

Prof. Dr. J. Latschev, Prof. Dr. B. Richter

Stellen Sie sich aus den unten angegebenen Quellen das Material für Ihren Vortrag zusammen; Falls Ihnen die Literaturangaben nicht ausreichen, dann fragen Sie bitte rechtzeitig nach. Natürlich helfen wir, falls Sie Fragen haben. Geben Sie uns bitte zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags eine Ausarbeitung ab.

### Vorträge

- (1) **Freie Schleifenräume** Unter freien Schleifenräumen versteht man Räume von Abbildungen der Kreislinie in einen Raum. Je nachdem, welche Eigenschaften man vom Zielraum und von diesen Abbildungen verlangt, variieren natürlich die Eigenschaften der entsprechenden freien Schleifenräume. Stellen Sie uns einige Varianten vor. Besprechen Sie den Schleifenraum einer Liegruppe, und diskutieren Sie das Beispiel  $S^1$  gründlich. [C].
- (2) **Grundlagen zu Spektralsequenzen** Was sind Spektralsequenzen? Geben Sie eine Definition und behandeln Sie die Spektralsequenz eines filtrierten Kettenkomplexes. Stellen Sie uns als Beispiel die Spektralsequenz eines Doppelkomplexes vor [BT, III §14]
- (3) **Die Leray-Serre Spektralsequenz** Stellen Sie uns die Leray-Serre Spektralsequenz einer Faserung zur Berechnung der (Ko)Homologie des Totalraums aus der (Ko)Homologie der Basis und der Faser vor. Was sagt diese Methode zur (Ko)Homologie der Schleifenräume von Sphären? [McC, 5.1,5.2].
- (4) **Grundlagen zu minimalen Modellen** Definieren Sie allgemein, was (differentiell) graduierte Algebren über einem kommutativen Grundring sind und behandeln Sie den (differentiell-)graduierten kommutativen Fall mit vielen Beispielen. Definieren Sie, was ein minimales Modell einer differentiell-graduierten kommutativen Algebra ist und behandeln Sie die Beispielklasse der minimalen Modelle der Algebra der Formen einer Mannigfaltigkeit [BT, III §19, I §2.1,2.2], [FOT, Teile aus §2.1., 2.3., 2.4], [M].
- (5) **Das minimale Modell des freien Schleifenraums** Erläutern Sie das minimale Modell für den freien Schleifenraum eines einfach-zusammenhängenden Raumes, und geben Sie Beispiele. Stellen Sie uns die Sätze von Gromoll und Meyer sowie von Vigué-Poirrier und Sullivan vor. [FOT, §§5.1 - 5.3]
- (6) **Die Chas-Sullivan Operationen I** Chas und Sullivan haben in [CS] ein Produkt auf der Homologie freier Schleifenräume definiert. Stellen Sie uns die Konstruktion dieses Produkts und seine Eigenschaften vor. [CS, S.6-11],[F], [Lau].
- (7) **Die Chas-Sullivan Operationen II** Diskutieren Sie die von Chas und Sullivan definierte Klammer auf der Homologie des freien Schleifenraumes sowie den BV-Operator  $\Delta$ . [CS, S.12-19], [F]
- (8) **Die Chas-Sullivan Operationen III** Geben Sie eine kurze Einführung in die äquivariante (Ko)Homologie [AP, Kap. 1], und erläutern Sie die Definition und Eigenschaften der Stringklammer von Chas und Sullivan. [CS, S.19-20], [CS2]
- (9) **Die Goldman-Turaev Lie-Bialgebra von Kurven auf Flächen** Goldman und Turaev haben eine Lie-Bialgebra-Struktur auf den freien Homotopieklassen von Kurven auf einer Fläche definiert, welche eine wichtige Inspiration für Chas und Sullivan lieferte. Erläutern Sie uns diese Konstruktion. [T, Teile von §2,7,8]
- (10) **Hochschild-(Ko)Homologie I: Grundlagen** Definieren Sie Hochschild- und zyklische (Ko)Homologie assoziativer Algebren und stellen Sie uns einige Beispiele und Grundeigenschaften vor [Lo, Teile aus 1.1,1.3,2.1,2.4]. Da wir später oft in Charakteristik null arbeiten werden, ist es wichtig, dass Sie uns erläutern, wie sich zyklische (Ko)Homologie in diesen Situationen definieren läßt.
- (11) **Hochschild-(Ko)Homologie II: simpliziale Techniken** Definieren Sie, was simpliziale Objekte sind und behandeln Sie speziell den Fall simplizialer Moduln. Stellen Sie uns das Konzept zyklischer Objekte und Moduln vor und zeigen Sie, dass man Hochschild und zyklische Homologie über simpliziale bzw. zyklische Moduln definieren kann [Lo, 1.6,2.5].

