Zyklische Homologie

Es sei A eine assoziative k-Algebra (k ein kommutativer Ring mit Eins). Wir hatten den Kettenkomplex für die Hochschild-Homologie von A gesehen:

$$C_n(A;A) := A \otimes A^{\otimes n} = A^{\otimes(n+1)}.$$

Hier spielt A sowohl die Rolle der Algebra als auch die Rolle der Koeffizienten. Hochschild-Homologie war definiert als

$$HH_n(A) := H_n(C_*(A;A)).$$

Die grundlegende Idee ist, $C_n(A;A)$ als *zyklischen Komplex* aufzufassen, d.h. A wir können die Rolle von A als Algebra und von A als Koeffizienten vertauschen. Es sei t_n ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ und $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n$ sei ein Erzeuger von $A^{\otimes(n+1)}$. Setze

$$t_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) := (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}.$$

Dies definiert eine Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ auf $A^{\otimes(n+1)}$. Das Vorzeichen ist gerade das signum von t_n aufgefasst als Permutation $(0,1,\ldots,n) \in \Sigma_{n+1}$.

Wir hatten die Randoperatoren $d_i : C_n(A;A) \to C_{n-1}(A;A)$ gesehen, die durch Operation von A auf A bzw. der Multiplikation von Elementen in A gegeben ist. Die d_i vertauschen nicht einfach mit der Operation von t_n, aber es gilt:

$$d_i t_n = -t_{n-1} d_{i-1}, \quad 0 < i \leqslant n, \quad d_0 t_n = (-1)^n d_n.$$

Wir kürzen t_n mit t ab. Wie immer, sei $N = \sum_{i=0}^{n} t^i$. Es sei $CC_*(A)$ der folgende Doppelkomplex (!)

$$CC_*(A) := \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\ A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\ A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\ A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \end{tikzcd}$$

Klar ist hierbei, dass $(1-t)N = 0 = N(1-t)$, $b^2 = 0$ und $(-b')^2 = 0$. Die anderen notwendigen Gleichungen $(1-t)(-b') = b(1-t)$ und $(-b')N = Nb$ muss man nachrechnen. Man definiert die zyklische Homologie der Algebra A als

$$HC_n(A) := H_n(\mathrm{Tot}(CC_*A)).$$

Da die zyklische Gruppe auf einem Element trivial ist, gilt zum Beispiel, dass

$$HC_0(A) \cong HH_0(A) = A/[A,A].$$

Wenn wir im Doppelkomplex die Homologie zeilenweise bilden, so ergibt dies die Homologie der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ mit Koeffizienten in $A^{\otimes(n+1)}$. Betrachten wir eine der Spektralsequenzen, die zum Doppelkomplex gehören, so ergibt diese Überlegung, dass diese die Form hat

$$E^1_{p,q} = H_p(\mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}; A^{\otimes(q+1)}) \Rightarrow HC_*(A).$$

Alain Connes' ursprüngliche Beschreibung zyklischer Homologie bezog sich auf Algebren in Charakteristik null. Da Gruppenhomologie endlicher Gruppen in positiven Graden aus Torsionsgruppen besteht, kollabiert die obige Spektralsequenz unter diesen Bedingungen: Der E^1-Term ist trivial für alle $p \neq 0$ und dort bleibt lediglich

$$E^1_{0q} = A^{\otimes(q+1)}/1-t$$

übrig. D.h. falls $\mathbb{Q} \subset k$, können wir zyklische Homologie beschreiben als die Homologie des Komplexes

$$C^\lambda_*(A) := \ldots \xrightarrow{b} A^{\otimes(n+1)}/1-t \xrightarrow{b} A^{\otimes n}/1-t \xrightarrow{b} \ldots.$$

Die ist Connes' ursprüngliche Definition.

Topologische Relevanz zyklischer Homologie

Es bezeichne LX den freien Schleifenraum eines Raumes X, also $C(\mathbb{S}^1, X)$ mit der K.-O.-Topologie. Der freie Schleifenraum trägt eine natürliche $\mathbb{S}^1$-Operation durch das Reparametrisieren von Schleifen.

