Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 8
Abgabe: 07.12.21, 13:45h

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Mengen endlicher Mächtigkeit, 2+2+2+2 Punkte):
Es seien A, B und C endliche Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung eingeführten Begriffs der Mächtigkeit von Mengen die folgenden Aussagen. Suchen Sie im Fall falscher Aussagen zusätzliche Bedingungen (z.B. an den Schnitt der Mengen oder an Enthaltensein) für die Mengen A, B und C, unter deren Annahme die Aussagen ggf. wahr werden.
(Hinweis: Venn-Diagramme können bei der Lösungsfindung hilfreich sein, ersetzen aber keinen Beweis.)

(a) Gilt immer $|A \cup B| = |A| + |B|$?

(b) Ist $|A \setminus B| = |A| - |B|$?

(c) Gilt für das kartesische Produkt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$?

(d) Erfüllen 3-fach Schnitte $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B \cap C|$?

Aufgabe 2 ((Gleich-)Mächtigkeit, (Über-)Abzählbarkeit, 1+2+4+3 Punkte):
Es seien in dieser Aufgabe M und N beliebige Mengen.

(a) Begründen Sie, dass $|M| = |N|$ äquivalent zu $|N| = |M|$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $|M| \leq |N|$ genau dann gilt, wenn es eine Surjektion von N nach M gibt.
(Hinweis: Aufgabe 1 (e) von Blatt 4.)

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid M \text{ endlich}\}$ der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.
(Hinweise: Nach Vorlesung ist $\mathbb{N}^2$ abzählbar. Zeigen Sie sukzessive, dass auch $\mathbb{N}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |M| = n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, und $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid M \text{ endlich}\}$ abzählbar sind.)

(d) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{N})$ der Selbstabbildungen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist.
(Hinweis: Erinnern Sie sich an das zweite Cantorsche Diagonalverfahren.)

Lehramtsaufgabe (1+2 Punkte)

(a) Ein häufiger Fehler von Schüler:innen ist eine falsche Bruchaddition:

$$\frac{z}{n} \pm \frac{y}{m} = \frac{z \pm y}{n \pm m} \text{ für } y, z \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass die falsche Bruchaddition nicht wohldefiniert ist.

(b) Wie kann man Schüler:innen verdeutlichen, dass diese Bruchaddition falsch ist?