Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 6
Abgabe: 23.11.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Relationen, 8 Punkte):
Wir betrachten nun folgende Beispiel-Relationen (R_1 mit der Teilbarkeitsrelation „|“):

$R_1 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{N}_0)$,	$mR_1n :\iff (2n)\vert m$	für $m, n \in \mathbb{N}_0$,
$R_2 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{N}_0)$,	$mR_2n :\iff 6m \geq 5n$	für $m, n \in \mathbb{N}_0$,
$R_3 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{Z})$,	$yR_3z :\iff 2y \leq z$	für $y, z \in \mathbb{Z}$,
$R_4 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{Z})$,	$yR_4z :\iff y+z = 4$	für $y, z \in \mathbb{Z}$,
$R_5 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{Z})$,	$yR_5z :\iff (y = z \text{ oder } (z, y) = (5, 6))$	für $y, z \in \mathbb{Z}$,
$R_6 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{R}^2)$,	$rR_6s :\iff (r_1 > s_1 \text{ oder } (r_1 = s_1, r_2 < s_2))$	für $r, s \in \mathbb{R}^2$,
$R_7 \in \mathrm{Rel}(\mathbb{R}^2)$,	$rR_7s :\iff r_1+r_2 < s_1+s_2$	für $r, s \in \mathbb{R}^2$,
$R_8 \in \mathrm{Rel}(\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})$,	$MR_8N :\iff M\cap N \neq \emptyset$	für $M, N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$

Untersuchen Sie diese Relationen jeweils auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie, Transitivität. Begründen Sie die Gültigkeit jeder Eigenschaft kurz, oder geben Sie Gegenbeispiel-Elemente an, für die sie scheitert.
(Hinweis: Dass sich Eigenschaften ausschließen oder einander implizieren, dürfen Sie natürlich nutzen, um ein paar Fälle ganz schnell zu erledigen.)

Aufgabe 2 (Ordnungsrelationen, 1+1+2+2+2+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation „|“ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

Bestimmen Sie nun jeweils die kleinste obere und größte untere Schranke in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^2$ bzw. $\mathbb{N}$, das größte und kleinste Element sowie die maximalen und minimalen Elemente (sofern diese existieren) für ...

(b) die Mengen $Q_1 := \left\{-\frac{3n+2}{2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ und $Q_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1 \text{ und } x^2 < 2\}$ bezüglich der Kleiner-Gleich-Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{Q}$.

(c) die Menge $P := \{(2, 0), (2, 3), (0, -4), (-3, -3), (2, -5)\}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung $\leq_{\mathrm{lex}}$ auf $\mathbb{Z}^2$.

(d) die Menge $S := \{2, 6, 10, 12, 16, 36\}$ bezüglich der Teilbarkeitsrelation „|“ auf $\mathbb{N}$.

Bitte wenden!

(e) Entscheiden Sie, welche der Mengen

$$\{16\}, \qquad \{2,6,36\}, \qquad \{2,6,12,36\}, \qquad \{2,6,12,16,36\}$$

bezüglich der Teilbarkeitsrelation „$|$“ total geordnet sind. Entscheiden Sie gegebenenfalls auch, ob es sich um maximale bezüglich „$|$“ total geordnete Teilmengen von S aus (d) handelt, d.h. genauer, um bezüglich der Mengen-Inklusion „$\subset$“ maximale Elemente des Mengensystems $\mathcal{K} := \{T \in \mathcal{P}(S) \mid T \text{ ist bezüglich „}|\text{“ total geordnet}\}$.

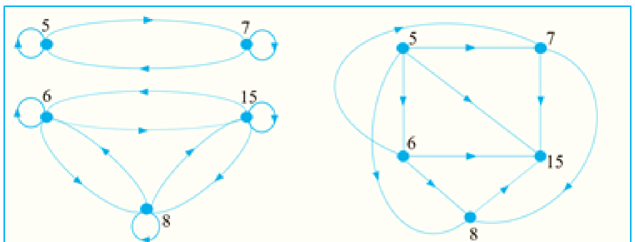
(f) Beweisen Sie allgemein: Ist $\trianglelefteq$ eine Totalordnung auf $\mathcal{X}$, so ist die komplementäre Relation $\trianglelefteq^c$ eine strikte Totalordnung auf $\mathcal{X}$. Und ist $\triangleleft$ eine strikte Totalordnung auf $\mathcal{X}$, so ist die komplementäre Relation $\triangleleft^c$ eine Totalordnung auf $\mathcal{X}$.

Lehramtsaufgabe (2+2 Punkte)
Im Zuge der „Neuen Mathematik“, die Sie bereits auf Blatt 3 kennenglernt haben, wurden auch Äquivalenzrelationen im mathematischen Schulunterricht behandelt. Folgende Definition und Aufgabe stammen aus einem Schulbuch aus dieser Zeit:

Ein Pfeildiagramm beschreibt eine Äquivalenzrelation, wenn gilt:

1. jedes Element besitzt einen Ringpfeil (Reflexivität);
2. zu jedem Pfeil zwischen zwei Elementen gibt es einen Gegenpfeil (Symmetrie);
3. zu zwei aufeinanderfolgenden Pfeilen gibt es stets einen Überbrückungspfeil (Transitivität).

Beispiele: „hat dieselbe Quersumme wie“; hat ebenso viele Teiler wie“



a.) Untersuche, wo in den beiden dargestellten Abbildungen Ringpfeile, Gegenpfeile und Überbrückungpfeile auftreten.

b.) Welche der beiden dargestellten Relationen ist gleichzeitig reflexiv, transitiv und symmetrisch.

(a) Vergleichen Sie diese Definition der Äquivalenzrelation mit der Definition, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. Welche Vor- und Nachteile hat die jeweilige Definition?

(b) Warum kann es sinnvoll sein, das Konzept der Äquivalenzrelation auch im mathematischen Schulunterricht zu behandeln?