Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 3 Abgabetermin: Donnerstag, 8.11.2012

Aufgabe 9 (Trennungseigenschaften metrischer Räume)
Untersuchen Sie metrische Räume daraufhin, ob sie hausdorffsch, regulär und normal sind.

Aufgabe 10 (Normalität)
Betrachten Sie die Topologie auf $\mathbb{R}$, die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen mit dieser Topologie normal sind. Beweisen Sie, dass das Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Topologie, die durch Produkte $[a, b) \times [c, d)$ erzeugt ist, dagegen nicht normal ist. Geben Sie dazu entweder einen direkten Beweis (den gibt es), oder beweisen Sie folgendes Lemma und suchen Sie sich geeignete Mengen S und D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
Lemma: Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Unterraum S, dessen Kardinalität die Kardinalität der Potenzmenge von D nicht unterschreitet, dann ist X nicht normal.
(Sie können benutzen, dass $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$.)

Aufgabe 11 (Einbettungen)
Für eine reelle Zahl x sei $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Wählen Sie eine irrationale Zahl $0 < \theta < 1$ und betrachten Sie

$$f\colon \mathbb{Z} \to [0, 1), f(n) := n\theta - \lfloor n\theta \rfloor.$$

Auf $\mathbb{Z}$ sei die diskrete Topologie gewählt.
a) Liegt $f(\mathbb{Z})$ dicht in $[0, 1)$?
b) Ist f eine Einbettung?

Aufgabe 12 (Produkte)
Es sei $((X_i, \mathcal{T}_i), i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Zeigen Sie:
a) X ist genau dann hausdorffsch oder regulär, wenn jedes X_i hausdorffsch bzw. regulär ist.
b) Nehmen Sie an, dass die Topologien $\mathcal{T}_i$ auf X_i nicht nur aus $\varnothing$ und X_i bestehen. Betrachten Sie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ die Topologie mit Basis

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} O_i, O_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Diese Topologie ist die *Box-Topologie*. Zeigen Sie, dass diese Topologie feiner ist als die Produkttopologie. Beide stimmen genau dann überein, wenn I endlich ist.
c) Sind die Projektionsabbildungen stetig? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für die universelle Eigenschaft.
d) Konstuieren Sie eine Folge, die in der Produkttopologie konvergiert, aber nicht in der Box-Topologie.