Inventiones math. 7, 111–119 (1969)

Verzweigung bei Galoiserweiterungen und Quotienten regulärer analytischer Raumkeime

Dieter Denneberg und Oswald Riemenschneider (Göttingen)

Es sei A ein normaler noetherscher Integritätsring und B ein nullteilerfreier Oberring, der endlich und separabel über A liegt. Wir zeigen, daß (falls genügend viele Lokalisierungen von A regulär sind) das Verzweigungsverhalten des kleinsten B umfassenden galoisschen Erweiterungsringes C von A nicht wesentlich vom Verzweigungsverhalten von B über A verschieden ist (Satz 4). Ist B zusätzlich ein henselscher und regulärer lokaler Ring, so folgt aus diesem Ergebnis zusammen mit dem Satz über die Reinheit des Verzweigungsortes (Nagata), daß C unverzweigt über B liegt.

Diese Situation läßt sich auf analytische Raumkeime über einem algebraisch abgeschlossenen, vollständig nichttrivial bewerteten Körper k anwenden. Wir erhalten (Satz 7):

Es sei (Y, y) ein normaler und (X, x) ein regulärer analytischer Raumkeim. Gibt es eine separable analytische Überlagerung $\pi: (X, x) \to (Y, y)$, deren Verzweigungsort mindestens die Kodimension zwei hat, dann ist (Y, y) Quotient von (X, x) nach einer endlichen Gruppe analytischer Automorphismen und π ist die natürliche Quotientenabbildung.

Dieser Satz wurde im Fall $k = \mathbb{C}$ von Prill ([6] Th. 1) mit topologischen Methoden (Triangulierung komplexer Räume, universelle Überlagerungen usw. und natürlich auch mit dem Satz über die Reinheit des Verzweigungsortes in seiner topologischen Fassung) bewiesen. Er besitzt, etwas abgeschwächt, auch eine Umkehrung:

Ist (Y, y) Quotient von (X, x) nach einer endlichen Gruppe G analytischer Automorphismen, und ist $N \subset G$ der von allen Spiegelungen (das sind die Automorphismen mit 1-kodimensionaler Fixmenge) *erzeugte Normalteiler, so ist der Quotient (Z, z) von (X, x) nach N regulär und der Verzweigungsort der analytischen Überlagerung $(Z, z) \to (Y, y)$ hat mindestens die Kodimension zwei.*

Unter Benutzung von Ergebnissen von Cartan und Chevalley hat Prill ([6] Th. 1) auch hierfür einen Beweis gegeben. Dieser ist algebraischer Natur und gilt für den Fall char $k = 0$. Der Satz dürfte aber auch richtig sein, falls char k kein Teiler von ord G ist. Mit topologischen Methoden konnte Prill ([6] Th. 2) außerdem zeigen:

Die (spiegelungsfreie) Gruppe G/N ist durch (Y, y) bis auf Konjugierte eindeutig bestimmt.

Kürzlich gab Gottschling ([2]) einen komplex-analytischen Beweis dieser Tatsache. Mit Hilfe der algebraischen Verzweigungstheorie erhalten wir die gleiche Aussage für beliebiges k (Satz 9).

§ 1. Unverzweigtheit

Alle betrachteten Ringe seien kommutativ mit 1, nullteilerfrei und noethersch. Es sei B Oberring eines Ringes A.

Ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$ heißt *unverzweigt über* A, wenn mit $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$ gilt:

i) $\mathfrak{p} B_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} B_{\mathfrak{P}}$,

ii) $B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} B_{\mathfrak{P}}$ ist separabler Erweiterungskörper von $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$.

B heißt unverzweigt über A, wenn alle Primideale von B unverzweigt über A liegen.

Aus dieser Definition ergeben sich unter Benutzung von Körpertheorie folgende Transitivitätseigenschaften:

Es seien A, B, C Ringe mit $A \subset B \subset C$ und $\mathfrak{P} \subset C$ ein Primideal. Liegt $\mathfrak{P}$ unverzweigt über B und liegt $\mathfrak{P} \cap B$ unverzweigt über A, so liegt auch $\mathfrak{P}$ unverzweigt über A. Liegt $\mathfrak{P}$ unverzweigt über A, dann liegt es auch unverzweigt über B.

