Inventiones math. 2, 307—331 (1967)

Über den Flächeninhalt analytischer Mengen und die Erzeugung k-pseudokonvexer Gebiete

OSWALD RIEMENSCHNEIDER (Göttingen)

Die Eigenschaften des Flächeninhalts einer reindimensionalen analytischen Menge in einem Gebiet des $\mathbb{C}^n$ sind schon seit etwa drei Jahrzehnten Gegenstand von Untersuchungen. Gerade in den letzten Jahren aber wurden dabei einige interessante Kriterien entdeckt. Man denke z. B. an die Stollsche Bedingung für die Algebraizität einer analytischen Menge im $\mathbb{C}^n$ (s. [*10*]) oder an die Arbeit [*1*] von BISHOP. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Ergebnisse findet man in den Lecture Notes, Bd. 19, von STOLZENBERG (s. [*12*]).

Die meisten Arbeiten über den Flächeninhalt analytischer Mengen wurden – zumindest indirekt – von der Okaschen Note [*5*] aus dem Jahre 1934 angeregt. OKA hatte dort in der Absicht, analoge Sätze zu den Ergebnissen über Normalitätsgebiete von Familien holomorpher bzw. meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlicher zu erhalten, das Normalitätsgebiet G_0 einer Familie $\mathscr{F}=\{A_j : j\in J\}$ von rein-1-dimensionalen analytischen Mengen in einem Gebiet G des $\mathbb{C}^2$ definiert und die folgenden Sätze angekündigt:

(A) *Die Familie $\mathscr{F}$ ist genau dann normal in einem Punkte von G, wenn es eine Umgebung U dieses Punktes gibt, so daß die Menge $\{F(A_j, U): j\in J\}$ beschränkt ist. (Hierbei bedeutet $F(A_j, U)$ den Flächeninhalt von $A_j\cap U$.)*

(B) *G_0 ist pseudokonvex in G.*

OKA hat ein ähnliches Problem erst wieder 1962 in der Arbeit [*7*] behandelt. Die obigen Sätze wurden 1950 und 1962 in den Arbeiten [*8*] von RUTISHAUSER und [*4*] von NISHINO bewiesen. Auch für rein-1-codimensionale analytische Mengen in einem Gebiet G des $\mathbb{C}^n$ konnten die entsprechenden Aussagen hergeleitet werden. STOLLS *Montel-Theorem* ([*11*], S. 188) besagt, daß eine Familie $\mathscr{F}=\{v_j : j\in J\}$ von nicht-negativen Divisoren in einem Gebiet G des $\mathbb{C}^n$ genau dann normal ist, wenn sie lokal beschränkt ist (im Sinne von Satz (A)). Dabei definiert man den Flächeninhalt eines Divisors v mit Hilfe der eindeutigen Zerlegung

$$v=\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu v_\mu ,$$

wo die a_μ positive ganze Zahlen und die v_μ Primdivisoren sind, vermöge

$$F(v, U) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cdot F(A_\mu, U),$$

wenn $U \subset G$ und A_μ der Träger von v_μ ist. Auch die von OKA in [5] definierte Normalität ist eine Normalität von Divisoren gemäß der Definition von STOLL. Das Analogon zu (B) für Familien von Divisoren in Gebieten des $\mathbb{C}^n$ bewies FUJITA ohne Verwendung des Montel-Theorems in der Arbeit [2].

Faßt man die Sätze (A) und (B) zusammen, so erhält man die folgende Aussage:

(C) *Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^2$, $\mathscr{F} = \{A_j : j \in J\}$ eine Familie von rein-1-dimensionalen analytischen Mengen in G und G_0 die (offene) Menge der Punkte aus G, für die es eine Umgebung $U \subset G$ und eine positive reelle Konstante K gibt, so daß für alle j gilt: $F(A_j, U) \leqq K$. Dann ist G_0 pseudokonvex in G.*

Dieser Satz wird im folgenden in mehrfacher Hinsicht verallgemeinert: Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, $n \geqq 2$, $\{A_j^k, j \in J\}$ eine Familie rein-k-dimensionaler analytischer Mengen in G, $1 \leqq k \leqq n-1$, $\{c_j : j \in J\}$ eine Familie nichtnegativer reeller Zahlen und $G_0 = G_0(A_j^k, c_j)_{j \in J}$ die (offene) Menge aller Punkte aus G, für die es eine Umgebung $U \subset G$ und eine positive reelle Konstante K gibt, so daß für die (komplex-) k-dimensionalen Flächeninhalte der analytischen Mengen $A_j^k \cap U$ gilt: $F(A_j^k, U) \leqq K \cdot c_j, j \in J$. Dann lautet der Hauptsatz dieser Arbeit:

Theorem. *$G_0 = G_0(A_j^k, c_j)_{j \in J}$ ist k-pseudokonvex in G.*

Für $k = n-1 = 1$ wurde dieser Satz 1962 von OKA in [7] bewiesen. Daraus konnte FUJITA 1965 in der Arbeit [3] den Fall $k = n-1$, $n \geqq 2$, induktiv herleiten. Einen anderen Beweis, der das Okasche Ergebnis nicht verwendet, kann man in der Dissertation von BARTH (Notre Dame. 1966) finden. Dieses Ergebnis liefert zusammen mit dem Stollschen Montel-Theorem einen weiteren Beweis für die n-dimensionale Version von Satz (B).

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Im §1 werden allgemeine Sätze über den *Flächeninhalt analytischer Mengen* zusammengestellt, soweit sie später benötigt werden. Rein integrationstheoretische Probleme werden dabei übergangen.

Im §2 werden *k-pseudokonvexe Gebiete* im $\mathbb{C}^n$ definiert und neue Figuren (H, P) angegeben mit der folgenden Eigenschaft: Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und G_0 eine offene Teilmenge von G. G_0 ist genau dann k-pseudokonvex in G, wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:

i) *Ist (H, P) beliebig, $H \subset G_0$ und $P \subset G$, so ist $P \subset G_0$.*

ii) *Die Eigenschaft* i) *ist invariant gegenüber biholomorphen Transformationen von Umgebungen beliebiger Punkte aus* G.

Die als $(k, n)^*$-*Hartogsfiguren* bezeichneten Paare (H, P) besitzen weitere Eigenschaften, die allgemein bei Induktionsbeweisen nützlich sein werden.

Im § 3 wird das obige Theorem bewiesen. Grundlegend für diesen Beweis ist eine Verallgemeinerung eines Okaschen Lemmas (s. [7], S. 11):

Lemma. *Sei* (H, P) *eine* $(k, n)^*$-*Hartogsfigur, der Polyzylinder* P_0 *liege relativ-kompakt in* P. *Dann existiert eine positive reelle Konstante* $K = K(H, P, P_0)$ *mit der folgenden Eigenschaft: Ist* A^k *eine rein-k-dimensionale analytische Menge in* P *und existiert der Flächeninhalt* $F(A^k, H)$ *von* $A^k \cap H$, *so ist der Flächeninhalt von* $A^k \cap P_0$ *höchstens gleich* $K \cdot F(A^k, H)$.

Der Beweis dieses Lemmas wird in mehreren Schritten geführt. Beim ersten Schritt (Hilfssatz 2) werden einige geometrische Ideen aus der Arbeit [7] auf den Fall rein-1-dimensionaler analytischer Mengen im $\mathbb{C}^n$ übertragen. Hilfssatz 3 ist eine Übertragung von Hilfssatz 2 auf rein-k-dimensionale analytische Mengen im $\mathbb{C}^n$ und wird durch vollständige Induktion nach k bewiesen. Dabei werden vor allem die Eigenschaften der $(k, n)^*$-Hartogsfiguren verwendet. Mit einem weiteren geometrischen Verfahren wird dann der Beweis des Lemmas im Hilfssatz 4 abgeschlossen.

Herrn Professor H. Grauert möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit danken.

§ 1. Der Flächeninhalt analytischer Mengen

Sei M^k eine k-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $z^{(0)}$ ein beliebiger Punkt aus M^k. Es existiert dann eine Umgebung $V = V(z^{(0)})$ von $z^{(0)}$ in M^k, ein Gebiet U im k-dimensionalen Zahlenraum der komplexen Variablen $u_1, \ldots, u_k$ und eine biholomorphe Abbildung g von U auf V. Ein solches Paar (U, g) heißt ein System von lokalen Koordinaten von M^k im Punkte $z^{(0)}$. Sei α eine alternierende Differentialform vom Doppelgrad (k, k) auf M^k und (U, g) ein System von lokalen Koordinaten. Dann gibt es eine Funktion $a(u) = a(u; \alpha, g)$, $u = (u_1, \ldots, u_k) \in U$, mit der Eigenschaft:

$$\alpha \circ g = a(u) \cdot \omega, \qquad \omega = \left(\frac{i}{2}\right)^k \cdot du_1 \wedge d\bar{u}_1 \wedge \cdots \wedge du_k \wedge d\bar{u}_k .$$

Die Form α heißt *reell (nicht-negativ, positiv)*, wenn es zu jedem $z^{(0)} \in M^k$ ein System (U, g) von lokalen Koordinaten gibt, so daß die Funktion $a(u)$ reell (nicht-negativ, positiv) ist. Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der lokalen Koordinaten. Man verwendet für nicht-negative bzw. positive Formen α die Symbole $\alpha \geqq 0$ bzw. $\alpha > 0$.

Ist M' eine Teilmenge von M^k, (U, g) ein System von lokalen Koordinaten und $V=g(U)$, so definiert man

$$\int_{M' \cap V} \alpha := \int_{g^{-1}(M' \cap V)} a(u) \cdot \omega,$$

sofern das rechts stehende Integral existiert. Mit Hilfe von „Dieudonné-Zerlegungen" (Teilung der Eins) kann man dann ein globales Integral

$$\int_{M'} \alpha$$

erklären (s. z.B. [9], §1, S. 118).

