Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 5 Abgabetermin: Dienstag, 29.11.2016

Aufgabe 17 (Urbildfilter)

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und F sei ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen von F eine Filterbasis, so heißt der Filter zu dieser Basis das *Urbild von F*. Es bezeichne $f^{-1}(F)$ diesen Urbildfilter, sofern er existiert. Zeigen Sie:

(1) Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf Y. Der Filter $F_{\mathcal{B}}$ hat bzgl. f genau dann ein Urbild, wenn keine Menge aus $\mathcal{B}$ ein leeres Urbild hat. Ist f surjektiv, so besitzt also jeder Filter F auf Y ein Urbild.

(2) Ist F schon das Bild eines Filters F' auf X, so besitzt F ein Urbild.

(3) Zur Erinnerung: F_f bezeichnet den Bildfilter von F unter f.
- Ist F' ein Filter auf X, so ist $f^{-1}((F')_f)$ gröber als F'.
- Es gilt $F' = f^{-1}((F')_f)$, wenn f injektiv ist.
- Ist F ein Filter auf Y und $f^{-1}(F)$ existiert, so ist $(f^{-1}(F))_f$ feiner als F und stimmt mit F überein, falls f surjektiv ist.

Aufgabe 18 (Filter und hausdorffsch)

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen topologischen Raum X:

(1) X ist hausdorffsch.

(2) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich $\{x\}$.

(3) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

Aufgabe 19 (Ultrafilter sind wie Primideale)

Zeigen Sie, dass für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X für Teilmengen $A, B \subset X$ gilt, dass aus $A \cup B \in \mathcal{F}$ folgt, dass A oder B schon in $\mathcal{F}$ liegt.

Aufgabe 20 (Endlicher Tychonov)

Beweisen Sie den Satz von Tychonov für endliche Produkte, d.h. beweisen Sie, dass $X \times Y$ genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind. (Betrachten Sie dazu die Inklusion $i_y\colon X \to X \times Y$, $x \to (x, y)$ für ein festes y und wählen Sie zu einer offenen Überdeckung von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung von $i_y(X)$.)