Seminar zur Topologie **Wintersemester 2007/08**

Die Modellkategorie topologischer Räume

Prof. Dr. B. Richter

Diese Seminar baut auf der Vorlesung *Algebraische Topologie I* auf. Das Konzept von Modellkategorien geht auf Daniel Quillen zurück [Q], der es schon 1967 voll entwickelt hat. In den letzten Jahren erfuhr es eine Renaissance, weil es ermöglicht, Homotopiekategorien zu behandeln. Zum Beispiel betrachten wir oft statt topologischer Räume und stetiger Abbildungen nur topologische Räume mit Homotopieklassen von Abbildungen betrachten, weil diese Betrachtungsweise viele Dinge vereinfacht.

Wenn wir noch mehr fordern, d.h. wenn wir zum Beispiel möchten, dass Abbildungen, die auf allen Homotopiegruppen Isomorphismen induzieren, invertierbar sein sollen, dann ist das zum einen eine weit drastischere Vereinfachung. Zum anderen muss man sich aber überlegen, inwieweit eine solche Konstruktion überhaupt definiert ist, und wenn ja, ob sie vielleicht pathologische Absonderheiten hat (Haben wir vielleicht zu viel invertiert? D.h. ist auf einmal alles trivial?).

Vorträge

(1) **Höhere Homotopiegruppen I** Definieren Sie $\pi_n(X, x_0)$, Wieso ist $\pi_n(X, x_0)$ abelsch für $n \geq 2$? Zeigen Sie, dass eine Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ immer einen Isomorphismus auf höheren Homotopiegruppen induziert. Stellen Sie die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen vor. [H, §4.1 bis Proposition 4.2]

(2) **Höhere Homotopiegruppen II** Definition relativer Homotopiegruppen $\pi_n(X, A, x_0)$ für $x_0 \in A \subset X$. Beweisen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots$$

gibt für jedes Raumpaar (X, A) und $x_0 \in A$. [H, pp.343–346]

(3) **Faserungen** Die Definition einer Faserung kennen Sie schon. Zeigen Sie, dass man Faserungen zurückziehen kann. Grenzen Sie Serre-Faserungen von Hurewicz-Faserungen ab. Zeigen Sie, dass die Homotopiehochhebungseigenschaft für $\mathbb{D}^n$ äquivalent ist zur HHE für $(\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n)$. Was ist der Schleifenraum, ΩX, eines Raumes X? Was ist die Schleifen-Wege-Faserung? Was sind die Homotopiegruppe eines Schleifenraumes? Erinnern Sie sich dazu an das Exponentialgesetz für Abbildungsräume und spezifizieren Sie das für $C((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) = C((\mathbb{S}^1 \wedge X, x_0), (Y, y_0))$. [H, pp. 375,395,]

(4) **Kofaserungen** Wie der Name andeutet, sind die Eigenschaften von Kofaserungen dual zu denen von Faserungen. Kofaserungen sind durch Homotopieausdehnungseigenschaften charakterisiert. [H, 4.H Anfang]

(5) **Lange exakte Sequenz zu einer Faserung** Zeigen Sie, dass eine Faserung $p\colon E \to B$ (mit wegzusammenhängendem B) zu einer langen exakten Sequenz

$$\ldots \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots$$

führt. Behandeln Sie Linsenräume (Überlagerung!) und die Hopf-Faserungen als Beispiele. [H, 4.41]

(6) **Assoziierte Faserung zu einer Abbildung** Jede beliebige stetige Abbildung kann zu einer Faserung abgeändert werden. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie, dass nicht viel passiert, wenn die Ausgangsabbildung schon eine Faserung war. [H, 4.64 mit Hintergrund]

(7) **Simplizialer Approximationssatz** Simpliziale Komplexe sind kombinatorisch definierte, sehr gut zu verstehende topologische Räume [H, p.107]. Hat man eine beliebige stetige Abbildung zwischen solchen Komplexen, so kann man sie durch eine Abbildung ersetzen, die die kombinatorische Struktur respektiert. Eine Anwendung dieses Approximationssatzes ist der Lefschetz'sche Fixpunktsatz. [H, 2.C bis p.181]

(8) **Der Satz von Whitehead** Dieser wichtige Satz besagt, dass Abbildungen zwischen zusammenhängenden CW-Komplexen, die Isomorphismen auf den Homotopiegruppen induzieren, schon Homotopieäquivalenzen sind. [H, pp. 346–348]

(9) **Kategorientheorie I** Was ist eine Kategorie? Behandeln Sie Beispiele (Mengen, Gruppen, abelsche Gruppen, Moduln über einem Ring, Topologie eines Raumes, topologische Räume, etc)!

Morphismen zwischen Kategorien heissen Funktoren. Geben Sie die Definition und geben Sie wiederum Beispiele an sowohl für kovariante Funktoren (Vergissfunktoren, 'Abelsch machen', $\pi_1(-)$, $H_n(-)$, etc) als auch kontravariante Funktoren (z.B. $H^n(-)$, Dualraum, etc).

Führen Sie adjungierte Funktoren ein und behandeln Sie Beispiele; dabei dönnen Sie vorherige Beispiele recyceln, aber betrachten Sie auch so etwas, wie das Exponentialgesetz. [ML]

(10) **Kategorientheorie II** Wir brauchen die allgemeine Definition von Limites und Kolimites. Aus der Vorlesung kennen Sie schon inverse und direkte Limites. Wiederholen Sie einige Beispiele aus dem bekannten Fundus und behandeln Sie dann das Thema aus einer breiteren Perspektive. [ML]

(11) **Modellkategorien** Definieren Sie, was eine Modellkategorie ist, und skizzieren Sie, wie man zu einer Modellkategorie die zugehörige Homotopiekategorie konstruiert. [DS, §§3–5]

(12) **Die beiden gängigen Modellstrukturen topologischer Räume** Für topologische Räume gibt es zwei Standardmodellstrukturen. Die Quillen-Struktur betrachtet schwache Äquivalenzen und Serre-Faserungen, während die Strøm-Struktur Homotopieäquivalenzen und Hurewicz-Faserungen benutzt. Stellen Sie beide Strukturen vor und beweisen Sie die Modellstrukturen bei der Quillen-Struktur und diskutieren Sie die andere. [DS, §8]

(13) **Coles Alternative** Sowohl die Quillen- als auch die Strøm-Modellstruktur haben ihre Vor- und Nachteile. Mike Cole [C] stellt eine Technik vor, die es erlaubt, Modellstrukturen zu kombinieren. Für topologische Räume ergibt sich daraus eine Struktur, die sehr schöne Eigenschaften hat. Der Artikel ist zwar von 2006, aber elementar geschrieben.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "\sim"'] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

References

[C] Michael Cole, *Mixing model structures*, Topology Appl. **153**, No. 7, (2006) 1016–1032.

[DS] W. G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, James, I. M. (ed.), Handbook of algebraic topology. Amsterdam: North-Holland (1995) 73–126.
Erhältlich auf `http://hopf.math.purdue.edu/cgi-bin/find-author.cgi?enter=spalinski`

[H] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press. xii, 544 p. (2002).
Erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[ML] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics **5**, New York, Springer. xii, 314 p. (1998).

[Q] D. G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics **43** Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 157 p. (1967).