Sei weiter $1 \leqq k \leqq n-1$, G ein Gebiet in dem n-dimensionalen Zahlenraum der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_n$, $A=A^k$ eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G, $M(A)$ die k-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von A, $e_A: M(A) \to G$ die Einbettungsabbildung, α eine alternierende Differentialform vom Doppelgrad (k, k) in G und $\alpha_A := \alpha \circ e_A$ die vermöge e_A von G nach $M(A)$ transportierte Differentialform. α heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, wenn für alle rein-k-dimensionalen analytischen Mengen A in G α_A eine positive bzw. nicht-negative (k, k)-Form auf $M(A)$ ist. Man schreibt in diesem Fall ebenfalls $\alpha>0$ bzw. $\alpha \geqq 0$. Da die Menge der (k, k)-Formen in G auf natürliche Weise einen $\mathbb{C}$-Modul bilden, ist mit α_1 und α_2 auch $\alpha_2-\alpha_1$ eine (k, k)-Form. Man schreibt $\alpha_1 \leqq \alpha_2$, wenn $\alpha_2-\alpha_1$ positiv semidefinit ist.

Ist A' eine Teilmenge von A, so definiert man

$$\int_{A'} \alpha := \int_{A' \cap M(A)} \alpha_A,$$

sofern das rechts stehende Integral existiert. Es gilt (s. [9], S. 153 (Satz 11)):

Satz 1. *Sei α eine stetige alternierende Differentialform vom Doppelgrad (k, k) in einem Gebiet G des $\mathbb{C}^n$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$, sei A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G und liege das Gebiet G_0 relativ-kompakt in G. Dann existiert das Integral*

$$\int_{A \cap G_0} \alpha.$$

Das oben definierte Integral besitzt die üblichen Linearitätseigenschaften. Mit $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ ist

$$\int_{A \cap G_0} \alpha_1 \leqq \int_{A \cap G_0} \alpha_2,$$

und für $\alpha>0$, $A \cap G_0 \neq \emptyset$, gilt:

$$\int_{A \cap G_0} \alpha>0.$$

Sei weiter $f=(f_1, \ldots, f_n)$ eine biholomorphe Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet G^*, sei A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G und α^* eine (k, k)-Form in G^*. Dann ist $A^*=f(A)$ eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G^* und $\alpha=\alpha^* \circ f$ eine (k, k)-Form in G. Existiert eines der Integrale

$$\int_A \alpha \quad \text{bzw.} \quad \int_{A^*} \alpha^*,$$

so existiert auch das andere und ihre Werte sind gleich. Es gilt nämlich $(\alpha^* \circ e_{A^*}) \circ f=(\alpha^* \circ f) \circ e_A=\alpha \circ e_A$ und $f(M(A))=M(f(A))=M(A^*)$. Daraus folgt

$$\int_{A^*} \alpha^*=\int_{M(A^*)} \alpha^* \circ e_{A^*}=\int_{f(M(A))} \alpha^* \circ e_{A^*}=\int_{M(A)} (\alpha^* \circ e_{A^*}) \circ f=\int_{M(A)} \alpha \circ e_A=\int_A \alpha.$$

Ist $\alpha^*>0$ bzw. $\geqq 0$ in G^*, so ist auch $\alpha=\alpha^* \circ f>0$ bzw. $\geqq 0$ in G.

Es sollen nun spezielle Differentialformen im n-dimensionalen Zahlenraum der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_n$ eingeführt werden. Sei $j=1, \ldots, n$ und

$$d\sigma_j := \frac{i}{2} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

Mit $z_j=x_j+iy_j$, x_j und y_j reell, ist $d\sigma_j=dx_j \wedge dy_j$. Weiter sei

$$d\sigma := \sum_{j=1}^{n} d\sigma_j \quad \text{und} \quad \varphi^k=\frac{1}{k!} \bigwedge_{j=1}^{k} d\sigma \qquad (1 \leqq k \leqq n-1).$$

φ^k ist das *(komplex-) k-dimensionale Flächenelement* im $\mathbb{C}^n$. Schließlich sei mit $1 \leqq \mu_1<\cdots<\mu_k \leqq n$:

$$\varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_k} := d\sigma_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{\mu_k}.$$

Alle φ^k und $\varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_k}$ sind stetig im $\mathbb{C}^n$ und vom Doppelgrad (k, k); φ^k ist positiv definit, die $\varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_k}$ sind positiv semidefinit. Durch einfaches Ausrechnen folgt:

$$\varphi^k=\sum_{1 \leqq \mu_1<\ldots<\mu_k \leqq n} \varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_k}. \tag{1}$$

Ist G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G und G_0 ein Teilgebiet von G, so definiert man

$$F(A, G_0) := \int_{A \cap G_0} \varphi^k,$$

$$F_{\mu_1, \ldots, \mu_k}(A, G_0) := \int_{A \cap G_0} \varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_k}.$$

Nach Satz 1 existieren diese Integrale, wenn G_0 relativ-kompakt in G liegt. $F(A, G_0)$ ist der *Flächeninhalt* der analytischen Menge $A \cap G_0$,

$F_{\mu_1,\dots,\mu_k}(A, G_0)$ der *Flächeninhalt der Projektion* von $A \cap G_0$ *in die k-dimensionale* $(z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_k})$*-Ebene.*

Satz 2. *Sei* $1 \leqq k \leqq n-1$, *G ein Gebiet im* $\mathbb{C}^n$ *und A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G.* $F(A, G)$ *existiert genau dann, wenn für alle* $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ *mit* $1 \leqq \mu_1 < \dots < \mu_k \leqq n$ *die Integrale* $F_{\mu_1,\dots,\mu_k}(A, G)$ *existieren, und es gilt dann:*

$$F(A, G) = \sum_{1 \leqq \mu_1 < \dots < \mu_k \leqq n} F_{\mu_1, \dots, \mu_k}(A, G).$$

Das heißt: Der Flächeninhalt von A ist gleich der Summe der Flächeninhalte aller Projektionen von A in die k-dimensionalen Koordinatenebenen des $\mathbb{C}^n$.

Beweis. Wegen der Additivität des Integrales und der Formel (1) ist nur zu zeigen: Existiert $F(A, G)$, dann existieren auch alle $F_{\mu_1,\dots,\mu_k}(A, G)$. Sei $e_A: M(A) \to G$ die Einbettungsabbildung, so ist nach Voraussetzung $\varphi^k \circ e_A$ integrierbar auf $M(A)$. Weiter ist $0 \leqq \varphi_{\mu_1,\dots,\mu_k} \circ e_A \leqq \varphi^k \circ e_A$ und $\varphi_{\mu_1,\dots,\mu_k} \circ e_A$ stetig, also insbesondere meßbar auf $M(A)$. Folglich ist nach einem Satz der Integrationstheorie (s. [9], S. 122 (Satz 3.7)) auch $\varphi_{\mu_1,\dots,\mu_k} \circ e_A$ integrierbar über $M(A)$, d.h. es existiert das Integral $F_{\mu_1,\dots,\mu_k}(A, G)$.

Der nächste Satz ist ein Spezialfall des allgemeinen Satzes von FUBINI für komplexe Mannigfaltigkeiten (s. z.B. [9], S. 133 (Satz 7)).

Satz 3. *Sei* $1 \leqq k \leqq n-1$, G_1 *ein Gebiet der komplexen* z_1*-Ebene,* G_2 *ein Gebiet der* $(n-1)$*-dimensionalen komplexen* $(z_2, \dots, z_n)$*-Ebene und A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in* $G := G_1 \times G_2$. *Für alle* $z_1^{(0)} \in G_1$ *werde* $A(z_1^{(0)}) := A \cap \{z_1 = z_1^{(0)}\}$ *aufgefaßt als analytische Menge in* G_2. *Es existiere das Integral*

$$\int_A d\sigma_1 \wedge \dots \wedge d\sigma_k.$$

Dann gibt es eine Nullmenge N in G_1 *mit den folgenden Eigenschaften: Ist* $z_1^{(0)} \in G_1 - N$, *so ist* $A(z_1^{(0)})$ *entweder leer oder eine rein-*$(k$-$1)$*-dimensionale analytische Menge in* G_2. *Ist* $A(z_1^{(0)})$ *nicht leer, so ist im Falle* $k=1$ *die Anzahl* $I(z_1^{(0)})$ *der Punkte von* $A(z_1^{(0)})$ *endlich, und im Falle* $k>1$ *existiert das Integral*

$$I(z_1^{(0)}) = \int_{A(z_1^{(0)})} d\sigma_2 \wedge \dots \wedge d\sigma_k.$$

Setzt man noch $I(z_1^{(0)}) = 0$, *wenn* $A(z_1^{(0)})$ *leer ist, so ist die Funktion* $I(z_1)$ *auf* $G_1 - N$ *bezüglich* $d\sigma_1$ *integrierbar, und es gilt:*

$$\int_A d\sigma_1 \wedge \dots \wedge d\sigma_k = \int_{G_1 - N} d\sigma_1 \cdot I(z_1).$$

Zum Schluß soll noch ein Satz über das Verhalten der Flächeninhalte analytischer Mengen bei biholomorphen Abbildungen angegeben werden.

