

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag, 8. November 2016

Aufgabe 5 (Zum Warmwerden)

- (a) Sei \mathcal{T} eine Topologie auf einer Menge X der Form

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\},$$

wobei A und B zwei nichtleere, echte, verschiedene Teilmengen von X sind. Welche Einschränkungen gibt es an A und B , damit \mathcal{T} wirklich eine Topologie ist?

- (b) Listen Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ auf, die genau vier offene Mengen haben.
(c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die nicht die diskrete Topologie ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch sind mit den offenen Mengen.

Aufgabe 6 (Urysohnscher Einbettungssatz)

Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum X mit abzählbarer Basis in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann.

(Erinnern Sie sich daran, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{P_1, P_2, \dots\}$ besitzt und untersuchen Sie die Abbildung $f(x) := (\dots, 2^{-n}d(x, P_n), \dots)$.)

Aufgabe 7 (T_1 -Bedingung)

Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungaxiom T_1 , falls von je zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

- (a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die koendliche Topologie die größte Topologie ist, für die X ein T_1 -Raum ist.
(b) Beweisen Sie, dass X genau dann ein T_1 -Raum ist, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 8 (Torusknoten)

Als Torus bezeichnet man den topologischen Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

- (a) Zeigen Sie, dass T homöomorph ist zur Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, z) \mid (x - 2)^2 + z^2 = 1\}$ in der (x, z) -Ebene um die z -Achse rotieren lässt.
(b) Es seien $p, q \geq 2$ ganze teilerfremde Zahlen. Betrachten Sie die Kurve $t \mapsto (\exp(2\pi i p t), \exp(2\pi i q t))$ auf T . Zeichnen Sie das Bild der Kurve für $p = 3, q = 2$ auf der Rotationsfläche.

*-Aufgabe (Topologie auf Ringen)

Die Zariski-Topologie eines kommutativen Ringes mit Eins R ist eine Topologie auf der Menge der echten Primideale $\text{Spec}(R)$. Wir setzen die Mengen $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ als abgeschlossene Mengen an. Hierbei ist I ein beliebiges Ideal in R . Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Topologie definiert (Hinweis: Betrachten Sie $V(I_1 \cdot I_2)$ und $V(\sum_j I_j)$). Was ist der Abschluss von (0) in $\text{Spec}(\mathbb{Z})$?