für alle l. – Entsprechendes gilt auch für $\hat{X}$ und $\hat{E}$.

Aufgrund der Eigenschaften von π kann man nun abgeschlossene Umgebungen $U_2 \subset U_1$ von E und $\hat{U}_1 \subset \hat{U}_2$ von $\hat{E}$ finden, für die die obigen Isomorphien gelten und die Relation

$$U_2 - E \subset \hat{U}_1 - \hat{E} \subset U_1 - E \subset \hat{U}_2 - \hat{E}$$

besteht. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_l(X-E, U_2-E) \arrow[r] \arrow[d] & H_l(\hat{X}-\hat{E}, \hat{U}_1-\hat{E}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[dd] & H_l(X-E, U_1-E) \arrow[r] \arrow[d] & H_l(\hat{X}-\hat{E}, \hat{U}_2-\hat{E}) \arrow[dd] \\
H_l(X, U_2) \arrow[rr, "\sim"] & & H_l(X, U_1) & \\
& H_l(\hat{X}, \hat{U}_1) \arrow[rr, "\sim"] & & H_l(\hat{X}, \hat{U}_2)
\end{tikzcd}$$

sind die senkrechten Abbildungen wegen des Ausschneidungsaxioms bijektiv. Also ist ω ein Isomorphismus, und aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_l(\hat{X}-\hat{E}, \hat{U}_1-\hat{E}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\omega"'] & H_l(\hat{X}, \hat{U}_1) \arrow[d] & H_l(\hat{X}, \hat{E}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
H_l(X-E, U_1-E) \arrow[r, "\sim"] & H_l(X, U_1) & H_l(X, E) \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

erhalten wir für alle $l \geqq 0$ einen Isomorphismus

$$H_l(\hat{X}, \hat{E}) \xrightarrow{\sim} H_l(X, E).$$

2. Wir betrachten nun das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$(*)\quad \begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{l+1}(\hat{X}, \hat{E}) \arrow[r, "\hat{\partial}"] \arrow[d, "\cong"] & H_l(\hat{E}) \arrow[r, "\hat{i}"] \arrow[d, "\rho_l"] & H_l(\hat{X}) \arrow[r, "\hat{j}"] \arrow[d, "\pi_l"] & H_l(\hat{X}, \hat{E}) \arrow[r, "\hat{\partial}"] \arrow[d, "\cong"] & H_{l-1}(\hat{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{l-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{l+1}(X, E) \arrow[r, "\partial"] & H_l(E) \arrow[r, "i"] & H_l(X) \arrow[r, "j"] & H_l(X, E) \arrow[r, "\partial"] & H_{l-1}(E) \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

und definieren als erstes

$$H_l^*(\hat{E}) := \ker\left(\rho_l \colon H_l(\hat{E}) \to H_l(E)\right).$$

Da es sich bei $(*)$ um ein Diagramm von Vektorräumen handelt, können wir einen Untervektorraum $H_l^*(E)$ von $H_l(E)$ finden, so daß

$$H_l(E) = H_l^*(E) \oplus \operatorname{im} \rho_l.$$

i bildet $H_l^*(E)$ injektiv in $H_l(X)$ ab. Ist nämlich $\xi^* \in H_l^*(E)$ ein Element mit $i(\xi^*) = 0$, so gibt es ein $\hat{\eta} \in H_{l+1}(\hat{X}, \hat{E})$ mit $\rho_l \circ \hat{\partial}(\hat{\eta}) = \partial(\hat{\eta}) = \xi^*$, woraus $\xi^* \in H_l^*(E) \cap \operatorname{im} \rho_l = 0$ folgt. — Wir fassen deshalb $H_l^*(E)$ auch als Untervektorraum von $H_l(X)$ auf.

Für die Abbildung $\hat{\partial} \circ j$: $H_l(X) \to H_{l-1}(\hat{E})$ gilt $\rho_{l-1} \circ \hat{\partial} \circ j = \partial \circ j = 0$, d.h. $\operatorname{im}(\hat{\partial} \circ j) \subset H_{l-1}^*(\hat{E})$; außerdem ist $\hat{\partial} \circ j(i(H_l(E))) = 0$. Infolgedessen gibt $\hat{\partial} \circ j$ Anlaß zu einer Abbildung

$$\partial^*: \; H_l(X)/H_l^*(E) \to H_{l-1}^*(\hat{E}).$$

Wir beweisen nun

Satz 4.1. *Unter den Voraussetzungen von Abschnitt* 1 *existiert eine exakte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow H_l^*(\hat{E}) \xrightarrow{\hat{i}} H_l(\hat{X}) \xrightarrow{\bar{\pi}_l} H_l(X)/H_l^*(E) \xrightarrow{\partial^*} H_{l-1}^*(\hat{E}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots H_0^*(\hat{E}) \xrightarrow{\hat{i}} H_0(\hat{X}) \xrightarrow{\bar{\pi}_0} H_0(X)/H_0^*(E) \longrightarrow 0.$$

