(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien U, V und W K-Vektorräume mit $\dim_K(U) = 2$, $\dim_K(V) = 5$ und $\dim_K(W) = 3$. Es sei U ein Untervektorraum von V. Kreuzen Sie korrekte Dimension an.

$\dim_K(V/U) =$	☐ 2	☒ 3	☐ 5	☐ 7
$\dim_K(V \oplus W) =$	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☒ 8
$\dim_K(V \otimes W) =$	☐ 3	☐ 5	☐ 8	☒ 15

1+1+1 Punkte

b) Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in GL_8(\mathbb{C}).$$

Dann ist das Minimalpolynom von A gleich

☐$(X-i)(X-\sqrt{2})$ ☐$(X-i)^3(X-\sqrt{2})^5$ ☒$(X-i)^3(X-\sqrt{2})^2$ ☐$(X-\sqrt{2})^4(X-i)^3$.

1 Punkt

c) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 2i \\ 3i & 0 & 4i & 5i \\ 9i & 0 & 11i & 13i \end{pmatrix}$ ist

☐0 ☐1 ☒2 ☐3 ☐4.

1 Punkt

d) Es sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 - iz_2$.

Dann hat der Kern von f die Dimension

☐0 ☐1 ☒2 ☐3.

1 Punkt

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^3.$$

Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Elemente des $\mathbb{R}^2$ notieren wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung f_1 sei die Inklusion $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_2 strecke die x_1-Achse mit dem Faktor π und spiegele die (x_2, x_3)-Ebene an der dortigen Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel $\theta \in [0, \pi)$.

Es sei $S_1 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $S_2 = (e_1, e_2, e_3)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

Es gilt $f_1(e_1) = e_1$, $f_1(e_2) = e_3$, daher ist $M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für f_2 ergibt sich $f_2(e_1) = \pi e_1$, $f_2(e_2) = \cos(2\theta) e_2 + \sin(2\theta) e_3$ und $f_2(e_3) = \sin(2\theta) e_2 - \cos(2\theta) e_3$ und folglich ist

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $M(f)$ ist das Produkt der beiden Matrizen, also

$$M(f) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante von f_2.

Die Determinante ist $\pi(-\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta)) = -\pi$.

(3) Untersuchen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & & = 1 \\ 3x_1 & +9x_2 & +10x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & 2x_2 & +7x_3 & +3x_4 & -x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +8x_2 & +12x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 1 \end{array}$$

mit Hilfe des Gaußalgorithmus auf Lösbarkeit.

Als erweiterte Matrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 12 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abziehen des 3- bzw. 2-fachen der ersten Zeile von der zweiten bzw. dritten ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zieht man nun die dritte von der vierten Zeile ab, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

und damit ist das System nicht lösbar, weil die Gleichung in Zeile 2 im Widerspruch zur Gleichung in Zeile 4 steht.

(4) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum über einem beliebigen Körper K und U_1, U_2 seien Untervektorräume von V. Formulieren und beweisen Sie die Dimensionsformel für $\dim_K(U_1 + U_2)$.

Die Dimensionsformel lautet

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2).$$

Beweis: Wähle eine Basis $B_0 = (u_1, \dots, u_k)$ von $U_1 \cap U_2$ und ergänze sie jeweils zu einer Basis $B_1 = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m)$ von U_1 und einer Basis $B_2 = (u_1, \dots, u_k, u_{m+1}, \dots, u_{m+n})$ von U_2. Ich behaupte, dass $B = (u_1, \dots, u_{m+n})$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Damit ist die Behauptung durch Abzählen der Basiselemente bewiesen.

a) Das Erzeugnis von B is $U_1 + U_2$:

Ist $u \in U_1 + U_2$, so können wir u schreiben als $u_1 + u_2$, wobei $u_i \in U_i$ liegt. Wir drücken u_1 als Linearkombination der Elemente von B_1 aus und u_2 als LK der Elemente von B_2 und das gibt eine Darstellung von u als LK der Elemente von B. Das zeigt $U_1 + U_2 \subset \mathrm{Span}_K(B)$.

Da alle u_i aus $U_1 + U_2$ sind, ist auch jede LK der Elemente aus B in $U_1 + U_2$, also $\mathrm{Span}_K(B) \subset U_1 + U_2$.

b) Lineare Unabhängigkeit:

Annahme $\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i u_i = 0$ für $\lambda_i \in K$. Dann ist

$$x := \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+m} u_{j+m} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i.$$

Damit gilt aber $x \in U_1 \cap U_2$ also $x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i$ für geeignete $\mu_i \in K$ und wir erhalten

$$0 = x - \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+m} u_{j+m} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i.$$

Da B_2 eine Basis von U_2 ist, müssen alle Koeffizienten null sein und damit ist $x = 0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$. Da B_1 eine Basis von B_1 ist, müssen auch diese Koeffizienten alle null sein und damit sind alle λ_i null.