Satz 4. *Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und f eine biholomorphe Abbildung von G auf das Gebiet G^*. Liegt das Gebiet G_0 relativ-kompakt in G, so gibt es zu jedem natürlichen k mit $1 \leqq k \leqq n-1$ eine positive reelle Konstante $K = K(f, G_0, k)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in G, so gilt*

$$F\big(f(A), f(G_0)\big) \leqq K \cdot F(A, G_0).$$

Beweis. Sei φ^k das k-dimensionale Flächenelement in G, φ^{k*} das entsprechende Element in $G^* = f(G)$. Nach früheren Bemerkungen sind φ^k und $\varphi^{k*} \circ f$ stetige, positiv-definite (k, k)-Formen in G. Mit einem Satz von Stoll (s. [10], S. 168 (Lemma 7.17)) folgt: Es gibt eine positive reelle Konstante $K = K(\varphi^{k*} \circ f, \varphi^k, G_0) = K(f, G_0, k)$ mit der Eigenschaft $\varphi^{k*} \circ f \leqq K \cdot \varphi^k$ für $z \in G_0$. Nun ist $A^* = f(A)$ rein-k-dimensional in $G^* = f(G)$, und das Gebiet $G_0^* = f(G_0)$ liegt relativ-kompakt in G^*. Also existiert das Integral

$$\int_{A^* \cap G_0^*} \varphi^{k*},$$

und es gilt:

$$F\big(f(A), f(G_0)\big) = \int_{A^* \cap G_0^*} \varphi^{k*} = \int_{A \cap G_0} \varphi^{k*} \circ f \leqq \int_{A \cap G_0} K \cdot \varphi^k = K \cdot F(A, G_0).$$

§ 2. k-pseudokonvexe Gebiete im $\mathbb{C}^n$

Definition 1. *Sei $1 \leqq k \leqq n-1$, G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, G_0 ein (nicht notwendig zusammenhängender) Teilbereich von G und $E = G - G_0$. G_0 heißt k-pseudokonvex in G, wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:*

(i) *(Kontinuitätssatz der Ordnung k im $\mathbb{C}^n$). Sei $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \in E$, und für ein $r > 0$ sei die Menge*

$$\{(z_1, \ldots, z_n):\ z_1 = z_1^{(0)}, \ldots, z_k = z_k^{(0)},\ 0 < \max_{j=k+1,\ldots,n} |z_j - z_j^{(0)}| < r\}$$

enthalten in G_0. Dann existiert ein $r_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jedem k-tupel $(z_1', \ldots, z_k')$ mit

$$\max_{j=1,\ldots,k} |z_j' - z_j^{(0)}| < r_1$$

existiert ein $(n-k)$-tupel $(z_{k+1}', \ldots, z_n')$ mit

$$\max_{j=k+1,\ldots,n} |z_j' - z_j^{(0)}| < r \quad \textit{und} \quad (z_1', \ldots, z_n') \in E.$$

(ii) *Die Eigenschaft* (i) *ist invariant gegenüber biholomorphen Transformationen von Umgebungen beliebiger Punkte aus G.*

G_0 heißt *k-pseudokonvex* (schlechthin), wenn $G=\mathbb{C}^n$. G_0 heißt *pseudokonvex* (in G oder schlechthin), wenn G_0 $(n-1)$-pseudokonvex (in G oder schlechthin) ist. Ist $1\leqq k_1\leqq k_2\leqq n-1$ und G_0 k_2-pseudokonvex in G, so ist G_0 k_1-pseudokonvex in G; denn der Kontinuitätssatz der Ordnung k_2 impliziert den der Ordnung k_1.

Es werden nun mehrere Figuren im $\mathbb{C}^n$ eingeführt, von denen später gezeigt wird, daß sie zur Definition der k-Pseudokonvexität verwendet werden können. Sei $1\leqq k\leqq n-1$, s eine natürliche Zahl mit $1\leqq s\leqq k-1$ und $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ ein s-tupel natürlicher Zahlen mit $1\leqq\sigma_1<\cdots<\sigma_s\leqq k$. Dann werde $(\tau_1, \ldots, \tau_t)=\mathscr{R}(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ definiert durch

$$\{\tau_1, \ldots, \tau_t\}\cup\{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}=\{1, \ldots, k\},\quad \{\tau_1, \ldots, \tau_t\}\cap\{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}=\emptyset$$

und $1\leqq\tau_1<\cdots<\tau_t\leqq k$. Sei weiter $0<r_1<r$ und $0<r_1'<r'$. Man definiert dann die folgenden Mengen im Raum der Variablen $z_1, \ldots, z_n$:

$$P\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r}{r'}\right):=\{\max_{j=1,\ldots,k}|z_j|<r,\quad \max_{j=k+1,\ldots,n}|z_j|<r'\},$$

$$Q\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r}{r_1', r'}\right):=\{\max_{j=1,\ldots,k}|z_j|<r,\ r_1'<\max_{j=k+1,\ldots,n}|z_j|<r'\},$$

$$Q^{\sigma_1,\ldots,\sigma_s}\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r_1, r}{r'}\right):=\{\max_{j=1,\ldots,s}|z_{\sigma_j}|<r,\quad \max_{l=1,\ldots,t}|z_{\tau_l}|<r_1\}\times$$

$$\times\{\max_{j=k+1,\ldots,n}|z_j|<r'\},$$

$$H^0\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r_1, r}{r_1', r'}\right):=Q\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r}{r_1', r'}\right)\cup P\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r_1}{r'}\right),$$

$$H^s\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r_1, r}{r_1', r'}\right):=Q\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r}{r_1', r'}\right)\cup\bigcup_{1\leqq\sigma_1<\cdots<\sigma_s\leqq k}Q^{\sigma_1,\ldots,\sigma_s}\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r_1, r}{r'}\right).$$

Alle diese Figuren besitzen als Mittelpunkt den Ursprung im $\mathbb{C}^n$. Die entsprechenden Figuren mit einem beliebigen Mittelpunkt $z^{(0)}=(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})\in\mathbb{C}^n$ sollen mit

$$P_{z^{(0)}}\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{r}{r'}\right)$$

usw. bezeichnet werden. Werden mehrere Variablensysteme nebeneinander benutzt, so wird das Symbol

$$\left(\frac{k}{n}\right| \quad\text{durch}\quad \left(\frac{z_1, \ldots, z_k}{z_{k+1}, \ldots, z_n}\right|$$

ersetzt, damit keine Mißverständnisse entstehen.

Definition 2. *Ein System* (H^s, P) *mit*

$$H^s = H^s_{z^{(0)}}\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r'_1, r'}\right), \quad P = P_{z^{(0)}}\left(\frac{k \mid r}{n \mid r'}\right),$$

$0 < r_1 < r$, $0 < r'_1 < r'$, $0 \leqq s < k \leqq n-1$, *heißt eine* (s, k, n)*-Hartogsfigur.*

Definition 3. *Sei* $0 \leqq s < k \leqq n-1$, G *ein Gebiet im* $\mathbb{C}^n$ *und* G_0 *ein (nicht notwendig zusammenhängender) Teilbereich von* G. G_0 *heißt* (s, k)*-pseudokonvex in* G, *wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:*

$(\mathrm{i})_{s,k}$. *Ist* (H^s, P) *eine* (s, k, n)*-Hartogsfigur mit* $H^s \subset G_0$, $P \subset G$, *so ist* $P \subset G_0$.

$(\mathrm{ii})_{s,k}$. *Die Eigenschaft* $(\mathrm{i})_{s,k}$ *ist invariant gegenüber biholomorphen Transformationen von Umgebungen beliebiger Punkte aus* G.

Oka bewies in der Arbeit [*6*], daß G_0 genau dann pseudokonvex in G ist, wenn G_0 $(0, n-1)$-pseudokonvex in G ist. Durch analoge Überlegungen bewies Tadokoro in der Arbeit [*13*], daß G_0 genau dann k-pseudokonvex in G ist, wenn G_0 $(0, k)$-pseudokonvex in G ist. Daraus folgert man leicht: Endliche Durchschnitte und Zusammenhangskomponenten k-pseudokonvexer Gebiete in $G \subset \mathbb{C}^n$ sind wieder k-pseudokonvex in G. Ist G_0 k-pseudokonvex in G, G k-pseudokonvex (schlechthin), so ist auch G_0 k-pseudokonvex.

Es wird nun gezeigt, daß die $(k-1, k, n)$-Hartogsfiguren dasselbe leisten wie die $(0, k, n)$-Hartogsfiguren, die auch als (k, n)-Figuren bezeichnet werden sollen. Die Paare (H^s, P) mit $0 < s < k-1$ sind nur zur Vereinfachung dieses Beweises definiert worden.

Satz 5. *Sei* $0 \leqq s < k \leqq n-1$ *und* G_0 *ein Teilbereich des Gebietes* $G \subset \mathbb{C}^n$. G_0 *ist genau dann k-pseudokonvex in* G, *wenn* G_0 (s, k)*-pseudokonvex in* G *ist.*

Nach der obigen Bemerkung sind k- und $(0, k)$-Pseudokonvexität äquivalente Eigenschaften. Sei weiter G_0 $(0, k)$-pseudokonvex in G, und sei (H^{k-1}, P) eine $(k-1, k, n)$-Hartogsfigur mit $H^{k-1} \subset G_0$, $P \subset G$. Es sei

$$H^{k-1} = H^{k-1}\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r'_1, r'}\right) \quad \text{und} \quad H^0 = H^0\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r'_1, r'}\right).$$

Dann ist (H^0, P) eine $(0, k, n)$-Hartogsfigur mit $H^0 \subset H^{k-1} \subset G_0$ und folglich $P \subset G_0$. G_0 ist somit $(k-1, k)$-pseudokonvex in G. Satz 5 ist dann bewiesen, wenn man gezeigt hat, daß die folgende Hilfsaussage richtig ist.

Hilfssatz. *Sei* $1 \leqq s+1 < k \leqq n-1$, G_0 *ein* $(s+1, k)$*-pseudokonvexer Teilbereich in dem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}^n$ *und* (H^s, P) *eine* (s, k, n)*-Hartogsfigur mit* $H^s \subset G_0$, $P \subset G$. *Dann ist* $P \subset G_0$.