Die beiden folgenden Sätze werden zum Beweis von Satz 3 benötigt. Ihre Beweise verlaufen mehr oder weniger direkt.

Satz 1. *Es sei A ein Ring und B seine Normalisierung. Sei $\mathfrak{P} \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$. Ist $A_{\mathfrak{p}}$ normal, dann liegt $\mathfrak{P}$ unverzweigt über A.*

Satz 2. *Es sei B Oberring eines normalen Ringes A, und B sei ganz über A. Ist $\mathfrak{P} \subset B$ ein über A unverzweigtes Primideal, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, und ist der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ regulär, dann ist auch $B_{\mathfrak{P}}$ regulär.*

Es sei B zusätzlich ein *endlicher* A-Modul. In diesem Fall lassen sich die unverzweigten Primideale von B einfach charakterisieren.

Wir setzen $\tilde{B} = B \otimes_A B$. Da mit B auch $\tilde{B}$ ein endlicher A-Modul ist, ist $\tilde{B}$ wieder noethersch. $\beta: \tilde{B} \to B$ sei der durch $\beta(b \otimes b') = b b'$ definierte A-Algebraepimorphismus. Ker β wird von den Elementen der Gestalt $1 \otimes b - b \otimes 1$ mit $b \in B$ erzeugt, denn ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu b'_\nu = 0,$$

so gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \otimes b'_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu \otimes 1)(1 \otimes b'_\nu - b'_\nu \otimes 1).$$

An Ker β bezeichne das Annulatorideal des $\tilde{B}$-Moduls Ker β. Wir nennen

$$\mathfrak{V}_{B/A} := \beta(\mathrm{An\ Ker\ }\beta)$$

das *Verzweigungsideal* (oder die homologische Differente) von B über A. Der Name wird gerechtfertigt durch den folgenden Satz von Auslander und Buchsbaum ([1] Th. 2.7):

Ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$ ist genau dann unverzweigt über A, wenn $\mathfrak{V}_{B/A} \not\subset \mathfrak{P}$.

Insbesondere ist $\mathfrak{P}$ unverzweigt, wenn ht $\mathfrak{P} <$ ht $\mathfrak{V}_{B/A}$.

Zum Beweis von Satz 6 benötigen wir die Tatsache, daß sich das Verzweigungsverhalten von B über A nicht verschlechtert, wenn man zu B und A dieselben Elemente adjungiert.

Satz 3. *Es seien B und C endliche Oberringe von A, die beide in einem weiteren Oberring von A enthalten sind. Dann gilt*

$$\mathfrak{V}_{B/A} \subset \mathfrak{V}_{B[C]/C}.$$

Ist B normal, so gilt

$$\mathrm{ht}\ \mathfrak{V}_{B/A} \leqq \mathrm{ht}\ \mathfrak{V}_{B[C]/C}.$$

Beweis. Durch $\varphi(b \otimes b') = b \otimes b'$ wird ein Ringhomomorphismus $\varphi: B \otimes_A B \to B[C] \otimes_C B[C]$ definiert, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\varphi} & B[C] \otimes_C B[C] \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ B & \hookrightarrow & B[C] \end{array}$$

kommutiert. Für die erste Behauptung zeigen wir $\varphi(\mathrm{An\,Ker\,}\beta) \subset \mathrm{An\,Ker\,}\gamma$. — Sei also $x \in \mathrm{An\,Ker\,}\beta$, d.h. $x(1 \otimes b - b \otimes 1) = 0$ für alle $b \in B$; und sei $y \in B[C]$. Dann gibt es Elemente $c_\rho \in C$ und $b_\rho \in B$, $\rho = 1, \ldots, r$, mit $y = \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho c_\rho$, und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x)(1 \otimes y - y \otimes 1) &= \varphi(x) \sum_{\rho=1}^{r} c_\rho (1 \otimes b_\rho - b_\rho \otimes 1) \\ &= \sum_{\rho=1}^{r} c_\rho \varphi\big(x(1 \otimes b_\rho - b_\rho \otimes 1)\big) = 0, \end{aligned}$$

d.h. $\varphi(x) \in \mathrm{An\,Ker\,}\gamma$. Ist nun B normal, so folgt, da $B[C]$ ganz über B ist, die zweite Behauptung aus der ersten.