Beweis. An Hand des Diagramms (*) ist leicht einzusehen, daß es sich bei der obigen Sequenz um einen Komplex handelt, d.h. daß an allen Stellen $\operatorname{im} \subset \ker$ gilt. Wir haben noch die umgekehrten Inklusionen zu beweisen.

a) Sei $\hat{\xi} \in H_l^*(\hat{E})$ mit $\hat{i}(\hat{\xi}) = 0$. Dann existiert ein $\zeta \in H_{l+1}(X, E)$ mit $\hat{\xi} = \hat{\partial}(\zeta)$, woraus $\partial(\zeta) = \rho_l(\hat{\xi}) = 0$ folgt. Also gibt es ein $\eta \in H_l(X)$ mit $j(\eta) = \zeta$, so daß die Restklasse $\bar{\eta} \in H_l(X)/H_l^*(E)$ unter ∂^* auf $\hat{\xi}$ abgebildet wird.

b) Sei $\hat{\xi} \in H_l(\hat{X})$ mit $\bar{\pi}_l(\hat{\xi}) = 0$; dann gibt es ein $\zeta \in H_l^*(E)$ mit $\pi_l(\hat{\xi}) = i(\zeta)$. Es ist somit $\hat{j}(\hat{\xi}) = j \circ i(\zeta) = 0$, woraus die Existenz eines Elementes $\hat{\eta}_1 \in H_l(\hat{E})$ mit $\hat{i}(\hat{\eta}_1) = \hat{\xi}$ folgt. Weiter impliziert $i \circ \rho_l(\hat{\eta}_1) = \pi_l(\hat{\xi}) = i(\zeta)$ die Existenz eines Elementes $\hat{\eta}_2 \in H_{l+1}(\hat{X}, \hat{E})$ mit $\rho_l(\hat{\eta}_1) - \zeta = \partial(\hat{\eta}_2) = \rho_l \circ \hat{\partial}(\hat{\eta}_2)$, d.h. $\rho_l(\hat{\eta}_1 - \hat{\partial}(\hat{\eta}_2)) \in H_l^*(E) \cap \operatorname{im} \rho_l = 0$. Mithin ist $\hat{\eta} := \hat{\eta}_1 - \hat{\partial}(\hat{\eta}_2) \in H_l^*(\hat{E})$, und es gilt $\hat{i}(\hat{\eta}) = \hat{i}(\hat{\eta}_1) = \hat{\xi}$.

c) Sei $\xi \in H_l(X)$ so beschaffen, daß für die Restklasse $\bar{\xi} \in H_l(X)/H_l^*(E)$ das ∂^*-Bild gleich Null ist. Wegen $\hat{\partial} \circ j(\xi) = \partial^*(\bar{\xi}) = 0$ gibt es dann ein $\hat{\eta}_1 \in H_l(\hat{X})$ mit $j(\xi) = \hat{j}(\hat{\eta}_1)$. Die Gleichung $j \circ \pi_l(\hat{\eta}_1) = j(\xi)$ liefert ein Element $\zeta \in H_l(E)$ mit $\pi_l(\hat{\eta}_1) - \xi = i(\zeta)$. Wegen $H_l(E) = H_l^*(E) \oplus \operatorname{im} \rho_l$ gibt es weiter Elemente $\zeta_1 \in H_l^*(E)$ und $\hat{\eta}_2 \in H_l(\hat{E})$ mit $\zeta = \zeta_1 \oplus \rho_l(\hat{\eta}_2)$. Für $\hat{\eta} := \hat{\eta}_1 - \hat{i}(\hat{\eta}_2) \in H_l(\hat{X})$ gilt dann $\pi_l(\hat{\eta}) - \xi = i(\zeta - \rho_l(\hat{\eta}_2)) = i(\zeta_1) \in i(H_l^*(E))$ und also $\bar{\pi}_l(\hat{\eta}) = \bar{\xi}$, w.z.b.w.

