

Stellen Sie sich bitte aus den unten angegebenen Quellen das Material für Ihren Vortrag zusammen; wenn Sie mit den Literaturangaben nicht klarkommen, dann fragen Sie bitte rechtzeitig nach. Natürlich helfe ich Ihnen, falls Sie Fragen haben. Konzipieren Sie Ihren Vortrag auf 70 Minuten, damit Zeit für Diskussionen, Fragen und Ergänzungen bleibt. Sie können sich auch gerne eine kurze Anwesenheitsaufgabe zu Ihrem Thema überlegen. Geben Sie mir bitte zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags eine Ausarbeitung ab. Sie können die gerne texten, aber eine handschriftliche Abgabe reicht auch.

### Vorträge

- (1) **Die Exponentialfunktion von Matrizen.** Definieren Sie die Exponentialfunktion für reelle und komplexes quadratische Matrizen und leiten Sie einige Eigenschaften her [B, Seiten 188–193]. Wiederholen Sie dazu kurz die Jordansche Normalform.
- (2) **Das Bild der Exponentialfunktion.** Erläutern Sie, warum die Exponentialfunktion keine surjektive Abbildung auf die invertierbaren Matrizen liefert. Was können Sie über das Bild sagen? [B, Teile aus Seiten 194–203]
- (3) **Systeme linearer Differentialgleichungen.** Definieren Sie, was ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist und erläutern Sie, wie man solche Systeme mit Hilfe der linearen Algebra lösen kann. Rechnen ein einfaches Beispiel für die Lösung der Differentialgleichungen vor. ([Z, 6.7] und ggf. [SSV, 10.1.3 und C.11]).
- (4) **Endliche Untergruppen von  $O(2)$ .** Zeigen Sie, dass solche Gruppen entweder zyklische Gruppen sind oder Diedergruppen. [GB, 2.1,2.2]. Benutzen Sie bitte nicht die Notation von Grove und Benson, sondern verwenden Sie  $C_n$  für eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  und  $D_n$  für die Diedergruppe mit  $|D_n| = 2n$ .
- (5) **Endliche Untergruppen von  $SO(3)$**  Wiederholen Sie kurz die Struktur der  $O(3)$  [GB, 2.3] und stellen Sie uns einige Hilfsmittel aus der elementaren Gruppentheorie zur Verfügung [GB, Seiten 3,4]. Stellen Sie uns die Drehsymmetrien der regulären Polyeder vor [GB, 2.4 bis S. 15].
- (6) **Endliche Untergruppen von  $O(3)$  I.** Führen Sie die Klassifikation der endlichen Untergruppen von  $SO(3)$  zu Ende und zeigen Sie, dass Drehuntergruppen endlicher Untergruppen von  $O(3)$  immer normal sind [GB, 2.4 Seiten 16-18, 2.5 bis 2.5.1].
- (7) **Endliche Untergruppen von  $O(3)$  II.** Stellen Sie uns die Klassifikation der endlichen Untergruppen von  $O(3)$  vor und beweisen Sie diese. Definieren Sie, was kristallografische Gruppen sind, und geben Sie uns einige Beispiele [GB, 2.5.2 und 2.6].
- (8)  **$PSL_2(\mathbb{R})$ .** Bestimmen Sie die Kommutatorgruppen von  $GL_n(K)$  und  $SL_n(K)$  und berechnen Sie deren Zentrum. Definieren Sie damit die allgemeine projektive bzw. spezielle projektive Gruppe und behandeln Sie als Ausblick die Operation der  $PSL_2(\mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene ([H, I.2.6, I.2.7] und für  $PSL_2(\mathbb{R})$  z.B. [L] oder [S, Chapitre VII]).
- (9) **Die Gruppen  $O(p, q)$ .** Wiederholen Sie kurz den Sylvesterschen Trägheitssatz. Definieren Sie die Gruppen  $O(p, q)$  und  $U(p, q)$  und ihre speziellen Varianten. Definieren Sie, was eine kurze exakte spaltende Sequenz ist und stellen uns die Sequenzen für  $O(p, q)$ ,  $U(p, q)$  und  $O_n(\mathbb{C})$  vor. [H, Seiten 49–51].
- (10) **'Kleine' Beispiele.** Beschreiben Sie die Gruppen  $O(2)$ ,  $O(1, 1)$ ,  $SO(3)$  und  $SU(2)$  explizit. [H, I.4.2].
- (11) **Die Lorentzgruppe.** Wichtig in der Relativitätstheorie ist der Minkowski-Raum. Definieren Sie, was raumartige, lichtartige und zeitartige Vektoren im Minkowski-Raum sind und stellen Sie uns die (eigentliche) Lorentz-Gruppe samt ihren Erzeugern vor. [H, I.4.13]
- (12) **Symplektische Räume.** Definieren Sie, was ein symplektischer Raum ist. Beweisen Sie uns den Normalformensatz für symplektische Räume [H, I.5.1, I.5.2]. Den ausgelassenen Beweis im Buch von Hein finden Sie z.B. im Buch von Falko Lorenz.

- (13) **Die symplektischen Gruppen** Definieren Sie diese Gruppen und erklären Sie uns, was symplektische Strukturen mit Hamilton-Gleichungen zu tun haben. Geben Sie uns Erzeugendensysteme der symplektischen Gruppen an. [H, I.5.3, I.5.4, I.5.5]
- (14) **Sp(2n)** Die Gruppen  $Sp(2n) := Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(n)$  kann man sehr explizit beschreiben. Stellen Sie uns diese Beschreibung vor und definieren Sie, was ein maximaler Torus ist. Stellen Sie uns die maximalen Tori einiger klassischer Gruppen und auch der  $Sp(2n)$  vor. [H, I.4.3, I.5.6]

#### REFERENCES

- [B] E. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie, Band 2, Vieweg Verlagsgesellschaft 1983.
- [GB] L. C. Grove, C. T. Benson, Finite Reflection Groups, Springer Graduate Texts in Mathematics 99, second edition, corrected second printing 1996.
- [H] W. Hein, Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen, Springer Hochschultext 1990.
- [L] S. Lang,  $SL_2(\mathbb{R})$ , Springer Graduate Texts in Mathematics 105, 1985.
- [S] J. P. Serre, Cours d'Arithmétique, Presses Universitaires de France, 1970.
- [SSV] R. Staszewski, K. Strambach, H. Völklein, Lineare Algebra, Oldenburg Verlag 2009.
- [Z] H. Zieschang, Lineare Algebra und Geometrie, Teubner 1997.