§ 2. Galoiserweiterungen

Ist A ein Ring und G eine Untergruppe der Gruppe der Ringautomorphismen Aut A von A, so nennen wir

$$A^G := \{a \in A:\ g(a) = a \text{ für alle } g \in G\}$$

den *G-invarianten Unterring* von A. Die Gruppe G heißt *spiegelungsfrei*, wenn alle Primideale aus A von der Höhe eins unverzweigt über A^G liegen. Zwei Untergruppen $G_1, G_2 \subset \operatorname{Aut} A$ heißen *äquivalent*, wenn ihre invarianten Unterringe A^{G_1} und A^{G_2} isomorph sind.

Im folgenden sei A stets ein *normaler* Ring mit Quotientenkörper K. Ein normaler ganzer (nicht notwendig noetherscher) Oberring B von A heißt *Galoiserweiterung* von A, wenn der Quotientenkörper L von B ein galoisscher Erweiterungskörper von K ist. Die Galoisgruppe G von K über L heißt dann *Galoisgruppe* von B über A. Für $g \in G$ ist $g \mid B$ ein A-Algebraautomorphismus von B, und es gilt $A = B^G$. Ist umgekehrt B ein normaler Ring und $G \subset \operatorname{Aut} B$ endlich, dann ist B Galoiserweiterung des normalen Ringes B^G mit der Galoisgruppe G.

Es sei B ein ganzer Oberring von A derart, daß der Quotientenkörper L von B eine endliche separable Erweiterung von K ist. Da der ganze Abschluß von A in L ein endlicher A-Modul ist ([7] Prop. III.11), ist auch B ein solcher. Daher sagen wir in dieser Situation kurz, *B liege endlich und separabel über A*. Der kleinste quasi-galoissche Erweiterungskörper M von K, welcher L umfaßt, ist eine endliche Galoiserweiterung von K. Der ganze Abschluß C von A in M ist also eine endliche Galoiserweiterung von A. Wir nennen C die *kleinste B umfassende Galoiserweiterung* von A.

Satz 4. *Der Ring B liege endlich und separabel über A, und C sei die kleinste Galoiserweiterung von A, welche B umfaßt. Ist $A_\mathfrak{p}$ regulär für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ mit* $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = r$, *und ist* $\operatorname{ht} \mathfrak{V}_{B/A} > r$, *dann gilt auch* $\operatorname{ht} \mathfrak{V}_{C/A} > r$.

Beweis. Es sei G die (endliche) Galoisgruppe von C über A. Wir bilden den von allen Konjugierten von B erzeugten noetherschen Unterring

$$R := A[g(B)]_{g \in G}$$

von C. Da B ein algebraisches Erzeugendensystem von L über K enthält, enthält R ein solches von M über K. Der Quotientenkörper von R ist demnach gleich M, und C ist die Normalisierung von R. Wir zeigen zunächst:

$$\operatorname{ht} \mathfrak{V}_{R/A} \geqq \operatorname{ht} \mathfrak{V}_{B/A}. \tag{1}$$

Die Injektion $\iota_g : g(B) \hookrightarrow R$, $g \in G$, induziert einen A-Homomorphismus $\tilde{\iota}_g := \iota_g \otimes \iota_g : \widetilde{g(B)} = g(B) \otimes_A g(B) \to \tilde{R} = R \otimes_A R$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{g(B)} & \xrightarrow{\tilde{\iota}_g} & \tilde{R} \\ {\scriptstyle \beta_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ g(B) & \xrightarrow{\iota_g} & R \end{array}$$

kommutiert. Dabei sind β_g und ρ die in § 1 definierten A-Epimorphismen. Wir setzen $\mathfrak{b}_g := \operatorname{An} \operatorname{Ker} \beta_g$, $g \in G$, und $\mathfrak{r} = \operatorname{An} \operatorname{Ker} \rho$ und zeigen