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $z^{(0)}=(0, \dots, 0)\in\mathbb{C}^n$,

$$H^s=H^s\left(\frac{z_1, \quad \dots, z_k \,\big|\, r_1, r}{z_{k+1}, \dots, z_n \,\big|\, r_1', r'}\right), \qquad P=P\left(\frac{z_1, \quad \dots, z_k \,\big|\, r}{z_{k+1}, \dots, z_n \,\big|\, r'}\right).$$

Man sieht leicht ein, daß es genügt, den Fall $r_1=\frac{1}{2}r$ zu behandeln. Es sei

$$I_s=\{(\tau_1, \dots, \tau_t): (\tau_1, \dots, \tau_t)=\mathscr{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_s), 1\leqq\sigma_1<\dots<\sigma_s\leqq k\}, \qquad s>0,$$
$$I_0=\{(\tau_1, \dots, \tau_t)=(1, \dots, k)\},$$

und im Falle $s=0$: $\{1\leqq\sigma_1<\dots<\sigma_s\leqq k\}=\emptyset$. Man definiert dann zu jedem t-tupel $(\tau_1, \dots, \tau_t)\in I_s$ eine biholomorphe Abbildung $\mu_{\tau_1,\dots,\tau_t}$ des Raumes der Variablen $z_1, \dots, z_n$ auf den Raum der Variablen $w_1, \dots, w_n$ vermöge

$$\begin{pmatrix} w_{\tau_1} \\ \vdots \\ w_{\tau_t} \end{pmatrix}=A_t\begin{pmatrix} z_{\tau_1} \\ \vdots \\ z_{\tau_t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_{\sigma_1} \\ \vdots \\ w_{\sigma_s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_{\sigma_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_{k+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit der t-reihigen quadratischen Matrix $(2\leqq t\leqq k)$:

$$A_t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_t^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $0<d'<r$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon'>0$ mit $\varepsilon'<\min(r_1, d')$ und $d'+\varepsilon'<r$. Sei (H', P') die $(s+1, k, n)$-Hartogsfigur

$$H'=H^{s+1}\left(\frac{w_1, \quad \dots, w_k \,\big|\, \varepsilon', d'}{w_{k+1}, \dots, w_n \,\big|\, r_1', r'}\right), \qquad P'=P\left(\frac{w_1, \quad \dots, w_k \,\big|\, d'}{w_{k+1}, \dots, w_n \,\big|\, r'}\right).$$

Es ist für beliebiges $\mu=\mu_{\tau_1,\dots,\tau_t}$, $(\tau_1, \dots, \tau_t)\in I_s$:

$$H'\subset\mu(H^s)\subset\mu(G_0), \qquad P'\subset\mu(P)\subset\mu(G).$$

Da G_0 $(s+1, k)$-pseudokonvex in G ist, ist $P'\subset\mu(G_0)$. Diese Aussage gilt für alle d' mit $0<d'<r$. Sei also

$$P_0=P\left(\frac{w_1, \quad \dots, w_k \,\big|\, r}{w_{k+1}, \dots, w_n \,\big|\, r'}\right),$$

so folgt:

$$\bigcup_{(\tau_1, \ldots, \tau_t) \in I_s} \mu^{-1}_{\tau_1, \ldots, \tau_t}(P_0) \subset G_0 .$$

Sei schließlich d mit $0<d<r$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon>0$ mit $\varepsilon<\min(r_1, d)$ und $d+k\,\varepsilon<r$. Sei (H_1, P_1) die $(s+1, k, n)$-Hartogsfigur

$$H_1 = H^{s+1}\left(\frac{z_1, \ \ldots, z_k \mid \varepsilon, \ d}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r_1', r'}\right), \qquad P_1 = P\left(\frac{z_1, \ \ldots, z_k \mid d}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r'}\right).$$

Dann ist $P_1 \subset P \subset G$ und

$$H_1 \subset \bigcup_{(\tau_1, \ldots, \tau_t) \in I_s} \mu^{-1}_{\tau_1, \ldots, \tau_t}(P_0) \subset G_0 .$$

Also folgt $P_1 \subset G_0$, und da $d<r$ beliebig war: $P \subset G_0$. Q.e.d.

Im folgenden werden nur die $(k-1, k, n)$-Hartogsfiguren gebraucht, die als $(k, n)^*$-*Hartogsfiguren* bezeichnet werden. Das Symbol H^{k-1} wird durch H ersetzt. Es soll noch erläutert werden, warum man diese Figuren bei Induktionsbeweisen mit besonderem Vorteil verwenden kann.

Im Falle $k=1$ stimmen die (k, n)- und $(k, n)^*$-Hartogsfiguren überein. *F*ür $k \geqq 2$ sei

$$H^0 = H^0\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r_1', r'}\right), \qquad H = H\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r_1', r'}\right) \quad \text{und} \quad P = P\left(\frac{k \mid r}{n \mid r'}\right).$$

Es ist dann H^0 echt enthalten in H. Weiter sei j eine natürliche Zahl mit $1 \leqq j \leqq k$ und $z_j^{(1)} \in \mathbb{C}$ mit $|z_j^{(1)}|<r$. Die Mengen

$$H(z_j^{(1)}) := H \cap \{z_j = z_j^{(1)}\}, \qquad P(z_j^{(1)}) = P \cap \{z_j = z_j^{(1)}\}$$

sollen aufgefaßt werden als Gebiete im $(n-1)$-dimensionalen Zahlenraum der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$. In demselben Raum sei (H^j, P^j) die $(k-1, n-1)^*$-Hartogsfigur:

$$H^j = H\left(\frac{z_1, \ \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_k \mid r_1, r}{z_{k+1}, \quad \ldots, \quad z_n \mid r_1', r'}\right),$$

$$P^j = P\left(\frac{z_1, \ \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_k \mid r}{z_{k+1}, \quad \ldots, \quad z_n \mid r'}\right).$$

Dann ist $P(z_j^{(1)}) = P^j$ und

$$H(z_j^{(1)}) = \begin{cases} H^j, & r_1 \leqq |z_j^{(1)}| < r \\ P^j, & |z_j^{(1)}| < r_1. \end{cases}$$

Jeder Schnitt von H mit einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene $\{z_j = z_j^{(1)}\}$, $|z_j^{(1)}|<r$, enthält also wieder eine $(k-1, n-1)$-Hartogsfigur, was bei den (k, n)-Hartogsfiguren nicht richtig ist.

Eine ähnliche Aussage gilt auch im Falle $1 \leqq k \leqq n-2$. Sei (H, P) eine $(k, n)^*$-Hartogsfigur, j eine natürliche Zahl mit $k+1 \leqq j \leqq n$ und $z_j^{(1)} \in \mathbb{C}$ mit $|z_j^{(1)}| < r'$. Die Mengen $H(z_j^{(1)})$ und $P(z_j^{(1)})$ seien wie oben erklärt. Es sei (H_1^j, P_1^j) die $(k, n-1)^*$-Hartogsfigur

$$H_1^j = H\left(\frac{z_1, \quad \ldots, \quad z_k \mid r_1, r}{z_{k+1}, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n \mid r_1', r'}\right),$$

$$P_1^j = P\left(\frac{z_1, \quad \ldots, \quad z_k \mid r}{z_{k+1}, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n \mid r'}\right).$$

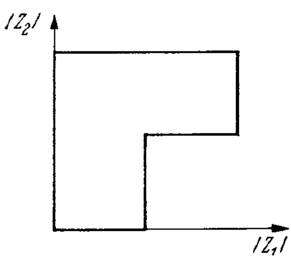

Fig. 1. $(k, n) = (1,2)$

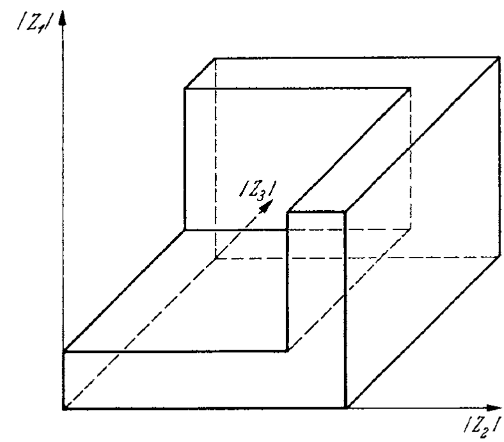

Fig. 2. $(k, n) = (1,3)$

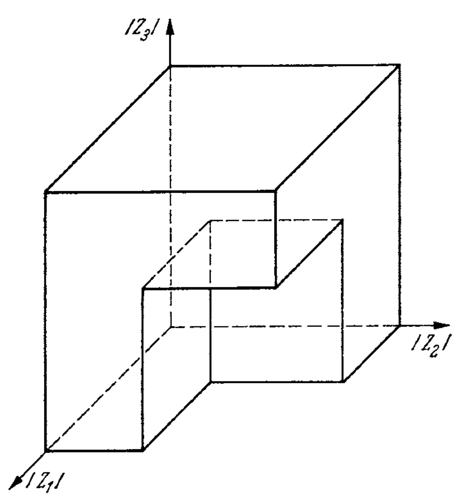

Fig. 3. $(k, n) = (2,3)$

Dann ist $P(z_j^{(1)}) = P_1^j$ und

$$H(z_j^{(1)}) = \begin{cases} H_1^j, & |z_j^{(1)}| \leqq r_1' \\ P_1^j, & r_1' < |z_j^{(1)}| < r'. \end{cases}$$

Noch allgemeiner gilt: Ist (H, P) eine $(k, n)^*$-Hartogsfigur, $1 \leqq j \leqq k$, $k+1 \leqq l \leqq n$, E eine zur (z_j, z_l)-Ebene parallele 2-dimensionale Ebene und $H' = H \cap E$, $P' = P \cap E$. Dann ist entweder P' leer oder ein 2-dimensionaler Polyzylinder, und im zweiten Falle ist entweder $H' = P'$ oder (H', P') eine $(1, 2)$-Hartogsfigur.

