Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 5
Abgabe: 16.11.21 in H2
nach der Vorlesung

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Summenformeln, Induktion, Rekursion, 3+3+1+3+1+3 Punkte)

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass, für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Summe der ersten n natürlichen Zahlen den Wert $\frac{n(n+1)}{2}$ ergibt.

Geben Sie außerdem einen direkten Beweis an, für den Sie die Reihenfolge der Summation wie folgt verändern: Summieren Sie zunächst 1 mit n, dann 2 mit $n-1$, etc.

(b) Lehramtsaufgabe

Wie würden Sie die *Formel vom kleinen Gauß* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, die Sie in Aufgabenteil **(a)** bewiesen haben, geometrisch verständlich für Fünftklässler:innen begründen? Sie könnten beispielsweise wie im Folgenden angedeutete Punktmuster verwenden:

Auch in der Schule muss im Rahmen der Möglichkeiten überprüft werden, inwiefern eine Argumentation allgemeingültig ist und nicht vom konkreten Beispiel abhängt.

Achten Sie daher darauf, dass Ihre Begründung unabhängig vom konkreten Zahlenbeispiel funktioniert.

Sei jetzt $\mathbb{B}$ einer der Zahlbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ wobei Sie $\mathbb{B} = \mathbb{Z}$ annehmen dürfen (in den anderen Bereichen funktioniert aber tatsächlich alles genauso). **Arithmetische Progression** heißt eine Zahlenfolge $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in \mathbb{B}$ mit $k \leq \ell$ in $\mathbb{Z}$, bei der für alle $i \in \{k, k+1, \dots, \ell-1\}$ die Differenz $a_{i+1} - a_i$ stets dieselbe Zahl $d \in \mathbb{B}$ gibt.

(c) Beweisen Sie (z.B. durch Zurückführung auf (a)) die **arithmetische Summenformel**

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = (\ell - k + 1)\frac{a_k + a_\ell}{2} \qquad \text{für arithmetische Progressionen } a_k, a_{k+1}, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in \mathbb{B}.$$

(d) Zeigen Sie folgende Formel, wobei wir 0^0 als 1 festsetzen:

$$(q-p)\sum_{j=0}^{n}(p^{n-j}q^j) = q^{n+1} - p^{n+1} \qquad \text{für alle } p, q \in \mathbb{B} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bitte wenden!

Bekannte rekursiv definierte Zahlen sind die **Fibonacci-Zahlen** $F_n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, die durch $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_{n+1} := F_{n-1}+F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert werden.

(e) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P_{\lambda,n} := \lambda^n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Äquivalenz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Rekursionsbedingung $P_{\lambda,n+1} = P_{\lambda,n-1} + P_{\lambda,n}$ erfüllt. $\iff$ Es gilt $\lambda^2 = 1 + \lambda$.

(f) Bestimmen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung auf der rechten Seite von **(e)**. Leiten Sie dann die explizite **Formel von Binet** für die Fibonacci-Zahlen her:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Aufgabe 2 (Rechengrundgesetze der Addition auf $\mathbb{Z}$, 2+3 Punkte)

(a) Beweisen Sie das **Assoziativgesetz** der Addition $(z+m)+n = z+(m+n)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.

(b) Beweisen Sie das **Kommutativgesetz** der Addition $m+n = n+m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.
(Hinweis: Erst $n = 0+n$ und $S(n) = 1+n$ per Induktion zeigen, dann nochmal Induktion.)

Aufgabe 3 (Projektionen und Iterierte, 3+1 Punkte):

Es sei $p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ eine Selbstabbildung einer Menge $\mathcal{X}$. Man nennt p eine **Projektion** auf eine Teilmenge A von $\mathcal{X}$, wenn $p(a) = a$ für alle $a \in A$ und $p(x) \in A$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gelten.

(a) Beweisen Sie für $A \subset \mathcal{X}$: Genau dann ist p eine Projektion auf A, wenn $p \circ p = p$ und $\mathrm{Bild}(p) = A$ gelten.

Die **Iterierten** $p^n\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ der Selbstabbildung p sind Kompositionen von p mit sich. Genauer sind sie rekursiv durch $p^0 := \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ und $p^n := p^{n-1} \circ p$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert. (Um Iterierte nicht mit Potenzen zu verwechseln, schreibt man gelegentlich auch $p^{\circ n}$ oder $p^{\langle n \rangle}$ statt p^n.)

(b) Zeigen Sie mit Induktion: Ist p eine Projektion, so gilt $p^n = p$ für alle $n \in \mathbb{N}$.