3. Aus der exakten Sequenz in Satz 4.1 ziehen wir nun einige Folgerungen.

a) Es sei X eine Mannigfaltigkeit, π sei surjektiv und $\hat{X}$ besitze eine Desingularisation $\hat{Y}$ (z.B. sei $\hat{X}$ ein Moišezon-Raum). Dann hat die Abbildung $\hat{Y} \to X$ den Abbildungsgrad 1, so daß nach Hopf [8] die kanonischen Abbildungen

$$H_l(\hat{Y}) \to H_l(X), \qquad l \geqq 0,$$

surjektiv sind. Dies impliziert die Surjektivität der Abbildungen

$$\pi_l\colon\ H_l(\hat{X}) \to H_l(X),$$

was wiederum unmittelbar die Surjektivität der Abbildungen

$$\rho_l\colon\ H_l(\hat{E}) \to H_l(E)$$

nach sich zieht (man vgl. (*) in Abschnitt 2). Folglich ist $H_l^*(E)=0$, und die Sequenz aus Satz 4.1 liefert, da $\bar{\partial}$ injektiv, exakte Sequenzen

$$0 \to H_l^*(\hat{E}) \to H_l(\hat{X}) \to H_l(X) \to 0, \qquad l \geqq 0.$$

Da auch die Sequenzen

$$0 \to H_l^*(\hat{E}) \to H_l(\hat{E}) \to H_l(E) \to 0$$

exakt sind, so erhalten wir für alle l die *Dimensionsformel von Aeppli* ([1], Lemma 5):

$$\dim H_l(\hat{X}) - \dim H_l(\hat{E}) = \dim H_l(X) - \dim H_l(E).$$

b) Es sei $\pi\colon \hat{X} \to X$ wie in Abschnitt 1; zusätzlich sei π surjektiv, und es existiere eine singularitätenfreie Menge M in einer Umgebung $U = U(E)$, so daß $E \subset M$. Ist dann $\hat{M} = \pi^{-1}(M)$, so schließt man entsprechend a), daß die Abbildungen

$$\pi_l\colon\ H_l(\hat{M}) \to H_l(M), \qquad l \geqq 0,$$

und damit auch die Abbildungen

$$\rho_l\colon\ H_l(\hat{E}) \to H_l(E), \qquad l \geqq 0,$$

surjektiv sind. Es folgt somit $H_l^*(E)=0$, und wir erhalten in diesem Fall eine exakte Sequenz

$$\cdots \to H_l^*(\hat{E}) \to H_l(\hat{X}) \to H_l(X) \to H_{l-1}^*(\hat{E}) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0^*(\hat{E}) \to H_0(\hat{X}) \to H_0(X) \to 0.$$

Diese Sequenz gilt insbesondere für den Fall, das E selbst eine Mannigfaltigkeit ist (wobei auch der Fall der Dimension 0 eingeschlossen ist, d.h. E nur aus isolierten Punkten besteht).

4. Es sei jetzt $\pi\colon \hat{X} \to X$ eine eigentliche Modifikationsabbildung, X und $\hat{X}$ seien kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $A^l = A^l(X)$ bzw. $\hat{A}^l = A^l(\hat{X})$ seien die Vektorräume der l-dimensionalen C^∞-Differentialformen auf X bzw. $\hat{X}$. $Z^l = Z^l(X)$ bzw. $\hat{Z}^l_* = Z^l_*(\hat{X})$ seien die geschlossenen l-Formen auf X bzw. die geschlossenen l-Formen auf $\hat{X}$, deren Perioden auf $H_l^*(\hat{E}) = \ker(H_l(\hat{E}) \to H_l(E))$ verschwinden. Wir setzen $B^l = B^l(X) = dA^{l-1}(X)$ und

$\hat{B}^l = B^l(\hat{X}) = dA^{l-1}(\hat{X}) \subset Z^l_*(\hat{X})$. Die Abbildung π induziert Homomorphismen $Z^l(X) \to Z^l_*(\hat{X})$ und $B^l(X) \to B^l(\hat{X})$ und einen Isomorphismus

$$H^l(X) \xrightarrow{\sim} H^l_*(\hat{X}),$$

wobei $H^l(X) = Z^l/B^l$ und $H^l_*(\hat{X}) = \hat{Z}^l_*/\hat{B}^l$.

