Seminar: Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Sommersemester 2017

Prof. Dr. B. Richter

Vorträge

(1) (**Grundlagen**) [S, 1.1-1.3] Was sind lineare Darstellungen von Gruppen? Definieren Sie den Begriff und stellen Sie Beispiele vor (reguläre Darstellung, triviale Darstellung, Permutationsdarstellungen). Was ist der Grad einer Darstellung? Definieren Sie die Einschränkung einer Darstellung auf eine Untergruppe und den Begriff der Unterdarstellung. Was sind orthogonale Komplemente von Darstellungen?

Bains

(2) (**Irreduzible Darstellungen**) [S, 1.4,2.2,3.1] Was sind irreduzible Darstellungen? Zeigen Sie die Zerlegbarkeit von Darstellungen in irreduzible Darstellungen und beweisen Sie Schurs Lemma. Wie sehen irreduzible Darstellung abelscher Gruppen aus? Was kann man sagen, wenn die Gruppe eine abelsche Untergruppe hat?

Sommer

(3) (**Konstruktionen neuer Darstellungen aus alten**) [S, 1.5,1.6] Wiederholen Sie aus der Linearen Algebra, was Tensorprodukte, symmetrische und äußere Produkte von Vektorräumen sind. Definieren Sie dann die entsprechenden Konstruktionen für lineare Darstellungen und bestimmen Sie jeweils den Grad.

Laß

(4) (**Charaktere**) [S, 2.1] Was ist der Charakter einer linearen Darstellung? Leiten Sie elementare Eigenschaften her und behandeln Sie die duale Darstellung (auch kontragrediente Darstellung genannt) zu einer gegebenen Darstellung (Beispiele [S, 2.3,2.4]). Was sind Klassenfunktionen?

Glöckner

(5) (**Skalarprodukt für Darstellungen**) [S, 2.3] Definieren Sie das Skalarprodukt für Darstellungen und benutzen Sie es, um ein Irreduzibilitätskriterium herzuleiten. Behandeln Sie das Beispiel [S, 2.5]

Versteegen

(6) (**Anzahl irreduzibler Darstellungen**) [S, 2.4,2.5,p. 35] Zeigen Sie zunächste, dass jede irreduzible Darstellung in der regulären Darstellung enthalten ist. Erklären Sie dann, wie man die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe bestimmen kann. Was ist eine Charaktertafel? Wie sieht sie aus für $G = \Sigma_3$ und für eine endliche zyklische Gruppe?

Todorowa

(7) (**Induzierte Darstellungen**) [FH, 3.3], [S, 3.3] Wenn Sie eine lineare Darstellung einer Untergruppe gegeben haben, können Sie diese zu einer Darstellung der gesamten Gruppe hochinduzieren. Definieren Sie induzierte Darstellungen und beweisen Sie die Frobenius Reziprozitätsformel.

Heinrich

(8) (**Gruppenalgebren**) [FH, 3.4], [S, Anfang von 6.1] Definieren Sie die Gruppenalgebra kG zu einem kommutativen Ring k und einer diskreten Gruppe G und behandeln Sie die Beispiele $k\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$. Benutzen Sie Gruppenalgebren, um eine alternative Beschreibung induzierter Darstellungen zu geben. Beweisen Sie die Zerlegung von $\mathbb{C}G$ nach [FH, 3.29]

Schulze

(9) (**Beispiele, Beispiele, Beispiele**) [S, Chapter 5] Wenden Sie die Techniken an, um die Darstellungstheorie einiger Beispielklassen endlicher Gruppen zu beschreiben: zyklische Gruppen, Diedergruppen, Σ_4, etc.

Powierski

(10),(11) (**Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, I, II**) [FH, Lecture 4] Um Darstellungen der symmetrischen Gruppen Σ_n zu verstehen, benötigen wir einige kombinatorische Konzepte. Stellen Sie uns [FH, 4.1] im Detail und mit expliziten Beispielen vor und geben Sie uns einen Überblick über die allgemeine Theorie. Diese beiden Vorträge sollten zwei Studierende zusammen übernehmen und sich absprechen, damit wir ein kohärentes Gesamtbild bekommen.

Burmester

(12) (**Darstellungen von** $GL_2(\mathbb{F}_q)$) [FH, 5.2] Betrachten Sie den Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^\ell$ für eine Primzahl p. Gehen Sie zuerst auf die Gruppe ein und leiten Sie einige Eigenschaften her (wichtige Untergruppen, Konjugationsklassen,...). Stellen Sie uns dann die Darstellungstheorie dieser wichtigen Gruppe vor.

Hoogenstraaten

(13) (**Darstellungsringe: Artin**) [FH, p. 22], [S, 9.1–9.4] Für eine endliche Gruppe G kann man den Darstellungsring $R(G)$ betrachten. Dieser ist von den irreduziblen Darstellungen erzeugt. Artins Theorem beschreibt, inwieweit Darstellungsringe von Untergruppen den gesamten Darstellungsring abdecken. Falls Zeit bleibt, können Sie über den Satz von Brauer [S, Chapter 10] berichten. Dieser untersucht speziell die Frage, wie viel man abdeckt, wenn man sich auf sogenannte p-elementare Untergruppen einschränkt (p ist hier eine Primzahl).

Berberich

(14) (**Darstellungsringe über anderen Körpern**) [S, 14.1,12.1] Bisher haben wir Darstellungstheorie über $\mathbb{C}$ betrieben. Häufig braucht man aber Darstellungen über anderen Körpern. Sie sollen zunächst den allgemeinen Darstellungsring $R_K(G)$ definieren für einen beliebigen Körper K und eine endliche Gruppe G, und uns dann erklären, was man über Darstellungsringe sagen kann, falls K ein Körper der Charakteristik null ist.

Mulevicius

Bitte geben Sie mir zwei Wochen vor Ihrem Vortrag eine Ausarbeitung ab.

Die Bücher von Serre und Fulton-Harris decken den Hauptteil der Themen des Seminars ab. James-Liebeck ist eine ausführliche Ergänzung; Hein dient als deutschsprachige Quelle.

References

[FH] William Fulton, Joe Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. xvi+551 pp.

[H] Wolfgang Hein, *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+255 pp.

[JL] Gordon James, Martin Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Second edition. Cambridge University Press, New York, 2001. viii+458 pp.

[S] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+170 pp.