

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 13

Bonusblatt, Abgabe: 31.01.2013

Aufgabe 49 (Kleinsche Flasche)

a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche.

b) Wie viele 3-blättrige Überlagerungen der Kleinschen Flasche gibt es bis auf Äquivalenz?

Aufgabe 50 (Klassifikation in Beispielen)

Klassifizieren Sie alle Überlagerungen (bis auf Äquivalenz) des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$.

Aufgabe 51 ($\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$)

Wie sehen die 3-blättrigen Überlagerungen von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ aus? Welche davon sind regulär und welche nicht?

Einige Bilder zu Überlagerungen finden Sie zum Beispiel in Allen Hatcher's Topologiebuch (Seite 59):

<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.

Aufgabe 52 (Untergruppen freier Produkte)

Wir betrachten die Gruppe

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{R}P^2) \cong G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a, b | b^2 \rangle.$$

Benutzen Sie Überlagerungstheorie, um zu zeigen, dass die Untergruppe $H < G$, die das Erzeugnis von b, aba^{-1} und a^2 ist, selbst ein freies Produkt ist.

Dies ist ein einfacher Spezialfall eines Satzes von Kurosch, der allgemein Untergruppen von freien Produkten beschreibt. Auch den allgemeinen Satz kann man mit Überlagerungstheorie beweisen [Stöcker-Zieschang, 6.9.5].