Es sei nun $A^{p,q} = A^{p,q}(X)$ der Vektorraum der (p,q)-Formen auf X, d': $A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und d'': $A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ seien die üblichen Operatoren, und es sei

$$Z^{p,q} = \{\varphi \in A^{p,q}\colon\ d''\varphi = 0\}, \qquad B^{p,q} = d''A^{p,q-1}.$$

Dann gilt

$$H^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \cong Z^{p,q}/B^{p,q}.$$

In jeder Klasse aus $H^{p,q}$ gibt es genau eine harmonische Form. Diese ist d-geschlossen. Setzen wir $D^{p,q} := Z^{p,q} \cap Z^l$, $l = p+q$, so gilt also

$$H^{p,q} = D^{p,q}/D^{p,q} \cap B^{p,q}.$$

Es sei nun $\varphi \in A^{p,q} \cap Z^l$. Wegen der Kählerstruktur von X gilt die Hodge-Zerlegung

$$A^l = dA^{l-1} \oplus \delta A^{l+1} \oplus \mathscr{H}^l$$

und folglich für φ eine Darstellung

$$\varphi = d\psi_0 + h,$$

wobei $\psi_0 \in A^{l-1}$ und $h \in \mathscr{H}^{p,q}$. ψ_0 ist von der Form $\psi_1 + \psi_2$ mit $\psi_1 \in A^{p-1,q}$, $\psi_2 \in A^{p,q-1}$ und $d''\psi_1 = 0$, $d'\psi_1 = 0$, und es gilt

$$\varphi = d'\psi_1 + d''\psi_2 + h.$$

Aufgrund der Zerlegung

$$A^{p-1,q} = d''A^{p-1,q-1} \oplus \delta''A^{p-1,q+1} \oplus \mathscr{H}^{p-1,q}$$

und $d''\psi_1 = 0$ läßt sich ψ_1 schreiben in der Form $d''\gamma + h_0$ mit $\gamma \in A^{p-1,q-1}$ und harmonischem h_0. Es folgt wegen $d'h_0 = 0$

$$\varphi = d''(\psi_2 - d'\gamma) + h.$$

Nun ist $d'(\psi_2 - d'\gamma) = 0$ und h harmonisch. Infolgedessen gilt mit $\psi = \psi_2 - d'\gamma$

$$\varphi = d\psi + h, d'\psi = 0, \qquad \psi \in A^{p,q-1}.$$

Ist φ zusätzlich in $B^{p,q}$, so folgt $\varphi = d''\psi$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} D^{p,q} \cap B^{p,q} &= d''\ker(d'\colon\ A^{p,q-1} \to A^{p+1,q-1}) \\ &= D^{p,q} \cap B^l, \qquad l = p+q. \end{aligned}$$

Dies impliziert $H^{p,q}=D^{p,q}/D^{p,q}\cap B^l$. Es gilt also unabhängig von der Kählermetrik $H^{p,q}\subset H^l$. Entsprechendes gilt auch für $\hat{H}^{p,q}=H^{p,q}(\hat{X})$ und $\hat{H}^l=H^l(\hat{X})$. Nun bildet π den Vektorraum $H^{p,q}$ in $\hat{H}^{p,q}$ ab. Setzen wir jetzt

$$H_*^{p,q}(\hat{X})=H^{p,q}(\hat{X})\cap H_*^{p+q}(\hat{X}),$$

so folgt aus der (von der Kählermetrik unabhängigen) Isomorphie

$$H^l(\hat{X})\cong\sum_{p+q=l}H^{p,q}(\hat{X})$$

und dem eingangs Gesagten der

Satz 4.2. *Die Abbildung π: $\hat{X}\to X$ induziert einen Isomorphismus*

$$H^l(X)\to H_*^l(\hat{X}),$$

der $H^{p,q}(X)$ isomorph auf $H_*^{p,q}(\hat{X})$ abbildet. Es gilt

$$H_*^l(\hat{X},\mathbb{C})\cong\bigoplus_{p+q=l}H_*^{p,q}(\hat{X}),$$

$$H_*^{l,0}(\hat{X})=H^{l,0}(\hat{X}),\qquad H_*^{0,l}(\hat{X})=H^{0,l}(\hat{X}).$$

5. Es sei X eine streng pseudokonvexe komplexe Mannigfaltigkeit. Es sei $E\subset X$ die maximale kompakte analytische Teilmenge. X ist dann eigentliche Modifikation eines normalen Steinschen Raumes Y. Wir bezeichnen mit π: $X\to Y$ die Modifikationsabbildung. Die Menge $D=\pi(E)$ besteht nur aus endlich vielen Punkten.

