Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG
Prof. Dr. Birgit Richter / Dr. Karl Heuer / Ann Sophie Stuhlmann

WiSe 2021/22, Blatt 10
Abgabe: 04.01.22 via moodle
bis spätestens 14:15 Uhr

Übungen zu Mathematik 1

Aufgabe 1 (Ordnung von Gruppenelementen, zyklische Gruppen, 2+1 Punkte):
Es seien $(G, *)$ eine Gruppe, $e \in G$ ihr neutrales Element und $n \in \mathbb{N}$. Ein $g \in G$ mit $g^n = e \neq g^k$ für alle $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ hat Ordnung n.

(a) Zeigen Sie für $g \in G$, dass g genau dann Ordnung n hat, wenn $g^n = e$ ist und die Elemente g^k mit $k \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ alle verschieden sind (wobei letzteres bedeutet, dass für $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ mit $k \neq \ell$ immer $g^k \neq g^\ell$ gilt).

(b) Zeigen Sie, dass $(G, *)$ genau dann zyklisch von Ordnung n ist, wenn $|G| = n$ gilt und es in G ein Element der Ordnung n gibt.

Aufgabe 2 (Permutationen, 2+2+3 Punkte):
In dieser Aufgabe betrachten wir die Permutationen

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \Sigma_4, \qquad \delta_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_4,$$

$$\varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_5, \qquad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_5,$$

(a) Bestimmen Sie δ_1^{-1}, δ_2^{-1}, $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$ und $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$.

(b) Bestimmen Sie alle Potenzen δ_1^n, δ_2^n und $(\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Bestimmen Sie die Vorzeichen von δ_1, δ_2, ε_1, ε_2, $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ und $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Ringe und Körper, 3+3+1+2 Punkte):

(a) Vervollständigen Sie folgende Tabelle — wie in zwei Zeilen schon gezeigt — durch Angabe, bei welchen Beispielen es sich um Ringe/Integritätsbereiche/Körper handelt. (Dabei sind $+$ und $\cdot$ eventuell komponentenweise/auf Restklassen zu verstehen, und $\mathcal{X}$ bezeichnet eine nicht-leere Grundmenge.).

	Ring (ja/nein)	Begründung (falls *kein* Ring)	Integritätsbereich (ja/nein)	Körper (ja/nein)
$(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$	nein	in $(\mathbb{N}_0, +)$ keine Inverse	nein	nein
$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +, \cdot)$				
$(\mathbb{Z}^7, +, \cdot)$				
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	ja	———	ja	ja
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$				
$((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4, +, \cdot)$				
$(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \cup, \cap)$				

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}^2, +, \odot)$ mit der komponentenweisen Addition $+$ und der durch

$$x \odot y := (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) \text{ für } x, y \in \mathbb{Q}^2$$

definierten Verknüpfung $\odot$ ein kommutativer Ring ist.

Man nennt einen Ring $(R, +, \cdot)$ einen **Boolschen Ring**, wenn $x^2 = x$ für alle $x \in R$ gilt.

(c) Begründen Sie, dass der Restklassenring $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und der Mengen-Ring $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \Delta, \cap)$ über einer beliebigen Grundmenge $\mathcal{X}$ Boolsche Ringe sind.
(Hinweis: Sie dürfen und sollen als bekannt voraussetzen, dass es sich um Ringe handelt.)

(d) Zeigen Sie für einen Boolschen Ring $(R, +, \cdot)$, dass alle seine Elemente additiv selbstinvers sind und er kommutativ ist, dass also $x + x = 0$ und $xy = yx$ für alle $x, y \in R$ gelten.
(Hinweis: Betrachten Sie $(x + x)^2$ bzw. $(x + y)^2$.)

Lehramtsaufgabe (1+1+1 Punkte):

Verfassen Sie jeweils eine angemessene Begründung, warum man nicht durch 0 teilen darf, für:

(a) Grundschüler:innen der vierten Klasse,

(b) Sechstklässler:innen,

(c) eine:n Ihrer Kommiliton:innen.