$$\prod_{g \in G} \tilde{\imath}_g(\mathfrak{b}_g) \subset \mathfrak{r}.$$

Seien also $b_g \in \mathfrak{b}_g$, $g \in G$, gegeben, dann ist zu zeigen, daß $\operatorname{Ker} \rho$ von $\prod_{g \in G} \tilde{\imath}_g(b_g)$ annulliert wird. Da $\operatorname{Ker} \rho$ von den Elementen $1 \otimes r - r \otimes 1$, $r \in R$, erzeugt wird, reicht es zu verifizieren, daß

$$\prod_{g \in G} \tilde{\imath}_g(b_g)(1 \otimes r - r \otimes 1) = 0 \qquad \text{für } r \in R. \tag{2}$$

Da R als Ring von den $g(B)$, $g \in G$, erzeugt wird, dürfen wir weiter annehmen, daß $r \in h(B)$ für ein $h \in G$. Nun liegt aber $1 \otimes r - r \otimes 1$ (als Element von $\widetilde{h(B)}$) in $\operatorname{Ker} \beta_h$, so daß $b_h(1 \otimes r - r \otimes 1) = 0$. Es folgt

$$\tilde{\imath}_h(b_h) \cdot (1 \otimes r - r \otimes 1) = \tilde{\imath}_h\big(b_h(1 \otimes r - r \otimes 1)\big) = 0$$

und hieraus (2).

Wenden wir ρ auf die soeben bewiesene Inklusion an, so erhalten wir

$$\rho(\mathfrak{r}) \supset \rho\Big(\prod_{g \in G} \tilde{\imath}_g(\mathfrak{b}_g)\Big) = \prod_{g \in G} \rho \circ \tilde{\imath}_g(\mathfrak{b}_g) = \prod_{g \in G} \beta_g(\mathfrak{b}_g),$$

d.h.

$$\prod_{g \in G} R \cdot \mathfrak{V}_{g(B)/A} \subset \mathfrak{V}_{R/A}.$$

Sei nun $\mathfrak{P} \subset R$ prim derart, daß $\mathfrak{V}_{R/A} \subset \mathfrak{P}$. Da jedes Primideal mit einem Produkt von Idealen bereits eines von diesen enthält, gibt es ein $g \in G$ mit $R \cdot \mathfrak{V}_{g(B)/A} \subset \mathfrak{P}$. Hieraus folgt

$$\operatorname{ht} \mathfrak{P} = \operatorname{ht}\big(\mathfrak{P} \cap g(B)\big) \geqq \operatorname{ht} \mathfrak{V}_{g(B)/A} = \operatorname{ht} \mathfrak{V}_{B/A}.$$

Die Ungleichung (1) ist bewiesen.

Für die Behauptung des Satzes müssen wir zeigen, daß jedes Primideal $\mathfrak{Q} \subset C$ mit $\operatorname{ht} \mathfrak{Q} = r$ unverzweigt über A liegt.

Das Primideal $\mathfrak{P} := \mathfrak{Q} \cap R$ liegt unverzweigt über A, denn nach Voraussetzung und (1) ist $\operatorname{ht} \mathfrak{V}_{R/A} > r$, während $\operatorname{ht} \mathfrak{P} = r$. Für $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$ gilt wieder $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = r$, so daß nach Voraussetzung $A_{\mathfrak{p}}$ regulär ist. Mit Satz 2 folgt, daß auch $R_{\mathfrak{P}}$ regulär und damit erst recht normal ist. Satz 1 liefert dann, daß $\mathfrak{Q}$ unverzweigt über R liegt. Da die Unverzweigtheit transitiv ist, liegt $\mathfrak{Q}$ auch unverzweigt über A, w.z.b.w.