Definition. *X heißt eine Sur-Steinmannigfaltigkeit, wenn Y eine Mannigfaltigkeit ist.*

Eine Sur-Steinmannigfaltigkeit liegt also über einer Steinschen Mannigfaltigkeit. Es sei $\xi\in H^q(X,\Omega^p)$ eine Kohomologieklasse mit $q\geqq 1$. Wir zeigen

Satz 4.3. *Ist X eine Kählersche Sur-Steinmannigfaltigkeit, so wird ξ repräsentiert durch eine Form $\varphi\in Z^{p,q}(X)$ mit $d\varphi=0$. Die Perioden von φ auf $H_{p+q}(E)$ sind eindeutig bestimmt. (Der Grundkörper von $H_{p+q}(E)$ sei jetzt $\mathbb{R}$.)*

Beweis. a) Da Y ein Steinscher Raum ist, gilt $H^q(X,\Omega^p)=\Gamma(Y,\pi_{(q)}(\Omega^p))$. Der Träger von $\pi_{(q)}(\Omega^p)$ ist in $D=\{y_1,\dots,y_s\}$ enthalten. Wir wählen in bezug auf lokale Koordinatensysteme um y_ν Hyperkugeln Y_ν mit y_ν als Zentrum, so daß $Y_\nu\cap Y_\mu=\emptyset$ für $\nu\neq\mu$. Es sei $X_\nu=\pi^{-1}(Y_\nu)$. Die offenen Mengen $X_\nu\subset X$ sind dann streng pseudokonvex, die Y_ν selbst sind Steinsche Mannigfaltigkeiten. Gibt es nun d-geschlossene Formen $\varphi_\nu\in Z^{p,q}(X_\nu)$, die $\xi|X_\nu$ repräsentieren, so kann man den Kozyklus

$\psi=\{\psi_{0\nu}=\varphi_\nu\circ\pi^{-1}|Y_\nu\cap Y_0\}$ mit $Y_0=Y-D$ betrachten. Dieser ist eindimensional und hat Koeffizienten in der Garbe $\Omega_*^{p,q}$ der d-geschlossenen Formen vom Typ (p,q). Da Y eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist, hat man einen Isomorphismus $H^l(Y,\Omega_*^{p,q})\xrightarrow{\sim}H^{l+p+q}(Y,\mathbb{C})$. Dieser kommutiert mit der Urbildbildung nach X. Deshalb ist das Bild von ψ in $H^{l+p+q}(X,\mathbb{C})$ gleich null. Nach Hopf ist jedoch die Abbildung $H^l(Y,\mathbb{C})\to H^l(X,\mathbb{C})$ injektiv für alle l. Also ist das Bild von ψ in $H^{l+p+q}(Y,\mathbb{C})$ gleich null. Das bedeutet $\psi=\delta\{\gamma_\nu\}$ mit $\gamma_\nu\in\Gamma(Y_\nu,\Omega_*^{p,q})$ und $\varphi=\varphi_\nu-\gamma_\nu\circ\pi$ ist eine d-geschlossene Form vom Typ (p,q) auf X, derart, daß $\varphi|X_\nu$ (in bezug auf d und d'') die Kohomologieklasse $\xi|X_\nu$ für $\nu=1,\dots,s$ repräsentiert. Da dann $\pi_{(q)}(\varphi)=\pi_{(q)}(\xi)$ gilt, folgt, daß φ auf ganz X die Klasse ξ repräsentiert. Wir dürfen also fortan o.E.d.A. voraussetzen, daß $Y\subset\mathbb{C}^n$ eine Hyperkugel um den Nullpunkt und $D=\{0\}$ ist.

b) Wir schließen den $\mathbb{C}^n$ zum $\mathbb{P}^n$ ab und betrachten die Überdeckung $\mathfrak{Y}=\{Y_0,Y_1\}$ mit $Y_0=\mathbb{P}^n-\{0\}$, $Y_1=Y$ des $\mathbb{P}^n$. Wir verheften X und Y_0 vermöge π und erhalten eine geschlossene komplexe Mannigfaltigkeit $\hat{X}$, die durch eine holomorphe Abbildung $\hat{\pi}\colon\hat{X}\to\mathbb{P}^n$ auf den $\mathbb{P}^n$ abgebildet ist. Man hat $X\subset\hat{X}$, $\hat{\pi}|X=\pi$ und $\hat{\pi}\colon\hat{X}-E\xrightarrow{\sim}Y_0$. Es sei $X_\nu=\hat{\pi}^{-1}(Y_\nu)$. Das System $\{X_0,X_1\}=\mathfrak{X}$ ist dann eine offene Überdeckung von $\hat{X}$.