- (12) **Hochschild-(Ko)Homologie III:  $\mathbb{S}^1$ -äquivariante Theorie** Simpliciale und zyklische Mengen besitzen geometrische Realisierungen. Die geometrische Realisierung einer zyklischen Menge besitzt in natürlicher Weise eine Operation der Gruppe  $\mathbb{S}^1$ . Stellen Sie den Zusammenhang zwischen zyklischer Homologie und  $\mathbb{S}^1$ -äquivarianter Homologie dar [Lo, 7.1,7.2].
- (13) **Hochschild-Homologie und freie Schleifenräume** Stellen Sie uns die Resultate von Goodwillie und Jones vor, die die (Ko)Homologie freier Schleifenräume mit Hochschild (Ko)Homologie und die  $\mathbb{S}^1$ -äquivariante (Ko)Homologie freier Schleifenräume mit zyklischer (Ko)Homologie in Beziehung setzen. Erläutern Sie uns die Beweisstrategien [Lo, 7.3], [G], [J].
- (14) **Das Chas-Sullivan Produkt, algebraisch** Auf Hochschild Kohomologie gibt es ein natürliches Produkt, das cup-Produkt. Dieses entspricht unter dem Isomorphismus zwischen der Hochschild-Kohomologie der Koketten einer Mannigfaltigkeit und der Homologie ihres freien Schleifenraums dem Chas-Sullivan Produkt. Stellen Sie uns die algebraische Seite vor und erläutern Sie uns Cohen und Jones' Resultat, das diesen Isomorphismus als Isomorphismus von Gerstenhaber-Algebren identifiziert (ohne Beweis) [CJ, F, CHV, A].

Der Anfang des Buches [CHV] oder die Besprechung [Lat] können als Überblick über das Thema dienen. Die Artikel [A, C, F] und [M] stellen wir Ihnen zur Verfügung.

#### REFERENCES

- [A] Abbaspour, H., On algebraic structures of Hochschild complex, preprint
- [AP] Allday, C.; Puppe, V., Cohomological methods in transformation groups, Cambridge Studies in advanced mathematics 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, XI+470 pp.
- [BT] Bott, Raoul; Tu, Loring W., Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xiv+331 pp.
- [CHV] Cohen, Ralph L.; Hess, Kathryn; Voronov, Alexander A., String topology and cyclic homology. Lectures from the Summer School held in Almeria, September 16–20, 2003. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. viii+163 pp.
- [CS] Chas, Moira; Sullivan, Dennis, String Topology, [arXiv:math.GT/9911159](https://arxiv.org/abs/math/9911159)
- [CS2] Chas, Moira; Sullivan, Dennis, Closed string operators in topology leading to Lie bialgebras and higher string algebra, [arXiv:math/0212358](https://arxiv.org/abs/math/0212358)
- [C] Chataur, David, Basics on free loop spaces, preprint
- [CJ] Cohen, Ralph L.; Jones, John D. S., A homotopy theoretic realization of string topology. Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 773–798.
- [F] Félix, Yves, Basic rational string topology, preprint.
- [FOT] Félix, Y.; Oprea, J., Tanré, D., Algebraic Models in Geometry, Oxford Graduate Texts in Mathematics 17, Oxford University Press, Oxford, 2008, xiii+460 pp.
- [G] Goodwillie, Thomas G. Cyclic homology, derivations, and the free loop space. Topology 24 (1985), no. 2, 187–215.
- [J] Jones, John D. S., Cyclic homology and equivariant homology. Invent. Math. 87 (1987), no. 2, 403–423.
- [McC] McCleary, John, A user's guide to spectral sequences. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xvi+561 pp.
- [M] Menichi, Luc, Rational homotopy – Sullivan models, preprint.
- [Lat] Latschev, J., Besprechung von [CHV] in Bull. AMS, <http://www.ams.org/journals/bull/2010-47-04/S0273-0979-09-01265-8/S0273-0979-09-01265-8.pdf>
- [Lau] Laudanbach, F., A note on the Chas-Sullivan product, [arXiv:0903.2801](https://arxiv.org/abs/0903.2801)
- [Lo] Loday, Jean-Louis, Cyclic homology. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xx+513 pp.
- [T] Turaev, V.G., Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6, 635–704.