Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 12
Abgabe: 18.01.22 via moodle
bis spätestens 14:15 Uhr

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Polynome, 1+2+2+1 Punkte):

(a) Berechnen Sie die Summe $p+q$ und das Produkt pq in $\mathbb{Q}[X]$ für

$$p := -2X^4 - 4X^3 + \tfrac{5}{2}X + 5 \in \mathbb{Q}[X] \text{ und } q := 3X^2 + 2X - 6 \in \mathbb{Q}[X].$$

(b) Zeigen Sie für $p, q \in R[X]$ über einem Integritätsring $(R, +, \cdot)$:

$$\operatorname{Grad}(p+q) \leq \max\{\operatorname{Grad}(p), \operatorname{Grad}(q)\}$$
$$\operatorname{Grad}(pq) = \operatorname{Grad}(p) + \operatorname{Grad}(q)$$

Erklären Sie auch, wie hierfür das Rechnen mit $-\infty$ zu verstehen ist.

(c) Führen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ die folgende Polynomdivision durch:

$$(3X^5 + X^4 + 4X^2 - 5X + 6) : (X^3 - 2X + 2).$$

Bestimmen Sie also $r, s \in \mathbb{Q}[X]$, $\operatorname{Grad}(r) < 3$, mit

$$3X^5 + X^4 + 4X^2 - 5X + 6 = s \cdot (X^3 - 2X + 2) + r.$$

(d) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $X^3 + 6X^2 + 5X - 12 \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2 (Kerne von Homomorphismen, 2+2 Punkte):

(a) Bestimmen Sie den Kern des Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ mit $\alpha(z) := [4]^z_{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.
(Hinweise: Es ist $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times := (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})}\}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $[4]^n_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$ als Potenz in $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ und $[4]^{-n}_{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})} := \left([4]^{-1}_{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})}\right)^n$ zu verstehen. Dass $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist und α ein Homomorphismus ist, können Sie hier als bekannt voraussetzen und brauchen dies nicht zu verifizieren.)

(b) Beweisen Sie für einen Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ von Gruppen $(G, *)$ und $(H, \circledast)$ das folgende **wichtige Injektivitäts-Kriterium** aus der Vorlesung:

$$\varphi \text{ injektiv} \iff \operatorname{Kern}(\varphi) = \{e_G\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Isomorphie von Gruppen, 4 Punkte):

Zeigen Sie: Zum einen sind die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ der Ordnung 4 und die Kleinsche Vierergruppe $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$ nicht zueinander isomorph. Zum anderen ist jede Gruppe $(G, *)$ mit $|G| = 4$ isomorph zu genau einer dieser beiden und damit insbesondere abelsch.

(Hinweis: Unterscheiden Sie danach, ob es in G ein Element der Ordnung 4 gibt oder nicht. Nutzen Sie auch den Satz von Lagrange und die Ordnungen aller 4 Elemente.)

Bemerkung: In ähnlicher Weise ist jede Gruppe $(G, *)$ der Ordnung $|G| = 6$ zu $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), +)$ oder zu $(\Sigma_3, \circ)$ isomorph. Im ersten Fall ist sie abelsch, im zweiten Fall nicht (wobei nicht abelsche Gruppen nach dem Vorigen auch überhaupt erst ab Ordnung 6 vorkommen).

Aufgabe 4 (Mehr zu Polynomen, 2+2 Punkte):

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Zeigen Sie für das Polynom $q_p := X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$, dass $\widehat{q_p} \equiv 0$ gilt und ein Polynom $s_p \in \mathbb{F}_p[X]$ mit

$$q_p = s_p \cdot X \cdot (X - [1]) \cdot (X - [2]) \cdot \ldots \cdot (X - [p-1]) \text{ in } \mathbb{F}_p[X]$$

existiert (wobei $[x]$ abkürzend für die Restklasse $[x]_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = x + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/pZ = \mathbb{F}_p$ steht).

(b) Zeigen Sie durch Koeffizientenvergleich, dass das Polynom $s_p \in \mathbb{F}_p[X]$ aus (a) gleich $[1] \in \mathbb{F}_p$ ist, und, dass $(p-1)! = -1 \mod p$ für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ gilt.

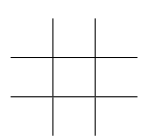
Lehramtsaufgabe (1+2+2 Punkte)

(a) Betrachten Sie die beiden dargestellten Zwei-Personen-Spiele unter folgenden Gesichtspunkten: Welche Strategien sind am erfolgreichsten und warum; welche sind hingegen weniger erfolgreich und warum? Kann Spieler:in eins oder Spieler:in zwei immer gewinnen oder ist es ausgeglichen?

1. Spiel: Wählen Sie abwechselnd eine Zahl von 1 bis 9. Wenn Sie eine Zahl gewählt haben, gehört sie Ihnen, und Ihr:e Gegner:in darf sie nicht wählen. Ziel ist es, drei Zahlen zu besitzen, die genau die Summe 15 ergeben.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spiel: Bei dem Spiel Tick-Tack-Toe wechseln sich die Spieler:innen ab. Der:die erste Spieler:in setzt ein X in eines der drei leeren Kästchen, der:die zweite Spieler:in setzt ein O in ein leeres Kästchen. Ziel ist es, drei Einträge einer Art in einer geraden Reihe (horizontal, vertikal oder diagonal) zu erreichen.



(b) Erklären Sie, warum es sich bei den beiden Spielen eigentlich um das gleiche Spiel handelt.

(c) Diskutieren Sie, inwiefern diese Spiele im mathematischen Schulunterricht eine Auseinandersetzung mit der für die Mathematik zentralen Idee der Strukturgleichheit oder Isomorphie anregen könnten.