Es sei $\varphi\in Z^{p,q}(X_1)$. Wir setzen $\alpha_{01}=(\varphi|X_0\cap X_1)\circ\pi^{-1}$ und bezeichnen mit $\Omega_+^{p,q}$ die Garbe der Keime von d''-geschlossenen Formen von Typ (p,q). Es ist dann $\{\alpha_{01}\}\in Z^1(\mathfrak{Y},\Omega_+^{p,q})$. Ferner hat man einen Isomorphismus $H^l(\mathbb{P}^n,\Omega_+^{p,q})\xrightarrow{\sim}H^{l+q}(\mathbb{P}^n,\Omega^p)$ wie auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit. Da $H^{l+q}(\mathbb{P}^n,\Omega^p)\neq0$ nur für $l+q=p$, ist $\{\alpha_{01}\}$ höchstens für $p=q+1$ nicht kohomolog 0. Andererseits gilt für $q\neq n-1$ stets $\alpha_{01}=d''\beta$ mit $\beta\in A^{p,q-1}(Y_0\cap Y_1)$, weil $Y_0\cap Y_1$ eine Kugelschale ist. Da $\beta=\beta_1-\beta_0$ mit $\beta_\nu\in A^{p,q-1}(Y_\nu)$, ist $\{\alpha_{01}\}$ kohomolog 0. Im Falle $p=n$, $q=n-1$ folgt aus dem *Verschwindungssatz* $\varphi=d''\beta$, der Kozyklus $\{\alpha_{01}\}$ ist dann ebenfalls kohomolog null. Wir können also immer schreiben $\alpha_{01}=\alpha_1-\alpha_0$ mit $\alpha_\nu\in\Gamma(Y_\nu,\Omega_+^{p,q})$ und $\hat{\varphi}=\varphi+\alpha_0\circ\hat{\pi}=\alpha_1$ ist dann eine Fortsetzung der Kohomologieklasse von φ nach $\hat{X}$. Es gilt also $\hat{\varphi}|X\backsim\varphi$ in bezug auf d''.

c) Nach dem später bewiesenen Satz 4.6 (Zusatz) kann man jede geschlossene Form $\omega\in A^{p,q}(X)$ von einer Umgebung $X'(E)\subset\subset X$ aus nach $\hat{X}$ fortsetzen. Es sei ω die Form vom Typ $(1,1)$, die zu der Kählermetrik von X gehört. Durch Fortsetzung von ω und folgender Addition eines hinreichend großen positiven Vielfachen des Urbildes einer Kählermetrik auf $\mathbb{P}^n$ erhält man eine positiv definite Kählermetrik auf $\hat{X}$. Unsere Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ ist also eine Kählersche Mannigfaltigkeit. Die Form $\hat{\varphi}$ ist zu einer harmonischen d-geschlossenen Form ψ vom Typ (p,q) kohomolog und die d''-Kohomologieklasse von φ wird durch $\psi|X$ repräsentiert.

Ist φ bereits d-geschlossen, so kann man nach Satz 4.6 (modulo Kohomologie) direkt φ zu einer d-geschlossenen Form $\hat{\varphi}$ vom Typ (p,q)

fortsetzen. φ und $\psi|X$ sind dann d''- und d-kohomolog, sie haben also auf $H_{p+q}(E)$ die gleichen Perioden. Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen.

Nach der Theorie der Kählerschen Mannigfaltigkeiten gibt es zu vorgegebenen Perioden auf $H_l(\hat{X}) = H_l(E) \oplus H_l(\mathbb{P}^n)$ genau eine harmonische d- und d''-geschlossene Form $\hat{\varphi} = \sum_{p+q=l} \hat{\varphi}^{p,q}$ auf $\hat{X}$. $\varphi^{(l,0)}$, $\varphi^{(0,l)}$ sind holomorph bzw. antiholomorph und deshalb Urbild von ebensolchen Formen auf dem $\mathbb{P}^n$. Ihre Perioden verschwinden deshalb auf $H_l(E)$. Es folgt:

1) *Jede Periode auf $H_l(E)$ wird durch eine Form*

$$\varphi = \sum_{p+q=l;\, p,q \geqq 1} \varphi^{p,q} \in A^l(X)$$

realisiert, die d- und d''-geschlossen ist.