Eine Skizze von

$$H = H\left(\frac{k \mid r_1, r}{n \mid r_1', r'}\right)$$

findet man für die Fälle $(k, n) = (1, 2)$, $(1, 3)$ und $(2, 3)$ in den Fig. 1–3.

§ 3. Verallgemeinerungen der Sätze von Oka

Sei G ein Gebiet im n-dimensionalen Zahlenraum der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_n$, sei k eine natürliche Zahl mit $1 \leqq k \leqq n-1$, J eine beliebige Indexmenge, $\{A_j^k : j \in J\}$ eine Familie rein-k-dimensionaler analytischer Mengen in G und $\{c_j : j \in J\}$ eine Familie nicht-negativer reeller Zahlen. Ein Punkt $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ aus G heiße von *erster Art*, wenn es eine Umgebung $U = U(z^{(0)})$ und eine positive reelle Konstante $K = K(U)$ gibt, so daß für alle $j \in J$ gilt:

$$F(A_j^k, U) \leqq K \cdot c_j.$$

Diese Definition ist im Falle $(k, n) = (1, 2)$ bis auf unwesentliche Details die gleiche wie bei Oka (s. [7], S. 11). Die Gesamtheit der Punkte erster Art werde mit $G_0 = G_0(A_j^k, c_j)_{j \in J}$ bezeichnet. Dann gilt das

Theorem. *Die (offene) Menge $G_0 = G_0(A_j^k, c_j)_{j \in J}$ der Punkte erster Art ist k-pseudokonvex in G.*

Grundlegend für den Beweis des Theorems ist ein Analogon zu Okas Lemma aus der Arbeit [7]:

Lemma. *Sei* $1 \leqq k \leqq n-1$, (H, P) *mit*

$$H = H\left(\frac{z_1, \ldots, z_k \mid r_1, r}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r_1', r'}\right), \quad P = P\left(\frac{z_1, \ldots, z_k \mid r}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r'}\right),$$

$0 < r_1 < r$, $0 < r_1' < r'$, *eine* $(k, n)^*$-*Hartogsfigur, und*

$$P_0 = P\left(\frac{z_1, \ldots, z_k \mid r_0}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r_0'}\right)$$

liege relativ-kompakt in P (d.h.: $0<r_0<r$, $0<r'_0<r'$). Dann gibt es eine positive reelle Konstante

$$K=K(H,P,P_0)=K(k,n;r,r_1,r_0,r',r'_1,r'_0)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Ist A^k eine rein-k-dimensionale analytische Menge in P und existiert $F(A^k, H)$, so ist

$$F(A^k,P_0)\leqq K\cdot F(A^k,H).$$

Der Beweis dafür, daß das Theorem aus dem Lemma folgt, ist der gleiche wie bei OKA in [7]: Sei $G_0=G_0(A^k_j, c_j)_{j\in J}$ die oben definierte Teilmenge des Gebietes G im $\mathbb{C}^n$, dann ist G_0 offensichtlich eine offene Menge. Sei weiter (H, P) mit

$$H=H_{z^{(0)}}\left(\frac{k\mid r_1,r}{n\mid r'_1,r'}\right),\qquad P=P_{z^{(0)}}\left(\frac{k\mid r}{n\mid r'}\right)$$

und $0<r_1<r$, $0<r'_1<r'$ eine $(k,n)^*$-Hartogsfigur, und es gelte $H\subset G_0$, $P\subset G$. Sei ohne Einschränkung

$$z^{(0)}=(z^{(0)}_1,\dots,z^{(0)}_n)=(0,\dots,0)\in\mathbb{C}^n$$

und

$$z^{(1)}=(z^{(1)}_1,\dots,z^{(1)}_n)\in P.$$

Dann gibt es positive reelle Zahlen r_2, r_3, r_0 und r'_2, r'_3, r'_0 mit den Eigenschaften:

$$0<r_2<r_1<r_0<r_3<r,\qquad 0<r'_1<r'_2<r'_0<r'_3<r',$$

$$\max_{j=1,\dots,k}|z^{(1)}_j|<r_0\quad\text{und}\quad\max_{j=k+1,\dots,n}|z^{(1)}_j|<r'_0.$$

Sei

$$H_1=H\left(\frac{k\mid r_2,r_3}{n\mid r'_2,r'_3}\right),\qquad P_1=P\left(\frac{k\mid r_3}{n\mid r'_3}\right)\quad\text{und}\quad P_0=P\left(\frac{k\mid r_0}{n\mid r'_0}\right).$$

Dann ist (H_1, P_1) eine $(k,n)^*$-Hartogsfigur, und es gilt $H_1\Subset H\subset G_0$, $z^{(1)}\in P_0\Subset P\subset G$. Zu jedem $w=(w_1,\dots,w_n)\in\overline{H}_1$ gibt es also eine Umgebung $U=U(w)\subset G_0$ und eine Konstante $K=K(U)$, so daß die Ungleichung

$$F(A^k_j,U)\leqq K(U)\cdot c_j$$

für alle $j\in J$ erfüllt ist. Da $\overline{H}_1$ kompakt ist, kann man endlich viele Punkte $w^{(1)},\dots,w^{(t)}$ finden mit

$$\overline{H}_1\subset\bigcup_{\tau=1}^{t}U_\tau,\qquad U_\tau=U(w^{(\tau)}).$$

Sei $K=K(H_1, P_1, P_0)$ die nach dem Lemma existierende Konstante, sei

$$K^* := \sum_{\tau=1}^{t} K(U_\tau) \quad \text{und} \quad K_1 := K \cdot K^*.$$

Dann ergibt sich für alle $j \in J$:

$$F(A_j^k, P_0) \leqq K \cdot F(A_j^k, H_1) \leqq K \cdot \sum_{\tau=1}^{t} F(A_j^k, U_\tau) \leqq K \cdot \sum_{\tau=1}^{t} K(U_\tau) \cdot c_j$$
$$= K \cdot K^* \cdot c_j = K_1 \cdot c_j.$$

Also folgt $z^{(1)} \in G_0$, und da $z^{(1)} \in P$ beliebig war, ist $P \subset G_0$. Somit ist die Eigenschaft $(\mathrm{i})_{k-1,k}$ für k-pseudokonvexe Gebiete nachgewiesen.

Aus Satz 4 schließt man unmittelbar, daß die Definition von G_0 invariant ist gegenüber biholomorphen Transformationen. G_0 besitzt also auch die Eigenschaft $(\mathrm{ii})_{k-1,k}$.

Man kann sogar noch mehr beweisen:

Hilfssatz 1. *Die Aussagen des Theorems und des Lemmas sind bei gleichem k und n äquivalent.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß das Theorem das Lemma impliziert. Seien H, P, P_0 wie im Lemma gegeben, sei $\mathscr{F}$ die Familie der rein-k-dimensionalen analytischen Mengen in P, deren Flächeninhalt in H existiert, und sei $c_A := F(A, H)$, $A \in \mathscr{F}$. Man bilde die Menge $G_0 = G_0(A, c_A)_{A \in \mathscr{F}}$. Wegen der Aussage des Theorems ist G_0 k-pseudokonvex in P, und da offensichtlich H in G_0 enthalten ist, ist $G_0 = P$. Das heißt also: Für alle $z \in P$ gibt es eine Umgebung $U = U(z) \subset P$ und eine Konstante $K = K(U)$ mit der Eigenschaft:

$$F(A, U) \leqq K(U) \cdot c_A = K(U) \cdot F(A, H)$$

für alle $A \in \mathscr{F}$. Da P_0 relativ-kompakt in P liegt, kann man P_0 mit endlich vielen solchen Umgebungen $U_1, \ldots, U_t$ überdecken. Es folgt für alle $A \in \mathscr{F}$ mit

$$K := \sum_{\tau=1}^{t} K(U_\tau) = K(H, P, P_0):$$

$$F(A, P_0) \leqq K \cdot F(A, H).$$

Q.e.d.

Zum Beweis des Lemmas sind drei Schritte nötig. Der erste beruht auf einer geometrischen Idee von OKA, die auf rein-1-dimensionale analytische Mengen im $\mathbb{C}^n$ übertragen wird.

Hilfssatz 2. *Sei $k=1$ und (H, P, P_0) wie im Lemma gegeben. Dann gibt es eine positive reelle Konstante*

$$K_0 = K_0(r, r_1, r_0, r', r_1', r_0')$$

mit der folgenden Eigenschaft: Ist A eine rein-1-dimensionale analytische Menge in P und existiert $F(A, H)$, so ist der Flächeninhalt $F_1(A, P_0)$ der Projektion von $A \cap P_0$ in die z_1-Ebene höchstens gleich $K_0 \cdot F(A, H)$.

Beweis. Seien ρ_0 und ρ' positive Zahlen mit $\rho_0 < r$ und $\rho' < r'$. Später wird ρ_0 festgehalten, ρ' bleibt variabel. Es sei

$$A(\rho_0, \rho') := A \cap P\left(\frac{1}{n}\,\middle|\,\frac{\rho_0}{\rho'}\right),$$

$$\partial A_1(\rho') := A \cap \{|z_1| = \rho_0, \max_{j=2,\dots,n} |z_j| \leqq \rho'\},$$

$$\partial A_j(\rho') := A \cap \overline{C_j(\rho')}, \qquad j = 2, \dots, n,$$

$$C_j(\rho') := \{|z_1| < \rho_0, \max_{\substack{l=2,\dots,n \\ l \neq j}} |z_l| < |z_j| = \rho'\}, \qquad j = 2, \dots, n,$$

$$\partial A(\rho') := A \cap \partial P\left(\frac{1}{n}\,\middle|\,\frac{\rho_0}{\rho'}\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \partial A_j(\rho').$$

Sei weiter $\delta' = r' - \max(r_0', r_1')$. Da die Menge der singulären Punkte von A höchstens nulldimensional ist, kann man einen Radius ρ_0 mit $r_0 < \rho_0 < r$ und eine offene Menge I in $\{r' - \frac{3}{4}\delta' < \rho' < r' - \frac{1}{4}\delta'\}$ vom Maße $\frac{1}{4}\delta'$ finden, so daß $\partial A(\rho')$ für alle $\rho' \in I$ in der Mannigfaltigkeit $M(A)$ der gewöhnlichen Punkte von A enthalten ist.