Korollar. *Der Ring B liege endlich und separabel über A und es gelte* $\operatorname{ht}\mathfrak{V}_{B/A}>1$. *Sei C die kleinste B umfassende Galoiserweiterung von A.*

i) *Es gilt* $\operatorname{ht}\mathfrak{V}_{C/A}>1$ *und damit auch* $\operatorname{ht}\mathfrak{V}_{C/B}>1$.

ii) *Ist B zusätzlich ein henselscher und regulärer lokaler Ring, so liegt C unverzweigt über B.*

Beweis. i) Da A normal ist, ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär für alle Primideale $\mathfrak{p}\subset A$ mit $\operatorname{ht}\mathfrak{p}=1$ ([7] Prop. III.8). ii) ergibt sich aus i) mit dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 5. *Es sei B ein henselscher und regulärer lokaler Ring und C ein normaler Oberring, der endlich und separabel über B liegt. Ist* $\operatorname{ht}\mathfrak{V}_{C/B}>1$, *dann liegt C unverzweigt über B.*

Beweis. Da B henselsch ist, ist auch C ein lokaler Ring, und aus Dimensionsgründen gilt $\mathfrak{m}(C)\cap B=\mathfrak{m}(B)$, d.h. C dominiert B. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes [5] (41.1) über die Reinheit des Verzweigungsortes erfüllt, mit dem dann die Behauptung folgt.

Satz 6. *Es sei B ein henselscher und regulärer lokaler Ring mit der Eigenschaft, daß B die einzige endliche Galoiserweiterung von B ist, welche unverzweigt über B liegt. Zwei endliche spiegelungsfreie Gruppen $G_1, G_2\subset$* $\operatorname{Aut} B$ *sind genau dann äquivalent, wenn sie konjugiert sind.*

Beweis. Nur eine Richtung ist zu beweisen. Seien also G_1 und G_2 äquivalent, und sei

$$\alpha\colon\ A_1:=B^{G_1}\to A_2:=B^{G_2}$$

ein Isomorphismus. Wenn wir gezeigt haben, daß sich α zu einem Automorphismus $\hat\alpha$ von B fortsetzen läßt, sind wir fertig, denn dann ist $G_2=\hat\alpha\, G_1\,\hat\alpha^{-1}$.

Der Quotientenkörper $L=Q(B)$ ist eine endliche Galoiserweiterung von $K_i=Q(A_i)$, $i=1,2$. Der Isomorphismus α bestimmt eindeutig einen Isomorphismus von K_1 auf K_2 und dieser läßt sich zu einem Isomorphismus $\hat\alpha$ von L in einen (L umfassenden) algebraischen Abschluß von K_2 fortsetzen. $L[\hat\alpha(L)]$ ist dann eine endliche Galoiserweiterung von K_2. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B & \hookrightarrow & B[\hat\alpha(B)] & \hookrightarrow & C\\ \uparrow & & \uparrow & & \\ A_2 & \hookrightarrow & \hat\alpha(B), & & \end{array}$$

wobei C der ganze Abschluß von A_2 in $L[\hat\alpha(L)]$ ist, und zeigen

$$\operatorname{ht}\mathfrak{V}_{C/A_2}>1.$$

Da C die kleinste $B[\hat{\alpha}(B)]$ umfassende Galoiserweiterung des normalen Ringes A_2 ist, brauchen wir nach Kor. i) zu Satz 4 nur ht $\mathfrak{B}_{B[\hat{\alpha}(B)]/A_2} > 1$ zu zeigen. $\hat{\alpha}(B)$ ist endlicher A_2-Modul, nach Satz 3 gilt also

$$\text{ht } \mathfrak{B}_{B[\hat{\alpha}(B)]/\hat{\alpha}(B)} \geqq \text{ht } \mathfrak{B}_{B/A_2}.$$

Aus der Spiegelungsfreiheit von G_2 und G_1 folgt ht $\mathfrak{B}_{B/A_2} > 1$ und ht $\mathfrak{B}_{\hat{\alpha}(B)/A_2} > 1$, so daß insgesamt ht $\mathfrak{B}_{B[\hat{\alpha}(B)]/A_2} > 1$ ist.