2) *Ist φ eine solche Form mit verschwindenden Perioden, so gilt $\varphi^{p,q} = d'' \psi^{p,q-1}$, $\psi^{p,q-1} \in A^{p,q-1}(X)$.*

Die Fortsetzung $\hat{\varphi}$ von φ nach $\hat{X}$ ist nämlich in diesem Fall kohomolog einem Urbild einer d- und d''-geschlossenen Form des $\mathbb{P}^n$.

3) *Ist $\varphi^{0,q} \in Z^{0,q}(X)$, so gilt $\varphi^{0,q} = d'' \psi^{0,q-1}$, $\psi^{0,q-1} \in A^{0,q-1}(X)$.*

Nach Abschnitt a) aus dem Beweis des vorigen Satzes gelten diese Aussagen auch, wenn D aus mehreren Punkten besteht.

Man hat also:

Satz 4.4. *Die Kohomologiegruppe $H^l(E, \mathbb{C})$, $l \geqq 1$ ist kanonisch isomorph zu*

$$\bigoplus_{\substack{p+q=l \\ p,q \geqq 1}} H^{p,q}(X).$$

Es gilt $H^{p,q}(X) \cong H^{q,p}(X)$, $H^{0,q}(X) = 0$.[2] *Eine Kohomologieklasse $\xi \in H^{p,q}(X)$, $q \geqq 1$, verschwindet genau dann, wenn ihre Perioden auf $H_l(E)$ null sind.*

Es bleibt zu erwähnen, daß bei streng pseudokonvexen Mannigfaltigkeiten, die nicht „sursteinsch“ sind, das Verschwinden von Kohomologieklassen $\xi \in H^{p,q}(X)$ im allgemeinen nicht zu topologischen Bedingungen äquivalent ist.

6. Wir haben noch den Satz 4.6 aufzuführen. Wir zeigen zunächst:

Satz 4.5. *Es sei X eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung $H^1(X, \Omega_*^{p,q}) \to H^1(X, \Pi_*^{p+q})$ injektiv.*

Dabei bezeichnet Π_*^{p+q} die Garbe der Keime von d-geschlossenen Formen der Dimension $p+q$.

[2] Die Verschwindungseigenschaft war bereits Hironaka bekannt.

Beweis. Es sei $\mathfrak{U}=\{U_\iota\colon \iota=1,\ldots,\iota_*\}$ eine offene Überdeckung von X und $\varphi=\{\varphi_{\iota_0\iota_1}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\Omega_*^{p,q})$ ein Kozyklus. Gilt $\varphi_{\iota_0\iota_1}=\psi_{\iota_0}-\psi_{\iota_1}$ mit $\psi_\iota\in\Gamma(U_\iota,\Pi_*^{p,q})$, so läßt sich schreiben $\psi_\iota=\sum_{\nu+\mu=p+q}\psi_\iota^{\nu,\mu}$.

Es gilt $\psi_\iota^{\nu,\mu}=\psi^{\nu,\mu}|U_\iota$, $\psi^{\nu,\mu}\in A^{\nu,\mu}(X)$, falls $(\nu,\mu)\neq(p,q)$. Aus der Theorie der Kählerschen Mannigfaltigkeiten folgt:

$$\sum_{(\nu,\mu)\neq(p,q)}\psi^{\nu,\mu}=d\alpha+\sum_{(\nu,\mu)\neq(p,q)}h^{\nu,\mu}+\psi^{p,q},$$

wobei die $h^{\nu,\mu}$ harmonisch sind. $\psi_\iota^*=\psi_\iota-d\alpha-\sum h^{\nu,\mu}=\psi_\iota^{p,q}-\psi^{p,q}$ ist also d-geschlossen und vom Typ (p,q). Es gilt $\varphi=\delta\{\psi_\iota^*\}$. Also repräsentiert φ auch in $H^1(X,\Omega_*^{p,q})$ die Nullklasse. Hieraus folgt unmittelbar der Satz 4.5.