A soll vorerst noch die zusätzliche Bedingung erfüllen, daß jede Menge $A \cap \{z_j = z_j^{(0)}\}$, $j = 1, \dots, n$, höchstens nulldimensional ist. Es sei q_j die Projektion von A in die z_j-Ebene. Dann gibt es eine höchstens nulldimensionale analytische Menge $N \subset A$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Punkt $z^{(0)} \in M(A) - N$ gibt es eine Umgebung $U = U(z^{(0)}) \subset M(A) - N$, so daß für jedes $j = 1, \dots, n$ $q_j | U$ eine topologische Abbildung von U auf ein Gebiet V_j der z_j-Ebene ist und alle Abbildungen $(q_1|U) \circ (q_j|U)^{-1}$ holomorph auf V_j sind. Durch

$$f_j | U := \left(\frac{d}{d z_j}\left((q_1|U) \circ (q_j|U)^{-1}\right)\right) \circ (q_j|U), \qquad j = 2, \dots, n$$

werden dann in eindeutiger Weise stetige Funktionen $f_2, \dots, f_n$ auf $M(A) - N$ definiert, und es gilt dort:

$$d\sigma_1 \circ e_A = |f_j|^2 \cdot d\sigma_j \circ e_A.$$

Für reelles a ist stets $a \leqq \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ wegen $(a-1)^2 \geqq 0$. Also folgt:

$$|f_j| \cdot d\sigma_j \circ e_A \leqq \tfrac{1}{2}\left(|f_j|^2 + 1\right) \cdot d\sigma_j \circ e_A$$
$$= \tfrac{1}{2}(d\sigma_1 + d\sigma_j) \circ e_A.$$

Schließlich werde noch definiert:

$$D_j := \bigcup_{\rho' \in I} C_j(\rho'), \qquad j=2, \ldots, n.$$

Die D_j sind paarweise disjunkte Bereiche in H. Da die Integrale

$$\int_{A \cap D_j} (d\sigma_1 + d\sigma_j) \circ e_A$$

existieren und die $N \cap D_j$ endliche Punktmengen sind, existieren wegen der obigen Ungleichung auch die in der folgenden Zeile links stehenden Integrale, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n} \int_{A \cap D_j} |f_j| \, d\sigma_j &\leqq \tfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \int_{A \cap D_j} (d\sigma_1 + d\sigma_j) \\ &\leqq \tfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \int_{A \cap D_j} \varphi \leqq \tfrac{1}{2} \int_{A \cap H} \varphi = \tfrac{1}{2} F(A, H). \end{aligned}$$

$\partial A(\rho')$ besteht aus endlich vielen stückweise analytischen geschlossenen Kurven. Die Teilkurven $\partial A_j(\rho')$, $j=2, \ldots, n$, werden so orientiert, daß die Projektion $q_j(\partial A_j(\rho'))$ den gleichen Umlaufssinn besitzt wie der positiv orientierte Kreisrand $\{|z_j| = \rho'\}$. Führt man dann vermöge

$$z_j = \rho' \cdot e^{i \vartheta_j}$$

Polarkoordinaten ein, so ist $d\sigma_j = \rho' d\rho' \wedge d\vartheta_j$, und mit dem zu Satz 3 analogen Satz von Fubini für reelle Mannigfaltigkeiten folgt:

$$\int_I \left(\sum_{j=2}^{n} \int_{\partial A_j(\rho')} |f_j| \, d\vartheta_j \right) \rho' \, d\rho' = \sum_{j=2}^{n} \int_{A \cap D_j} |f_j| \, d\sigma_j.$$

I hat nach Voraussetzung das Maß $\frac{1}{4}\delta'$. Infolgedessen gibt es einen Radius $\rho_0' \in I$ mit

$$\sum_{j=2}^{n} \int_{\partial A_j(\rho_0')} \rho_0' \cdot |f_j| \, d\vartheta_j \leqq K_2' \cdot F(A, H), \qquad K_2' := \frac{2}{\delta'}.$$

Sei nun

$$B_j := q_1(\partial A_j(\rho_0')) \quad \text{und} \quad B = \sum_{j=2}^{n} B_j.$$

B ist eine endliche Summe von orientierten, stückweise analytischen Kurven in $P_1(\rho_0) := \{|z_1| < \rho_0\}$, die geschlossen sind oder diese Kreisscheibe von Rand zu Rand durchziehen. Sie sind mit Vielfachheit zu zählen gemäß der Anzahl der Punkte aus

$$\bigcup_{j=2}^{n} \partial A_j(\rho_0'),$$

die über einem Punkt $z_1 \in P_1(\rho_0)$ liegen. Für das Längenelement dl_j von B_j erhält man:

$$d l_j \circ q_1 = \rho_0' \cdot |f_j| \cdot d\vartheta_j.$$

Also existieren die Längen $L(B_j)$ der Kurven B_j, und für die Gesamtlänge $L(B)$ von B ergibt sich:

$$\begin{aligned} L(B) &= \sum_{j=2}^{n} L(B_j) = \sum_{j=2}^{n} \int_{q_1(\partial A_j(\rho_0'))} d l_j \\ &= \sum_{j=2}^{n} \int_{\partial A_j(\rho_0')} \rho_0' \cdot |f_j| \, d\vartheta_j \leqq K_2' \cdot F(A, H). \end{aligned}$$

Es sei nun für $z_1 \in P_1(\rho_0)$ $b(z_1)$ die Anzahl der Punkte von $A(\rho_0, \rho_0')$ über z_1. Nach den oben an A gestellten Forderungen ist die Funktion $b(z_1)$ auf ganz $P_1(\rho_0)$ erklärt. Es sei $z_1 = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ und $P_1(\rho_1, \rho_2) = \{z_1 : \rho_1 < |z_1| < \rho_2\}$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2} r_1}^{r_1} d\rho \int_0^{2\pi} b(\rho e^{i\vartheta}) \rho \, d\vartheta &= \int_{P_1(\frac{1}{2} r_1, r_1)} b(z_1) \, d\sigma_1 \\ &\leqq \int_{\{|z_1| < r_1\}} b(z_1) \, d\sigma_1 = F_1\left(A, P\left(\frac{1}{n} \,\middle|\, \frac{r_1}{\rho_0'}\right)\right) \\ &\leqq F_1(A, H) \leqq F(A, H), \end{aligned}$$

und folglich existiert ein Radius ρ_1 mit $\frac{1}{2} r_1 < \rho_1 < r_1$ und

$$\int_0^{2\pi} b(\rho_1 \cdot e^{i\vartheta}) \cdot \rho_1 \, d\vartheta \leqq K_3' \cdot F(A, H), \qquad K_3' := \frac{2}{r_1}.$$

Man darf annehmen, daß $r_1 < r_0 (< r)$ ist; denn anderenfalls erfüllt die Konstante $K_1 = 1$ die Behauptung des Hilfssatzes. Sei dann $z_1 = \rho e^{i\vartheta} \in P_1(\rho_1, r_0)$ und $S(z_1)$ der Strahl vom Ursprung der z_1-Ebene durch z_1. Ein Schnittpunkt von $S(z_1)$ mit B heiße positiv (bzw. negativ), wenn $S(z_1)$ die (orientierte) Kurve B in diesem Punkt von rechts nach links (bzw. umgekehrt) durchdringt. Sei $z_1^{(1)} = \rho_1 e^{i\vartheta}$ der Schnittpunkt von $S(z_1)$ mit dem Kreisrand $\{|z_1| = \rho_1\}$, $s_+(z_1)$ die Anzahl der positiven Schnittpunkte von $S(z_1)$ mit B zwischen $z_1^{(1)}$ (einschließlich) und z_1 (ausschließlich) und $s_-(z_1)$ die Anzahl der negativen Schnittpunkte zwischen $z_1^{(1)}$ (ausschließlich) und z_1 (einschließlich). Dann ist

$$b(z_1) = b(\rho_1 e^{i\vartheta}) + \big(s_+(z_1) - s_-(z_1)\big)$$

und

$$\int\limits_{P_1(\rho_1, r_0)} b(z_1)\, d\sigma_1 = \int\limits_{P_1(\rho_1, r_0)} \left(b(\rho_1 e^{i\vartheta}) + s_+(z_1) - s_-(z_1)\right) \rho\, d\rho \wedge d\vartheta,$$

$$z_1 = \rho \cdot e^{i\vartheta}.$$

Nach OKA (s. [7], S. 10 (Problème)) nimmt das rechts stehende Integral sein Maximum an, wenn sich die Kurve B auf dem Kreisrand $\{|z_1| = \rho_1\}$ befindet und entgegengesetzt zum positiven Umlaufssinn dieses Kreisrandes orientiert ist. Damit ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\int\limits_{P_1(\rho_1, r_0)} b(z_1)\, d\sigma_1 \leqq \int\limits_{\rho_1}^{r_0} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(b(\rho_1 \cdot e^{i\vartheta}) + \frac{L(B)}{2\pi \rho_1} \right) d\vartheta \right) \rho\, d\rho$$

$$\leqq \left(\frac{K_3'}{\rho_1} + \frac{K_2'}{\rho_1} \right) \cdot \frac{r_0^2 - \rho_1^2}{2} \cdot F(A, H).$$