Wichtige Beispielklassen hierbei sind freie Schleifenräume von Spin-Mannigfaltikeiten bzw. von sogenannten String-Mannigfaltigkeiten. Weiterhin ist für die darstellungstheoretische Relevanz elliptischer Kohomologie der Fall LBG von Interesse. Hierbei ist BG ein gutartiger topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass

$$\pi_i(BG) = \begin{cases} G & i = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Hierbei ist $\pi_i(X)$ die i-te Homotopiegruppe eines Raumes, also die punktierten Homotopieklassen der i-Sphäre nach X.)

Wir wissen, dass Hochschild-Homologie einer Gruppenalgebra $k[G]$ mit Koeffizienten in einem $k[G]$-Bimodul M isomorph ist zur Gruppenhomologie von G mit Koeffizienten in $\tilde{M}$

$$H_*(k[G]; M) \cong H_*(G; \tilde{M}),$$

wobei $\tilde{M}$ die Rechts-G-Modulstruktur durch Konjugation erhält.

Weiterhin gibt es die folgende, entscheidende Beziehung zur Homologie des freien Schleifenraumes:

Theorem [Burghelea-Fiedorowicz, Goodwillie, Jones; 1985-1987]

$$HH_*(k[G]) \cong H_*(LBG; k) \qquad HC_*(k[G]) \cong H_*^{\mathbb{S}^1}(LBG; k).$$

Hierbei bezeichnen die linken Seiten zum einen singuläre Homologie des Raumes LBG bzw. Borel-Homologie von LBG mit

$$H_*^{\mathbb{S}^1}(LBG; k) := H_*(E\mathbb{S}^1 \times_{\mathbb{S}^1} LBG; k).$$

(Sie können z.B. $\mathbb{S}^\infty$ als $E\mathbb{S}^1$ nehmen.)

Mit Hilfe simplizialer Methoden kann man folgende Folgerung ziehen:

$$HH_*(k\bar{\Omega}X) \cong H_*(L|X|; k), \qquad HC_*(k\bar{\Omega}X) \cong H_*^{\mathbb{S}^1}(L|X|; k).$$

Hierbei ist X eine simpliziale Menge (das ist ein kombinatorisches Modell eines gutartigen topologischen Raumes) und $\bar{\Omega}X$ ist die Kan'sche Schleifegruppe von X, ein kombinatorisches Modell des Schleifenraumes der geometrischen Realisierung $|X|$ von X.

Da jeder anständige topologische Raum Y homotopieäquivalent ist zu einem Raum der Form $|X|$, bedeutet die Folgerung, dass man die Homologie von LY bzw die Borel-Homologie von LY durch Hochschild- und zyklische Homologie berechnen kann!

Topologische Definition von Gruppenhomologie

Wir hatten schon die klassifizierenden Räume, BG, diskreter Gruppen, G, kennengelernt. Ist A ein trivialer G-Modul, so gilt

$$H_*(G; A) \cong H_*(BG; A).$$

D.h. Gruppenhomologie ist nichts anderes als die singuläre Homologie des Raumes BG mit Koeffizienten in A. Was das ist, lernen Sie nächstes Semester.

Es gibt ein entsprechendes Resultat für nichttriviale Koeffizientenmoduln M; dann muss man singuläre Homologie mit sogenannten lokalen Koeffizienten verwenden.

Beispiele für Räume BG sind:

- $B\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$
- $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{R}P^\infty$
- $B(\mathbb{Z}^n) = (B\mathbb{Z})^n = (\mathbb{S}^1)^n$
- Allgemeiner gilt: $B(G \times G') = BG \times BG'$, weil Homotopiegruppen mit Produkten vertauschen.
- Ist $F(S)$ die freie Gruppe auf einer Menge S, so ist

$$BF(S) = \bigvee_{s \in S} \mathbb{S}^1.$$

Die Gleichheitszeichen sind gerechtfertigt: Ein Raum BG ist bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt (falls Sie annehmen, dass Sie einen CW Komplex nehmen).

Die Zellstruktur des Standardmodells des Raumes BG entspricht genau der kombinatorischen Struktur der Barauflösung.