Mit ht $\mathfrak{B}_{C/A_2} > 1$ gilt insbesondere ht $\mathfrak{B}_{C/B} > 1$ und ht $\mathfrak{B}_{C/\hat{\alpha}(B)} > 1$. Nach Hilfssatz 5 liegt also C unverzweigt über B und über $\hat{\alpha}(B)$, und mit der über B gemachten Voraussetzung folgt $\hat{\alpha}(B) = C = B$, d.h. $\hat{\alpha}|B$ ist ein Automorphismus von B mit $\hat{\alpha}|A_1 = \alpha$, w.z.b.w.

§ 3. Die Sätze von Prill

Wir beschränken uns nun auf die Kategorie der analytischen Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen, vollständig nichttrivial bewerteten Körper k. Diese Kategorie besitzt folgende schöne Eigenschaft ([4] Exp. 18 Remarque S. 6):

Ist $A \hookrightarrow B$ ein analytischer Monomorphismus, und liegt B unverzweigt über A, so ist $A = B$.

Außerdem führen endliche Galoiserweiterungen nicht aus der Kategorie heraus:

Es sei A eine normale analytische Algebra und B eine beliebige endliche Galoiserweiterung von A, dann ist B eine analytische Algebra und die Galoisgruppe ist Untergruppe der Gruppe der analytischen (d.h. k-) Automorphismen Aut_k *B von B.*

Denn da analytische Algebren henselsche lokale Ringe sind, und da k algebraisch abgeschlossen ist, ist B eine analytische Algebra ([4] Exp. 19).

Umgekehrt gilt:

Ist B eine analytische Algebra und G eine endliche Untergruppe von Aut_k *B, so ist auch B^G eine analytische Algebra.*

Wie üblich bezeichne K_d die d-dimensionale reguläre analytische Algebra. Auf Grund der obigen Bemerkungen lautet Kor. ii) zu Satz 4 in der Kategorie der analytischen Algebren:

Satz 7. *Es sei A eine normale analytische Algebra und $A \hookrightarrow K_d$ ein endlicher analytischer Monomorphismus derart, daß K_d separabel über A liegt. Ist jedes Primideal aus K_d der Höhe eins unverzweigt über A, so ist K_d eine endliche Galoiserweiterung von A.*

Satz 7 ist eine äquivalente Formulierung des ersten eingangs zitierten Satzes von Prill. Dies sieht man sofort ein, wenn man die Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der analytischen Algebren und der Kategorie der analytischen Raumkeime und den folgenden Satz berücksichtigt, der eine Verbindung zwischen dem algebraisch definierten Verzweigungsideal und dem analytisch definierten Verzweigungsort herstellt.

Satz 8. *Es sei* $\pi=(\tilde{\pi},\hat{\pi})\colon X=(|X|,H)\to Y=(|Y|,H^*)$ *eine endliche analytische Abbildung analytischer Räume X und Y über k. Dann definiert*

$$\mathfrak{V}_x := \mathfrak{V}_{H_x/\hat{\pi}_x(H_y^*)}, \qquad x\in X, \; y := \tilde{\pi}(x),$$

ein kohärentes Ideal $\mathfrak{V}$ *auf X, dessen Nullstellengebilde* $N(\mathfrak{V})$ *gleich der Menge V der Punkte* $x\in|X|$ *ist, in welchen* π *keine lokale Immersion, d.h.* $\hat{\pi}_x\colon H_y^*\to H_x$ *nicht surjektiv ist.*

Die nach dem Satz analytische Menge $V\subset X$ heißt der *Verzweigungsort* von π oder von X über Y. Ist π zusätzlich eine Überlagerung (d.h. ist $\tilde{\pi}$ offen), so ist V die Menge der $x\in|X|$, in denen π nicht bianalytisch, d.h. $\hat{\pi}_x$ nicht bijektiv ist.