Sei schließlich

$$K_1' := 1 + \frac{r_0^2}{r_1} (K_2' + K_3').$$

K_1' hängt nur von den gegebenen Radien ab, und es gilt:

$$F_1(A, P_0) \leqq F_1\left(A, P\left(\frac{1}{n} \,\middle|\, \frac{r_0}{\rho_0'}\right)\right) = \int\limits_{\{|z_1| < r_0\}} b(z_1)\, d\sigma_1$$

$$\leqq \int\limits_{\{|z_1| < r_1\}} b(z_1)\, d\sigma_1 + \int\limits_{P_1(\rho_1, r_0)} b(z_1)\, d\sigma_1$$

$$\leqq F_1(A, H) + \frac{r_0^2}{r_1} (K_2' + K_3') F(A, H)$$

$$\leqq K_1' \cdot F(A, H).$$

Es muß noch gezeigt werden, daß man die einschränkenden Bedingungen an A fallen lassen kann. Sei zunächst A eine rein-1-dimensionale irreduzible analytische Menge in P, und es existiere $F(A, H)$. Ist A in keiner $(n-1)$-dimensionalen Ebene $\{z_j = z_j^{(0)}\}$ enthalten, so ist der Durchschnitt von A mit einer solchen Ebene höchstens nulldimensional, und nach dem oben Bewiesenen ist dann

$$F_1(A, P_0) \leqq K_1' \cdot F(A, H).$$

Sei also A in einer Ebene $\{z_j = z_j^{(0)}\}$ enthalten. Man kann $2 \leqq j \leqq n$ annehmen, denn für $j = 1$ ist $F_1(A, P_0) = 0$. Sei

$$K_0 := \max\left(K_1', \frac{r_0^2}{r_1^2}\right).$$

Ist $n=2$, so ist notwendig $A=\{z_2=z_2^{(0)}\}\cap P$, und offenbar gilt:

$$F_1(A,P_0)\leqq\frac{r_0^2}{r_1^2}\cdot F(A,H).$$

Also ist für $n=2$ und irreduzibles A stets $F_1(A,P_0)\leqq K_0\cdot F(A,H)$.

Sei diese Aussage für $n-1\geqq 2$ schon bewiesen. Ist dann $A\subset\{z_j=z_j^{(0)}\}$, $2\leqq j\leqq n$, so kann man nach der Bemerkung auf S. 318 A auffassen als rein-1-dimensionale irreduzible analytische Menge in einer $(1,n-1)^*$-Hartogsfigur, die durch die gleichen Radien wie (H,P) definiert wird. Folglich ist auch

$$F_1(A,P_0)\leqq K_0\cdot F(A,H).$$

Diese Ungleichung gilt also für beliebige rein-1-dimensionale irreduzible analytische Mengen in $P\subset\mathbb{C}^n$.

Sei schließlich A eine beliebige rein-1-dimensionale analytische Menge in P und

$$A=\bigcup_{\sigma=1}^{\infty}A_\sigma$$

die Zerlegung von A in irreduzible Komponenten A_σ. Von diesen haben nur endlich viele (ohne Einschränkung $A_1,\ldots,A_s$) einen nicht-leeren Durchschnitt mit P_0. Dann ergibt sich

$$F_1(A,P_0)=\sum_{\sigma=1}^{s}F_1(A_\sigma,P_0)\leqq K_0\sum_{\sigma=1}^{s}F(A_\sigma,H)\leqq K_0\cdot F(A,H).$$

Q.e.d.

Beim nächsten Schritt werden die Eigenschaften der $(k,n)^*$-Hartogsfiguren und Satz 3 verwendet.

Hilfssatz 3. *Sei $1\leqq k\leqq n-1$, und seien die Figuren H, P und P_0 wie im Lemma gegeben. Sei $K_0=K_0(r,r_1,r_0,r',r_1',r_0')$ die positive reelle Konstante aus Hilfssatz 2. Dann gilt: Ist A eine rein-k-dimensionale analytische Menge in P und existiert $F(A,H)$, so ist*

$$F_{1,\ldots,k}(A,P_0)\leqq K_0\cdot F(A,H),$$

wobei $F_{1,\ldots,k}(A,P_0)$ der Flächeninhalt der Projektion von $A\cap P_0$ in die $(z_1,\ldots,z_k)$-Ebene ist.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach k geführt. Für $k=1$ und beliebiges $n\geqq 2$ wurde die obige Aussage schon im Hilfssatz 2 verifiziert. Sei die Aussage für $k-1\geqq 1$ und beliebiges $n>k-1$ schon bewiesen; es sei (H,P) eine $(k,n)^*$-Hartogsfigur $(2\leqq k\leqq n-1)$ und $P_0\Subset P$. Es sei weiter (H^*,P^*) die $(k-1,n-1)^*$-Hartogsfigur

$$H^*:=H\left(\frac{z_2,\ \ldots,z_k}{z_{k+1},\ldots,z_n}\,\middle|\,\frac{r_1,r}{r_1',r'}\right),\qquad P^*:=P\left(\frac{z_2,\ \ldots,z_k}{z_{k+1},\ldots,z_n}\,\middle|\,\frac{r}{r'}\right)$$

und

$$P_0^* := P\left(\frac{z_2, \ldots, z_k \mid r_0}{z_{k+1}, \ldots, z_n \mid r_0'}\right).$$

Sei schließlich noch $P_1 = \{|z_1| < r_0\}$, so folgt:

$$P_1 \times H^* \subset H, \qquad P_1 \times P_0^* = P_0.$$

Da die folgenden Integrale

$$\int_{A \cap P_0} d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k \quad \text{und} \quad \int_{A \cap (P_1 \times H^*)} d\sigma_1 \wedge d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k}$$

$$(2 \leqq j_2 < \cdots < j_k \leqq n)$$

alle existieren, gibt es wegen Satz 3 Nullmengen N_1, $N_{j_2, \ldots, j_k}$ in P_1, so daß für alle

$$z_1^{(0)} \notin N := N_1 \cup \bigcup_{2 \leqq j_2 < \cdots < j_k \leqq n} N_{j_2, \ldots, j_k}$$

$A(z_1^{(0)})$ eine rein-$(k-1)$-dimensionale analytische Menge in P^* ist und daß gilt:

$$\int_{A \cap P_0} d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k = \int_{P_1 - N} d\sigma_1 \cdot \Big(\int_{A(z_1) \cap P_0^*} d\sigma_2 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k \Big),$$

$$\int_{A \cap (P_1 \times H^*)} d\sigma_1 \wedge d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} = \int_{P_1 - N} d\sigma_1 \cdot \Big(\int_{A(z_1) \cap H^*} d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} \Big).$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung für alle $z_1 \in P_1 - N$:

$$\int_{A(z_1) \cap P_0^*} d\sigma_2 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k \leqq K_0 \cdot \sum_{2 \leqq j_2 < \cdots < j_k \leqq n} \int_{A(z_1) \cap H^*} d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k},$$

und folglich ist:

$$\begin{aligned}
F_{1, \ldots, k}(A, P_0) &= \int_{A \cap P_0} d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k \\
&= \int_{P_1 - N} d\sigma_1 \Big(\int_{A(z_1) \cap P_0^*} d\sigma_2 \wedge \cdots \wedge d\sigma_k \Big) \\
&\leqq K_0 \cdot \sum_{2 \leqq j_2 < \cdots < j_k \leqq n} \int_{P_1 - N} d\sigma_1 \Big(\int_{A(z_1) \cap H^*} d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} \Big) \\
&= K_0 \cdot \sum_{2 \leqq j_2 < \cdots < j_k \leqq n} \int_{A \cap (P_1 \times H^*)} d\sigma_1 \wedge d\sigma_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} \\
&\leqq K_0 \cdot \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_k \leqq n} \int_{A \cap H} d\sigma_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} \\
&= K_0 \cdot F(A, H).
\end{aligned}$$

Q. e. d.

Hilfssatz 4. *Sei* $1 \leqq k \leqq n-1$, $\max(2k-n, 0) \leqq s \leqq k$, (H, P) *eine* $(k, n)^*$-*Hartogsfigur, und* P_0 *liege relativ-kompakt in* P. *Dann gibt es eine positive reelle Konstante*

$$K_{k-s} = K_{k-s}(r, r_1, r_0, r', r'_1, r'_0)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Ist A *eine rein-k-dimensionale analytische Menge in* P *und existiert* $F(A, H)$, *so gilt für jedes k-tupel* $(j_1, \ldots, j_k)$ *mit*

$$1 \leqq j_1 < \cdots < j_s \leqq k, \qquad k+1 \leqq j_{s+1} < \cdots < j_k \leqq n:$$

$$F_{j_1, \ldots, j_k}(A, P_0) \leqq K_{k-s} \cdot F(A, H).$$

Der Beweis ist bei festem k und n induktiv von $s+1$ nach s. Sei $s=k$. Dann ist notwendig $(j_1, \ldots, j_k) = (1, \ldots, k)$, und die Konstante K_0 aus dem vorigen Hilfssatz erfüllt die Behauptung. Sei also die obige Behauptung schon für $s+1$ mit $\max(2k-n, 0) < s+1 \leqq k$ bewiesen, und sei $(j_1, \ldots, j_k)$ mit $1 \leqq j_1 < \cdots < j_s \leqq k$, $k+1 \leqq j_{s+1} < \cdots < j_k \leqq n$ vorgegeben. Man kann ohne Einschränkung annehmen:

$$(j_1, \ldots, j_s) = (1, \ldots, s), \qquad (j_{s+1}, \ldots, j_k) = (k+1, \ldots, 2k-s).$$

Es ist $k \notin \{j_1, \ldots, j_s\}$ und $k+1 \in \{j_{s+1}, \ldots, j_k\}$.