(5) Es sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

a) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}$ invertierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort mittels eines Determinantenkriteriums.

Die Determinante der Matrix ist $\bar{2} + \bar{2} \neq \bar{0}$ und daher ist C invertierbar.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von C.

$$P_C(X) = (-X)((\bar{3} - X)(\bar{3} - X) - \bar{9}) - \bar{4}(\bar{2}(\bar{3} - X) - \bar{9}) - \bar{3} + \bar{3}X = -X^3 + X^2 + X - \bar{1}.$$

Als Nullstellen erhalten wir $\bar{1}$ und $\bar{-1} = \bar{4}$. Dies sind also die Eigenwerte von C.

(6) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung und f^* sei die zu f duale Abbildung. Beweisen Sie, dass gilt: $\mathrm{Bild}(f^*) = (\ker(f))^0$.

Beweis:

a) $\mathrm{Bild}(f^*) \subset (\ker(f))^0$:

Ist $\psi \in V^*$ von der Form $\psi = \varphi \circ f$ und ist v ein Element aus dem Kern von f, so ist

$$\psi(v) = \varphi(f(v)) = \varphi(0) = 0$$

und ψ ist ein Element im Annulator des Kerns.

b) $(\ker(f))^0 \subset \mathrm{Bild}(f^*)$:

Es sei ψ ein Element des Annulators und $B_0 = (v_1, \dots, v_k)$ sei eine Basis des Kerns von f. Wir ergänzen diese zu einer Basis $B = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ von V. Dann ist $\tilde{B} = (f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$ eine Basis des Bildes von f und wir können diese ergänzen zu einer Basis $(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n), u_1, \dots, u_\ell)$ von W. Wir definieren $\varphi \in W^*$ als $\varphi(f(v_i)) = \psi(v_i)$ und $\varphi(u_i) = 0$ und rechnen:

$$\psi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(v_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \psi(v_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \varphi(f(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(f(v_i)) = \varphi \circ f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)$$

und damit ist $\psi = \varphi \circ f = f^*(\varphi)$. Die Verkürzung der Summation im zweiten Schritt ist legitim, weil ψ im Annulator ist und die Expansion der Summe im vierten Schritt geht, weil die ersten v_i im Kern von f liegen.

(7) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U sei ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie, was der Quotientenvektorraum V/U ist: Geben Sie dazu die Menge V/U an und definieren Sie die Vektorraumstruktur auf V/U. Sie müssen nicht zeigen, dass diese wohldefiniert ist.

Wir definieren auf V eine Äquivalenzrelation, indem wir für v_1, v_2 aus V definieren:

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U.$$

Als Menge besteht V/U dann aus den Äquivalenzklassen. Für $v \in V$ bezeichne $[v]$ die Klasse von v. Dann ist die Vektorraumstruktur definiert als

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2], \ \lambda[v] := [\lambda v], \quad v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in K.$$

b) Es sei $f\colon V \to W$. Leiten Sie her, wann eine Faktorisierung von f über V/U existiert, d. h. wann eine lineare Abbildung $\bar{f}\colon V/U \to W$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f = \bar{f} \circ \pi$ gilt. Hierbei bezeichnet π die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/U$.

Behauptung: $\bar{f}$ existiert genau dann, wenn $U \subset \ker(f)$.

Beweis:

a) Existiert $\bar{f}$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$ und ist $u \in U$, so ist $f(u) = \bar{f} \circ \pi(u) = \bar{f}[u] = \bar{f}[0] = \bar{f} \circ \pi(0) = f(0) = 0$, also ist U im Kern von f enthalten.

b) Ist $U \subset \ker(f)$, so setzen wir $\bar{f}[v] = f(v)$ für $v \in V$. Wir müssen zeigen, dass $\bar{f}$ wohldefiniert ist, K-linear und dass es $f = \bar{f} \circ \pi$ erfüllt. Die K-Linearität von $\bar{f}$ folgt direkt aus der Definition.

Ist $[v_1] = [v_2]$, so ist $v_1 - v_2 \in U$, also $v_1 - v_2 = u$ für ein $u \in U$. Damit ist

$$\bar{f}([v_1]) - \bar{f}([v_2]) = \bar{f}([v_1 - v_2]) = \bar{f}[u] = \bar{f}[0] = 0$$

und somit ist $\bar{f}([v_1]) = \bar{f}([v_2])$.

Für $f = \bar{f} \circ \pi$ setzen wir ein:

$$\bar{f} \circ \pi(v) = \bar{f}[v] = f(v)$$

für alle $v \in V$ nach Definition und damit folgt die Behauptung.