Wir übernehmen jetzt wieder die Bezeichnungsweise des Abschnitts 5 und zeigen

Satz 4.6. *Es sei $\varphi\in A^{p,q}(X)$ eine d-geschlossene Form. Dann gibt es eine d-geschlossene Form $\hat\varphi\in A^{p,q}(\hat X)$ mit $\hat\varphi|X\sim\varphi$ (in der d- und d''-Kohomologie).*

Beweis. Wir betrachten die injektive Abbildung

$$H^1(\hat X,\Pi_*^l(\hat X))\hookrightarrow H^{l+1}(\hat X,\mathbb{C})$$

und ebenso

$$H^1(\mathbb{P}^n,\Pi_*^l(\hat X))\hookrightarrow H^{l+1}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}).$$

Beide Abbildungen kommutieren mit der Urbildbildung. Der Homomorphismus $H^{l+1}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})\to H^{l+1}(\hat X,\mathbb{C})$ ist nach Hopf injektiv. Es sei

$$\hat\xi=\{\varphi|X_0\cap X_1\}\in Z^1(\mathfrak{X},\Pi_*^l(X))$$

und

$$\xi=\{(\varphi|X_0\cap X_1)\circ\pi^{-1}\}\in Z^1(\mathfrak{Y},\Pi_*^l(\mathbb{P}^n)).$$

Der Kozyklus $\hat\xi$ ist kohomolog null, das Bild in $H^{l+1}(\hat X,\mathbb{C})$ verschwindet. Also ist auch das Bild von ξ in $H^{l+1}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})$ gleich null. Es folgt, daß ξ kohomolog null ist: $\xi=\xi_1-\xi_2$ mit $\xi_\nu\in\Gamma(Y_\nu,\Pi_*^l(\mathbb{P}^n))$. Nach dem vorstehenden Satz 4.5 kann man sogar $\xi_\nu\in\Gamma(Y_\nu,\Omega_*^{p,q}(\mathbb{P}^n))$ wählen. Es gilt, da Y_1 eine Hyperkugel ist, $\xi_1\sim 0$ und mithin $\xi_1\circ\pi\sim 0$. Im Falle $p+q=0$ können wir $\xi_1=0$ wählen. Es ist dann $\hat\varphi=\varphi-\xi_1\circ\pi=-\xi_2\circ\pi$.

Zusatz. *Sind $p\geqq 1$, $q\geqq 1$, so läßt sich sogar $\varphi=\hat\varphi$ in der Nähe von E erreichen.*

Beweis. In Y_1 gilt $\xi_1=d'd''\eta$ mit $\eta\in A^{p-1,q-1}(Y_1)$. Ist $\mathfrak{t}$ eine Testfunktion in Y_1 mit $\mathfrak{t}|U(0)\equiv 1$, $U(0)\subset\subset Y_1$, so schreiben wir $\xi_1^*=d'd''(1-\mathfrak{t})\eta$ und $\xi_2^*=\xi_1^*-\xi=\xi_2$ in $\mathbb{C}^n-\{0\}$ bzw. $\mathbb{P}^n-U$. Die ξ_ν^* erfüllen den gleichen Zweck wie die ξ_ν. Verwendet man ξ_ν^* anstelle der ξ_ν, so folgt $\hat\varphi\equiv\varphi$ in einer Umgebung von E.

Literatur

1. Aeppli, A.: Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. **31**, 219–301 (1956/57).
2. Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. IHES no. **36**, 23–58 (1969).
3. – Algebraization of formal moduli: II. Existence of modifications. Ann. Math. **91**, 88–135 (1970).
4. Giesecke, B.: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume. Math. Z. **83**, 177–213 (1964).
5. Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331–368 (1962).
6. – Riemenschneider, O.: Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q-konvexem Rand. Erscheint demnächst in: Problems in Analysis. Papers in Honor of S. Bochner.
7. Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II. Ann. Math. **79**, 109–326 (1964).
8. Hopf, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J. Reine Angew. Math. **163**, 71–88 (1930).
9. Kodaira, K.: On a differential geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Nat. Acad. Sci. **39**, 1268–1273 (1953).
10. Lojasiewicz, S.: Triangulation of semi-analytic sets. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **18**, 449–474 (1964).
11. Moišezon, B. G.: Resolution theorems for compact complex spaces with a sufficiently large field of meromorphic functions. Math. USSR-Izvestija **1**, 1331–1356 (1967). – Das russische Original erschien in: Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **31**, 1385–1414 (1967).
12. Nakano, S.: On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan **7**, 1–12 (1955).
13. Rossi, H.: Picard variety of an isolated singular point. Rice Univ. Studies **54**, 63–73 (1968).
14. Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. **144**, 345–360 (1961).

Prof. Dr. H. Grauert
Mathematisches Institut der Universität
BRD-3400 Göttingen, Bunsenstraße 3–5
Deutschland

Dr. O. Riemenschneider
Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey 08540, USA

(Eingegangen am 10. September 1970)