Sei

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Die Abbildung $\tau^+ = (\tau_1^+, \ldots, \tau_n^+)$ des Raumes der Variablen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ in den Raum der Variablen $z^+ = (z_1^+, \ldots, z_n^+)$ werde definiert durch:

$$\begin{aligned} z_j^+ &= \tau_j^+(z) := z_j, \qquad j = 1, \ldots, n;\ j \neq k, k+1. \\ z_k^+ &= \tau_k^+(z) := (\cos\varepsilon)\, z_k + (\sin\varepsilon)\, z_{k+1}, \\ z_{k+1}^+ &= \tau_{k+1}^+(z) := -(\sin\varepsilon)\, z_k + (\cos\varepsilon)\, z_{k+1}. \end{aligned}$$

Ist

$$d\sigma_j^+ = \frac{i}{2}\, dz_j^+ \wedge d\overline{z_j^+} \quad \text{und} \quad d\sigma^+ = \sum_{j=1}^{n} d\sigma_j^+,$$

so ist $d\sigma^+ \circ \tau^+ = d\sigma$. τ^+ ist also eine lineare, isometrische Transformation.

Sei weiter $z^- = (z_1^-, \ldots, z_n^-) = \tau^-(z)$, wobei τ^- die Abbildung ist, die man erhält, wenn man in der Definition von τ^+ ε durch $-\varepsilon$ ersetzt. Es folgt dann:

$$d\sigma_k^+ \circ \tau^+ + d\sigma_k^- \circ \tau^- = 2(\cos^2\varepsilon)\, d\sigma_k + 2(\sin^2\varepsilon)\, d\sigma_{k+1},$$

und daraus ergibt sich:

$$d\sigma_{k+1} \leqq K_\varepsilon(d\sigma_k^+ \circ \tau^+ + d\sigma_k^- \circ \tau^-), \qquad K_\varepsilon = \frac{1}{2\sin^2\varepsilon}. \tag{1}$$

Es existiert nun ein $\varepsilon = \varepsilon(r, r_1, r_0, r', r_1', r_0') > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt Radien $\rho, \rho_1, \rho_0, \rho', \rho_1', \rho_0'$, die nur von ε abhängen, und Gebiete:

$$H^+ := H\left(\frac{z_1^+, \ldots, z_k^+ \mid \rho_1, \rho}{z_{k+1}^+, \ldots, z_n^+ \mid \rho_1', \rho'}\right),$$

$$P^+ := P\left(\frac{z_1^+, \ldots, z_k^+ \mid \rho}{z_{k+1}^+, \ldots, z_n^+ \mid \rho'}\right),$$

$$P_0^+ := P\left(\frac{z_1^+, \ldots, z_k^+ \mid \rho_0}{z_{k+1}^+, \ldots, z_n^+ \mid \rho_0'}\right),$$

so daß mit $\tau^+ = \tau_\varepsilon^+$ die folgenden Enthaltenseinsrelationen erfüllt sind:

$$H^+ \subset \tau^+(H), \qquad P^+ \subset \tau^+(P), \qquad P_0^+ \supset \tau^+(P_0).$$

Die entsprechenden Aussagen gelten, wenn man das „+"-Zeichen durch das „−"-Zeichen ersetzt.

Sei

$$\alpha^+ := d\sigma_1^+ \wedge \cdots \wedge d\sigma_s^+ \wedge d\sigma_k^+ \wedge d\sigma_{k+2}^+ \wedge \cdots \wedge d\sigma_{2k-s}^+$$

und α^- die entsprechende (k, k)-Form im Raum der Variablen $z_1^-, \ldots, z_n^-$. Für diese Formen ist nach Induktionsvoraussetzung schon alles bewiesen; d.h. es gibt eine Konstante

$$K' = K_{k-(s+1)}(\rho, \rho_1, \rho_0, \rho', \rho_1', \rho_0')$$

mit der Eigenschaft:

$$\int_{A^+ \cap P_0^+} \alpha^+ \leqq K' \cdot \int_{A^+ \cap H^+} \varphi^{k^+},$$

wobei A^+ eine beliebige rein-k-dimensionale analytische Menge in P^+ ist, für die der Flächeninhalt

$$\int_{A^+ \cap H^+} \varphi^{k^+}$$

von $A^+ \cap H^+$ existiert. Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} d\sigma_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{j_k} &= d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_s \wedge d\sigma_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{2k-s} \\ &\leqq K_\varepsilon\big(d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_s \wedge (d\sigma_k^+ \circ \tau^+ + d\sigma_k^- \circ \tau^-) \wedge \\ &\qquad \wedge d\sigma_{k+2} \wedge \cdots \wedge d\sigma_{2k-s}\big) \\ &= K_\varepsilon(\alpha^+ \circ \tau^+ + \alpha^- \circ \tau^-). \end{aligned}$$

Sei schließlich $K_{k-s}:=2\cdot K_\varepsilon\cdot K'$. K_{k-s} hängt nur von den Radien $r, r_1, r_0, r', r'_1, r'_0$ ab, und es gilt mit $\mu^+=(\tau^+)^{-1}$, $\mu^-=(\tau^-)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
F_{j_1,\dots,j_k}(A,P_0) &= \int_{A\cap P_0} d\sigma_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\sigma_{j_k}\\
&\leqq K_\varepsilon\cdot\Big(\int_{A\cap P_0}\alpha^+\circ\tau^+ + \int_{A\cap P_0}\alpha^-\circ\tau^-\Big)\\
&= K_\varepsilon\cdot\Big(\int_{\tau^+(A)\cap\tau^+(P_0)}\alpha^+ + \int_{\tau^-(A)\cap\tau^-(P_0)}\alpha^-\Big)\\
&\leqq K_\varepsilon\cdot\Big(\int_{\tau^+(A)\cap P_0^+}\alpha^+ + \int_{\tau^-(A)\cap P_0^-}\alpha^-\Big)\\
&\leqq K_\varepsilon\cdot K'\Big(\int_{\tau^+(A)\cap H^+}\varphi^{k^+} + \int_{\tau^-(A)\cap H^-}\varphi^{k^-}\Big)\\
&= \tfrac{1}{2}K_{k-s}\cdot\Big(\int_{A\cap\mu^+(H^+)}\varphi^{k^+}\circ\tau^+ + \int_{A\cap\mu^-(H^-)}\varphi^{k^-}\circ\tau^-\Big)\\
&\leqq \tfrac{1}{2}K_{k-s}\cdot\Big(\int_{A\cap H}\varphi^k + \int_{A\cap H}\varphi^k\Big)\\
&= K_{k-s}\cdot F(A,H).
\end{aligned}$$

Q.e.d.

Damit ist aber auch das Lemma bewiesen. Wegen Satz 2 und Hilfssatz 4 ist nämlich

$$F(A,P_0)\leqq\Big(\sum_{s=\max(2k-n,\,0)}^{k} a^n_{k,s}\cdot K_{k-s}\Big)\cdot F(A,H),$$

wobei $a^n_{k,s}$ die Anzahl der k-tupel $(j_1,\dots,j_k)$ mit $1\leqq j_1<\cdots<j_s\leqq k$, $k+1\leqq j_{s+1}<\cdots<j_k\leqq n$ ist, also:

$$a^n_{k,s}=\binom{k}{s}\binom{n-k}{k-s}.$$

Die Konstante

$$\begin{aligned}
K=K(H,P,P_0)&=K(k,n;r,r_1,r_0,r',r'_1,r'_0)\\
&:=\sum_{s=\max(2k-n,\,0)}^{k} a^n_{k,s}\cdot K_{k-s}
\end{aligned}$$

erfüllt die Bedingungen des Lemmas. Wegen Hilfssatz 1 ist auch das Theorem bewiesen.

Umgekehrt kann man mit denselben Argumenten wie beim Beweis von Hilfssatz 1 aus dem Theorem folgern, daß die Aussage des Lemmas richtig bleibt, wenn man die $(k,n)^*$-Hartogsfigur (H,P) durch die entsprechende (k,n)-Hartogsfigur (H^0,P) und die Konstante $K=K(H,P,P_0)$ durch eine andere Konstante $K'=K'(H^0,P,P_0)$ ersetzt.

Literatur

[1] BISHOP, E.: Conditions for the analyticity of certain sets. Mich. Math. Jour. **11**, 289—304 (1964).

[2] FUJITA, O.: Sur les familles d'ensembles analytiques. J. Math. Soc. Japan **16**, 379—405 (1964).

[3] — Sur les suites de surfaces analytiques. J. Math. Kyoto Univ. **4**, 627—635 (1965).

[4] NISHINO, T.: Sur les familles de surfaces analytiques. J. Math. Kyoto Univ. **1**, 357—377 (1962).

[5] OKA, K.: Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. J. Sci. Hiroshima Univ. A **4**, 94—98 (1934).

[6] — Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. **27**, 97—155 (1953).

[7] — Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. X. Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes. Jap. J. Math. **32**, 1—12 (1962).

[8] RUTISHAUSER, H.: Über Folgen und Scharen von analytischen und meromorphen Funktionen mehrerer Variabeln, sowie von analytischen Abbildungen. Acta Math. **83**, 249—325 (1950).

[9] STOLL, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **57**, 116—154 (1952).

[10] — The growth of the area of a transcendental analytic set. I. and II. Math. Ann. **156**, 47—78, 144—170 (1964).

[11] — Normal families of non-negative divisors. Math. Z. **84**, 154—218 (1964).

[12] STOLZENBERG, G.: Volumes, limits, and extensions of analytic varieties. Lecture Notes in Mathematics 19. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

[13] TADOKORO, M.: Sur les ensembles pseudoconcaves généraux. J. Math. Soc. Japan **17**, 281—290 (1965).

Mathematisches Institut
der Universität Göttingen

(Eingegangen am 11. November 1966)