Beweis. Das Faserprodukt $\tilde{X} := X\times_Y X$ ist ein analytischer Raum mit unterliegendem topologischem Raum

$$|\tilde{X}|=|X|\times_{|Y|}|X|=\{(x_1,x_2)\in|X|\times|X|\colon\ \tilde{\pi}(x_1)=\tilde{\pi}(x_2)\}$$

(vgl. hierzu und für das Folgende [3] Exp. 10 und [4] Exp. 20). Für die Strukturgarbe $\tilde{H}$ von $\tilde{X}$ gilt:

$$\tilde{H}_{(x_1,x_2)}=H_{x_1}\otimes_{H_y^*}H_{x_2}, \qquad (x_1,x_2)\in|\tilde{X}|, \qquad y:=\tilde{\pi}(x_1)=\tilde{\pi}(x_2)$$

(denn auf Grund der Endlichkeit von π sind alle Abbildungen $\hat{\pi}_x$: $H_y^*\to H_x$ endlich). Die Diagonalabbildung $\Delta\colon X\to\tilde{X}$ ist eine abgeschlossene Immersion, für welche der zugehörige Epimorphismus

$$\hat{\Delta}_x\colon\ H_x\otimes_{H_y^*}H_x\to H_x, \qquad x\in|X|,$$

durch $\hat{\Delta}_x(h_1\otimes h_2)=h_1 h_2$ gegeben wird. Ist $\mathfrak{J}$ das durch Δ in $\tilde{X}$ definierte kohärente Ideal, so ist das analytische Urbild $\mathfrak{V}$ von An $\mathfrak{J}$ ein kohärentes Ideal auf X, und in jedem Punkt $x\in|X|$ gilt wegen $\mathfrak{J}_x=\operatorname{Ker}\hat{\Delta}_x$:

$$\mathfrak{V}_x=\hat{\Delta}_x(\operatorname{An}\operatorname{Ker}\hat{\Delta}_x)=\mathfrak{V}_{H_x/\hat{\pi}_x(H_y^*)}.$$

Wir verifizieren noch $N(\mathfrak{V})=V$: $x\notin V\Leftrightarrow\hat{\pi}_x$ ist surjektiv $\Leftrightarrow\hat{\pi}_x(\mathfrak{m}(H_y^*))H_x=\mathfrak{m}(H_x)\Leftrightarrow\mathfrak{m}(H_x)$ ist unverzweigt über $\hat{\pi}_x(H_y^*)\Leftrightarrow\mathfrak{V}_x=H_x\Leftrightarrow x\notin N(\mathfrak{V})$, w.z.b.w.

In [4] Exp. 20 Prop. 7 und 9 findet man einen zu Satz 8 analogen Satz mit einer etwas anderen Definition des Verzweigungsideals.

Schließlich formulieren wir noch Satz 6 für die Kategorie der analytischen Algebren. Dazu definieren wir: zwei Untergruppen $G_1, G_2 \subset \mathrm{Aut}_k A$, wo A eine analytische Algebra ist, heißen *k-äquivalent*, wenn es einen analytischen Isomorphismus von A^{G_1} auf A^{G_2} gibt.

Satz 9. *Zwei endliche spiegelungsfreie Untergruppen* $G_1, G_2 \subset \mathrm{Aut}_k K_d$ *sind genau dann k-äquivalent, wenn sie (in* $\mathrm{Aut}_k K_d$*) konjugiert sind.*

Literatur

1. Auslander, M., and D. A. Buchsbaum: Ramification theory in noetherian rings. Am. Jour. of Math. **81**, 749–765 (1959).
2. Gottschling, E.: Invarianten endlicher Gruppen und biholomorphe Abbildungen. Inventiones Math. **6**, 315–326 (1969).
3. Grothendieck, A.: Techniques de construction en géométrie analytique I–X. Sém. H. Cartan **13**, 1960/61, Exp. 7–17.
4. Houzel, Chr.: Géométrie analytique locale I–IV. Sém. H. Cartan **13**, 1960/61, Exp. 18–21.
5. Nagata, M.: Local rings. New York-London: Interscience 1962.
6. Prill, D.: Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups. Duke Math. Jour. **34**, 375–386 (1967).
7. Serre, J.-P.: Algèbre locale. Multiplicités. Lecture notes in mathematics 11. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

Dieter Denneberg
Oswald Riemenschneider
Mathematisches Institut
der Universität Göttingen
34 Göttingen, Bunsenstraße 3/5

(Eingegangen am 11. Dezember 1968)