# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

**Blatt 6** Abgabetermin: Montag, 27. Mai 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

**Aufgabe 26** Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

| | richtig | falsch |
|---|---|---|
| Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind ähnlich. | ☐ | ☐ |
| Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sind ähnlich. | ☐ | ☐ |
| Der Eigenraum zum Eigenwert 2 der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat Dimension 1. | ☐ | ☐ |
| Der Eigenraum zum Eigenwert 2 der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat Dimension 2. | ☐ | ☐ |
| Es seien $f, g \in \mathrm{End}_K(K^n)$, $n > 1$. Sind $f$ und $g$ diagonalisierbar, so auch immer $f + g$. | ☐ | ☐ |
| Es seien $f, g \in \mathrm{End}_K(K^n)$, $n > 1$. Sind $f$ und $g$ diagonalisierbar, so auch immer $f \circ g$. | ☐ | ☐ |

**Aufgabe 27** Entscheiden Sie, welche quadratischen $2 \times 2$-Matrizen über $\mathbb{F}_2$ charakteristische Polynome haben, die in Linearfaktoren zerfallen, und bestimmen Sie deren Jordannormalformen.

6 Punkte

**Aufgabe 28** Einmal im Leben muss man so etwas ausrechnen...

Gegeben sei die Matrix $A$ über $\mathbb{Q}$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie über das charakteristische Polynom die Eigenwerte und leiten Sie über die Argumentation der Dimension der Eigenräume und über das Minimalpolynom her, welche Jordannormalformen für $A$ nicht in Frage kommen.

6 Punkte

**Aufgabe 29** Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Wir betrachten die Exponentialabbildung

$$e^{(-)} \colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K),$$

die eine Matrix $A$ abbildet auf $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Diejenigen, die Analysis hören, machen sich bitte kurz klar, dass diese Reihe konvergiert – die anderen glauben mir das.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für alle $B \in GL_n(K)$ ist $e^{(BAB^{-1})} = B(e^A)B^{-1}$ und falls $A, A'$ in $M(n \times n; K)$ kommutieren, so gilt

$$e^{(A+A')} = e^A e^{A'}.$$

b) Ist $J(\lambda; m)$ ein Jordanblock mit $\lambda \in K$, so ist die Jordan-Normalform von $e^{J(\lambda;m)}$ gleich $J(e^\lambda; m)$.

c) Folgern Sie aus c), dass die Determinante von $e^A$ gleich $e^{tr(A)}$ ist. Insbesondere ist die Exponentialabbildung eine Abbildung

$$e^{(-)}\colon M(n \times n; K) \longrightarrow GL_n(K).$$

4+4+4 Punkte

**Aufgabe 30** Im Folgenden seien $f$ und $g$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums für einen Körper $K$. Ein Endomorphismus heißt nilpotent, falls es eine natürliche Zahl $n$ gibt, so dass die $n$-fache Iteration des Endomorphismus trivial ist.

Widerlegen oder beweisen Sie die Aussagen *Sind $f$ und $g$ nilpotent, so auch immer $f \circ g$ und $f + g$.*

4 Punkte