Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 9 Abgabetermin: Montag, 17. Juni 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

Aufgabe 41 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Das Symbol $\langle -, - \rangle$ bezeichne das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

	richtig	falsch
Es sei $\varnothing \neq M \subsetneq V$. Dann kann M^0 trivial sein.	☐	☐
Es sei $V = M(n \times n; K)$, dann ist $\beta(A, B) := \det(AB)$ eine symmetrische Bilinearform auf V.	☐	☐
Die Spur $\mathrm{tr}\colon \mathrm{End}_K(V) \to K$ ist eine K-Linearform auf $\mathrm{End}_K(V)$.	☐	☐
Für alle $n \geqslant 1$ und jedes $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ ist $\beta(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ eine symmetrische Bilinearform $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.	☐	☐
Es sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann definiert die Abbildung $x \mapsto \langle x, x \rangle$ eine Linearform auf V.	☐	☐
Für alle $n \geqslant 1$ und jedes $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ ist $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\beta(x, y) = \langle x, (A + A^t)y \rangle$ eine symmetrische Bilinearform.	☐	☐

Aufgabe 42 Es sei $V = M(n \times n; K)$. Ist dann die Bilinearform $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ nicht-ausgeartet? 4 Punkte

Aufgabe 43 Es sei $V = \mathrm{Span}\{1, X, X^2, X^3, X^4\} \subset \mathbb{R}[X]$ und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\beta(p(X), q(X)) := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass β eine Bilinearform ist, stellen Sie die darstellende Matrix auf und entscheiden Sie, ob β symmetrisch und nicht-ausgeartet ist.

6 Punkte

Aufgabe 44 Betrachten Sie die Bilinearform auf K^n, $\sigma_p(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i$ und zeigen Sie,

a) dass σ_p symmetrisch ist und nicht-ausgeartet und

b) dass es für $p < n$ Vektoren $x \neq 0$ gibt mit $\sigma_p(x, x) = 0$.

c) Zeichnen Sie für $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $p = 1$ und $p = 2$ die Niveaulinien

$$N(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \sigma_p(x, x) = t\}$$

für $t = -1, 0$ und 1.

4+4+4 Punkte

Aufgabe 45 Es sei K ein Körper, in dem $2 \neq 0$ gilt. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und β sei eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeigen Sie, dass dann eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V existiert, so dass die darstellende Matrix von β bezüglich $\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist, also $\beta(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

6 Punkte