Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 8 Abgabetermin: Montag, 10. Juni 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

Aufgabe 36 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Es seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung.

	richtig	falsch
Ist U ein Untervektorraum von V, dann ist V^* immer ein Untervektorraum von U^*.	☐	☐
Wenn f ein Monomorphimus ist, dann auch immer f^*.	☐	☐
f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.	☐	☐
Wenn f ein Epimorphimus ist, dann auch immer f^*.	☐	☐
f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.	☐	☐
Ist U ein Untervektorraum von V, so gilt immer $(U^0)^0 \cong U$.	☐	☐

Aufgabe 37 Es sei $F_{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, also $F_{\mathbb{R}} = \prod_{\mathbb{N}_0} \mathbb{R}$. Konstruieren Sie ein Element in $F_{\mathbb{R}}^{**}$, das nicht im Bild von $i_{F_{\mathbb{R}}}$ ist.

6 Punkte

Aufgabe 38

a) Es sei U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V. Beschreiben Sie den Dualraum des Quotientenvektorraums V/U durch eine Teilmenge der Linearformen auf V.

b) Beschreiben Sie den Dualraum einer direkten Summe von Vektorräumen $\bigoplus_{i\in I} U_i$ durch die Dualräume der U_i. Hierbei kann I durchaus eine unendliche Menge sein.

4+4 Punkte

Aufgabe 39 Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n über K und U_1, U_2 seien Untervektorräume von V.

Drücken Sie $(U_1 \cap U_2)^0$ und $(U_1 + U_2)^0$ durch U_1^0 und U_2^0 aus.

6 Punkte

Aufgabe 40 Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

b) Es sei nun $V = W$. Ist dann die Abbildung

$$\mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V^*)$$

ein Isomorphismus von K-Algebren, wenn wir die Komposition von Abbildungen als Multiplikation verwenden?

4+4 Punkte