(8) Es sei B die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von B ist $-(X-2)^3$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von B. Berechnen Sie *nicht* die Basiswechselmatrizen sondern leiten Sie lediglich her, wie die Jordannormalform von B aussehen muss.

Die Matrix $B - 2E_3$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat Rang 2 (die dritte Zeile ist das Negative der Zweiten; es gibt einen nichttrivialen 2-Minor). A priori kommen als Jordannormalformen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in Frage. Nur die letzte Matrix erfüllt die Rangbedingung und ist daher die Jordannormalform von B.

(9) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & (\frac{2}{9}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i) \\ 0 & -1 & 0 \\ (\frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}i) & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{C}).$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix unitär ist.

Dazu berechnen Sie $\bar{A}^t = A$ und $A^2 = E_3$. (NB: Die Matrix ist also hermitesch und wir wissen daher, dass die Eigenwerte reell sind.)

b) Das charakteristische Polynom der Matrix ist $-(X+1)^2(X-1)$. Bestimmen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren.

Für den Eigenwert -1 gibt es den offensichtlichen Eigenvektor $v_1 = e_2$. Um den zweiten zu finden, löst man das LGS $Ax = -x$ (mit $x = (z_1, z_2, z_3)^t$) und bekommt die Bedingung

$$\frac{10}{9} z_1 = -(\frac{2}{9}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i) z_3.$$

Setzt man $x_3 = 1$, dann erhält man $x_1 = -\frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2}i)$ und somit als Eigenvektor

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sei v_2 die Normierung von $\tilde{v}_2$, also $\frac{\sqrt{5}}{3}\tilde{v}_2$. (Viele haben die Normierung falsch berechnet! Schaun Sie das noch mal nach.)

Für den Eigenwert $+1$ bekommt man analog die Bedingung

$$(\frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}i) z_3 = \frac{10}{9} z_1$$

und für $z_1 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

Dieser steht natürlich senkrecht auf v_1 und v_2 und seine Normierung ist $v_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}\tilde{v}_3$. Dann ist (v_1, v_2, v_3) die gesuchte ON-Basis aus Eigenvektoren. 1 + 3 Punkte

(10) Orthonormalisieren Sie die Familie von Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^4$.

Der erste Vektor hat Norm 2, also halten wir als ersten Vektor

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

fest und berechnen

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\4\\-2\end{pmatrix} - \langle v_1, \begin{pmatrix}2\\4\\4\\-2\end{pmatrix}\rangle v_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\-4\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat Norm $\sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$, so dass $(v_1, \frac{1}{2\sqrt{6}}\tilde{v}_2)$ das gesuchte ON-System ist.

(11) Es sei V ein unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und f sei ein Endomorphismus von V.

a) Wann nennt man f selbstadjungiert?

Es bezeichne $\langle -, - \rangle$ das Skalarprodukt auf V. Dann heißt f selbstadjungiert, falls für alle v_1, v_2 aus V gilt, dass

$$\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle.$$

b) Wie ist die zu f adjungierte Abbildung, f^{ad}, definiert?

Es bezeichne Φ_V den kanonischen Isomorphismus $\Phi_V\colon V \to V^*$, $\Phi_V(v) = \langle -, \bar{v}\rangle$. Dann ist f^{ad} definiert als

$$f^{\text{ad}} = \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_V.$$

c) Beweisen Sie, dass V eine ON-Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von f besteht, falls f selbstadjungiert ist .

Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren, weil wir über $\mathbb{C}$ arbeiten. Es sei n die Dimension von V.

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_1).$$

Ohne Einschränkung sei $f \neq 0$ und $\lambda_1 \neq 1$; v_1 sei ein Eigenvektor zu λ_1. Dann folgt aus

$$\lambda_1\langle v_1, v_1\rangle = \langle f(v_1), v_1\rangle = \langle v_1, f(v_1)\rangle = \bar{\lambda}_1\langle v_1, v_1\rangle,$$

dass λ_1 reell ist. Dies gilt für alle Eigenwerte von f.

Setze $U = \text{Span}_{\mathbb{C}}(v_1)^{\perp}$.

Behauptung: U ist f-invariant.

Beweis: Es ist

$$\langle f(u), v_1\rangle = \langle u, f(v_1)\rangle = \lambda_1\langle u, v_1\rangle = 0$$

für alle $u \in U$. Aber $\lambda_1 \neq 0$ und daher ist $f(u) \in U$.

Die Dimension von U ist $n-1$ und wir können induktiv die Existenz einer ON-Basis aus Eigenvektoren für U annehmen: $(v_2, \dots, v_n)$ sei eine solche Basis. Dann ist

$$(\frac{v_1}{||v_1||}, v_2, \dots, v_n)$$

eine ON-Basis aus Eigenvektoren für V.