Seminar zur Topologie, Master **Wintersemester 2013/14**

Prof. Dr. B. Richter

Dieses Seminar baut auf den Vorlesungen *Algebraische Topologie I, II* auf. Die ersten Vorträge sind auch mit Wissen nur aus der Topologie 1 bestreitbar. Wir erarbeiten uns zunächst einige Grundlagen der Homotopietheorie, um uns dann mit Anwendungen auseinanderzusetzen. Wie approximiere ich einen Raum durch seine Homotopiegruppen? Welche Hindernisse gibt es für die Existenz stetiger Abbildungen?

Vorträge

(1) **Höhere Homotopiegruppen I** Definieren Sie $\pi_n(X, x_0)$, Wieso ist $\pi_n(X, x_0)$ abelsch für $n \geq 2$? Zeigen Sie, dass eine Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ immer einen Isomorphismus auf höheren Homotopiegruppen induziert. Stellen Sie die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen vor. [H, §4.1 bis Proposition 4.2]

(2) **Höhere Homotopiegruppen II** Definition relativer Homotopiegruppen $\pi_n(X, A, x_0)$ für $x_0 \in A \subset X$. Beweisen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots$$

gibt für jedes Raumpaar (X, A) und $x_0 \in A$. [H, pp.343–346]

(3) **Faserungen** Die Definition einer Faserung kennen Sie schon. Zeigen Sie, dass man Faserungen zurückziehen kann. Grenzen Sie Serre-Faserungen von Hurewicz-Faserungen ab. Zeigen Sie, dass die Homotopiehochhebungseigenschaft für $\mathbb{D}^n$ äquivalent ist zur HHE für $(\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n)$. Was ist der Schleifenraum, ΩX, eines Raumes X? Was ist die Schleifen-Wege-Faserung? Was sind die Homotopiegruppen eines Schleifenraumes? Erinnern Sie sich dazu an das Exponentialgesetz für Abbildungsräume und spezifizieren Sie das für $C((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) = C((\mathbb{S}^1 \wedge X, x_0), (Y, y_0))$. [H, pp. 375,395,]

(4) **Kofaserungen** Wie der Name andeutet, sind die Eigenschaften von Kofaserungen dual zu denen von Faserungen. Kofaserungen sind durch Homotopieausdehnungseigenschaften charakterisiert. [H, 4.H Anfang]

(5) **Lange exakte Sequenz zu einer Faserung** Zeigen Sie, dass eine Faserung $p\colon E \to B$ (mit wegzusammenhängendem B) zu einer langen exakten Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots$$

führt. Behandeln Sie Linsenräume (Überlagerung!) und die Hopf-Faserungen als Beispiele. [H, 4.41]

(6) **Assoziierte Faserung zu einer Abbildung** Jede beliebige stetige Abbildung kann zu einer Faserung abgeändert werden. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie, dass nicht viel passiert, wenn die Ausgangsabbildung schon eine Faserung war. [H, 4.64 mit Hintergrund]

(7) **Der Satz von Whitehead** Dieser wichtige Satz besagt, dass Abbildungen zwischen zusammenhängenden CW-Komplexen, die Isomorphismen auf den Homotopiegruppen induzieren, schon Homotopieäquivalenzen sind. [H, pp. 346–348]

(8) **Zellulärer Approximationssatz** Hat man eine beliebige stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen, so kann man sie durch eine zelluläre Abbildung ersetzen, die homotop ist zur ursprünglichen Abbildung [H, pp. 348-351]. Diese zelluläre Approximation ist zum einen ein häufig benutztes technisches Hilfsmittel, sie hat aber auch unmittelbare Konsequenzen, zum Beispiel, dass $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ trivial ist für $k < n$.

(9) **Darstellbarkeit von Kohomologietheorien I**

(10) **Darstellbarkeit von Kohomologietheorien II**

Mit Kohomologiegruppen zu rechnen ist oft einfach, weil man algebraische Hilfsmittel zur Verfügung hat. Oft muss man dafür dann allerdings Kettenhomotopien und dergleichen konstruieren, so dass es vorteilhaft ist, ein alternatives Modell zur Verfügung zu haben: Wiederholen Sie die axiomatische Definition einer Kohomologietheorie und zeigen Sie, dass ein Ω-Spektrum (das ist eine Folge von CW-Komplexen X_n mit einer schwachen Homotopieäquivalenz $X_n \to \Omega X_{n+1}$) eine Kohomologietheorie liefert, [H, pp.395–399]). Erläutern Sie uns umgekehrt, wie jede anständige Kohomologietheorie durch ein solches Ω-Spektrum darstellbar ist, [H, 4.E]. Das Beispiel der singulären Kohomologie behandeln wir dann in den folgenden beiden Vorträgen.

(11) **Postnikov-Türme I**

(12) **Postnikov-Türme II** Bei CW-Modellen topologischer Räume klebt man iterativ Zellen an, um den Raum zu modellieren. Postnikov-Türme approximieren Räume durch Eilenberg-MacLane Räume. Dies sind Räume, die nur eine einzige nicht-triviale Homotopiegruppe haben. Stellen Sie uns diese Räume vor, skizzieren Sie, wie man sie konstruiert, wie sie singuläre Kohomologie darstellen und wie man mit ihrer Hilfe den Postnikov-Turm eines Raumes definiert. [H, Example 4.17, pp. 410–415], [M, Chapter 22, §§2,4].

(13) **Hindernistheorie** Stellen Sie sich vor, dass Sie sich eine Abbildung $f\colon X \to Y$ wünschen und dass X ein CW-Komplex ist. Vielleicht schaffen Sie es per Hand, eine Abbildung auf niedrigdimensionalen Skeletten zu definieren. Es gibt eine Hindernistheorie, die besagt, wann Sie eine Abbildung $f_n\colon X^n \to Y$ auf das $(n+1)$-Skelett, X^{n+1}, ausdehnen können. Hindernisse dafür befinden sich in $H_{n+1}(X, \pi_n(X))$ [M, Chapter 18, §5]. Ein dualer Zugang ist über Postnikov-Türme möglich [H, pp. 415–419].

References

[H] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002), xii, 544 p. Erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[M] John Peter May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL (1999), x+243 pp.