

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 10

Abgabetermin: Donnerstag, 10.01.2013

Aufgabe 37 ($SL_2(\mathbb{R})$)

a) Wir hatten in der Vorlesung die Operation der $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene \mathcal{H} besprochen. Was ist der Stabilisator von $i \in \mathbb{C}$ unter $SL_2(\mathbb{R})$?

b) Es sei $\text{Sym}(n; \mathbb{R})$ der Raum der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen. Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\text{Sym}(n; \mathbb{R})$ durch

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \text{Sym}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n; \mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto ABA^t.$$

Hierbei bezeichnet A^t die zu A transponierte Matrix. Benutzen Sie Lineare Algebra, um den Quotienten $\text{Sym}(n; \mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})$ zu beschreiben.

Aufgabe 38 (Fixpunkte)

Es sei X ein G -Raum. Für eine Untergruppe $H < G$ sei X^H der Unterraum der Fixpunkte der H -Operation, also $X^H = \{x \in X; hx = x \text{ für alle } h \in H\}$. Zeigen Sie:

a) Ist X hausdorffsch, so ist X^H abgeschlossen für alle Untergruppen H von G .

b) Sind H und K Untergruppen von G , so ist $X^H \cap X^K$ wiederum Fixpunktmenge einer geeigneten Untergruppe von G . Welcher?

Aufgabe 39 (Brieskorn Mannigfaltigkeiten)

Es sei $W_d^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ für $d, n \geq 2$ der Unterraum, der definiert ist als Menge aller $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, die den beiden Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0 \text{ und } |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 2$$

genügen. Zeigen Sie, dass W_d^{2n-1} ein $O(n)$ -Raum ist, wenn man $O(n)$ durch gewöhnliche Matrizenmultiplikation auf (z_1, \dots, z_n) operieren lässt.

Zur Allgemeinbildung: Brieskorn-Mannigfaltigkeiten sind Beispiele sogenannter *exotischer Sphären*. Für ungerade d und n ist W_d^{2n-1} homöomorph zu \mathbb{S}^{2n-1} , aber nicht immer diffeomorph zu \mathbb{S}^{2n-1} .

Aufgabe 40 (Basics)

Es seien G und G' topologische Gruppen und $\varphi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann stetig ist, falls es im neutralen Element, $1 = 1_G$, stetig ist.