Vorlesung Charakteristische Klassen

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2008

Beispiele für Spektralsequenzen

Spektralsequenzen sind ein Werkzeug, das in vielen Gebieten der Mathematik benutzt wird. Das Folgende ist eine Sammlung von Beispielen, die Ihnen ansatzweise die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten von Spektralsequenzen vor Augen führen soll.

- Die **Adams-Spektralsequenz** berechnet stabile Homotopieklassen lokalisiert an einer Primzahl p und der sogenannte E^2-Term der Spektralsequenz besteht aus Ext-Gruppen, für die Sie die Modulstruktur über der Steenrod-Algebra an der gewählten Primzahl verstehen müssen. Man notiert das gerne wie folgt:
$$\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}_p}(H^*(X;\mathbb{F}_p), H^*(Y;\mathbb{F}_p)) \Longrightarrow [Y,X]^s_{(p)}.$$
Ein wichtiger Spezialfall sind die stabilen Homotopiegruppen der Sphären. Hierfür startet man dann mit
$$\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p).$$
- Wenn Sie eine Faserung $p\colon E \to B$ haben mit typischer Faser F, so können Sie mit der **Leray-Serre Spektralsequenz** die (Ko-)Homologie von E aus der (Ko-)Homologie von B und F berechnen. Die Konstruktion dieser Spektralsequenz werden wir besprechen.
- Wenn Sie deRham-Kohomologie berechnen möchten, dann können Sie den deRham-Komplex Ω_X als Garbe auffassen und bekommen dann eine Spektralsequenz, die $H^*_{dR}(X)$ aus der Garbenkohomologie von X mit Koeffizienten in der Garbe Ω_X ausrechnet.
- In der Gruppen(ko)homologie können Sie für jede Erweiterung
$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$
mit der **Lyndon-Hochschild-Serre Spektralsequenz** z.B. die Kohomologie $H^*(G;M)$ von G mit Koeffizienten in einem G-Modul M aus den Kohomologiegruppen $H^*(Q;H^*(N;M))$ berechnen. Man kann diese Spektralsequenz algebraisch konstruieren oder als Spezialfall der Leray-Serre Spektralsequenz interpretieren, weil zu einer Erweiterung von Gruppen eine Fasersequenz auf dem Niveau der zugehörigen klassifizierenden Räume gehört.
- Sie haben das Universelle Koeffiziententheorem für singuläre Homologie kennengelernt. Für gutartige verallgemeinerte Kohomologietheorien gibt es eine entsprechende **Universelle Koeffizienten Spektralsequenz**. Es R ein Ringspektrum (also etwas, das eine Kohomologietheorie mit einer Art Cup-Produkt gibt) und ist M ein R-Modulspektrum, so können Sie günstigstenfalls $M^*(X)$ aus $R^*(X)$ berechnen.
- Ist C_* z.B. ein Kettenkomplex freier abelscher Gruppen und ist p eine feste Primzahl, so kann man mit Hilfe der **Bockstein-Spektralsequenz** die p-Torsion und den p-teilbaren Anteil in $H_*(C_*)$ aus $H_*(C_*/pC_*)$ berechnen. Das erste Differential der Spektralsequenz ist gerade der Bocksteinhomomorphismus – daher der Name.
- In der homologischen Algebra spielen **Spektralsequenzen zu einem Doppelkomplex** einer grosse Rolle. Sie wollen die Homologie eines Totalkomplexes ausrechnen und dass können Sie tun, indem Sie z.B. erst die vertikale und danach die horizontale Homologie ausrechnen. Das gibt Ihnen einen E^2-Term einer Spektralsequenz, die gegen die Homologie des Totalkomplexes konvergiert. Sie können auch erst horizontal und danach vertikal rechnen – das gibt eine zweite Spektralsequenz, die gegen dieselbe Homologie konvergiert. Dann können Sie die erste gegen die zweite Sequenz ausspielen...
- Etwas abstrakter: Sie haben abelsche Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und kovariante Funktoren $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Dann können Sie mit der **Grothendieck-Spektralsequenz** z.B. im linksexakten Fall unter guten Umständen die rechtsabgeleiteten Funktoren von $G \circ F$ aus denen von G und denen von F ausrechnen.

- Beispiele gibt es wie Sand am Meer. Schauen Sie in die Literatur (zum Beispiel die Quellen unten) und Sie finden weitere wichtige Beispielklassen, wie z.B.die **Hyperhomologie-Spektralsequenzen**, **Bökstedts Spektralsequenz** zur Berechnung Topologischer Hochschild Homologie, die **Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenzen**, die **Künneth-Spektralsequenzen** für Ringspektren, die **Bousfield-Kan Spektralsequenzen** im kosimplizialen Kontext, die **Homotopiefixpunkt-Spektralsequenzen** etc.

References

[BT] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1982).

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, With an appendix by David A. Buchsbaum. Reprint of the 1956 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1999).

[EKMM] A. Elmendorf, I. Kriz, M. Mandell & J. P. May, *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, Mathematical Surveys and Monographs **47** (1997).

[H] Allen Hatchers Skript zu Spektralsequenzen: `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html`

[ML] S. Mac Lane, *Homology* Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[McC] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **58**, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[W] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge (1994).